



UNIVERSITY OF NAPLES **FEDERICO II** 1224 A.D.

Gasdinamica

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

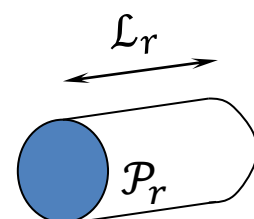
Versione del 12.3.2021

Richiami

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dV + \int_A \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \int_A p \underline{n} dA - \int_A \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dA = \int_A \rho \underline{g} dV$$

In un **condotto** di lunghezza $\mathcal{L}_r$, perimetro $\mathcal{P}_r$ ed area di passaggio A_r il rapporto tra le **forze viscosse** (presenti essenzialmente sulla superficie **laterale** del condotto) e le **forze d'inerzia** (presenti solo sulla superficie **permeabile** del condotto) risulta pari a:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r}{A_r} \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4 \mathcal{L}_r \frac{\mathcal{P}_r}{4 A_r} \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$$



dove:

$$D_r = \frac{4 A_r}{\mathcal{P}_r}$$

Diametro idraulico (o equivalente)

$$f = \frac{\tau_r}{\frac{1}{2} \rho_r V_r^2}$$

Coefficiente d'attrito

Per valori del coefficiente di attrito **molto bassi**, è possibile trascurare gli sforzi viscosi solo se il prodotto $4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$ è piccolo.

Richiami

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$$

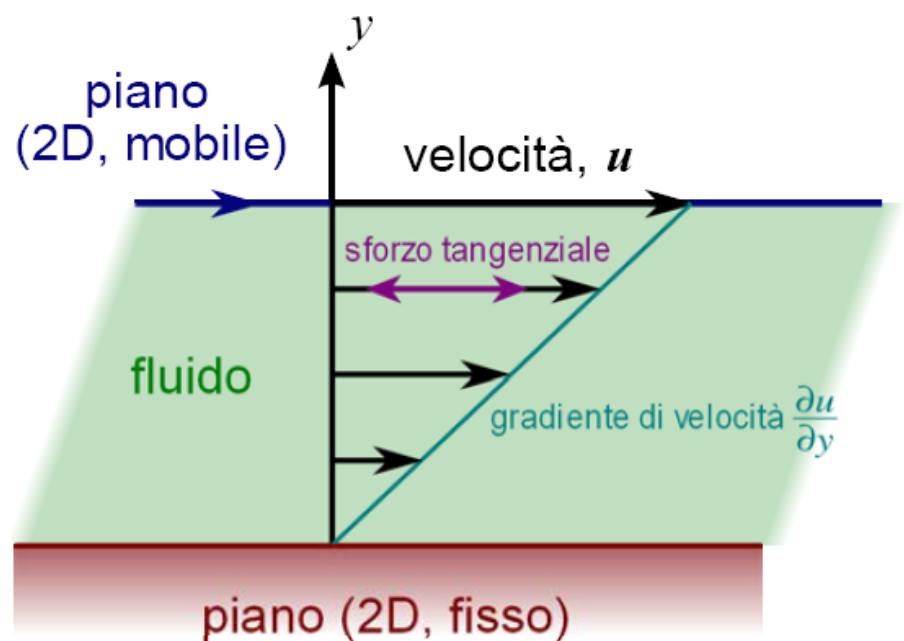
Ricordando che: $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{f}{2} = \frac{\mu \frac{V_r}{D_r}}{\rho_r V_r^2} = \frac{\mu}{\rho_r D_r V_r} = \frac{1}{Re}$$

Quindi:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{1}{Re}$$

Per valori del numero di Reynolds **molto grandi** non è sempre possibile trascurare gli sforzi viscosi infatti è necessario che il prodotto $4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{1}{Re}$ sia piccolo.



Richiami: conservazione della massa

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

La portata di massa

$$\dot{m} = \rho V A$$

è costante.

La relazione è applicabile ad una qualunque sezione retta del condotto e indicando con **G il flusso di massa** si può scrivere in ogni sezione:

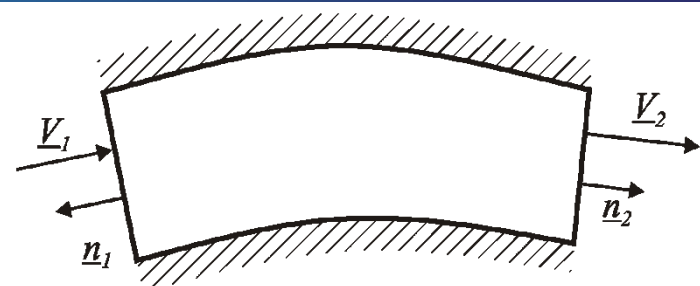
$$\dot{m} = \rho V A = G A = cost$$

Differenziando logaritmicamente si ha:

$$\ln \rho V A = \ln \rho + \ln V + \ln A = \ln cost$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

che rappresenta l'equazione della conservazione della **massa in forma differenziale** per un condotto nel quale un moto stazionario può essere considerato unidimensionale in qualunque sezione retta dello stesso,



Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Che può anche essere messa nella forma:

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Dove la grandezza fra in parentesi è **l'impulso specifico** I :

$$I = p + \rho V^2$$



Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

In forma differenziale proiettando sull'asse del condotto si ha:

$$-\cancel{\dot{m}V} + \dot{m}(\cancel{V} + dV) - \cancel{pA} + (\cancel{p} + dp)(\cancel{A} + dA) + \cancel{dS_x} = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

La spinta elementare è: $dS_x = -pdA + \tau_p \mathcal{P} dx$

Il termine: $dx \underline{g} \cdot \underline{i} = -gdz$

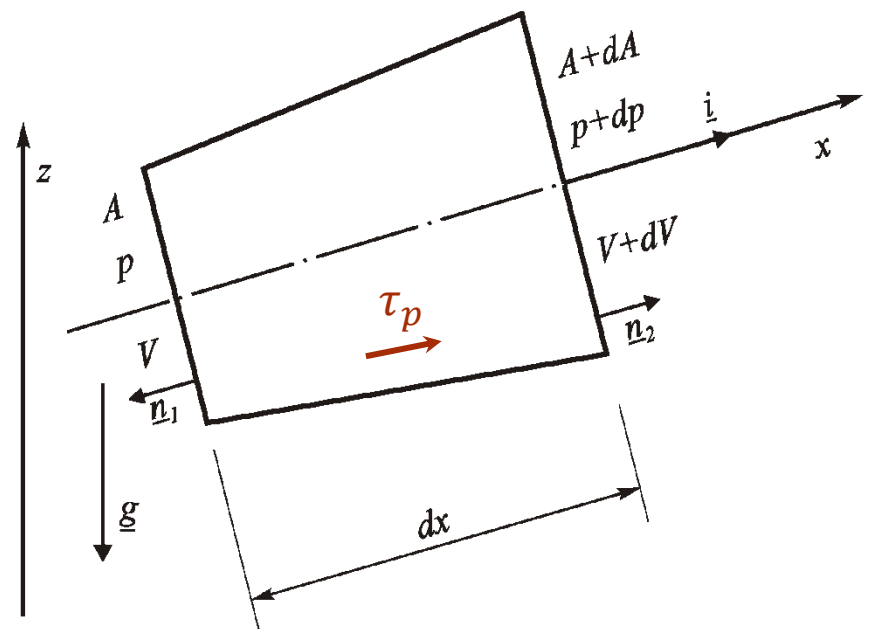
$$\cancel{\dot{m}dV} + \cancel{pdA} + dpA + \cancel{dpdA} - \cancel{pdA} + \tau_p \mathcal{P} dx = -\rho A g dz$$

dividendo per A:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{\mathcal{P}}{4A} dx + \rho g dz = 0$$

Ricordando la definizione di D_e , il **bilancio di quantità di moto in forma differenziale** diventa:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} + \rho g dz = 0$$



Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{\mathcal{P}}{4A} dx + \rho g dz = 0$$

Nell'ipotesi in cui lo sforzo tangenziale alla parete sia trascurabile (e.g. $Re \rightarrow \infty$) si trova l'equazione di **Bernoulli** in forma **differenziale**:

$$\rho V dV + dp + \rho g dz = 0$$

Integrando questa equazione, nell'ipotesi in cui il moto sia incompressibile ($\rho = cost$) si ritrova **l'equazione di Bernoulli**:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p + \rho g z = cost$$



Richiami: conservazione dell'energia

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

dove nell'ipotesi di trascurabilità degli effetti gravitazionali **l'entalpia specifica totale o di ristagno** è:

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

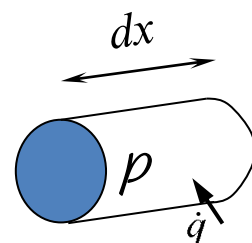
Per moto **anergodico** in forma **differenziale** si ha: $\dot{m} dH = d\dot{Q}$

Supponendo che la condizione al contorno sia di flusso termico **costante** $\dot{q}$ sulla superficie del condotto:

$$\dot{m} dH = \rho V A dH = d\dot{Q} = \dot{q} \mathcal{P} dx$$

Dividendo per A e ricordando la definizione di D_e :

$$\rho V dH = 4\dot{q} \frac{\mathcal{P}}{4A} dx = 4\dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

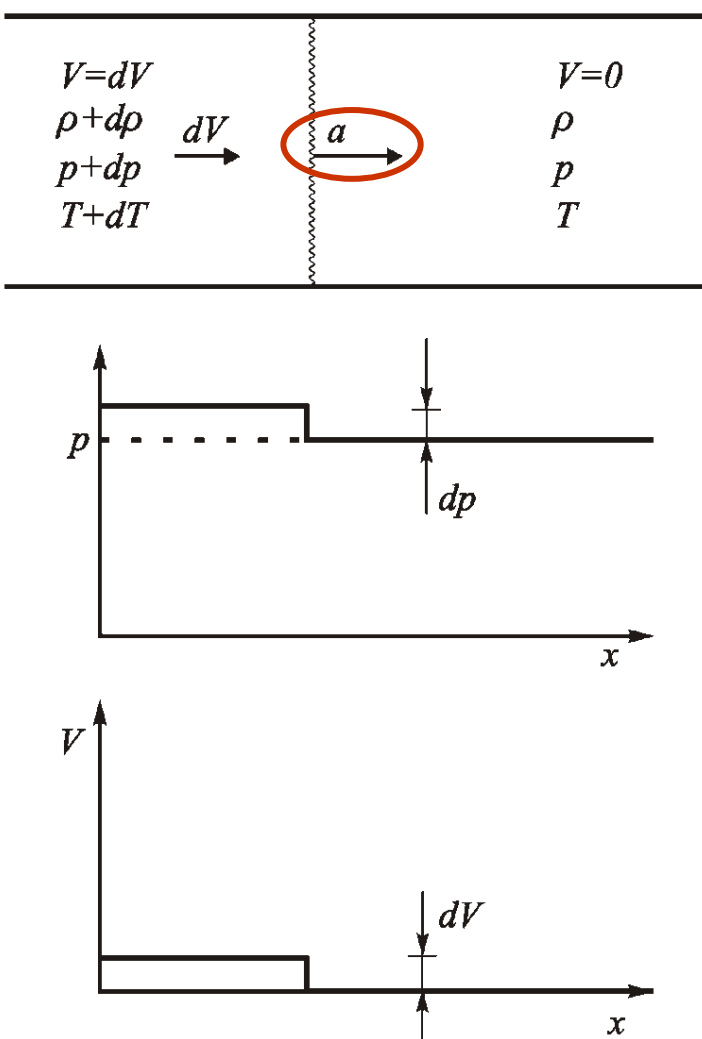


Che è l'equazione di **conservazione dell'energia** per moti **anergodici, stazionari ed uni dimensionali**.



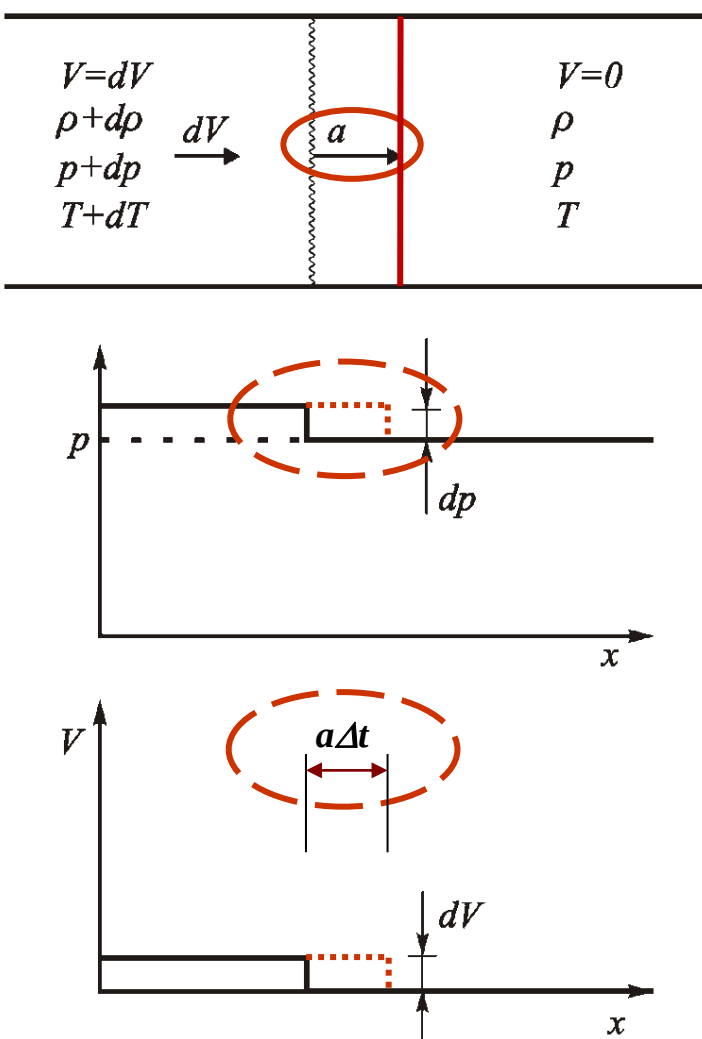
Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete.



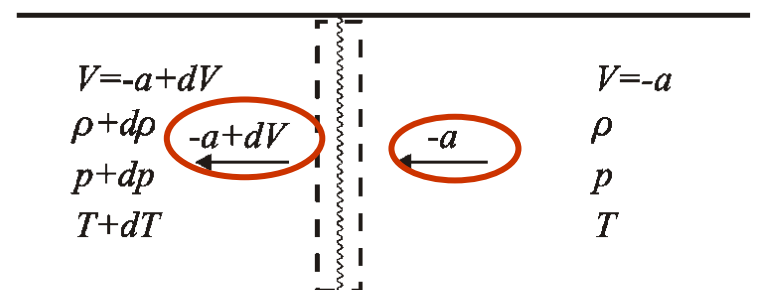
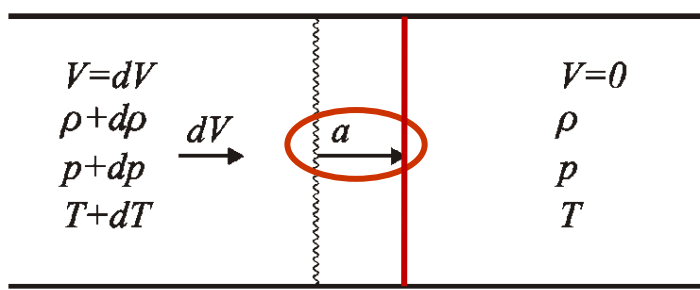
Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete. Dopo il tempo Δt :

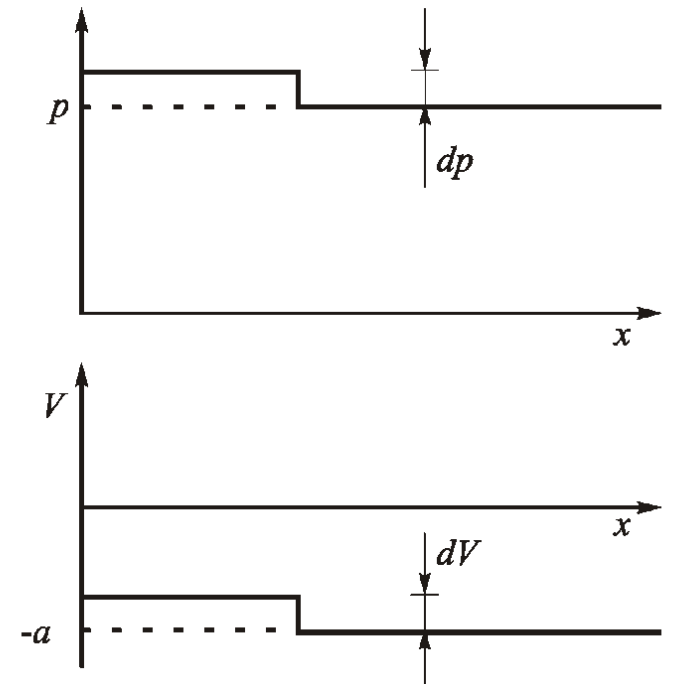


Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Nel un **nuovo sistema di riferimento**, avente velocità a rispetto al primo, il disturbo di pressione si può fermare.



Per fermare l'onda, occorre dare a tutto il sistema una **velocità $-a$** e cioè muoversi con l'onda.



Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

L'equazione di **conservazione della massa**, per moti stazionari, in forma differenziale ($dA=0$):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

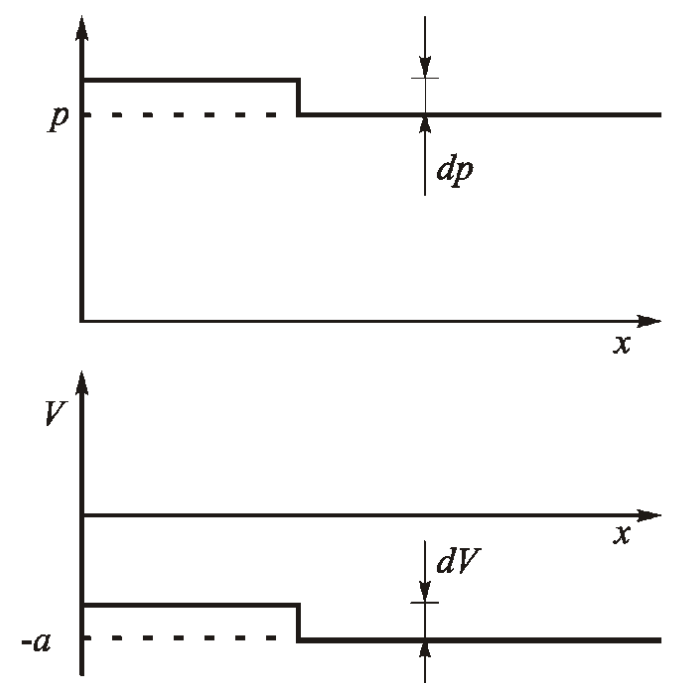
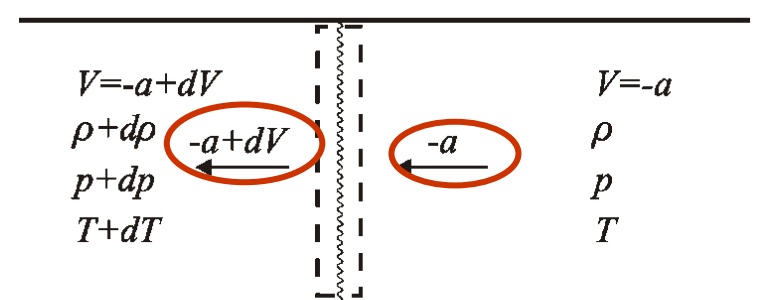
Tenuto conto che $V = -a$:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{-a} = 0 \rightarrow dV = a \frac{d\rho}{\rho}$$

Trascurando gli effetti gravitazionali il **bilancio della quantità di moto**:

$$dp + \rho V dV = 0 \rightarrow dp = \rho a dV$$

Per onde di **compressione** ($dp > 0$ e $d\rho > 0$) si ha $dV > 0$; quindi il fluido viene **accelerato** nella stessa **direzione** di propagazione **dell'onda**.



Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

$$dV = a \frac{d\rho}{\rho} \quad dp = \rho a dV$$

Sostituendo si trova:

$$dp = \rho a^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **newtoniana (isoterma)** è :

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T = [RT]_{gas\ perfetto}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **laplaciana (isoentropica)** è :

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = [\gamma RT]_{gas\ perfetto}$$

Non si è fatta alcuna ipotesi sul modello di gas.



Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un aneddoto riportato nella Enciclopedia Britannica dimostra quanto siano **piccoli i disturbi di pressione**.

Se in una notte di agosto si ha la ventura di passeggiare in aperta campagna, si può sentire a lungo un **grillo cantare**. In effetti è dimostrato che, in assenza di rumori di fondo, si può ascoltare il canto del grillo a **più di un chilometro di distanza**.

Ciò significa che il grillo mette in movimento almeno tutta l'aria racchiusa in una **semisfera di raggio un chilometro**.

Questa semisfera ha un **volume** $2\pi R^3/3$ che risulta di circa $2 \cdot 10^9 m^3$.

Poiché la densità dell'aria alla temperatura di $20^\circ C$ (siamo in **agosto**) ed alla pressione atmosferica è pari a circa $1.2 kg/m^3$, risulta che il grillo mette in movimento con il suo canto una massa pari a $2.4 \cdot 10^9 kg$ di aria (due milioni quattrocentomila tonnellate).

I **disturbi di pressione** devono essere decisamente **piccoli** poiché la potenza sonora emessa dal violino del grillo è necessariamente limitata



Condizioni di ristagno in un fluido

La condizione di **ristagno** (detta anche **totale**) di una particella di fluido in moto è definita come la **condizione termodinamica** che *la particella raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione **adiabatica**, **anergodica** e **isoentropica** (omoenergetica e isoentropica).*

La condizione di ristagno non è associata né alla condizione di moto quasi **unidimensionale**, né a quella di moto quasi **stazionario**.

Le condizioni di ristagno non rappresentano condizioni che debbano essere necessariamente presenti nel campo di moto oggetto di studio.

Ad ogni stato termofluidodinamico del fluido è associato **uno stato di ristagno** e, ovviamente, non è vero il contrario.

Lo stato **termofluidodinamico** di un sistema semplice è caratterizzato da **tre** parametri (due **termodinamici** più uno **cinetico**).

Lo stato di **ristagno** invece è uno caratterizzato da **solo due** parametri indipendenti tra loro (manca il **cinetico**).

Condizioni di ristagno in un fluido

Dalla definizione di **condizione di ristagno**, applicando l'equazione di conservazione dell'**energia**:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

Considerando il moto **omoenergetico** e **anergodico**, quando si rallenta un fluido, avente velocità V e livello entalpico h , sino a velocità nulla si raggiunge **l'entalpia totale, o di ristagno**:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

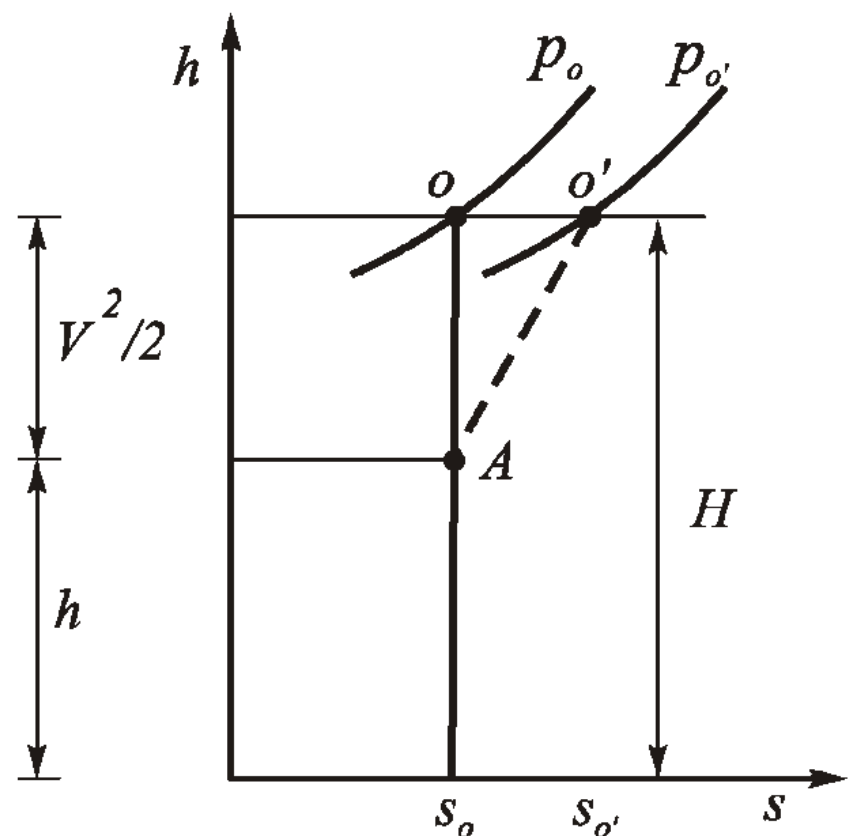
In generale, le **condizioni statiche** di una corrente sono quelle misurate con uno strumento che si **muove alla velocità del fluido**, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo.

Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

Rallentando il fluido, anche con una trasformazione **non isoentropica** (punto o' dove $h_o = h_{o'}$), si raggiunge comunque l'entalpia di ristagno.

La condizione di **isoentropicità**, imposta nella definizione di condizione di ristagno è **necessaria** per poter gli altri parametri termodinamici di ristagno (e.g. $p_o \neq p_{o'}$).



Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

Per un gas più che perfetto si ha: $h = c_p T$; $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$; $a^2 = \gamma R T$:

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} R T = \frac{a^2}{\gamma-1}$$

da cui:

$$H = h \left(1 + \frac{V^2}{2h} \right) = h \left(1 + \frac{V^2}{2 \frac{a^2}{\gamma-1}} \right) = h \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a^2} \right)$$

ed infine:

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

L'importanza **relativa** del termine **cinetico** rispetto a quello relativo all'**entalpia sensibile**, è misurata dal **quadrato del numero di Mach**.



Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

In una corrente a basso **numero di Mach** ($M \ll 1$) l'entalpia di **ristagno** praticamente **coincide** con quella **sensibile**.

Ad esempio in una corrente di aria ($\gamma = 1.4$) a **$M = 0.1$** (che a temperatura ambiente corrisponde ad una velocità di circa 120 km/h), l'entalpia di ristagno è superiore a quella sensibile di appena 0.002 (cioè il **2 per mille**). Correnti di questo tipo vengono dette **microsoniche**, o **iposoniche**

In una corrente ad elevato **numero di Mach**, l'entalpia di **ristagno** risulta di gran lunga **maggiore** di quella **sensibile**, il cui contributo potrebbe essere, al limite, trascurato.

Ad esempio in una corrente di aria a $M = 10$ l'entalpia sensibile rappresenta appena il **4,8%** dell'entalpia totale ($1/21$). Correnti di questo tipo vengono dette **ipersoniche**.



Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2}$$

Quindi:

$$M^2 = \frac{V^2/2}{h(\gamma - 1)/2}$$

Il **quadrato** del numero di **Mach** è **proporzionale** al rapporto tra l'**energia cinetica ordinata** $V^2/2$ e quella **disordinata** h .



Condizioni di ristagno in un fluido

Per gas più che perfetto la **temperatura** di **ristagno** o **totale** si ricava immediatamente dalla:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2} = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

dividendo per il calore specifico:

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

La temperatura T è detta temperatura **statica**, o **sensibile**, della corrente. Ed è quella misurata da un termometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**.



Condizioni di ristagno in un fluido

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Ricordando che:

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} ; \quad \frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Si ottengono la **densità** e **pressione** di **ristagno**, o **totale**:

$$\rho_o = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} ; \quad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Anche la pressione (e idealmente la densità) **statica** è quella misurata da un manometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	$v(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



Condizioni di ristagno in un fluido

T_o/T = (1 + (gamma-1)/2 * M^2)

rho_o = rho * (1 + (gamma-1)/2 * M^2)^(1/(gamma-1)) ; p_o = p * (1 + (gamma-1)/2 * M^2)^(gamma/(gamma-1))

Queste funzioni sono tabellate:

Moto Isentropico (gamma=1.4)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali (gamma=1.4)					
M	p/p_o	rho/rho_o	T/T_o	rho*V^2/2p_o	A/A*	M*	nu(deg)	mu(deg)	M_2	p_2/p_1	rho_2/rho_1	T_2/T_1	p_o2/p_o1	p_1/p_o2
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Moto Isentropico			
M	p/p_o	rho/rho_o	T/T_o
1.00	.5283	.6339	.8333
1.01	.5221	.6287	.8306
1.02	.5160	.6234	.8278
1.03	.5099	.6181	.8250
1.04	.5039	.6129	.8222



Ellisse delle velocità

In condizioni **omoenergetiche** e stazionarie, la massima velocità raggiungibile da un gas che possiede un'entalpia totale pari ad H, è detta **velocità limite** (o massima) ed si ricava semplicemente imponendo h = 0 nella:

H = h + V^2/2 -> V_l = sqrt(2H)

Come già visto h = a^2/(gamma-1) e la **velocità del suono** (in condizioni) di **ristagno** è:

a_o^2 = (gamma - 1)h_o = (gamma - 1)H

Quindi sostituendo le relazioni precedenti si ha:

H = h + V^2/2 -> 1 = h/H + V^2/(2H) -> a_o^2/a_l^2 + V^2/V_l^2 = 1

Che è l'equazione di un'**ellisse** in forma canonica.



Ellisse delle velocità

$$\frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1$$

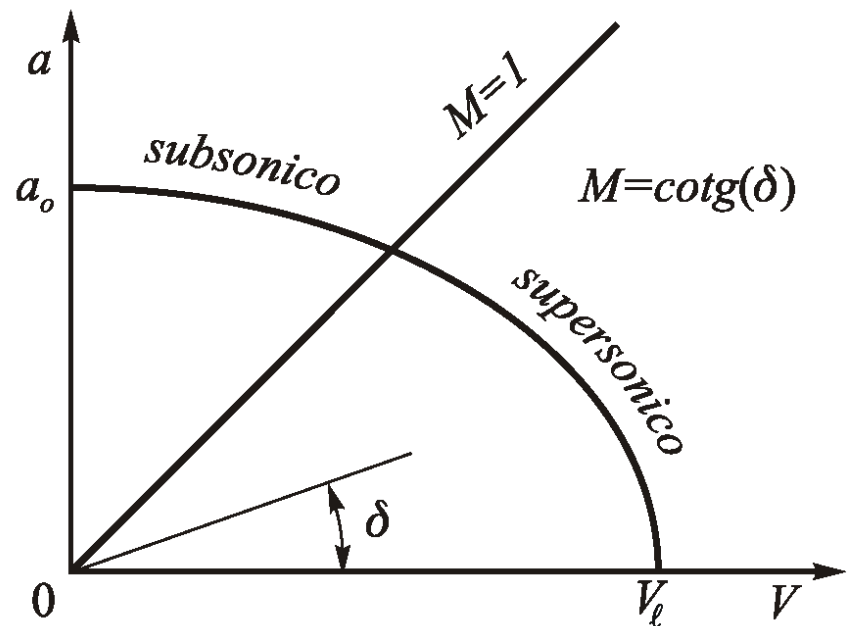
Questa equazione rappresenta la cosiddetta **ellisse delle velocità**.

Si ritrova ovviamente che:

- per $V = 0 \rightarrow a = a_o$
- per $a = h = 0 \rightarrow V = V_l$

È interessante notare come **all'aumentare della velocità** V , la velocità del **suono** a **diminuisca** e viceversa.

Nella figura è anche indicata la bisettrice del quadrante, di equazione $V = a$, corrispondente alle **condizioni soniche** per le quali si ha $M = 1$.



Ellisse delle velocità

$$H = h + \frac{V^2}{2}; \quad h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

Per $M = 1$, la velocità del fluido V^* , coincide con quella del suono a^* e si ha:

$$H = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{V^{*2}}{2} = a^{*2} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) = a^{*2} \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \rightarrow a^{*2} = \frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

da cui ricordando che $V_l = \sqrt{2H}$; $a_o^2 = H(\gamma - 1)$:

$$a^* = V^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_l \sqrt{\frac{(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Le condizioni termofluidodinamiche corrispondenti a **$M = 1$** sono generalmente indicate con **l'apice (*)** e sono dette **condizioni critiche**.



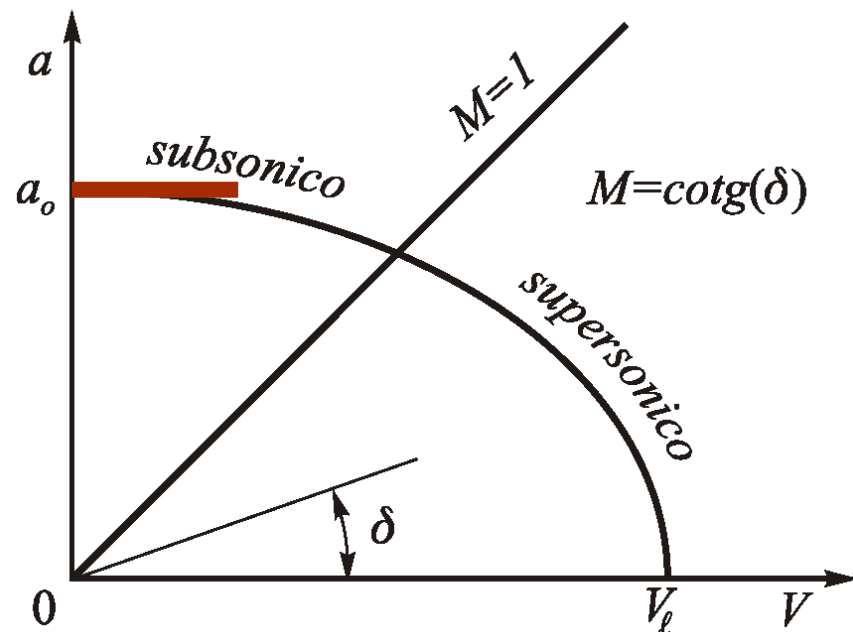
Ellisse delle velocità

Poiché $M = \frac{V}{a} = \cot \delta = 1/\tan \delta$, la zona dell'ellisse a sinistra della retta $M = 1$ corrisponde a condizioni di moto **subsonico** ($M < 1$) mentre quella a destra a moto **supersonico** ($M > 1$).

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle a .

Questa zona è caratterizzata da variazioni di **densità molto piccole** ed il **moto** si può considerare effettivamente **incompressibile**.



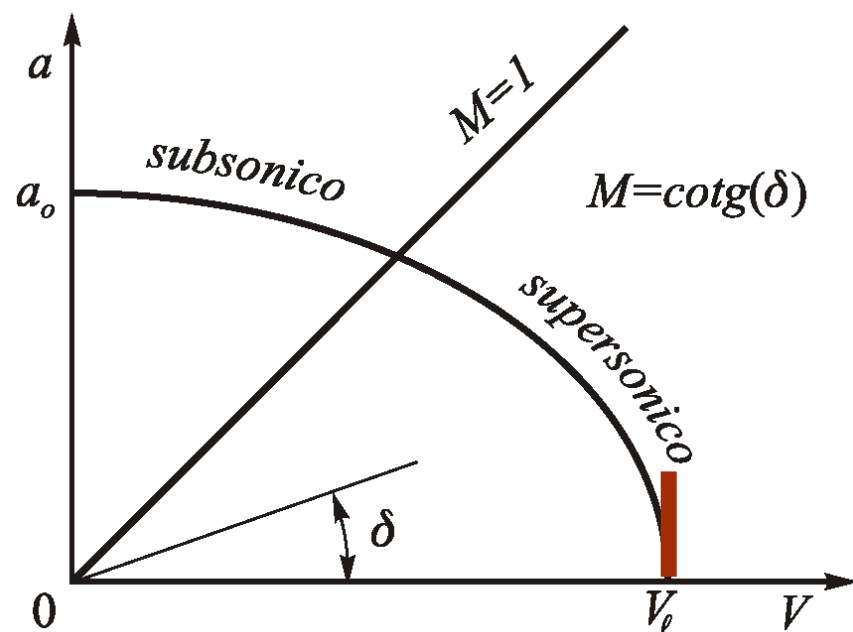
Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle a .
- valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico**, relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle V .

Questa zona è caratterizzata da valori dell'energia cinetica **ordinata** molto maggiori di quella **disordinata** h .

Nel caso di moto **ipersonico**, gli effetti di gas **reale** possono diventare rilevanti per cui l'ipotesi di modello di gas **più che perfetto** non sono verificate.

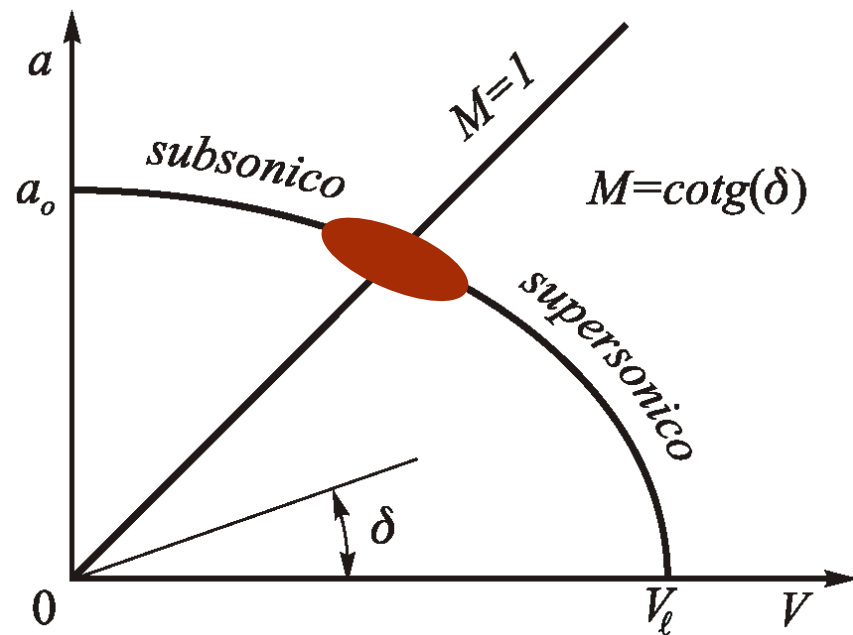


Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle a .
- valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico**, relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle V .

La zona a cavallo della retta $M = 1$ viene detta di moto **transonico**.



Condotti ad area variabile

Si consideri, ora, un moto quasi **unidimensionale**, quasi **stazionario**, **omoenergetico** e **isoentropico** attraverso un condotto ad **area variabile**, cioè il moto di un fluido attraverso un condotto che presenta variazioni della sua area trasversale.

L'equazione di conservazione della **massa**, e del bilancio della **quantità di moto** per moti stazionari, in forma differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad dp + \rho V dV = 0$$

Tenuto conto che per moto **isentropico** si ha $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$:

$$\frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{dp} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad \frac{dp}{\rho} = -V dV$$

Sostituendo si trova:

$$\frac{-V dV}{a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{-V^2 dV}{a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} \rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$



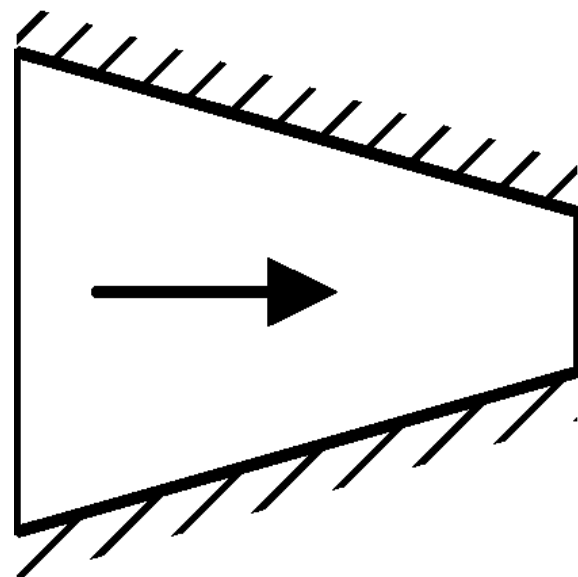
Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area**, non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **convergente** $dA < 0$ il fluido **tende** a **$M = 1$** infatti:

- in moto **subsonico** ($M^2 - 1 < 0$) il fluido **accelera** ($dV > 0$) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ($M^2 - 1 > 0$) il fluido **decelera** ($dV < 0$).



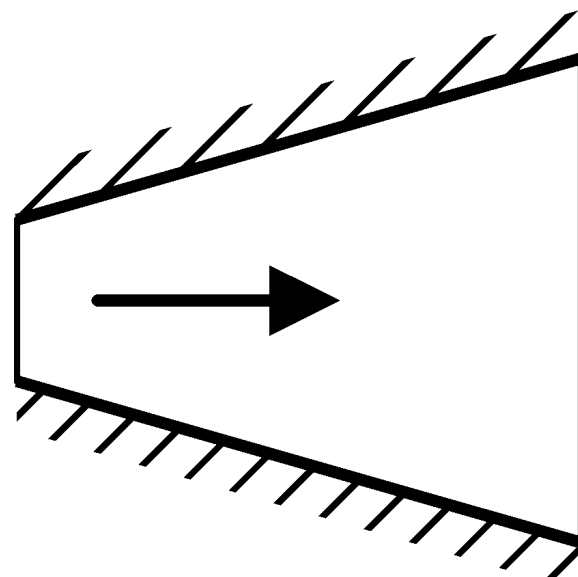
Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area**, non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **divergente** $dA > 0$ il fluido si **allontana** da **$M = 1$** infatti:

- in moto **subsonico** ($M^2 - 1 < 0$) il fluido **decelera** ($dV < 0$) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ($M^2 - 1 > 0$) il fluido **accelera** ($dV > 0$).

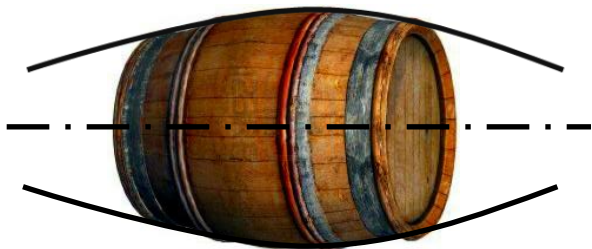
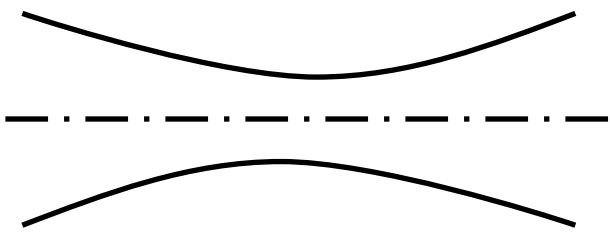


Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Se $M = 1$ allora $dA = 0$ e si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$. La sezione retta del condotto **deve avere** un **punto di stazionarietà** (minimo o massimo).

Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ($dA = 0$), quindi in un ugello **convergente-divergente**.



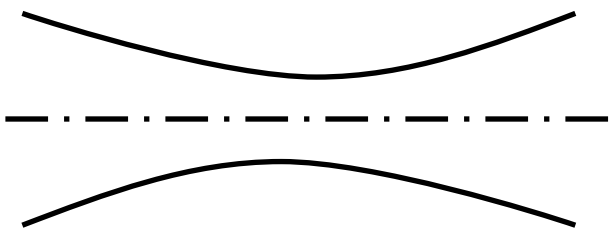
Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA = 0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.

Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Se $M = 1$ allora $dA = 0$ e si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$. La sezione retta del condott un **punto di stazionarietà** (minimo o massimo).

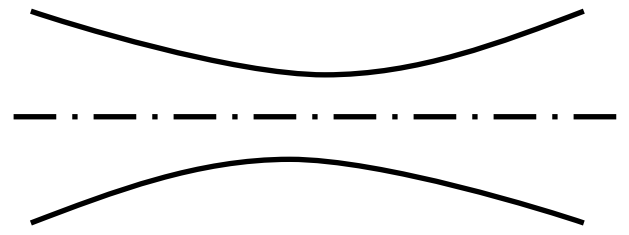
Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ($dA = 0$), quindi in un ugello **convergente-divergente**.



Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA = 0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.

Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$



La condizione $dA = 0$ (**gola del condotto**, per la quale l'area è minima) può comportare $dV \neq 0$ solo se $M = 1$, potendosi comunque avere, anche per $M = 1$, $dV = 0$.

Il punto $M = 1$ (che comporta) è un **punto di biforcazione** della soluzione e cioè del comportamento del fluido poiché questo può:

- passare da moto **subsonico a supersonico**, ovvero ritornare ancora subsonico
- passare da moto **supersonico a subsonico**, ovvero ritornare ancora supersonico;

In un condotto **convergente** ($dA < 0$), un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) **fino a $M = 1$** .



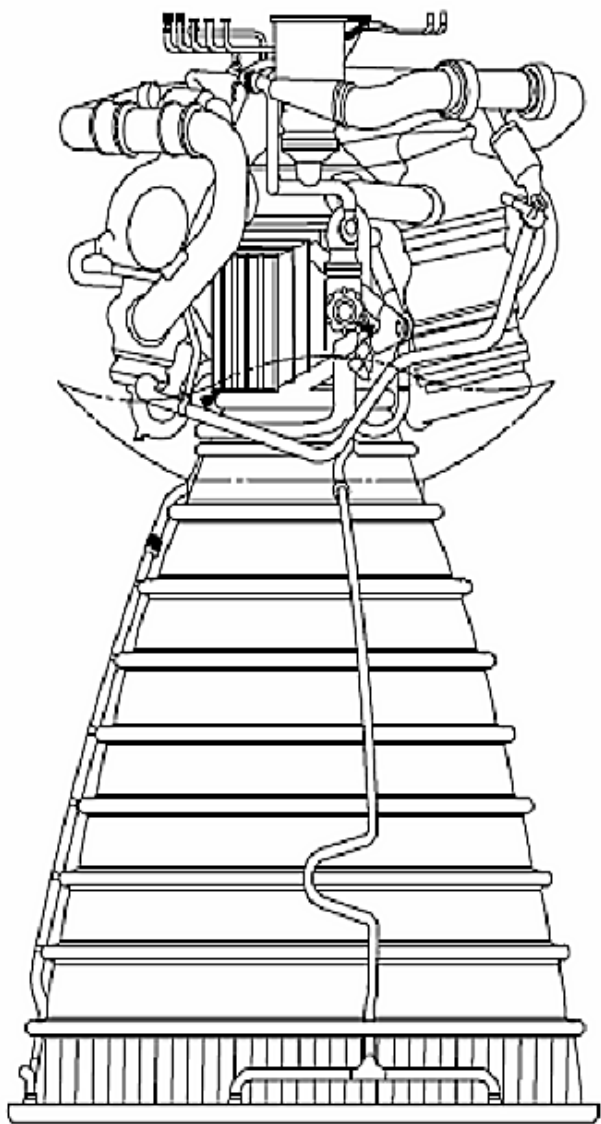
Condotti ad area variabile



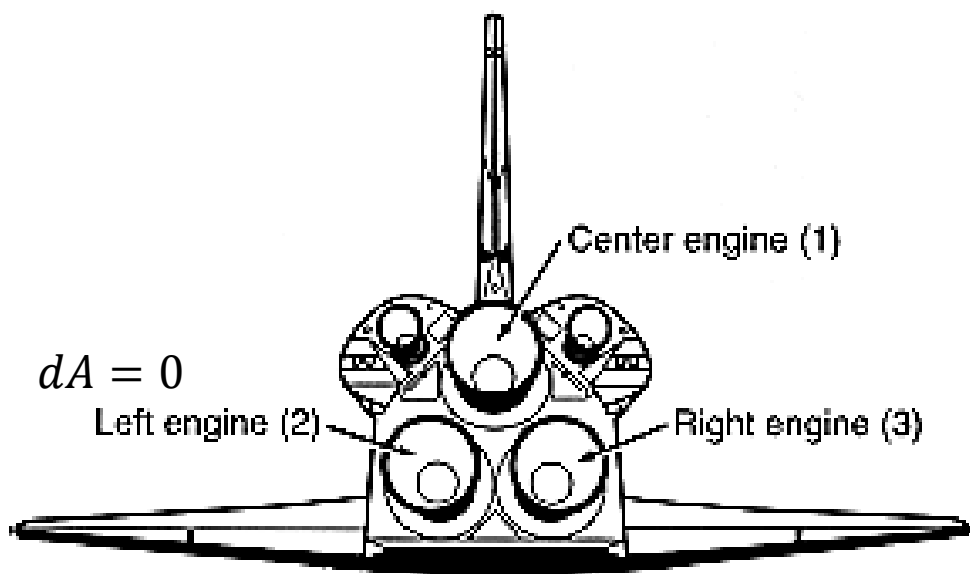
Space Shuttle as seen from its back with fired engines



Condotti ad area variabile



Space Shuttle Main Engine



Main Engine Numbering System

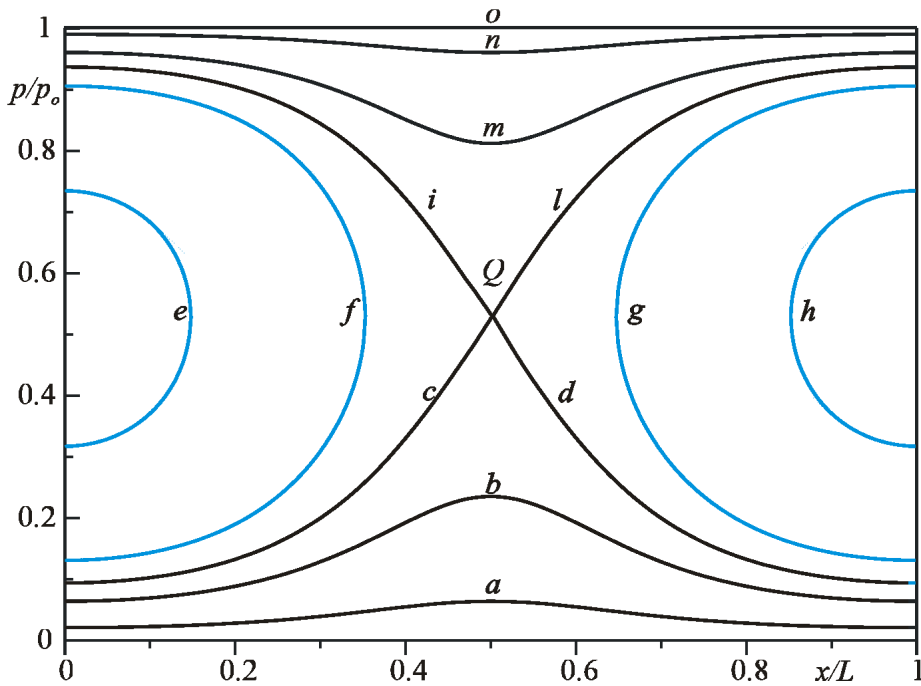
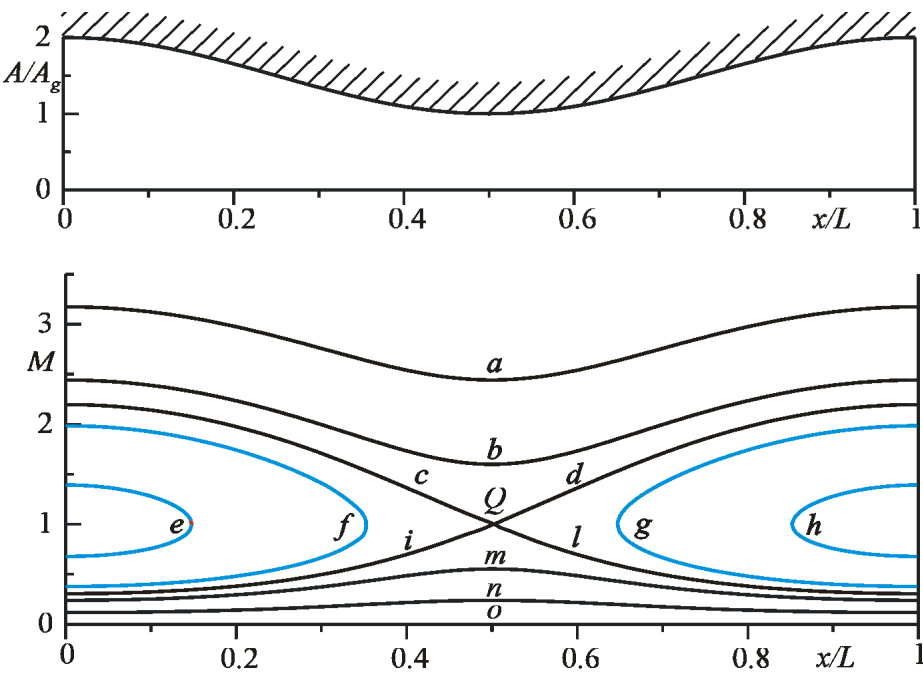


Condotti ad area variabile gas più che perfetti

Per gas più che perfetto si possono trovare le seguenti relazioni:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} ; \quad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Fissata una distribuzione delle aree si possono diagrammare **pressione** e numero di **Mach in funzione** della coordinata spaziale.



Condotti ad area variabile gas più che perfetti

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} ; \quad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Le curve colorate e, f, g e h **non** rappresentano **soluzioni** del problema perché non connettono gli stati a monte con quelli a valle e **prevedono** $M = 1$ in una sezione diversa dalla sezione di **gola**.

