UNIVERSITY OF NAPLES ***FEDERICO II*** *1224 A.D.*

Gasdinamica

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

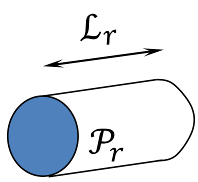
Versione del 4.3.2022

Richiami

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \underline{V}\, d\mathcal{V} + \int_A \rho\, \underline{V}\underline{V}\cdot \underline{n} dA + \int_A p\underline{n} dA - \int_A \underline{\underline{\tau_d}} \cdot \underline{n} dA = \int_A \rho\, \underline{g} d\mathcal{V}$$

In un **condotto** di lunghezza $\mathcal{L}_r$, perimetro $\mathcal{P}_r$ ed area di passaggio A_r il rapporto tra le **forze viscose** (presenti essenzialmente sulla superficie **laterale** del condotto) e le **forze d'inerzia** (presenti solo sulla superficie **permeabile** del condotto) risulta pari a:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r}{A_r}\frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4\mathcal{L}_r \frac{\mathcal{P}_r}{4A_r}\frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4\frac{\mathcal{L}_r}{D_r}\frac{f}{2}$$



dove:

$D_r = \frac{4A_r}{\mathcal{P}_r}$ **Diametro idraulico** (o equivalente)

$f = \frac{\tau_r}{\frac{1}{2}\rho_r V_r^2}$ **Coefficiente d'attrito**

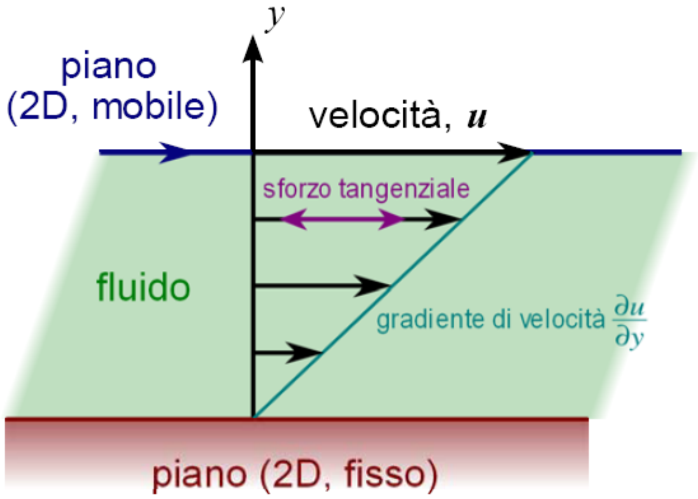
Per valori del coefficiente di attrito **molto bassi**, è possibile trascurare gli sforzi viscosi solo se il prodotto $4\frac{\mathcal{L}_r}{D_r}\frac{f}{2}$ è piccolo.

Richiami

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{f}{2}$$

Ricordando che: $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{f}{2} = \frac{\mu \frac{V_r}{D_r}}{\rho_r V_r^2} = \frac{\mu}{\rho_r D_r V_r} = \frac{1}{Re}$$

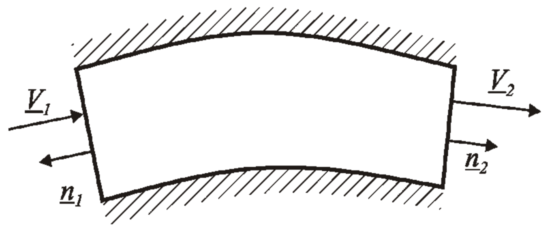


Quindi:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{f}{2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{1}{Re}$$

Per valori del numero di Reynolds **molto grandi** non è sempre possibile trascurare gli sforzi viscosi infatti è necessario che il prodotto $4 \frac{\mathcal{L}_r}{D_r} \frac{1}{Re}$ sia piccolo.

Richiami: conservazione della massa



$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

La portata di massa

$$\dot{m} = \rho V A$$

è costante.

La relazione è applicabile ad una qualunque sezione retta del condotto e indicando con G **il flusso di massa** si può scrivere in ogni sezione:

$$\dot{m} = \rho V A = G A = cost$$

Differenziando logaritmicamente si ha:

$$\ln \rho V A = \ln \rho + \ln V + \ln A = \ln cost$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

che rappresenta l'equazione della conservazione della **massa in forma differenziale** per un condotto nel quale un moto stazionario può essere considerato unidimensionale in qualunque sezione retta dello stesso,

Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

Che può anche essere messa nella forma:

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

Dove la grandezza fra in parentesi è **l'impulso specifico** *I*:

$$I = p + \rho\, V^2$$

Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

In forma differenziale proiettando sull'asse del condotto si ha:

$$-\cancel{\dot{m}}V + \dot{m}(\cancel{V} + dV) - pA + (p + dp)(A + dA) + dS_x = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

La spinta elementare è: $dS_x = -pdA + \tau_p \mathcal{P} dx$

Il termine: $dx\underline{g} \cdot \underline{i} = -gdz$

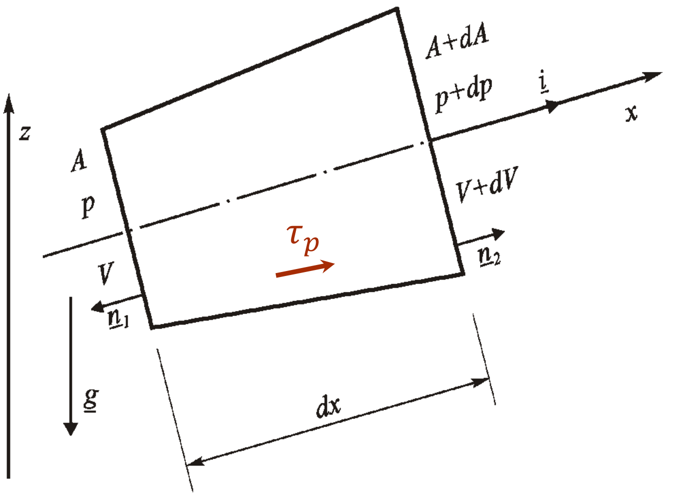
$$\dot{m}dV + p\cancel{d}A + dpA + dp\cancel{d}A - p\cancel{d}A + \tau_p \mathcal{P} dx = -\rho A g dz$$

dividendo per A:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{\mathcal{P}}{4A} dx + \rho g dz = 0$$

Ricordando la definizione di D_e, il **bilancio di quantità di moto in forma differenziale** diventa:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} + \rho g dz = 0$$



Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{\mathcal{P}}{4A} dx + \rho g dz = 0$$

Nell'ipotesi in cui lo sforzo tangenziale alla parete sia trascurabile (e.g. $Re \to \infty$) si trova l'equazione di **Bernoulli** in forma **differenziale**:

$$\rho V dV + dp + \rho g dz = 0$$

Integrando questa equazione, nell'ipotesi in cui il moto sia incompressibile ($\rho = cost$) si ritrova **l'equazione di Bernoulli**:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = cost$$

Richiami: conservazione dell'energia

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

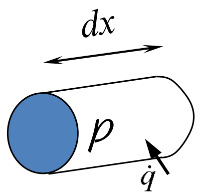
dove nell'ipotesi di trascurabilità degli effetti gravitazionali **l'entalpia specifica totale o di ristagno** è:

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

Per moto **anergodico** in forma **differenziale** si ha: $\dot{m} dH = d\dot{Q}$

Supponendo che la condizione al contorno sia di flusso termico **costante** $\dot{q}$ sulla superficie del condotto:

$$\dot{m} dH = \rho V A dH = d\dot{Q} = \dot{q}\mathcal{P} dx$$



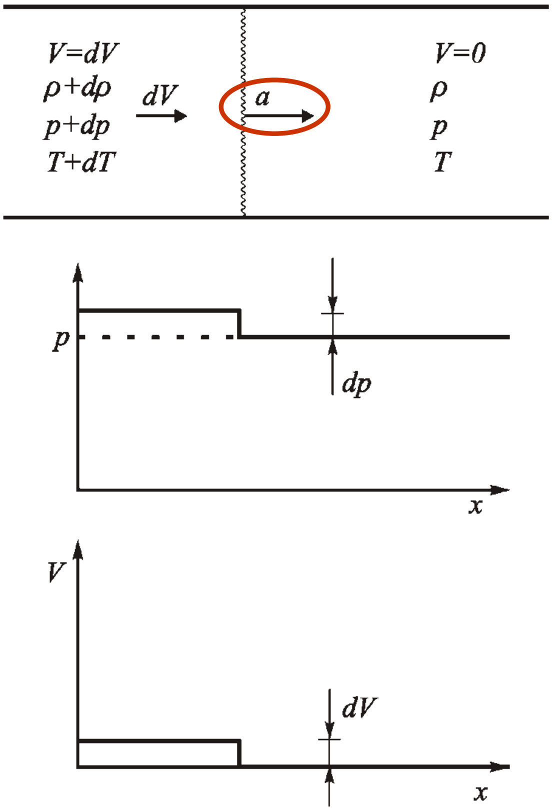
Dividendo per *A* e ricordando la definizione di D_e :

$$\rho V dH = 4\dot{q} \frac{\mathcal{P}}{4A} dx = 4\dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

Che è l'equazione di **conservazione dell'energia** per moti **anergodici, stazionari ed unidimensionali.**

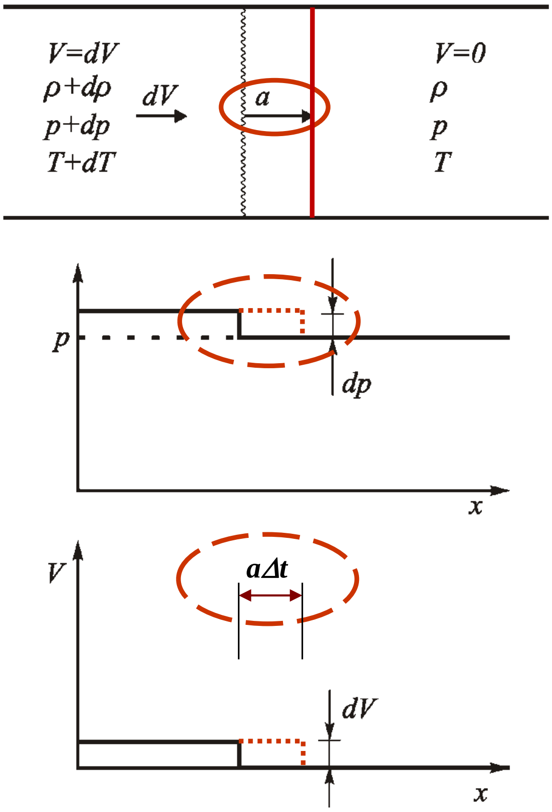
Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete.



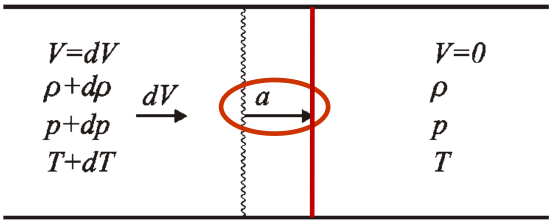
Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

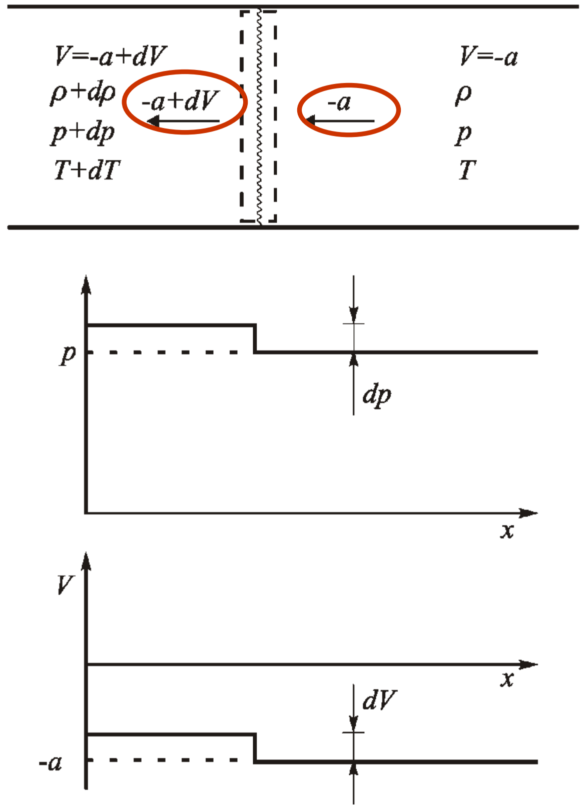
Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete. Dopo il tempo Δt:



Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Nel un **nuovo sistema di riferimento**, avente velocità a rispetto al primo, il disturbo di pressione si può fermare.





Per fermare l'onda, occorre dare a tutto il sistema una **velocità –*a*** e cioè muoversi con l'onda.

Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

L'equazione di **conservazione della massa**, per moti stazionari, in forma differenziale (dA=0):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

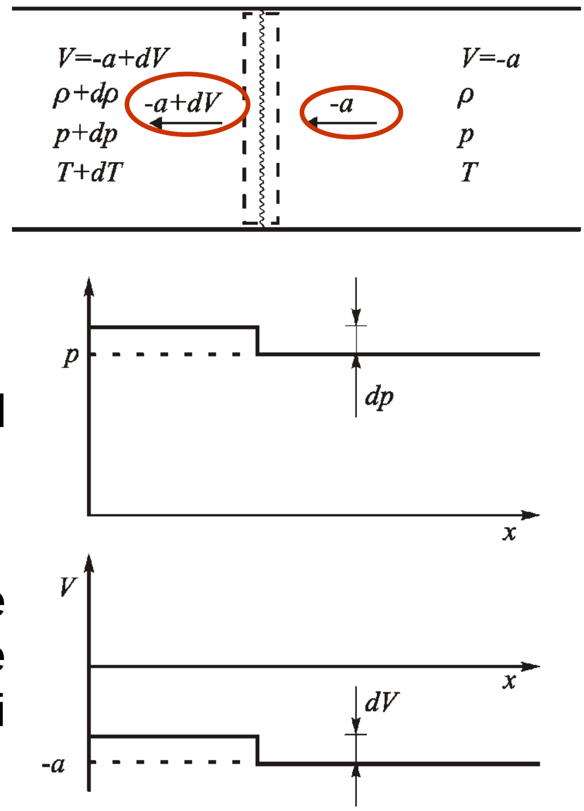
Tenuto conto che $V = -a$:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{-a} = 0 \quad \rightarrow \quad dV = a\frac{d\rho}{\rho}$$

Trascurando gli effetti gravitazionali il **bilancio della quantità di moto**:

$$dp + \rho V dV = 0 \quad \rightarrow \quad dp = \rho a dV$$

Per onde di **compressione** ($dp > 0$ e $d\rho > 0$) si ha $dV > 0$; quindi il fluido viene **accelerato** nella stessa **direzione** di propagazione **dell'onda**.



Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

$$dV = a\frac{d\rho}{\rho} \qquad dp = \rho a dV$$

Sostituendo si trova:

$$dp = \rho a^2 \frac{d\rho}{\rho} \qquad \rightarrow \quad a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **newtoniana** (**isoterma**) è :

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = [RT]_{gas\,perfetto}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **laplaciana** (**isoentropica**) è :

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = [\gamma RT]_{gas\,perfetto}$$

Non si è fatta alcuna ipotesi sul modello di gas.

Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un aneddoto riportato nella Enciclopedia Britannica dimostra quanto siano **piccoli i disturbi di pressione**.

Se in una notte di agosto si ha la ventura di passeggiare in aperta campagna, si può sentire a lungo un **grillo cantare**. In effetti è dimostrato che, in assenza di rumori di fondo, si può ascoltare il canto del grillo a **più di un chilometro di distanza**.

Ciò significa che il grillo mette in movimento almeno tutta l'aria racchiusa in una **semisfera di raggio un chilometro**.

Questa semisfera ha un **volume** $2\pi R^3/3$ che risulta di circa $2 \cdot 10^9 m^3$.

Poiché la densità dell'aria alla temperatura di 20°C (siamo in **agosto**) ed alla pressione atmosferica è pari a circa $1.2 kg/m^3$, risulta che il grillo mette in movimento con il suo canto una massa pari a $2.4 \cdot 10^9 kg$ di aria (due milioni quattrocentomila tonnellate).

I **disturbi di pressione** devono essere decisamente **piccoli** poiché la potenza sonora emessa dal violino del grillo è necessariamente limitata

Condizioni di ristagno in un fluido

La condizione di **ristagno** (detta anche **totale**) di una particella di fluido in moto è definita come la **condizione termodinamica** che *la particella raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione* ***adiabatica****,* ***anergodica*** *e* ***isoentropica*** *(omoenergetica e isoentropica)*.

La condizione di ristagno non è associata né alla condizione di moto quasi **unidimensionale**, né a quella di moto quasi **stazionario**.

Le condizioni di ristagno non rappresentano condizioni che debbano essere necessariamente presenti nel campo di moto oggetto di studio.

Ad ogni stato termofluidodinamico del fluido è associato **uno stato di ristagno** e, ovviamente, non è vero il contrario.

Lo stato **termofluidodinamico** di un sistema semplice è caratterizzato da **tre** parametri (due **termodinamici** più uno **cinetico**).

Lo stato di **ristagno** invece è uno caratterizzato da **solo due** parametri indipendenti tra loro (manca il **cinetico**).

Condizioni di ristagno in un fluido

Dalla definizione di **condizione di ristagno**, applicando l'equazione di conservazione dell'**energia**:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

Considerando il moto **omoenergetico** e **anergodico**, quando si rallenta un fluido, avente velocità V e livello entalpico h, sino a velocità nulla si raggiunge **l'entalpia totale, o di ristagno**:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

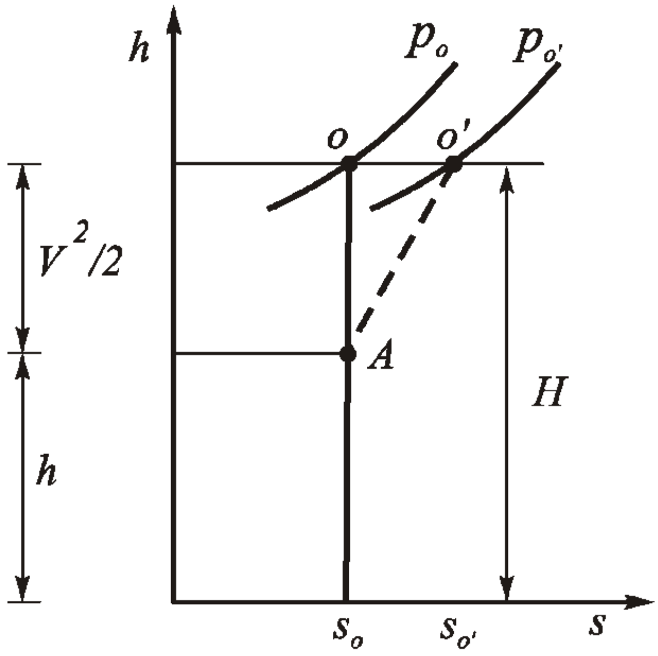
In generale, le **condizioni statiche** di una corrente sono quelle misurate con uno strumento che si **muove alla velocità del fluido**, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo.

Condizioni di ristagno in un fluido

$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$

Rallentando il fluido, anche con una trasformazione **non isoentropica** (punto o' dove $h_o = h_{o'}$), si raggiunge comunque l'entalpia di ristagno.

La condizione di **isoentropicità,** imposta nella definizione di condizione di ristagno è **necessaria** per poter gli altri parametri termodinamici di ristagno (e.g. $p_o \neq p_{o'}$).



Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

Per un gas più che perfetto si ha: $h = c_p T$; $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$; $a^2 = \gamma R T$:

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T = \frac{\mathrm{a}^2}{\gamma - 1}$$

da cui:

$$H = h\left(1 + \frac{V^2}{2h}\right) = h\left(1 + \frac{V^2}{2\frac{\mathrm{a}^2}{\gamma - 1}}\right) = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{V^2}{a^2}\right)$$

ed infine:

$$H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

L'importanza **relativa** del termine **cinetico** rispetto a quello relativo all'**entalpia sensibile**, è misurata dal **quadrato del numero di Mach**.

Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

In una corrente a basso **numero di Mach** $(M \ll 1)$ l'entalpia di **ristagno** praticamente **coincide** con quella **sensibile**.

Ad esempio in una corrente di aria $(\gamma = 1.4)$ a $\boldsymbol{M = 0.1}$ (che a temperatura ambiente corrisponde ad una velocità di circa $120 km/h$), l'entalpia di ristagno è superiore a quella sensibile di appena 0.002 (cioè il **2 per mille**). Correnti di questo tipo vengono dette **microsoniche**, o **iposoniche**

In una corrente ad elevato **numero di Mach**, l'entalpia di **ristagno** risulta di gran lunga **maggiore** di quella **sensibile**, il cui contributo potrebbe essere, al limite, trascurato.

Ad esempio in una corrente di aria a $M = 10$ l'entalpia sensibile rappresenta appena il **4,8%** dell'entalpia totale (1/21). Correnti di questo tipo vengono dette **ipersoniche.**

Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2} \qquad h = \frac{\mathrm{a}^2}{\gamma - 1} \qquad M^2 = \frac{V^2}{a^2}$$

Quindi:

$$M^2 = \frac{V^2/2}{h(\gamma - 1)/2}$$

Il **quadrato** del numero di **Mach** è **proporzionale** al rapporto tra **l'energia cinetica ordinata** $\boldsymbol{V^2/2}$ e quella **disordinata** ***h.***

Condizioni di ristagno in un fluido

Per gas più che perfetto la **temperatura** di **ristagno** o **totale** si ricava immediatamente dalla:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2} = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

dividendo per il calore specifico:

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

La temperatura *T* è detta temperatura **statica**, o **sensibile**, della corrente. Ed è quella misurata da un termometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**.

Condizioni di ristagno in un fluido

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

Ricordando che:

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \qquad \frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Si ottengono la **densità** e **pressione** di **ristagno**, o **totale**:

$$\rho_o = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \qquad p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Anche la pressione (e idealmente la densità) **statica** è quella misurata da un manometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**

Moto Isentropico (γ=1.4)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali (γ=1.4)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	ν(°)	μ(°)	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Condizioni di ristagno in un fluido

$$\frac{T_o}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\rho_o = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} ; \qquad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Queste funzioni sono tabellate:

Moto Isentropico (γ=1.4)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali (γ=1.4)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	$\nu(°)$	$\mu(°)$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Moto Isentropic			
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o
1.00	.5283	.6339	.8333
1.01	.5221	.6287	.8306
1.02	.5160	.6234	.8278
1.03	.5099	.6181	.8250
1.04	.5039	.6129	.8222

Ellisse delle velocità

In condizioni **omoenergetiche** e stazionarie, la massima velocità raggiungibile da un gas che possiede un'entalpia totale pari ad *H*, è detta **velocità limite** (o massima) ed si ricava semplicemente imponendo $h = 0$ nella:

$$H = h + \frac{V^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_l = \sqrt{2H}$$

Come già visto $h = \frac{\mathrm{a}^2}{\gamma - 1}$ e la **velocità del suono** (in condizioni) di **ristagno** è:

$$a_o^2 = (\gamma - 1) h_o = (\gamma - 1) H$$

Quindi sostituendo le relazioni precedenti si ha:

$$H = h + \frac{V^2}{2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{h}{H} + \frac{V^2}{2H} \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1$$

Che è l'equazione di un'**ellisse** in forma canonica.

Ellisse delle velocità

$$\frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1$$

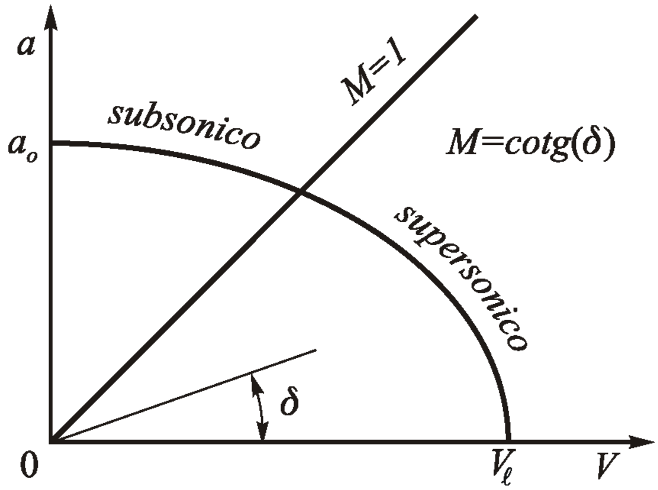
Questa equazione rappresenta la cosiddetta **ellisse delle velocità.**

Si ritrova ovviamente che:

- per $V = 0 \rightarrow a = a_o$
- per $a = h = 0 \rightarrow V = V_l$

È interessante notare come **all'aumentare della velocità** V, la velocità del **suono** a **diminuisca** e viceversa.

Nella figura è anche indicata la bisettrice del quadrante, di equazione $V = a$, corrispondente alle **condizioni soniche** per le quali si ha $M = 1$.



Ellisse delle velocità

$$H = h + \frac{V^2}{2}; \quad h = \frac{\mathrm{a}^2}{\gamma - 1}$$

Per $M = 1$, la velocità del fluido V^*, coincide con quella del suono a^* e si ha:

$$H = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{V^{*2}}{2} = a^{*2}\left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\right) = a^{*2}\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \rightarrow a^{*^2} = \frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

da cui ricordando che $V_l = \sqrt{2H}$; $a_o^2 = H(\gamma - 1)$:

$$a^* = V^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_l\sqrt{\frac{(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = a_o\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Le condizioni termofluidodinamiche corrispondenti a $\boldsymbol{M = 1}$ sono generalmente indicate con **l'apice** (*) e sono dette **condizioni critiche**.

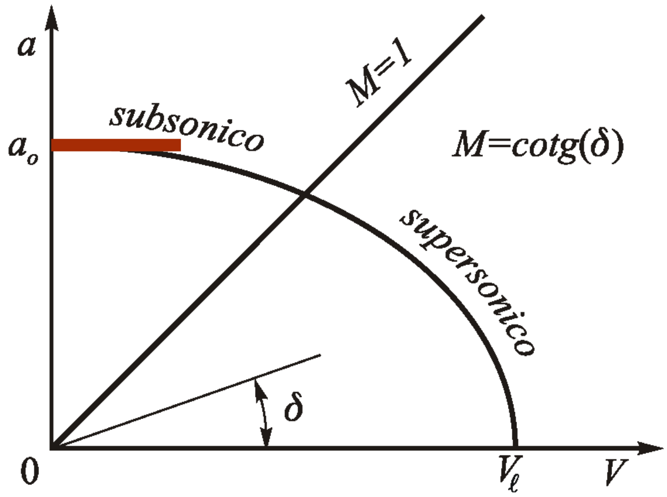
Ellisse delle velocità

Poiché $M = \frac{V}{a} = \cot\delta = 1/\tan\delta$, la zona dell'ellisse a sinistra della retta $M = 1$ corrisponde a condizioni di moto **subsonico** ($M < 1$) mentre quella a destra a moto **supersonico** ($M > 1$).

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscerne altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle *a*.

Questa zona è caratterizzata da variazioni di **densità molto piccole** ed il **moto** si può considerare effettivamente **incompressibile**.



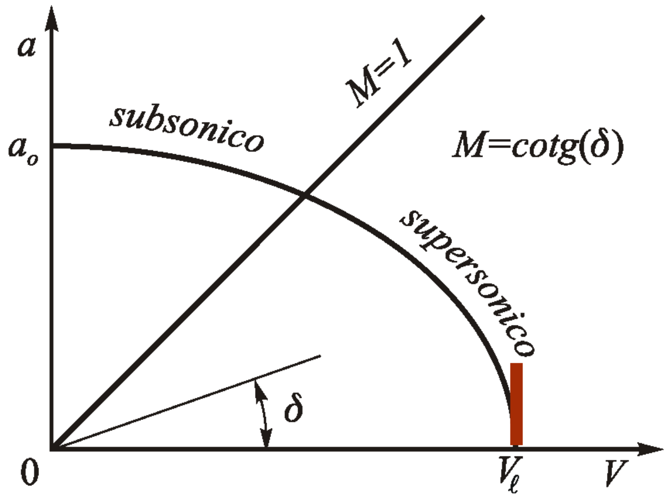
Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscerne altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle *a*.
- Valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico** , relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle *V*.

Questa zona è caratterizzata da valori dell'energia cinetica **ordinata** molto maggiori di quella **disordinata** *h*.

Nel caso di moto **ipersonico**, gli effetti di gas **reale** possono diventare rilevanti per cui l'ipotesi di modello di gas **più che perfetto** non sono verificate.

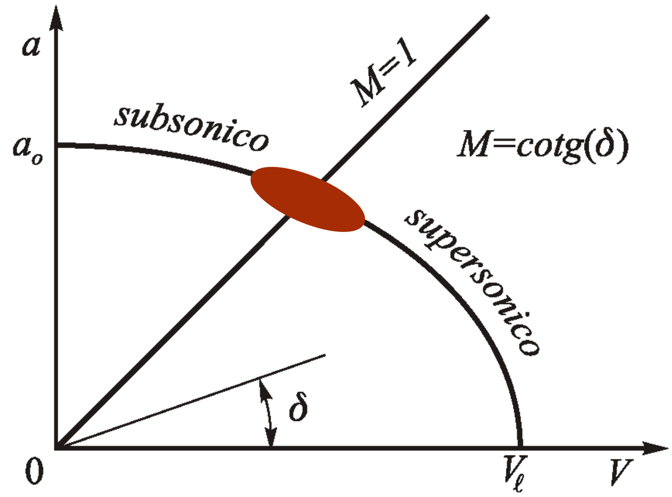


Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscerne altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle *a*.
- valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico** , relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle *V*.

La zona a cavallo della retta $M = 1$ viene detta di moto **transonico**.



Condotti ad area variabile

Si consideri, ora, un moto quasi **unidimensionale**, quasi **stazionario**, **omoenergetico** e **isoentropico** attraverso un condotto ad **area variabile**, cioè il moto di un fluido attraverso un condotto che presenta variazioni della sua area trasversale.

L'equazione di conservazione della **massa**, e del bilancio della **quantità di moto** per moti stazionari, in forma differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \qquad dp + \rho V dV = 0$$

Tenuto conto che per moto **isentropico** si ha $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$:

$$\frac{dp}{\rho}\frac{d\rho}{dp} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \qquad \frac{dp}{\rho} = -V dV$$

Sostituendo si trova:

$$\frac{-V dV}{a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{-V^2}{a^2}\frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$

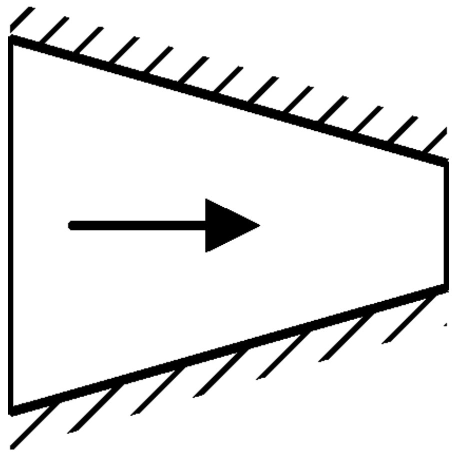
Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area,** non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **convergente** $dA < 0$ il fluido **tende** a $\boldsymbol{M = 1}$ infatti:

- in moto **subsonico** ($M^2 - 1 < 0$) il fluido **accelera** ($dV > 0$) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ($M^2 - 1 > 0$) il fluido **decelera** ($dV < 0$).



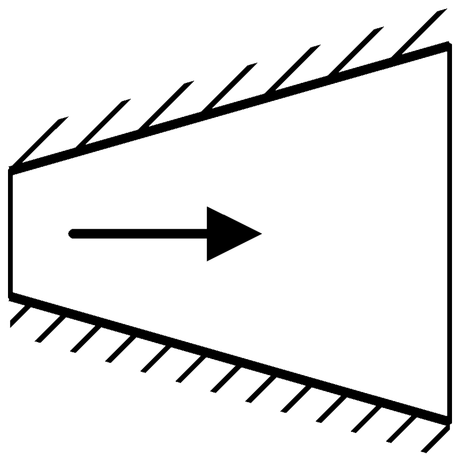
Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area,** non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **divergente** $dA > 0$ il fluido si **allontana** da $\boldsymbol{M = 1}$ infatti:

- in moto **subsonico** ($M^2 - 1 < 0$) il fluido **decelera** ($dV < 0$) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ($M^2 - 1 > 0$) il fluido **accelera** ($dV > 0$).

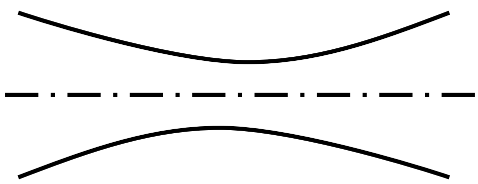


Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$

Se $M = 1$ allora $dA = 0$ e si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$. La sezione retta del condotto **deve avere** un punto di stazionarietà (minimo o massimo).

Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ($dA = 0$), quindi in un ugello **convergente-divergente**.



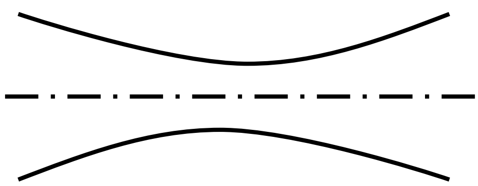
Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA = 0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.

Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$

Se $M = 1$ allora $dA = 0$ e si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$. La sezione retta del condott un punto di stazionarietà (minimo o massimo).

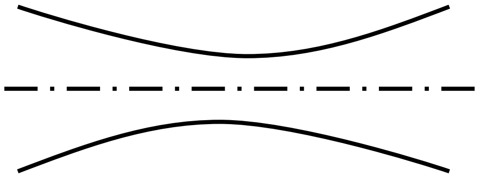
Evidentemente il moto **sor** zione molto particolare del flusso (pertanto è anche e permette di passare da moto subsonico a superso . La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezior otto ha un punto di **minimo** ($dA = 0$), quindi in un ugell **ivergente**.



Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA = 0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.

Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1);$$



La condizione $dA = 0$ (**gola del condotto**, per la quale l'area è minima) può comportare $dV \neq 0$ solo se $M = 1$, potendosi comunque avere, anche per $M = 1,\ dV = 0$.

Il punto $M = 1$ (che comporta) è un **punto di biforcazione** della soluzione e cioè del comportamento del fluido poiché questo può:

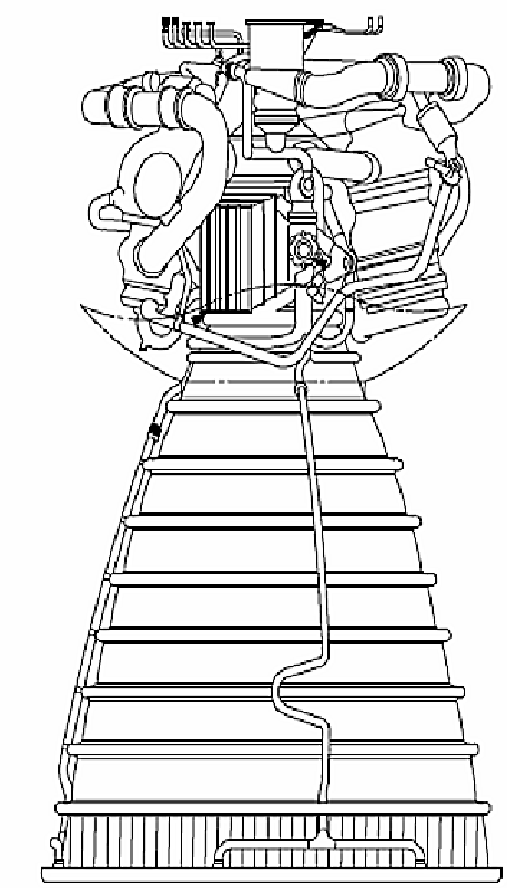
- passare da moto **subsonico a supersonico**, ovvero ritornare ancora subsonico
- passare da moto **supersonico a subsonico**, ovvero ritornare ancora supersonico;

In un condotto **convergente** $(dA < 0)$, un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) **fino a $\boldsymbol{M = 1}$**.

Condotti ad area variabile

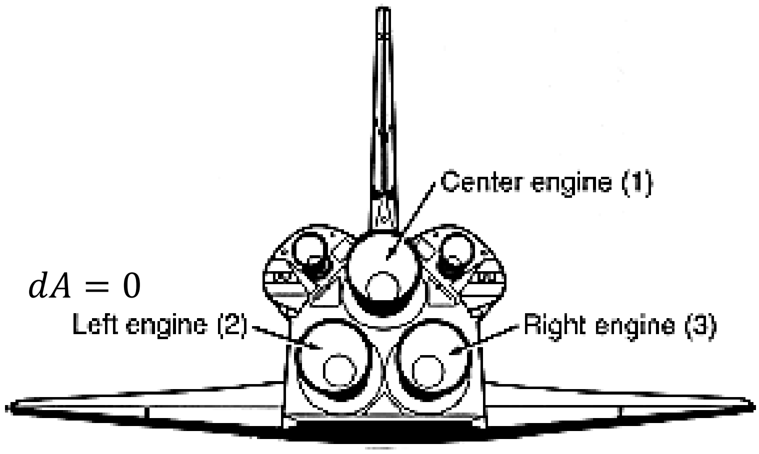
Space Shuttle as seen from its back with fired engines

Condotti ad area variabile



Space Shuttle Main Engine

$dA = 0$



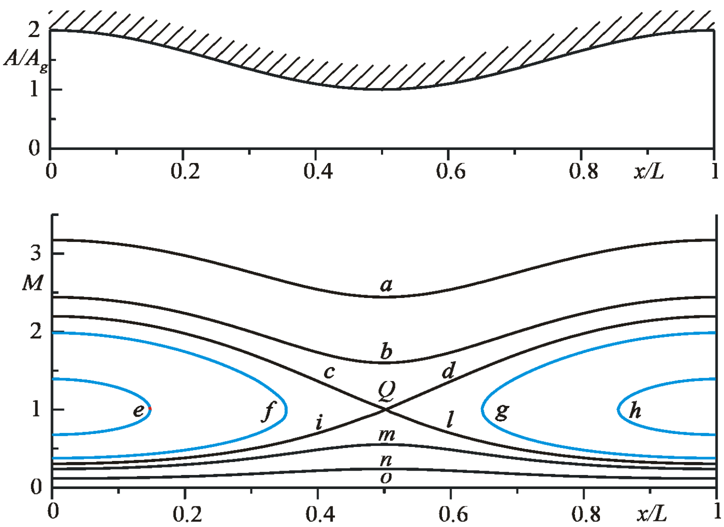
Main Engine Numbering System

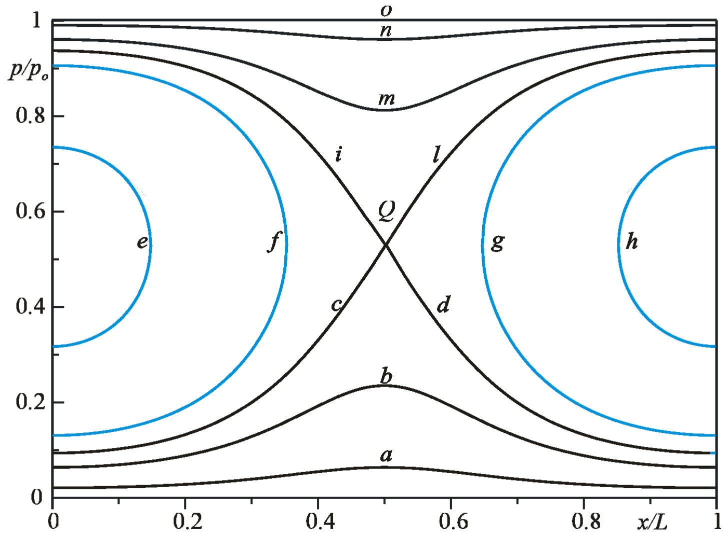
Condotti ad area variabile gas più che perfetti

Per gas più che perfetto si possono trovare le seguenti relazioni:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad ; \quad p_o = p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Fissata una distribuzione delle aree si possono diagrammare **pressione** e numero di **Mach in funzione** della coordinata spaziale.





Condotti ad area variabile gas più che perfetti

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad ; \quad p_o = p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Le curve colorate e, f, g e h **non** rappresentano **soluzioni** del problema perché non connettono gli stati a monte con quelli a valle e **prevedono $M = 1$** in una sezione diversa dalla sezione di **gola**.