RAYLEIGH (1/3)

All'ingresso di un condotto le condizioni sono:

$$M_1 = 0.4 \qquad T_1 = 775 \cdot K \qquad p_1 = 100 \cdot kPa$$

Fra ingresso ed uscita del condotto è imposto un flusso uscente di energia nel modo calore di:

$$Q_{12} = -300 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK} \qquad c_p = 1.004 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}$$

Determinare le condizioni all'uscita del condotto e la caduta di pressione di ristagno.

Iniziamo a determinare le condizioni di ristagno, dalle tabelle (**ISO**):

$$M_1 = 0.4 \xrightarrow{ISO} \frac{T_1}{T_{01}} = 0.969 \qquad \frac{p_1}{p_{01}} = 0.896$$

Da cui:

$$T_{01} = \frac{T_{01}}{T_1} T_1 = \frac{775}{0.969} = 800 \cdot K \qquad p_{01} = \frac{p_{01}}{p_1} p_1 = \frac{100}{0.896} = 111.7 \cdot kPa$$

Dalle tabelle (**RF**) con $M_1 = 0.4$:

$$\frac{p_1}{p^*} = 1.961 \qquad \frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.529 \qquad \frac{p_{01}}{p_0^*} = 1.157 \qquad \frac{T_1}{T^*} = 0.615$$

Facendo un bilancio di energia:

$$Q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) \longrightarrow T_{02} = T_{01} + \frac{Q_{12}}{c_p} = 800 + \frac{-300}{1.004} = 501 \cdot K$$

E’ possibile quindi calcolare il seguente rapporto:

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{T_{02}}{T_{01}}\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{501}{800}0.529 = \quad 0.331$$

Con cui si entra nelle tabelle (**RF**) per ottenere:

$$M_2 = 0.292 \qquad \frac{p_2}{p^*} = 2.14 \qquad \frac{p_{02}}{p_0^*} = 1.202 \qquad \frac{T_2}{T^*} = 0.391$$

Con delle catene di rapporti è possibile ricavare le condizioni nella sezione 2:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}p_1 = \frac{2.14}{1.961}100 = 109.4 \cdot kPa$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*}\frac{T^*}{T_1}T_1 = \frac{0.391}{0.615}775 = 493 \cdot K$$

$$p_{02} = \frac{p_{02}}{p_0^*}\frac{p_0^*}{p_{01}}p_{01} = \frac{1.202}{1.157}111.7 = \quad 116.0 \cdot kPa$$

Con una caduta di pressione di ristagno pari a:

$$p_{02} - p_{01} = 4.3 \cdot kPa$$

RAYLEIGH (2/3)

All'ingresso di un condotto le condizioni sono:

$$M_1 = 0.4 \qquad T_1 = 775 \cdot K \qquad p_1 = 100 \cdot kPa$$

Supponendo che nel condotto venga aggiunto del combustibile che produce un calore di reazione pari a $H = 42.8 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$, determinare la massima portata di combustibile che non provoca una riduzione di portata.

Iniziamo a determinare il flusso di energia, nel modo calore, che provoca condizioni critiche in uscita. Le condizioni di ristagno sono le stesse dell'esercizio precedente. Dalle tabelle (**RF**) con $M_1 = 0.4$:

$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.529 \qquad \text{Da cui:} \qquad T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{01}} T_{01} = \frac{800}{0.529} = \quad 1512 \cdot K$$

Il flusso di calore richiesto è quindi:

$$Q_{12} = c_p(T_0^* - T_{01}) = \ 1.004 \cdot (1512 - 800) = \qquad 715 \cdot \frac{kJ}{kg}$$

Supponendo che la portata di combustibile ($\dot{m}_\mathrm{f}$) sia molto minore di quella in ingresso si ha:

$$\dot{m}_f H = \dot{m}_{air} c_p(T_0^* - T_{01}) \longrightarrow \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_{air}} = \frac{c_p(T_0^* - T_{01})}{H} = \frac{715 \cdot 10^3}{42.8 \cdot 10^6} = \ 0.01670$$

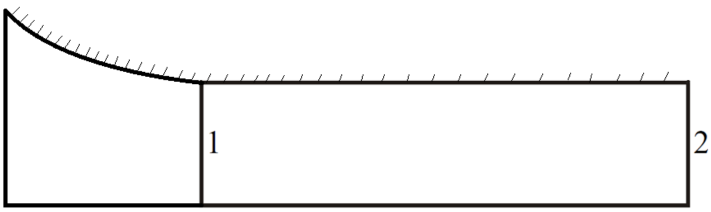
Quindi se la portata di combustibile è maggiore del 1.7% di quella in ingresso ci sarà una riduzione della portata.

RAYLEIGH (3/3)

Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D = 0.01 \cdot m$) nel quale è imposto un flusso d'energia nel modo calore. Le condizioni di ristagno sono:

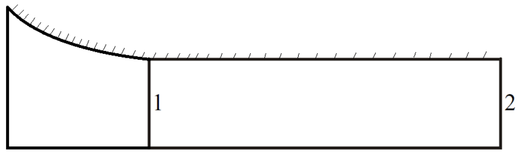
$$p_{01} = 150 \cdot kPa \qquad\qquad T_{01} = 300 \cdot K$$

a) Determinare la portata, la pressione critica e il flusso di energia nel modo calore critico quando $M_1 = 0.46$;
b) Per lo stesso flusso di energia nel modo calore, ma per una pressione ambiente di 100 kPa determinare la portata;
c) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a 50 kJ/kg determinare la portata;
d) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a 500 kJ/kg determinare la portata.



$$A_1 = \frac{\pi}{4} D^2 = 7.85 \cdot 10^{-5} \cdot m^2 \qquad c_p = 1.004 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}$$

$$R = 287 \frac{J}{kgK} \qquad \Psi^* = 0.810 \qquad \gamma = 1.4$$



a) Dalle tabelle (**<u>ISO</u>**) con $M_1 = 0.46$ si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.865 \longrightarrow p_1 = \frac{p_1}{p_{01}} p_{01} = 0.865 \cdot 150 \cdot 10^3 = 129.7 \cdot kPa$$

Dalle tabelle (**<u>RF</u>**) con $M_! = 0.46$ si ricavano i rapporti critici:

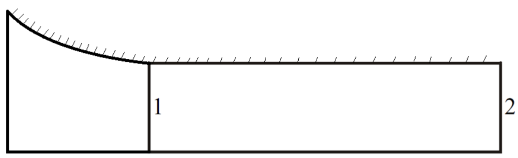
$$\frac{p_1}{p^*} = 1.852 \qquad \frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.630 \qquad \frac{p_{01}}{p_0^*} = 1.131$$

Da cui si ottengono:

$$p^* = \frac{p^*}{p_1} p_1 = \frac{129.7}{1.852} = 70.1 \cdot kPa \qquad T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{01}} T_{01} = \frac{300}{0.630} = 476 \cdot K$$

$$Q_{12} = c_p (T_0^* - T_{01}) = 1.004(476 - 300) = 176.8 \cdot \frac{kJ}{kg}$$

La portata può essere calcolata in più modi. Per esempio conoscendo il numero di Mach nella sezione di ingresso si può calcolare l'area critica fittizia, oppure si può calcolare la pressione di ristagno nella sezione di uscita dove M è unitario. Dalle tabelle (**<u>ISO</u>**) per $M_1 = 0.46$:



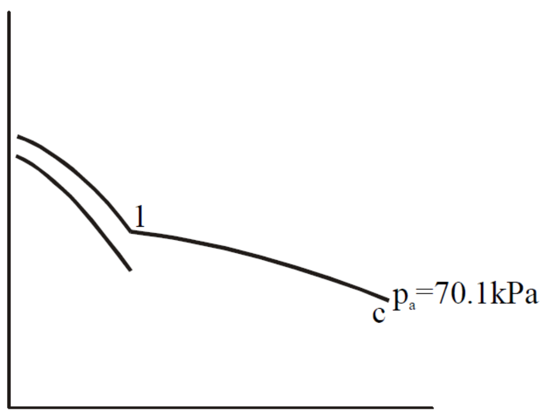
$$\frac{A_1}{A^*} = 1.425 \longrightarrow A^* = \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{7.85 \cdot 10^{-5}}{1.425} = 5.51 \cdot 10^{-5} \cdot m^2$$

Quindi la portata si calcola come:

$$\dot{m} = \frac{p_{01} A^* \Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_{01}}} = \frac{150 \cdot 5.51 \cdot 10^{-2} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} = 0.01930 \cdot \frac{kg}{s}$$

oppure:

$$\dot{m} = \frac{p_0^* A_1 \Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}} = \frac{\frac{p_{01}}{1.131} A_1 \Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}} = \frac{\frac{150}{1.131} \cdot 7.85 \cdot 10^{-2} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 476}} = 0.01930 \cdot \frac{kg}{s}$$



RAYLEIGH (3/3)

Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D = 0.01 \cdot m$) nel quale è imposto un flusso d'energia nel modo calore. Le condizioni di ristagno sono:

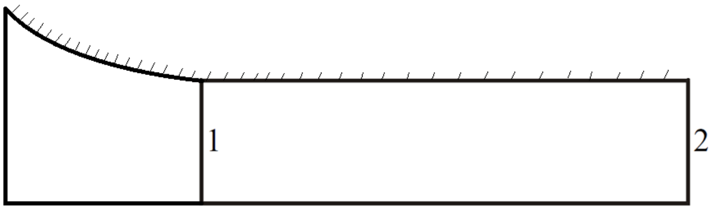
$$p_{01} = 150 \cdot kPa \qquad T_{01} = 300 \cdot K$$

a) Determinare la portata, la pressione critica e il flusso di energia nel modo calore critico quando $M_1 = 0.46$;

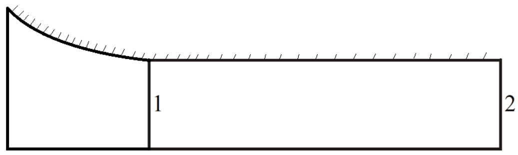
b) Per lo stesso flusso di energia nel modo calore, ma per una pressione ambiente di $100 \cdot kPa$ determinare la portata;

c) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a $50\ kJ/kg$ determinare la portata;

d) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a $500\ kJ/kg$ determinare la portata.



$$Q_{12} = 176.8 \cdot \frac{kJ}{kg} \qquad p_a = 100 \cdot kPa \qquad T_{02} = T^*_{0\,precedente} = 476 \cdot K$$



b) Poiché la pressione ambiente è aumentata il moto non sarà più strozzato ed è necessario procedere per tentativi.

Chiaramente la temperatura di ristagno nella sezione d'uscita non varierà e sarà uguale, a quella critica appena calcolata, per qualsiasi pressione ambiente.

Supponiamo inizialmente che il M all'uscita sia pari a 0.6.

$$M_2 = 0.6$$

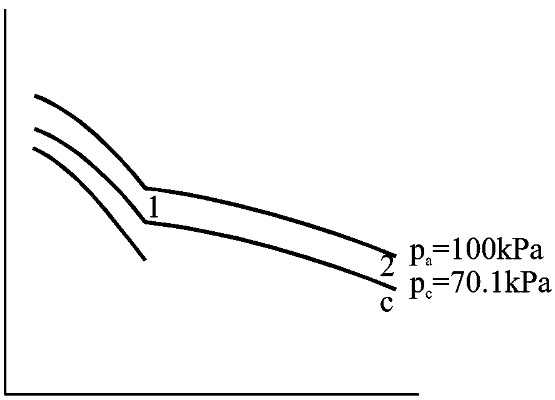
Dalle tabelle (**RF**) si ricavano i rapporti critici:

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.596 \qquad \frac{T_{02}}{T_0^*} = 0.819$$

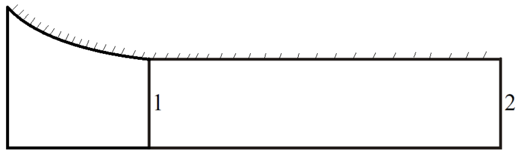
Da cui si ottengono:

$$T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{02}} T_{02} = \frac{476}{0.819} = 581 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{581} = 0.516$$

Dalle tabelle (**RF**) si ricavano: $M_1 = 0.393$ $\quad \frac{p_1}{p^*} = 1.974$



Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:



$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.899$$

Con una catena di rapporti si può calcolare la pressione nella sezione d'uscita.

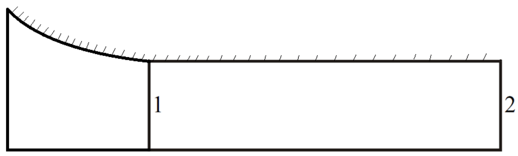
$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}}p_{01} = 1.596\frac{1}{1.974}0.899 \cdot 150 \cdot 10^3 = 109.0 \cdot kPa$$

Poichè la pressione di uscita è maggiore di quella ambiente dobbiamo aumentare il valore del numero di Mach nella sezione d'uscita. Però, avendo già calcolato la pressione d'uscita per $M_2 = 1$, conviene utilizzare il metodo di falsa posizione:

$$M_2 = \frac{M_2|_{II}[p_2|_I - p_a] - M|_I[p_2|_{II} - p_a]}{p_2|_I - p_2|_{II}} = \frac{[0.6 \cdot (70.1 - 100) - 1 \cdot (109.0 - 100)]}{70.1 - 109.0} = 0.693$$

Ora si può utilizzare lo stesso procedimento per calcolare p_2.

$$M_2 = 0.693 \qquad T_{02} = T^*_{0\,precedente} = 476 \cdot K$$



Dalle tabelle (**RF**) si ricavano i rapporti critici:

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.436 \qquad \frac{T_{02}}{T_0^*} = 0.903$$

Da cui si ottengono:

$$T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{02}}T_{02} = \frac{476}{0.903} = 527 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{527} = 0.569$$

Dalle tabelle (**RF**) si ricavano: $M_1 = 0.423$ $\quad \frac{p_1}{p^*} = 1.919$

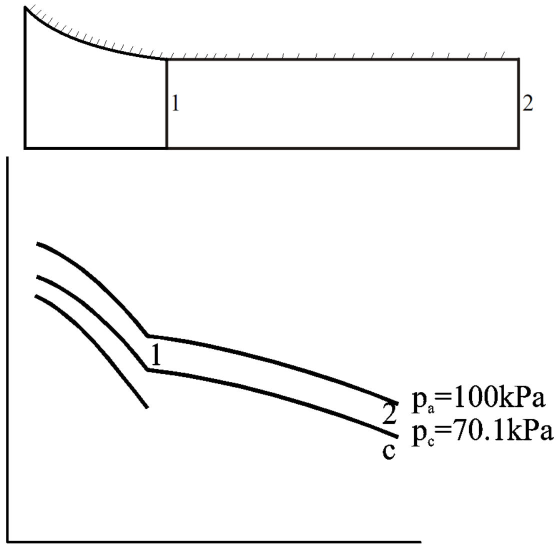
Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.884 \qquad \frac{A_1}{A^*} = 1.520$$

Con una catena di rapporti si può calcolare la pressione nella sezione d'uscita.

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}}p_{01} = 1.436\frac{1}{1.919}0.884 \cdot 150 = 99.2 \cdot kPa$$

Per il calcolo della portata si procede come nel caso a):



$$A^* = \frac{A^*}{A_1}A_1 = \frac{7.854 \cdot 10^{-5}}{1.520} = 5.17 \cdot 10^{-5} \cdot m^2$$

Quindi la portata si calcola come:

$$\dot{m} = \frac{p_{01}A^*\Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_{01}}} = \frac{150 \cdot 5.17 \cdot 10^{-2} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} = 0.01809 \cdot \frac{kg}{s}$$

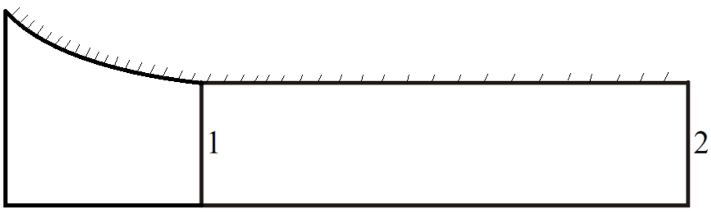
Da un confronto con il caso a) si vede come, a seguito delle diminuzione del numero di Mach nella sezione 1 e di conseguenza dell' area critica, la portata sia diminuita.

RAYLEIGH (3/3)

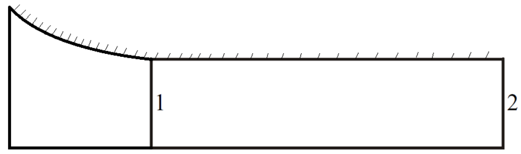
Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D = 0.01 \cdot m$) nel quale è imposto un flusso d'energia nel modo calore. Le condizioni di ristagno sono:

$$p_{01} = 150 \cdot kPa \qquad T_{01} = 300 \cdot K$$

a) Determinare la portata, la pressione critica e il flusso di energia nel modo calore critico quando $M_1 = 0.46$;
b) Per lo stesso flusso di energia nel modo calore, ma per una pressione ambiente di 100 kPa determinare la portata;
c) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a 50 kJ/kg determinare la portata;
d) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a 500 kJ/kg determinare la portata.



$$Q_{12} = 50 \cdot \frac{kJ}{kg} \qquad\qquad M_2 = 1$$



c) Poichè il flusso termico imposto è minore di quello del caso a, la pressione critica, in questo caso, sarà maggiore quindi il flusso nel condotto sarà strozzato a all'uscita del condotto ci sarà un ventaglio d'espansione.

Facendo un bilancio di energia:

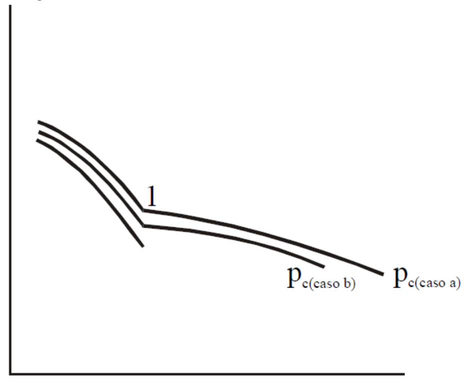
$$T_0^* = T_{01} + \frac{Q_{12}}{c_p} = 300 + \frac{50 \cdot 10^3}{1.004 \cdot 10^3} = 350 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{350} = 0.858$$

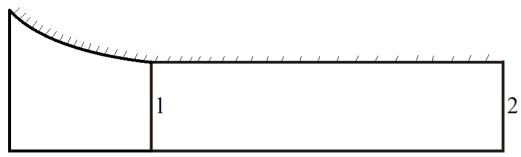
Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

$$M_1 = 0.638 \qquad\qquad \frac{p_1}{p^*} = 1.528$$

Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.760 \qquad\qquad \frac{A_1}{A^*} = 1.147$$





Si può quindi calcolare la pressione critica:

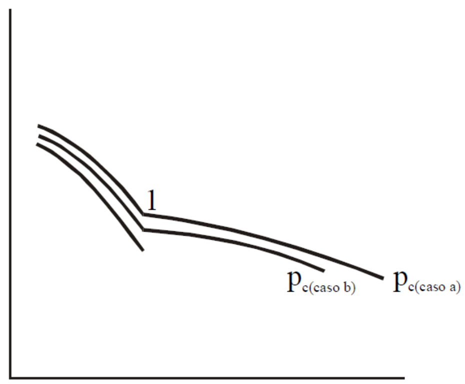
$$p^* = \frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}} p_{01} = \frac{1}{1.528} 0.760 \cdot 150 = 74.51 \cdot kPa$$

Quindi l'ipotesi iniziale è stata confermata.
Per il calcolo della portata si procede in modo analogo al caso a e b.:

$$A^* = \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{7.85 \cdot 10^{-5}}{1.15} = 6.85 \cdot 10^{-5} \cdot m^2$$

Quindi la portata si calcola come:

$$\dot{m} = \frac{p_{01} A^* \Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_{01}}} = \frac{150 \cdot 6.85 \cdot 10^{-2} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} = 0.0240 \cdot \frac{kg}{s}$$

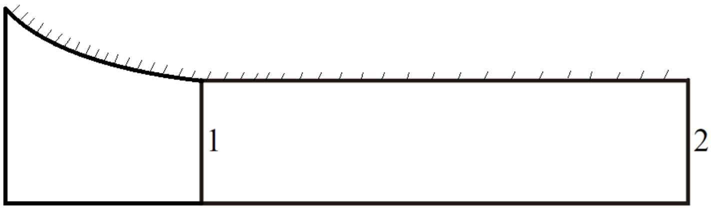


RAYLEIGH (3/3)

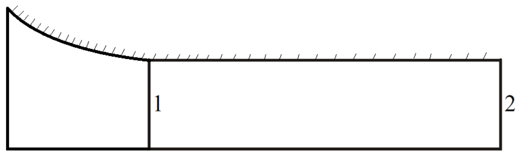
Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D = 0.01 \cdot m$) nel quale è imposto un flusso d'energia nel modo calore. Le condizioni di ristagno sono:

$$p_{01} = 150 \cdot kPa \qquad T_{01} = 300 \cdot K$$

a) Determinare la portata, la pressione critica e il flusso di energia nel modo calore critico quando $M_1 = 0.46$;
b) Per lo stesso flusso di energia nel modo calore, ma per una pressione ambiente di $100\ kPa$ determinare la portata;
c) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a $50\ kJ/kg$ determinare la portata;
d) Per pressione ambiente uguale a quella critica del punto a), ma per flusso di energia nel modo calore uguale a $500\ kJ/kg$ determinare la portata.



d) Aumentando il flusso termico imposto, rispetto al caso a, la pressione critica diminuirà, quindi non ci saranno più condizioni critiche all'uscita ed è necessario procedere per tentativi. Supponiamo inizialmente che:



$$M_2 = 1 \qquad Q_{12} = 500 \cdot \frac{kJ}{kg}$$

Facendo un bilancio di energia:

$$T_{02} = T_0^* = T_{01} + \frac{Q_{12}}{c_p} = 300 + \frac{500 \cdot 10^3}{1.004 \cdot 10^3} = 798 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{798} = 0.376$$

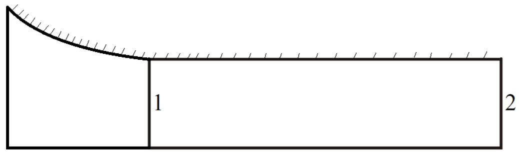
Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

$$M_1 = 0.316 \qquad \frac{p_1}{p^*} = 2.11$$

Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.933$$

Si può quindi calcolare la pressione critica:



$$p^* = \frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}}p_{01} = \frac{1}{2.11}0.933 \cdot 150 = \qquad 66.5 \cdot kPa$$

Il secondo tentativo può essere scelto a piacere, supponiamo:

$$M_2 = 0.9 \qquad\qquad Q_{12} = 500 \cdot \frac{kJ}{kg}$$

Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.125 \qquad \frac{T_{02}}{T_0^*} = 0.992 \longrightarrow T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{02}}T_{02} = \frac{798}{0.992} = \quad 804 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{804} = \quad 0.373$$

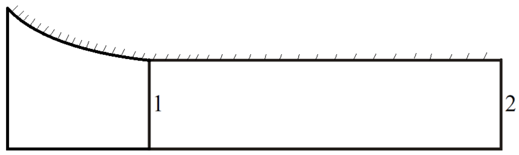
Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

$$M_1 = 0.314 \qquad\qquad \frac{p_1}{p^*} = 2.11$$

Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.934$$

Si può quindi calcolare la pressione nella sezione 2:



$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}}p_{01} = 1.125\frac{1}{2.11}0.934 \cdot 150 = \qquad 74.7 \cdot kPa$$

Utilizzando il metodo di falsa posizione si ha:

$$M_2 = \frac{M_2|_{II}[p_2|_I - p_a] - M|_I[p_2|_{II} - p_a]}{p_2|_I - p_2|_{II}} = \frac{[0.9 \cdot (66.5 - 70.1) - 1 \cdot (74.7 - 70.1)]}{66.5 - 74.7} = 0.956$$

Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

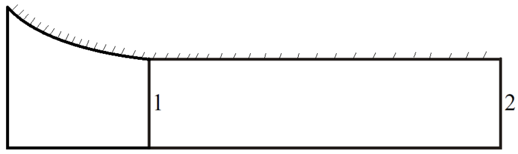
$$\frac{p_2}{p^*} = 1.053 \qquad \frac{T_{02}}{T_0^*} = 0.999 \longrightarrow T_0^* = \frac{T_0^*}{T_{02}}T_{02} = \frac{798.}{0.999} = \quad 799 \cdot K \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{300}{799} = 0.375$$

Dalle tabelle (**RF**) si ricavano:

$$M_1 = 0.316 \qquad\qquad \frac{p_1}{p^*} = 2.11$$

Con il numero di Mach nella sezione 1 dalle tabelle (**ISO**) si ha:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0.933 \qquad\qquad \frac{A_1}{A^*} = 1.946$$



Si può quindi calcolare la pressione nella sezione 2:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}}p_{01} = 1.053\,\frac{1}{2.11}\,0.933 \cdot 150 = \ 70.0 \cdot kPa$$

Per il calcolo della portata si procede come nel caso a, b e c:

$$A^* = \frac{A^*}{A_1}A_1 = \frac{7.854 \cdot 10^{-5}}{1.946} = 4.04 \cdot 10^{-5} \cdot m^2$$

Quindi la portata si calcola come:

$$\dot{m} = \frac{p_{01}A^*\Psi^*}{\sqrt{\gamma R T_{01}}} = \frac{150 \cdot 4.05 \cdot 10^{-2} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} = 0.01413 \cdot \frac{kg}{s}$$