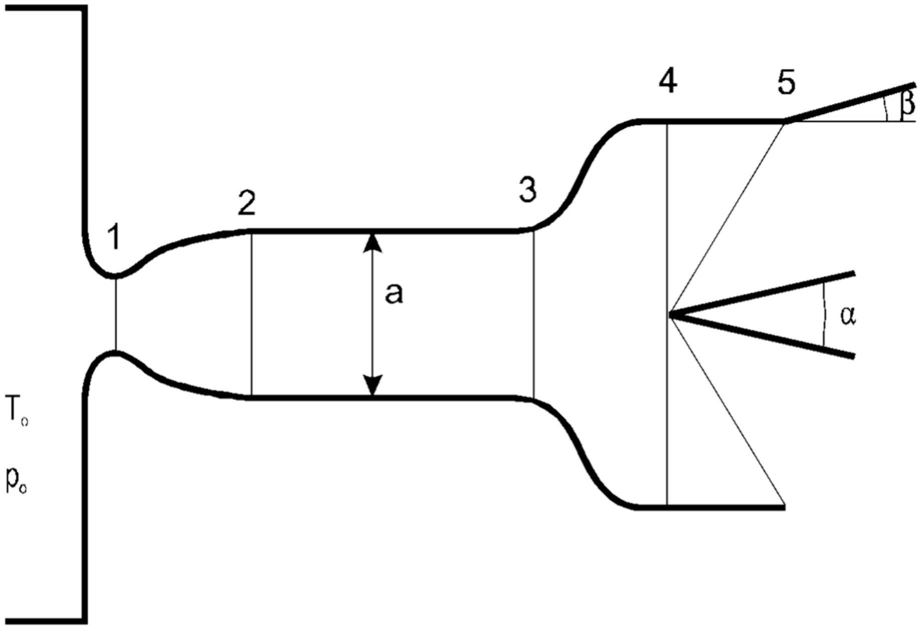
Es. 1

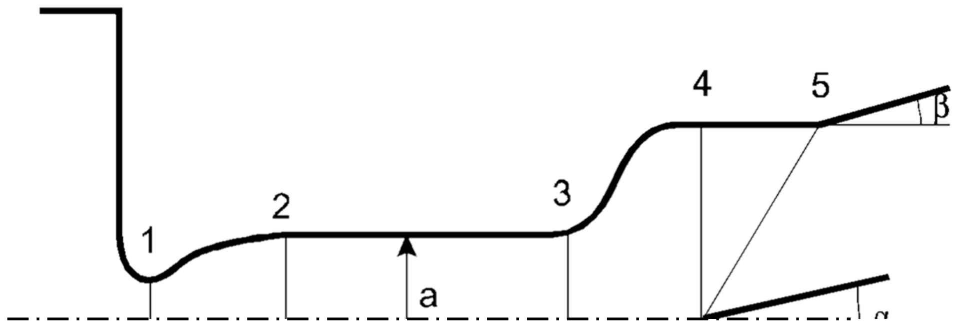
Un ugello convergente-divergente bidimensionale è collegato ad un condotto coibentato (la sezione è rettangolare $a = 0.55 \cdot m$ e la profondità $b = 5.5 \cdot m$) e successivamente ad un ugello divergente. All'uscita del condotto vi è un cuneo ($\delta = 20°$). Supponendo che:

$$T_o = 500 \cdot K, p_0 = 16.4 \cdot bar, L_{23} = 10 \cdot m,\ f = 0.005, \frac{A_2}{A_1} = 1.60,\ \frac{A_4}{A_1} = 3$$

Calcolare la lunghezza L_{45} (supponendo che la profondità *b* non vari) e l'angolo β tale che l'onda d'urto generata dal cuneo non venga riflessa. Calcolare inoltre a quale pressione di ristagno si ha un'onda d'urto a metà condotto



Come prima cosa si calcola il diametro idraulico ed il rapporto caratteristico del moto alla Fanno relativo al tratto 2-3



$$D_2 = \frac{4A}{\mathcal{P}} = \frac{4(0.55 \cdot 5.5)}{2(0.55 + 5.5)} = 1.000 \cdot \frac{m}{s}$$

$$F_{23} = \frac{4fL_{23}}{D} = \frac{4 \cdot 0.005 \cdot 10}{1.000} = 0.200$$

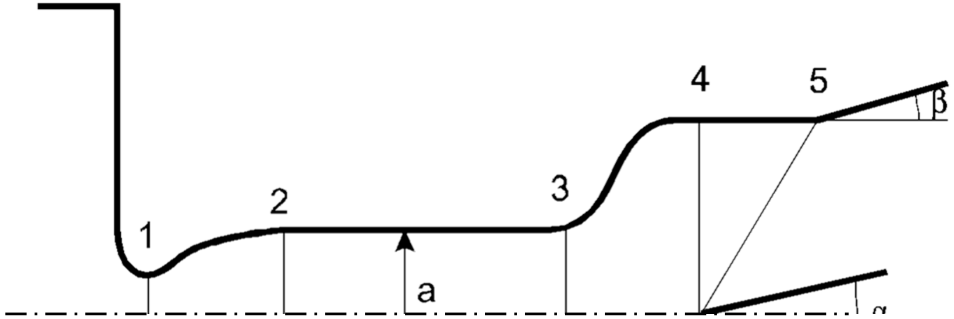
Ora, noto il rapporto delle aree si può valutare il numero di Mach nella sezione 2 e da questo il rapporto caratteristico del moto alla Fanno critico relativo alla sezione 2. Dalle tabelle (ISO e FF):

$$\frac{A_2}{A_1} = 1.60 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_2 = 1.935 \\ \dfrac{p_2}{p_{o2}} = 0.1413 \end{cases} \qquad M_2 = 1.935 \xrightarrow{FF} \begin{cases} F_2^* = 0.285 \\ \dfrac{p_2}{p^*} = 0.428 \end{cases}$$

Il rapporto critico è maggiore di quello relativo al tratto 2-3 ed il moto può essere tutto supersonico. Si calcola ora il rapporto critico relativo alla sezione 3 e da questo il numero di Mach:

$$F_3^* = F_2^* - F_{23} = 0.285 - 0.200 = 0.0853 \xrightarrow{FF} \begin{cases} M_3 = 1.360 \\ \dfrac{p_3}{p^*} = 0.688 \end{cases} \qquad M_3 = 1.360 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{A_3}{A_3^*} = 1.094 \\ \dfrac{p_3}{p_{o3}} = 0.333 \end{cases}$$

Per determinare le condizioni in 4 è necessario calcolare il rapporto fra l'area della sezione 4 e quella critica, poi si usano le tabelle ISO:



$$\frac{A_4}{A_4^*} = \frac{A_4}{A_1}\frac{A_1}{A_2}\frac{A_3}{A_3^*} = \frac{3.00}{1.600}1.094 = 2.05 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_4 = 2.23 \\ \dfrac{p_4}{p_{o4}} = 0.0899 \end{cases}$$

Con una catena di rapporti si calcola la pressione nella sezione 4

$$p_4 = \frac{p_4}{p_{o4}}\frac{p_{o3}}{p_3}\frac{p_3}{p^*}\frac{p^*}{p_2}\frac{p_2}{p_o}p_o = \frac{0.0899}{0.333}\frac{0.688}{0.428}0.1413 \cdot 16.4 = 1.029 \cdot bar$$

Che è praticamente uguale alla pressione ambiente.

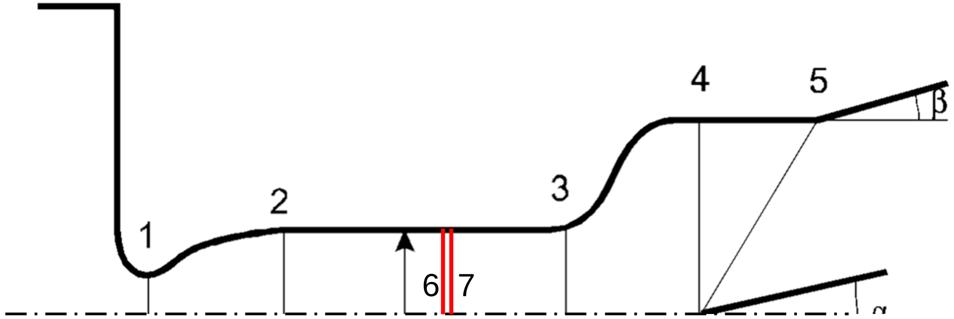
Il cuneo provoca una deviazione della corrente di un angolo $\delta = \alpha/2 = 10°$, dal diagramma ε, δ, M si trova:

$$\epsilon = 35.4°$$

La distanza d_4 della punta del cuneo dalla parete può essere calcolata considerando che il testo dell'esercizio dice che l'ugello è bidimensionale, quindi l'aumento di area (sezione 4 rispetto alla sezione 3) è dovuto solo ad un aumento dell'altezza del condotto e si ha:

$$d_4 = \frac{a}{2}\frac{A_4}{A_3} = \frac{0.550}{2}\frac{3.00}{1.600} = 0.516 \cdot m \qquad L_{45} = \frac{d_4}{\tan\epsilon} = \frac{0.516}{\tan 35.4} = 0.726 \cdot m$$

L'angolo β è semplicemente uguale ad $\alpha/2$. Si calcola la pressione di ristagno che provoca un'onda d'urto a metà condotto. Il rapporto caratteristico è esattamente la metà di quello relativo al tratto 2-3.



$$F_{26} = \frac{F_{23}}{2} = \frac{0.200}{2} = 0.1000$$

$$F_6^* = F_2^* - F_{26} = 0.285 - 0.1000 = 0.1853 \xrightarrow{FF} M_6 = 1.636$$

$$M_6 = 1.636 \xrightarrow{NSW} M_7 = 0.658 \xrightarrow{FF} F_7^* = 0.304$$

Il rapporto caratteristico relativo al tratto 7-3 è uguale a quello relativo al tratto 2-6 quindi:

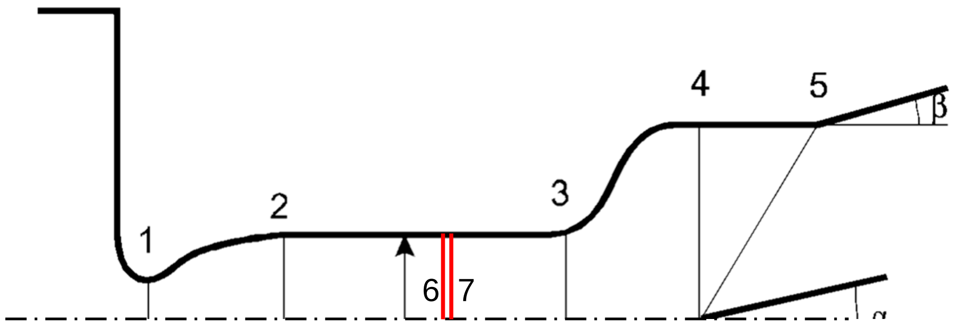
$$F_3^* = F_7^* - F_{73} = 0.304 - 0.1000 = 0.204 \xrightarrow{FF} \begin{cases} M_3 = 0.702 \\ \dfrac{p_3}{p^*} = 1.488 \end{cases} \qquad M_3 = 0.702 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{A_3}{A_3^*} = 1.093 \\ \dfrac{p_3}{p_{o3}} = 0.719 \end{cases}$$

Per determinare le condizioni in 4 è necessario calcolare il rapporto fra l'area della sezione 4 e quella critica:

$$\frac{A_4}{A_4^*} = \frac{A_4}{A_1}\frac{A_1}{A_2}\frac{A_3}{A_3^*} = \frac{3.00}{1.600} 1.093 = 2.05 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_4 = 0.298 \\ \dfrac{p_4}{p_{o4}} = 0.940 \end{cases}$$

Con una catena di rapporti si calcola la pressione nella sezione 4

$$\frac{p_4}{p_o} = \frac{p_4}{p_{o4}}\frac{p_{o3}}{p_3}\frac{p_3}{p^*}\frac{p^*}{p_2}\frac{p_2}{p_o} = \frac{0.940}{0.719}\frac{1.488}{0.428}0.1413 = 0.642$$



Supponendo che la pressione all'uscita sia uguale a quella trovata nel caso precedente si ha:

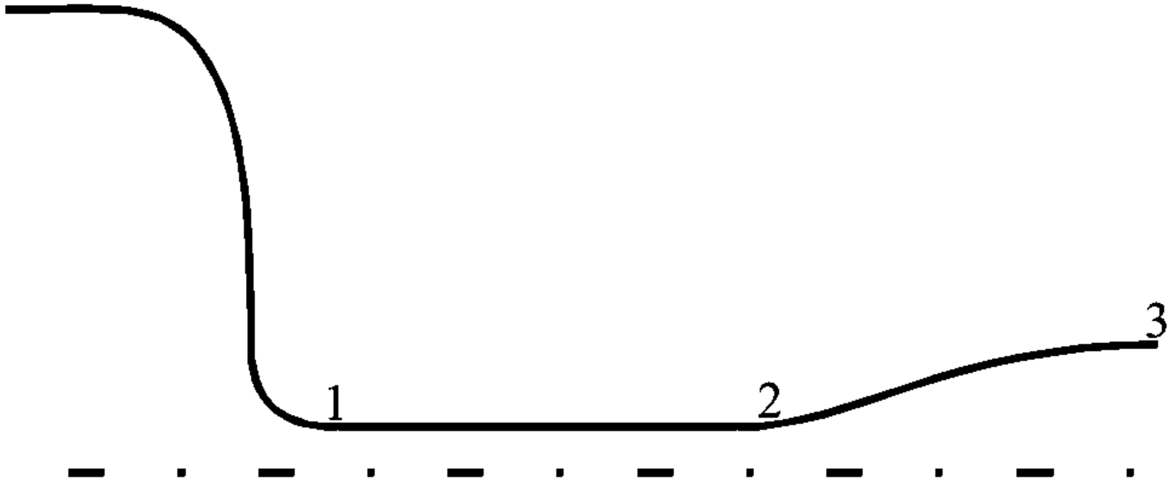
$$p_o = \frac{p_o}{p_4}p_a = \frac{1.029}{0.642} = 1.603 \cdot bar$$

Es. 2

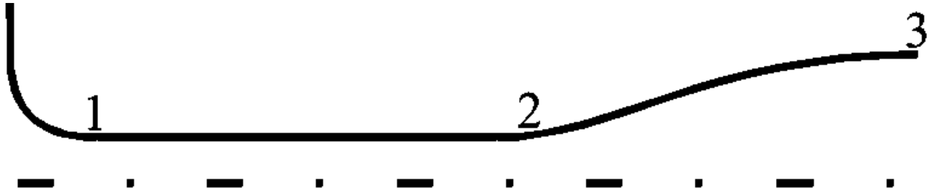
Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D = 3.99 \cdot mm$) nel quale è imposto un flusso di energia nel modo calore Q12. All'uscita del condotto vi è un ugello divergente ($D_3 = 6.18 \cdot mm$). L'ugello scarica alla pressione atmosferica e le condizioni di ristagno sono:

$$T_o = 400 \cdot K, \qquad p_o = 15.9 \cdot atm, \qquad p_a = 1 \cdot atm$$

Calcolare la portata e la configurazione delle eventuali onde all'uscita per: $Q_{12} = 0, 109, -109 \cdot \frac{kJ}{kg \cdot s}$



$Q_{12} = 109$ poichè il flusso imposto è nullo il sistema si riduce ad un semplice ugello convergente-divergente. Supponendo che il moto sia strozzato nella sezione 1 (o 2), dal rapporto delle aree, si può calcolare il numero di Mach nella sezione d'uscita e da questo gli altri parametri caratteristici.



$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{3.14}{4} 3.99^2 \cdot 10^{-6} = 12.50 \cdot 10^{-6} \cdot m^2$$

$$A_3 = \frac{\pi}{4} D_3^2 = \frac{3.14}{4} 6.18^2 \cdot 10^{-6} = 30.0 \cdot 10^{-6} \cdot m^2$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{A_3}{A_3^*} = \frac{30}{12.50} = 2.40 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_3 = 2.4 & \xrightarrow{ISO} \nu_3 = 36.7° \\ \frac{p_3}{p_o} = 0.0686 \end{cases}$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A_1 \Psi^*}{a_o} = \frac{p_o A_1 \Psi^*}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o}} =$$

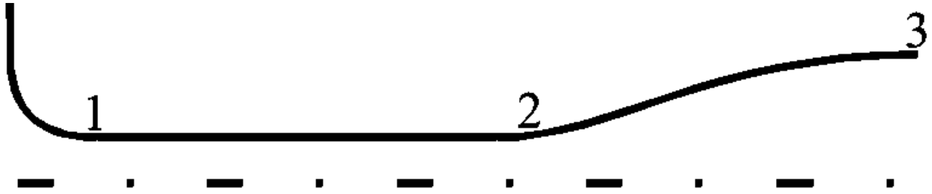
Dato che $\frac{p_a}{p_o} = \frac{1}{15.9} = 0.0629$ si ha $\frac{p_3}{p_o} > \frac{p_a}{p_o}$

$$= \frac{15.9 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 12.50 \cdot 10^{-6} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 400}} = 0.0407 \cdot \frac{kg}{s}$$

La pressione nella sezione 3 è superiore a quella ambiente e all'uscita dell'ugello è presente un ventaglio d'espansione. La trasformazione è isoentropica, quindi:

$$\frac{p_a}{p_o} = 0.629 \xrightarrow{ISO} M_a = 2.45 \xrightarrow{PM} \nu_a = 38.0° \qquad \delta = \nu_a - \nu_3 = 38.0 - 36.7 = 1.3°$$

$Q_{12} = 109 \cdot kJ/kg \cdot s$ Essendo Q_{12} positivo il moto può essere strozzato, solo nella sezione 2. Supponiamo quindi che sia verificata questa ipotesi. Dal bilancio di energia si può calcolare la temperatura di ristagno critica coincidente con quella nella sezione 2.



$$T_o^* = T_{o1} + \frac{Q_{12}}{c_P} = 400 + \frac{109}{1.004} = 509 \cdot K$$

$$\frac{T_{o1}}{T_o^*} = \frac{400}{509} = 0.787 \xrightarrow{RF} \begin{cases} M_1 = 0.572 \\ \frac{p_{o1}}{p_o^*} = 1.086 \end{cases}$$

Il numero di Mach nella sezione 3 sarà uguale a quello calcolato per il caso a. E' possibile, quindi, calcolare il rapporto fra la pressione nella sezione 3 e quella di ristagno:

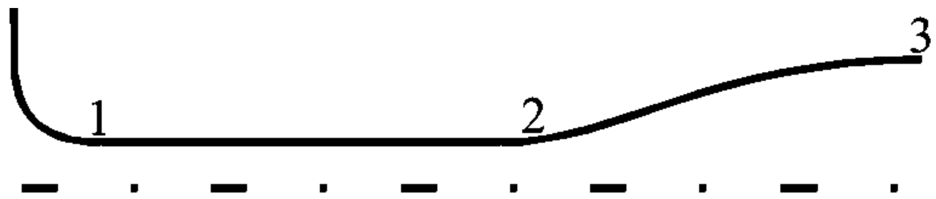
$$\frac{p_3}{p_o} = \frac{p_3}{p_{o3}} \frac{p_{o2}}{p_o^*} \frac{p_o^*}{p_o} = 0.0686 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1.086} = 0.632$$

La pressione nella sezione 3 è praticamente uguale a quella ambiente quindi non ci saranno onde all'uscita dell'ugello. Per il calcolo della portata si possono considerare le condizioni di ristagno nella sezione 2:

$$\dot{m} = \frac{p_o^* A_1 \Psi^*}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o^*}} = \frac{\frac{15.9}{1.086} \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 12.50 \cdot 10^{-6} \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 509}} = 0.0332 \cdot \frac{kg}{s}$$

$Q_{12} = -109 \cdot kJ/kg \cdot s$ Q_{12} è negativo quindi il moto può essere strozzato solo nella sezione 1. Nel condotto il moto sarà tutto supersonico e continuerà ad accelerare anche nell'ugello.

$$T_o^* = T_{o1} + \frac{Q_{12}}{c_P} = 400 - \frac{109}{1.004} = 291 \cdot K$$



$$\frac{T_{o1}}{T_o^*} = \frac{291}{400} = 0.729 \xrightarrow{RF} \begin{cases} M_1 = 2.37 & \xrightarrow{Iso} \dfrac{A_2}{A_2^*} = 2.34 \\ \dfrac{p_{o1}}{p_o^*} = 1.997 \end{cases}$$

Per calcolare le condizioni all'uscita è necessario calcolare il rapporto A_3/A_3^*:

$$\frac{A_3}{A_3^*} = \frac{A_3}{A_2}\frac{A_2}{A_2^*}\frac{A_2^*}{A_3^*} = 2.40 \cdot 2.34 \cdot 1 = 5.61 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_3 = 3.30 \\ \dfrac{p_3}{p_{o3}} = 0.01756 \end{cases}$$

$$\frac{p_3}{p_o} = \frac{p_3}{p_{o3}}\frac{p_{o3}}{p_o^*}\frac{p_o^*}{p_o} = 0.01756 \cdot 1.997 \cdot 1 = 0.0351$$

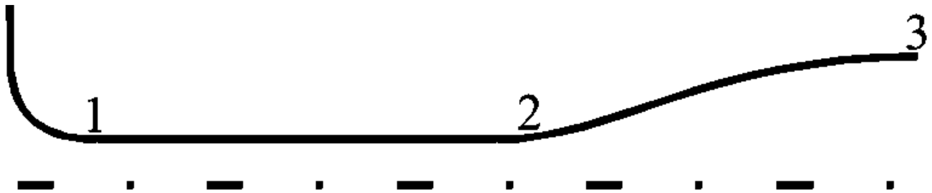
All'uscita dell'ugello ci sarà un'onda d'urto obliqua e la portata sarà uguale a quella calcolata nel caso a. Il M normale, dell'onda d'urto obliqua, si calcola a partire dal salto di pressione imposto:

$$\frac{p_a}{p_3} = \frac{p_a}{p_o}\frac{p_o}{p_3} = \frac{0.0629}{0.0351} = 1.794 \xrightarrow{NSW} M_{n3} = 1.296 \quad M_{n4} = 0.788 \quad \frac{T_4}{T_3} = 1.189$$

Si calcola il numero di Mach tangenziale e l'angolo di d'inclinazione dell'onda:

$$M_{t3} = \sqrt{M_3^2 - M_{n3}^2} = \sqrt{3.30^2 - 1.296^2} = \quad 3.03$$

$$\epsilon = \operatorname{asin}\frac{M_{n3}}{M_3} = \operatorname{asin}\frac{1.296}{3.30} = \quad 23.2°$$



L'angolo di deviazione della corrente può essere valutato direttamente dal diagramma δ, ϵ, M oppure calcolando il numero di Mach tangenziale a valle:

$$M_{t4} = M_{t3}\sqrt{\frac{T_3}{T_4}} = 3.03\sqrt{\frac{1}{1.189}} = \quad 2.78$$

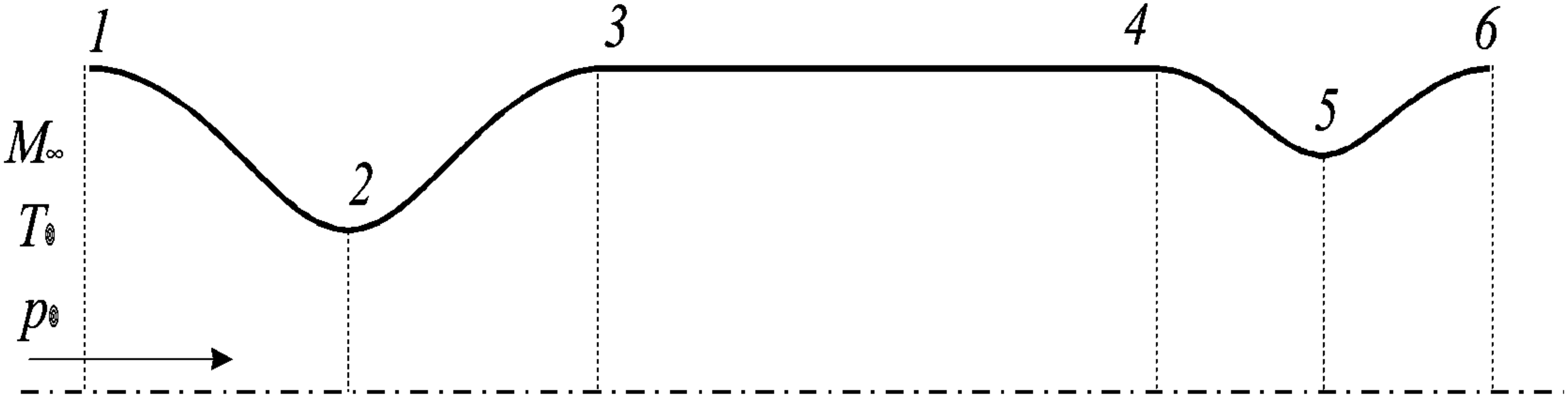
$$\delta = \epsilon - \operatorname{atan}\frac{M_{n4}}{M_{t4}} = 23.2 - \operatorname{atan}\frac{1.296}{2.78} = 7.33$$

Es. 3

Si deve progettare un auto reattore per un missile che vola a $M_1 = 1.8$. Supponendo che:

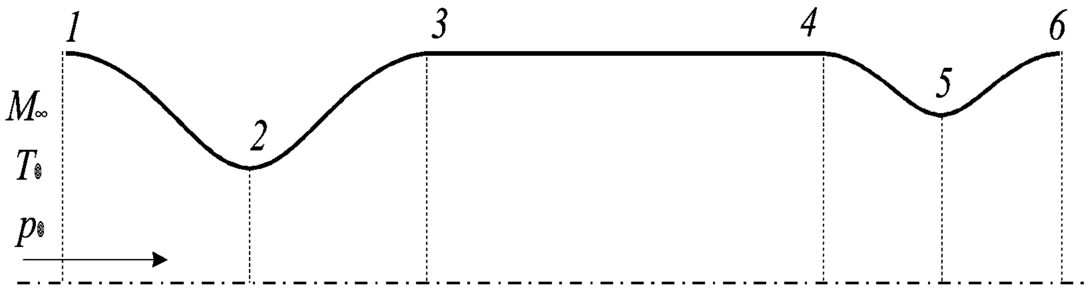
$$T_1 = 273 \cdot K, p_1 = 0.70 \cdot atm, A_2 = 0.0347 \cdot m^2,\ \frac{A_3}{A_2} = 1.34$$

e che la combustione produca $Q_{34} = 196.7 \cdot kJ/kg$. Calcolare la spinta prodotta nel caso che la pressione in uscita sia uguale a quella ambiente e che il funzionamento sia corretto.



Dal numero di Mach, utilizzando le tabelle (ISO), si possono ricavare le condizioni di ristagno e la velocità all'ingresso della presa d'aria:

$$M_1 = 1.8 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} \dfrac{p_1}{p_{o1}} = 0.1740 \\ \dfrac{T_{o1}}{T_{o1}} = 0.607 \end{cases}$$



$$p_{o1} = \frac{p_{o1}}{p_1} p_1 = \frac{0.700}{0.1740} = 4.02 \cdot atm \qquad T = \frac{T_{o1}}{T_1} T = \frac{273}{0.607} = 450 \cdot K$$

$$V_1 = M_1 a_1 = 1.8\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 273} = 596 \cdot \frac{m}{s}$$

Dal rapporto fra l'area della sezione 3 e quella della sezione 2 si può valutare (Tab. ISO) il numero di Mach nella sezione 3, da cui i rapporti caratteristici del moto alla Rayleigh:

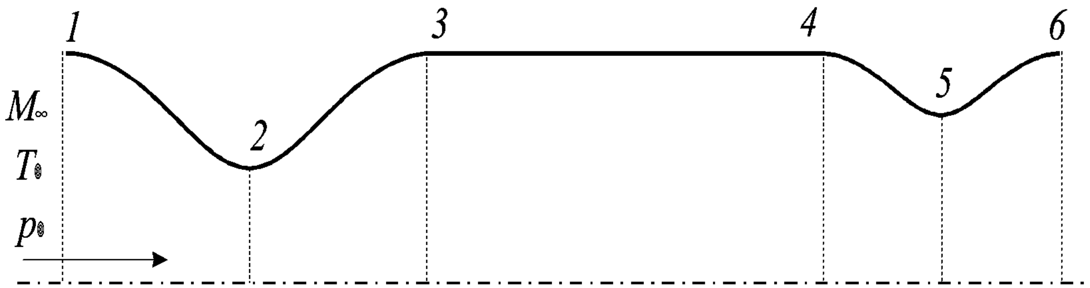
$$\frac{A_3}{A_2} = 1.34 \xrightarrow{ISO} M_3 = 0.500 \xrightarrow{RF} \begin{cases} \dfrac{p_{o3}}{p_o^*} = 1.114 \\ \dfrac{T_{o3}}{T_o^*} = 0.691 \end{cases}$$

$$p_o^* = \frac{p_o^*}{p_{o1}} p_{o1} = \frac{4.02}{1.114} = 3.61 \cdot atm$$

$$T_o^* = \frac{T_o^*}{T_{o1}} T_{o1} = \frac{450}{0.691} = 651 \cdot K$$

Conoscendo il flusso termico imposto si può calcolare la temperatura di ristagno nella sezione 4. Poi dalle tabelle (RF) si ricavano le condizioni nella sezione 4:

$$T_{o4} = T_{o3} + \frac{Q_{23}}{cp} = 450 + \frac{196.7}{1.004} = 646 \cdot K$$



$$\frac{T_{o4}}{T_o^*} = \frac{646}{651} = 0.992 \xrightarrow{RF} \begin{cases} M_4 = 0.901 \\ \dfrac{p_{04}}{p_o^*} = 1.005 \end{cases}$$

$$p_{o4} = p_{o6} = \frac{p_{o4}}{p_o^*} p_o^* = 3.63$$

Il testo dice che la pressione nella sezione 6 deve essere uguale a quella nella sezione 1 quindi per valutare il numero di Mach all'uscita si deve calcolare il rapporto:

$$\frac{p_6}{p_{o6}} = \frac{0.70}{3.63} = 0.1930 \xrightarrow{ISO} \begin{cases} M_6 = 1.732 \\ \dfrac{T_6}{T_{o6}} = 0.625 \end{cases}$$

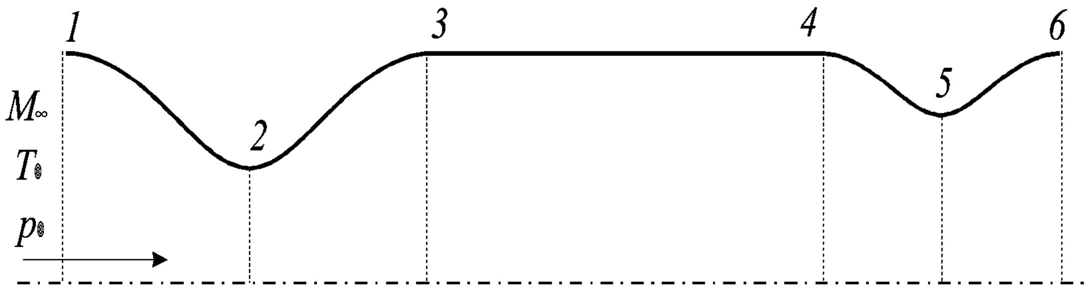
$$T_6 = \frac{T_6}{T_{o6}} T_{o6} = 0.625 \cdot 646 = 404 \cdot K$$

$$V_6 = M_6 a_6 = 1.732 \cdot \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 404} = 698 \cdot \frac{m}{s}$$

Prima di calcolare la spinta netta è necessario calcolare la portata:

$$\dot{m} = \frac{p_{02} A_2 \Psi^*}{a_{o2}} = \frac{4.02 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.0347 \cdot 0.810}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 450}} =$$

$$\dot{m} = 26.9 \cdot \frac{kg}{s}$$



Poichè la pressione all'ingresso ed all'uscita dell'autoreattore sono uguali a quella ambiente la spinta può essere calcolata come semplice differenza fra le quantità di moto :

$$S = \dot{m}(V_6 - V_1) = 26.9(698 - 596) = 2.73 \cdot kN$$