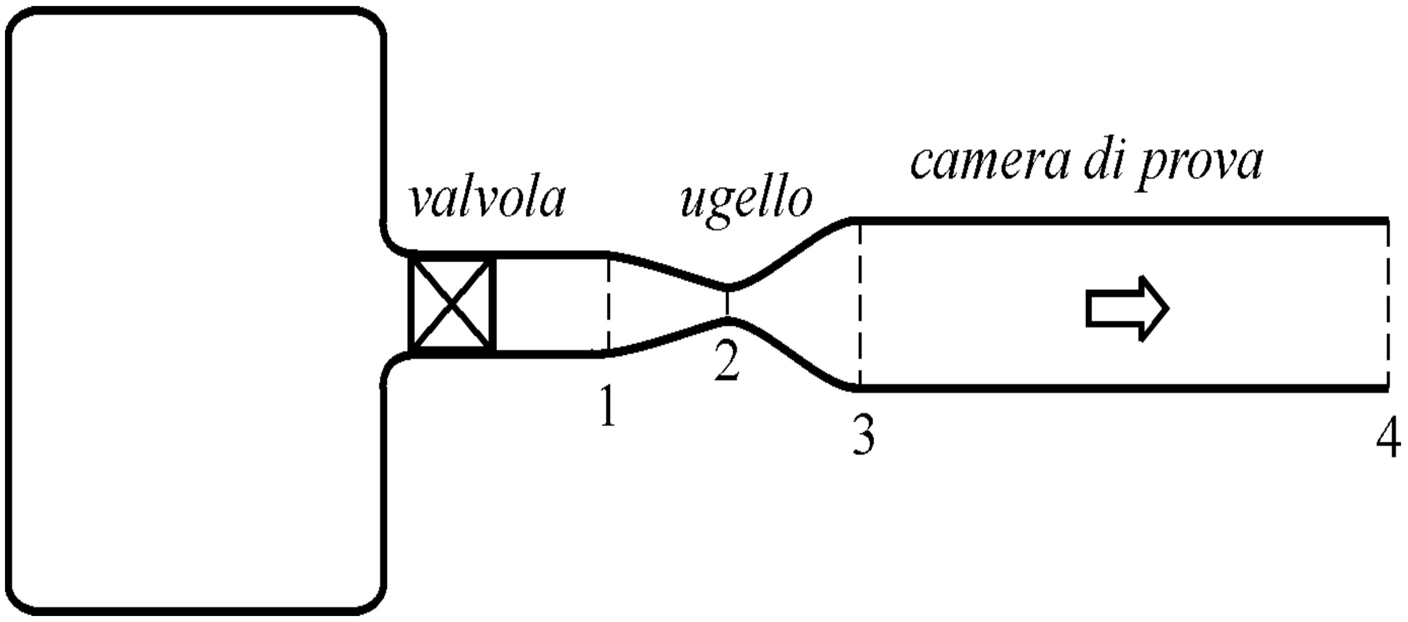
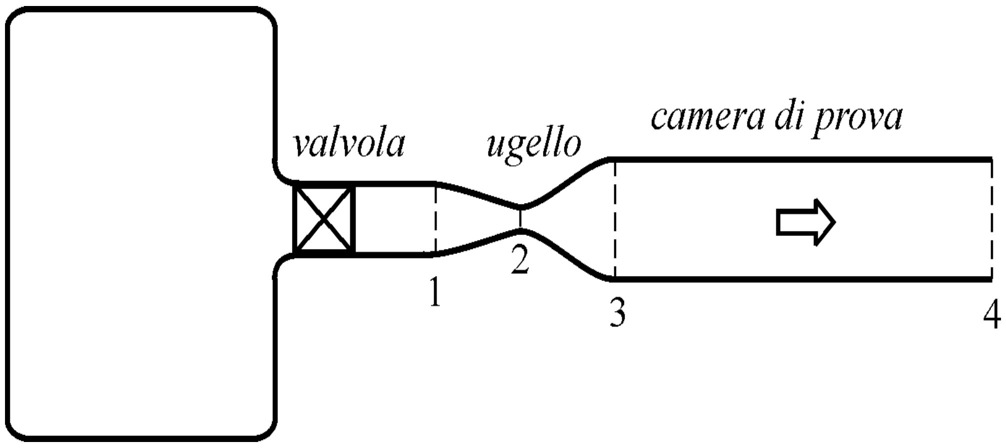
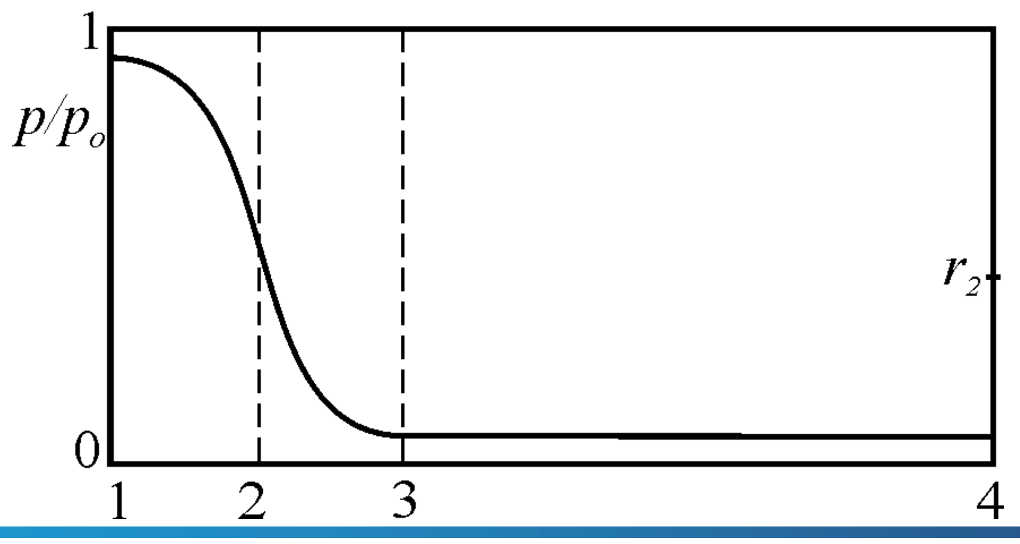
- Si consideri il serbatoio schematicamente rappresentato in figura, in cui è contenuto un gas avente inizialmente (cioè al tempo *t*=0) temperatura $T_0 = 150 \cdot F$ e pressione $p_{0i} = 150 \cdot psi$. Il serbatoio è collegato ad un ugello convergente-divergente avente area, nella sezione di test, indicata con il numero 3, $A_3 = 1.00 \cdot ft^2$. Il Mach di progetto è $M_3 = 2.00$. Si calcoli il volume del serbatoio necessario ad avere un tempo di svuotamento $t = 30 \cdot s$.

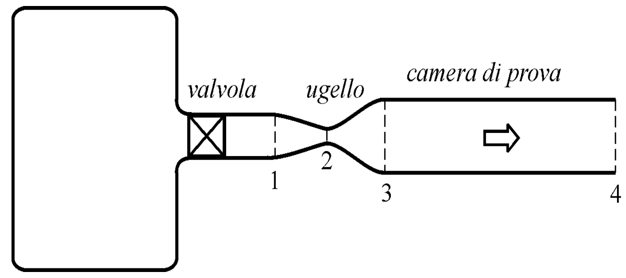




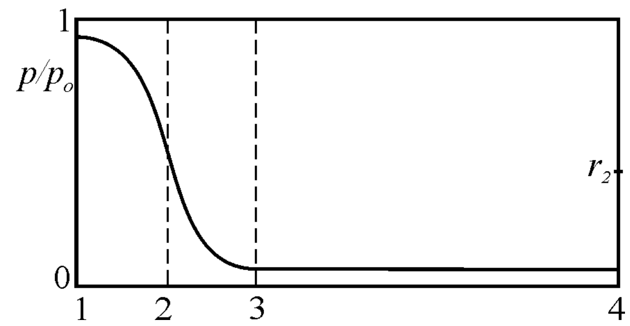
- Si sottolinea innanzitutto che il sistema descritto può essere considerato come una galleria del vento a svuotamento. Come si può vedere dalla figura in basso, la galleria continuerà a funzionare finché la pressione di ristagno sia tale che il rapporto p_a/P_0 sia pari ad r_2.



- Per il calcolo del volume si possono applicare le relazioni presentate nel capitolo 11; nel seguito si tratterà il fenomeno nei suoi due casi limite, supponendo cioè la trasformazione, nel serbatoio, adiabatica reversibile o isoterma.



- Dalla formula (11.12) relativa al caso di trasformazione adiabatica reversibile si ricava l'espressione che fornisce il volume in funzione delle altre grandezze caratteristiche:

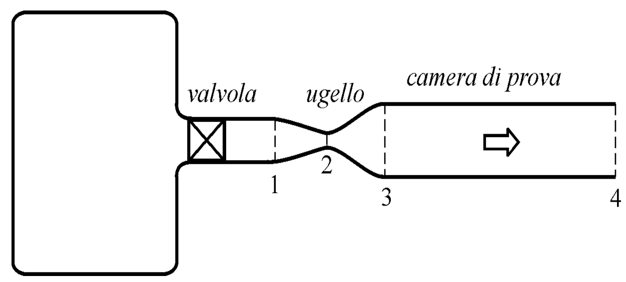


$$V = \frac{t\frac{\gamma-1}{2\gamma}A^{*}\sqrt{\gamma R T_0}\Psi^{*}}{\left[\left(\frac{p_{0f}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}-1\right]}$$

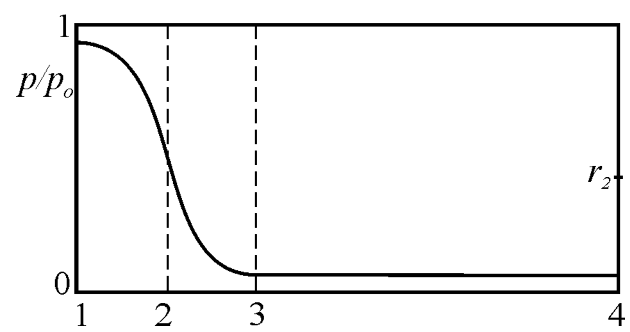
- Essendo noto il numero di Mach nella sezione 3, con questo valore si può entrare nelle tabelle relative al **moto isentropico** e ricavare il rapporto fra l'area nella sezione 3 e l'area critica, ed il rapporto fra pressione nella zona a valle dell'onda d'urto e la pressione di ristagno:

$$M_3 = 2 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{A_3}{A^*} = 1.688 \\[2ex] \dfrac{p_3}{p_o} = 0.1278 \end{cases}$$

$$M_3 = 2 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{A_3}{A^*} = 1.688 \\[2ex] \dfrac{p_3}{p_o} = 0.1278 \end{cases}$$



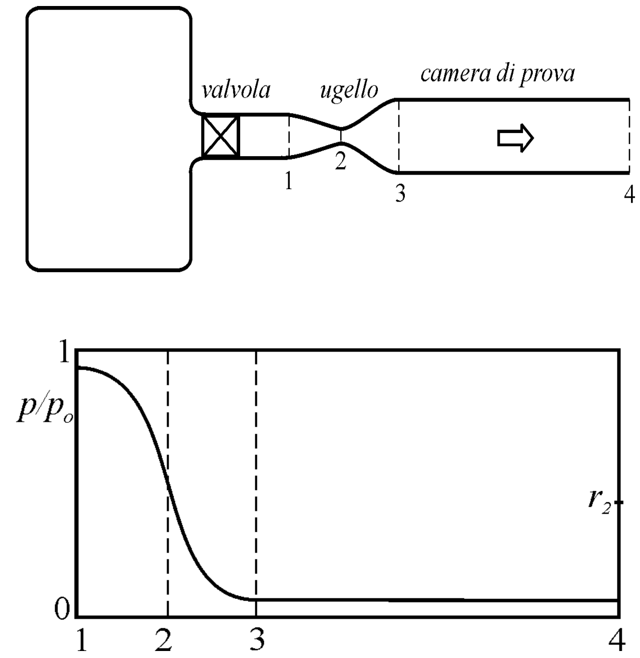
- Dal primo di questi rapporti si può ricavare l'area critica:



$$A^* = A_2 = \frac{A^*}{A_3}A_3 = \frac{1}{1.688}1.000 = 0.593 \cdot ft^2$$

- Per il calcolo della pressione di ristagno finale si procede nella seguente maniera: dalle tabelle delle **onde d'urto normali** si entra con $M = 2$ e si ricava il rapporto fra pressione a monte e a valle dell'onda:

$$\frac{p_4}{p_3} = 4.50$$



- Per quanto detto prima il fenomeno di svuotamento termina quando la pressione di ristagno è pari a:

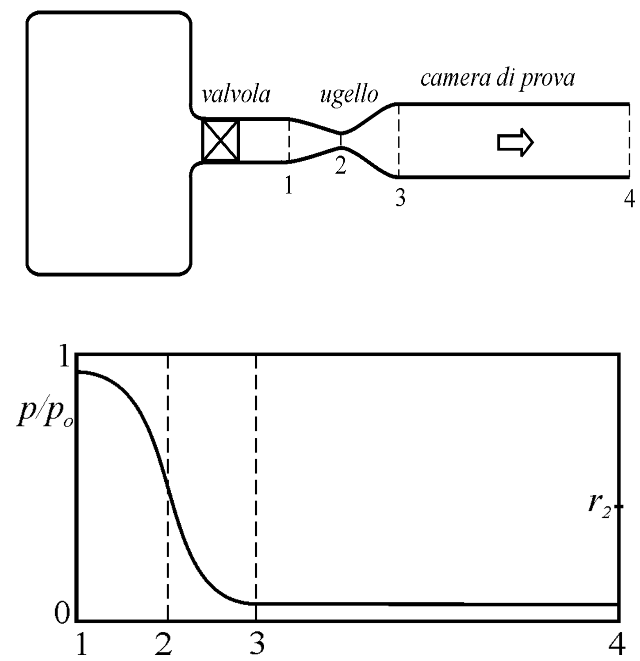
$$p_{0f} = \frac{p_a}{r_2}$$

$$p_{0f} = \frac{p_0}{p_3}\frac{p_3}{p_4}\frac{p_4}{p_a}p_a = \frac{1}{0.1278}\frac{1}{4.50}1.000 \cdot 14.70 = \quad 25.6 \cdot psi$$

- Con i valori ricavati di p_{0f} ed A^* si può utilizzare la formula suddetta e ricavare il valore richiesto del volume:

$$V = \frac{t\frac{\gamma-1}{2\gamma}A^*\sqrt{\gamma R T_0}\Psi^*}{\left[\left(\frac{p_{0f}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1\right]} = \quad \frac{30 \cdot \frac{1.4-1}{2 \cdot 1.4} \cdot 0.593 \cdot \sqrt{1.4 \cdot 1716 \cdot 610} \cdot 0.810}{\left[\left(\frac{25.6}{150}\right)^{\frac{1-1.4}{2 \cdot 1.4}} - 1\right]} = \quad 8660 \cdot ft^3$$

- Si noti che si è utilizzato il sistema di misure anglosassone, dove $R = 1716 \cdot ft^2/s^2 R$ e $T_0 = (150 + 459.67) \cdot R$.

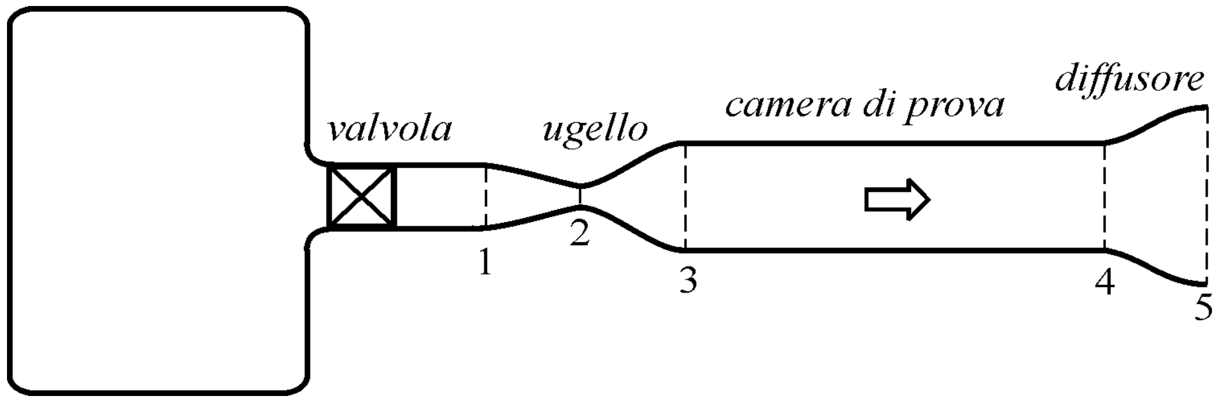


$$V = \frac{t\frac{\gamma-1}{2\gamma}A^*\sqrt{\gamma R T_0}\Psi^*}{\left[\left(\frac{p_{0f}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1\right]} = \mathbf{8660 \cdot ft^3}$$

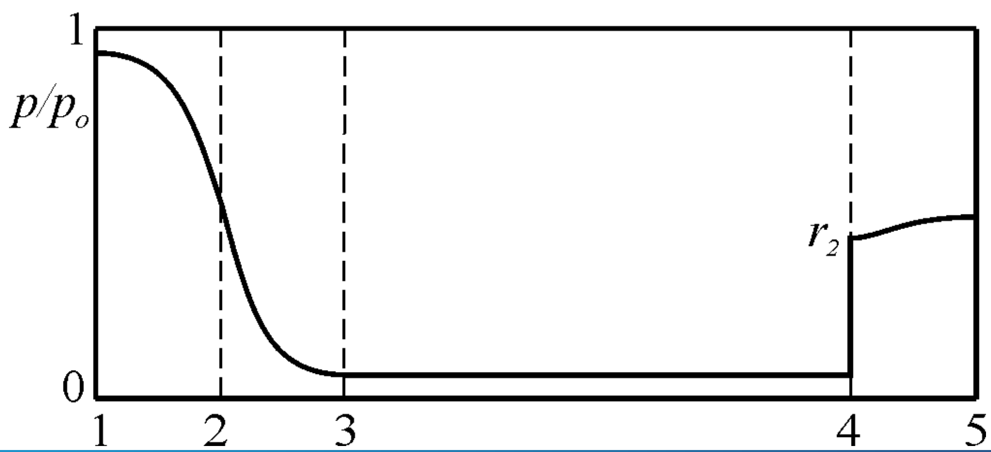
- Risolvendo invece il problema considerando lo svuotamento isotermo si troverà il valore del volume a partire dalla formula (11.5), tramite cioè la seguente relazione:

$$V = -\frac{tA^*\sqrt{\gamma R T_0}\Psi^*}{\gamma \ln\frac{p_{0f}}{p_{0i}}} = \quad -\frac{30 \cdot 0.593 \cdot \sqrt{1.4 \cdot 1716 \cdot 610} \cdot 0.810}{1.4 \cdot \ln\frac{25.6}{150}} = \mathbf{7040 \cdot ft^3}$$

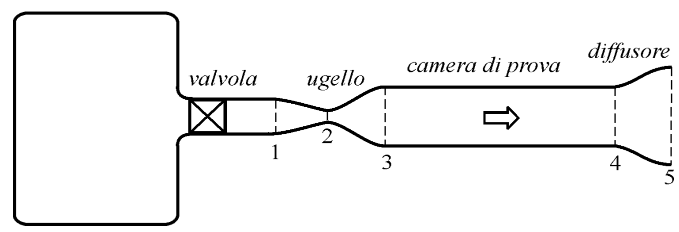
- Si modifichi ora la galleria proposta aggiungendo a valle della camera di prova un diffusore, avente $\frac{A_5}{A_2} = 3.375$.



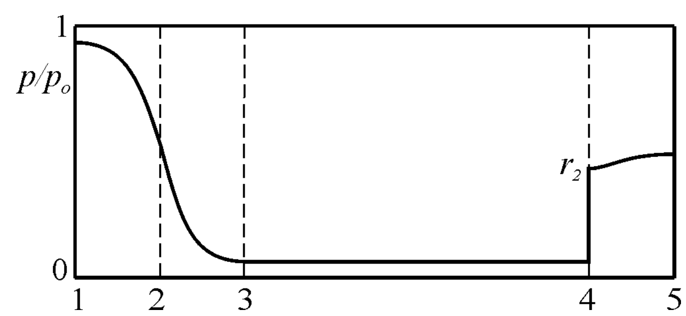
- In questo modo si può aumentare il tempo di prova, infatti la presenza un divergente dà luogo ad una successiva ricompressione del fluido a valle di quella già prodotta dall'onda d'urto.



- È necessario dunque calcolare la nuova pressione di ristagno finale! Dalle tabelle relative alle **onde d'urto normali** si ricava il numero di Mach a valle dell'onda d'urto M_4:



$$M_4 = 0.577$$



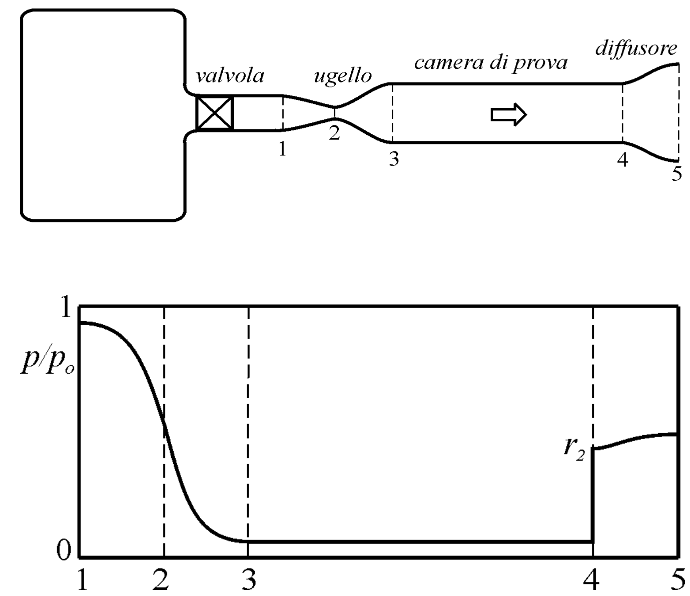
- Con tale valore si può entrare nelle tabelle relative al **moto isentropico** e ricavare i rapporti fra la pressione statica e di ristagno nella zona 4 ed il rapporto fra l'area della sezione 4 e l'area critica:

$$M_4 = 0.577 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{p_4}{p_{o4}} = 0.798 \\ \\ \dfrac{A_4}{A_4^*} = 1.216 \end{cases}$$

- È ora possibile ricavare il rapporto fra l'area della sezione di uscita del diffusore e la nuova sezione critica dalla seguente catena di rapporti:

$$\frac{A_5}{A_5^*} = \frac{A_5}{A_2}\frac{A_2}{A_3}\frac{A_3}{A_4}\frac{A_4}{A_4^*}\frac{A_4^*}{A_5^*} = 3.375\,\frac{1}{1.687}\,1.000 \cdot 1.216 \cdot 1 = 2.43$$

$$\frac{A_5}{A_5^*} = \frac{A_5}{A_2}\frac{A_2}{A_3}\frac{A_3}{A_4}\frac{A_4}{A_4^*}\frac{A_4^*}{A_5^*} = 3.375\frac{1}{1.687}1.000 \cdot 1.216 \cdot 1 = 2.43$$



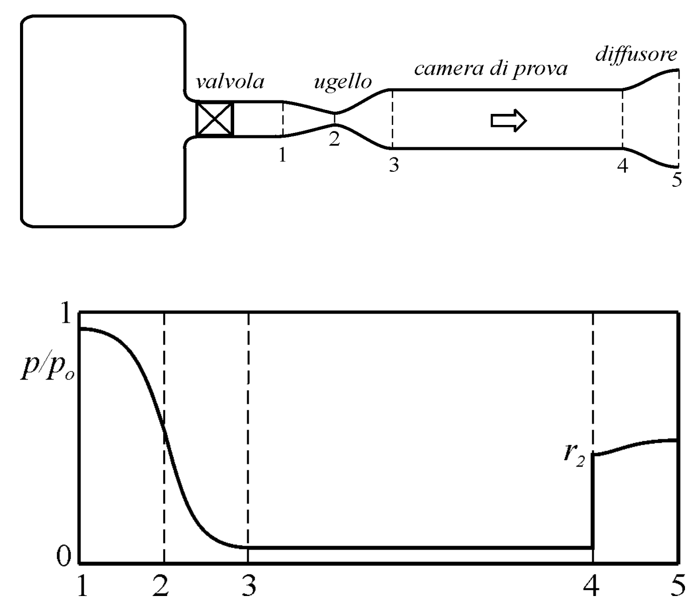
- Con tale valore è ora possibile ricavare il numero di Mach all'uscita del diffusore ed il rapporto fra pressione statica e di ristagno, mediante l'utilizzo delle tabelle del **moto isentropico**:

$$\frac{A_5}{A_5^*} = 2.43 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_5 = 0.247 \\ \dfrac{p_5}{p_{o5}} = 0.959 \end{cases}$$

- Si è ora in grado di calcolare il valore della nuova pressione di ristagno finale:

$$p_{0f} = \frac{p_0}{p_3}\frac{p_3}{p_4}\frac{p_4}{p_{04}}\frac{p_{04}}{p_{05}}\frac{p_{05}}{p_5}p_a = \frac{1}{0.1278}\frac{1}{4.50}0.798 \cdot 1.000 \cdot \frac{1}{0.959}14.70 = 21.3 \cdot psi$$

$$V = \frac{t\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}A^*\sqrt{\gamma R T_0}\Psi^*}{\left[\left(\dfrac{p_{0f}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1\right]}$$

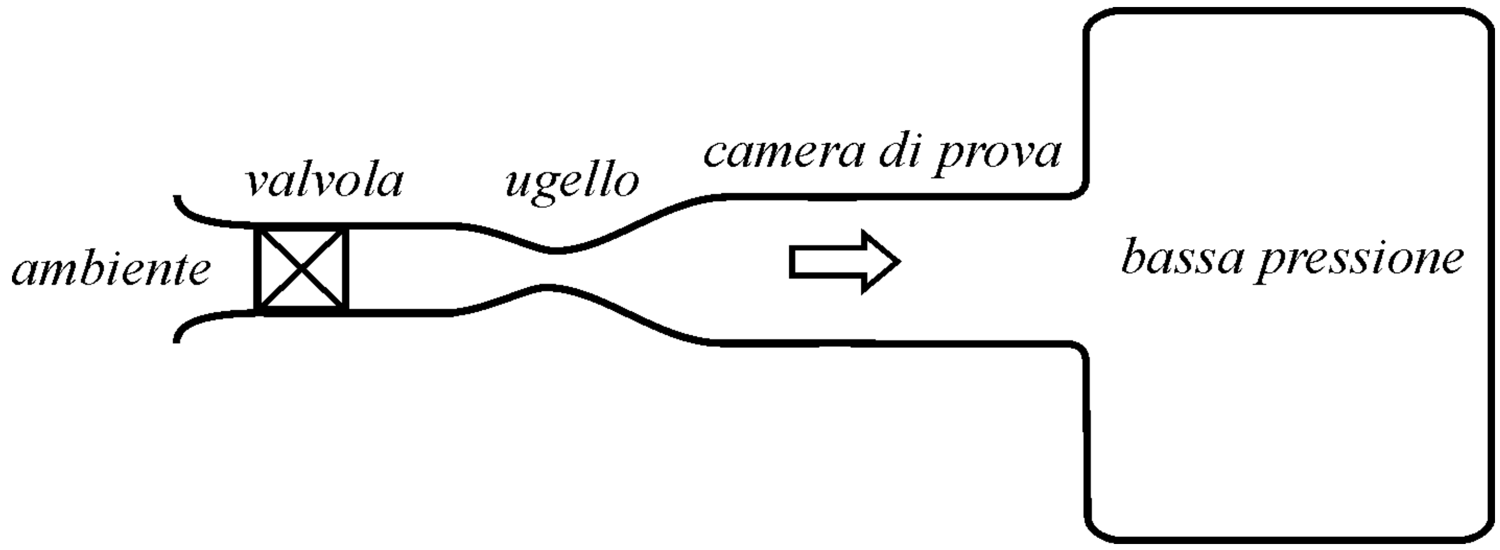


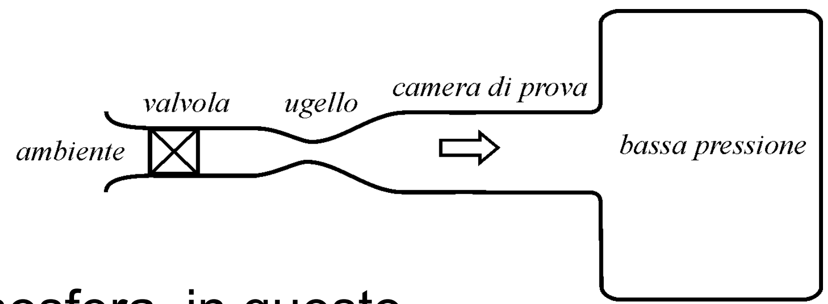
- Considerando come volume quello ricavato tramite l'espressione del caso adiabatico reversibile, $V = 8660 \cdot ft^3$, si ricava, dalla stessa relazione dove ovviamente adesso l'incognita è t, il valore richiesto:

$$\boldsymbol{t = 33.6 \cdot s}$$

- Si è dunque ottenuto l'aumento del tempo di prova sperato; tale aumento è di circa il **10%.** Si tenga ad ogni modo presente che a valle dell'onda d'urto si determina un gradiente di pressione avverso che può indurre separazione della corrente dalla parete con la formazione di onde d'urto oblique all'interno del divergente.

- Una galleria del vento supersonica consiste in un ugello convergente-divergente collegato ad un serbatoio a bassa pressione. La sezione di prova è di $29\ cm^2$ e il Mach di progetto è di 2.4. All'inizio di ogni prova la pressione nel serbatoio è praticamente zero, quindi si apre la valvola ed inizia il test. Se il volume del serbatoio è di $5.4\ m^3$, quanto può durare al massimo un esperimento prima che un'onda d'urto risalga nella camera di prova? Se volessimo effettuare un esperimento lungo $20\ s$, che volume dovrebbe avere il serbatoio? Le condizioni atmosferiche sono: $101\ kPa$ e $32\ C$. Trascurare nei calcoli le eventuali cadute di pressione nei condotti.



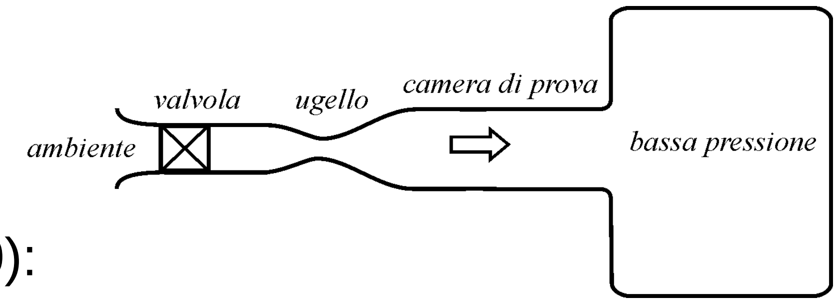


- Ci si trova nel caso di una galleria supersonica che aspira dall'atmosfera, in questo caso la pressione di ristagno rimane costante, essendo uguale a quella ambiente, mentre la pressione nella sezione di uscita della camera di prova, e cioè nel serbatoio, aumenta. Il moto si mantiene supersonico finché il rapporto tra la pressione del serbatoio e quella ambiente sia minore o uguale al rapporto r_2; in tali condizioni infatti l'onda d'urto risale nella camera di prova.

- Si tenga conto del fatto che, finché il moto risulta strozzato in camera di prova, rimanendo costanti la pressione e la temperatura di ristagno (pari a quelle ambiente), le condizioni termofluidodinamiche in camera di prova rimangono costanti, in particolare ci interessa la costanza della portata. Questa è calcolabile una volta noto il valori dell'area critica ricavabile dalle tabelle isentropiche entrando in queste con il valore del numero di Mach assegnato. Si ottiene dunque:

$$M_1 = 2.4 \xrightarrow{ISO} \frac{A_1}{A^*} = 2.40$$ da cui: $$A^* = \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{29}{2.40} \cdot 10^{-4} = 12.07 \cdot 10^{-4} \cdot m^2$$

$$A^* = \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{29}{2.40} \cdot 10^{-4} = 12.07 \cdot 10^{-4} \cdot m^2$$



- Per il calcolo della portata si utilizza dunque la relazione (10.10):

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0} \psi^* = \frac{101000 \cdot 0.001207 \cdot 0.81}{\sqrt{1.4 \cdot 305 \cdot 287}} = \quad 0.282 \cdot kg/s$$

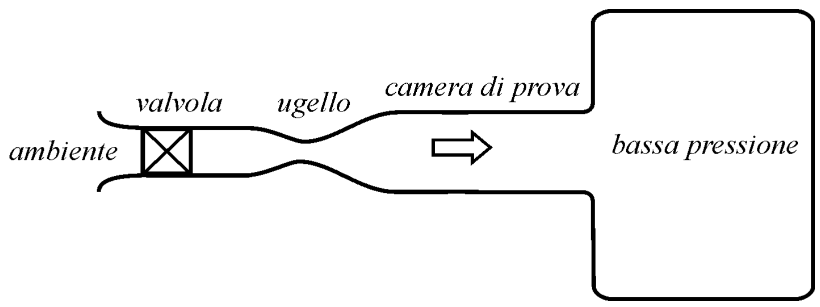
- Si può calcolare il tempo di riempimento come:

$$t = \frac{\rho}{\dot{m}} V$$

- Tale espressione è utilizzabile in quanto la portata è costante e la densità all'istante iniziale è nulla, essendo nulla la pressione nel serbatoio; dunque ρ nella formula è la densità corrispondente alla pressione del serbatoio quando questa coincide con r_2/p_a, quando cioè la pressione nel serbatoio è quella a valle dell'onda d'urto. Il valore di pressione è ricavabile dalle tabelle per le **onde d'urto normali**, entrando con $M = 2.4$. Si ricava:

$$\frac{p_2}{p_1} = \quad 6.55$$

- Quindi è possibile calcolare p_2:



$$p_2 = \frac{p_2}{p_1} p_1 \qquad\qquad \frac{p_2}{p_1} = \quad 6.55$$

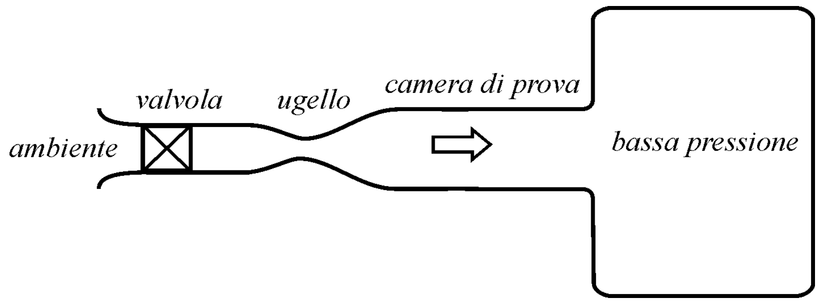
dove il valore di p_1 si ricava dal rapporto p_1/p_0, ricavabile a sua volta a partire dalle **tabelle isoentropiche**:

$$M_1 = 2.40 \xrightarrow{ISO} \frac{p_1}{p_0} = 0.0684$$

da cui:

$$p_1 = \frac{p_1}{p_0} p_0 = 0.0684 \cdot 101 = \; 691 \cdot kPa$$

$$p_2 \frac{p_2}{p_1} p_1 = 6.55 \cdot 6.91 = \quad 45.3 \; kPa$$



- La densità ρ si calcola come:

$$\rho = \frac{p_2}{RT_a} = \frac{45.3 \cdot 10^3}{287 \cdot 305} = 0.516 \ \frac{kg}{m^3}$$

- Si può adesso ottenere il valore di tempo richiesto:

$$t = \frac{V\rho}{\dot{m}} = \frac{5.4 \cdot 0.516}{0.282} = 9.89 \ s$$

- Con la stessa espressione utilizzata per il calcolo del tempo, si può ricavare il volume del serbatoio, noto il tempo di prova di 20 s:

$$V = \frac{t_1 \cdot \dot{m}}{\rho} = \frac{20 \cdot 0.282}{0.516} = 10.92 \ m^3$$