



UNIVERSITY OF NAPLES **FEDERICO II** 1224 A.D.

## Gasdinamica

T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

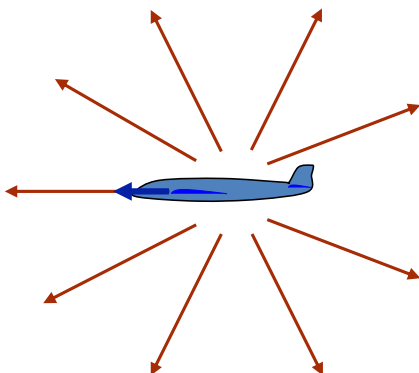
[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

Versione del 14.3.2022

### Introduzione

E' stato visto in precedenza che i piccoli disturbi di pressione si propagano alla velocità del suono.

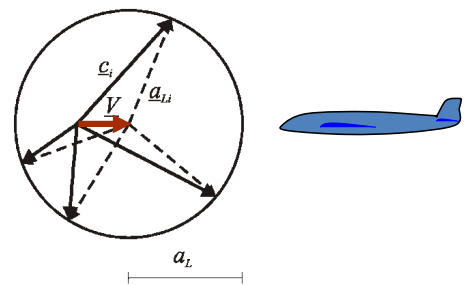
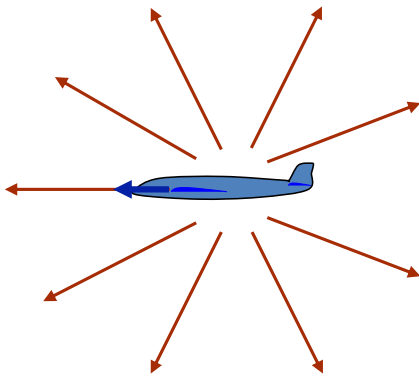
Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto



## Introduzione

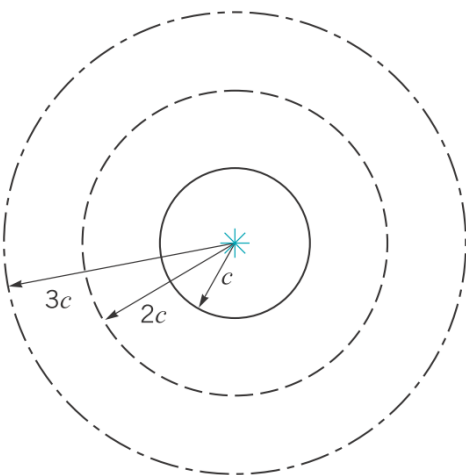
Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto.

Alternativamente, in un **sistema di riferimento** inerziale per il quale **l'oggetto è fermo** ed è investito da una corrente **subsonica**, questi disturbi riescono a **risalire la corrente** in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto la corrente viaggi verso valle.



## Introduzione

Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso.

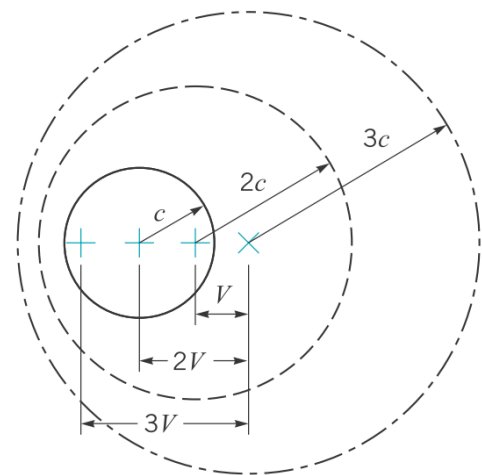


----- Wave emitted at  $t = 0$  s

----- Wave emitted at  $t = 1$  s

----- Wave emitted at  $t = 2$  s

Velocità nulla ( $M=0$ )

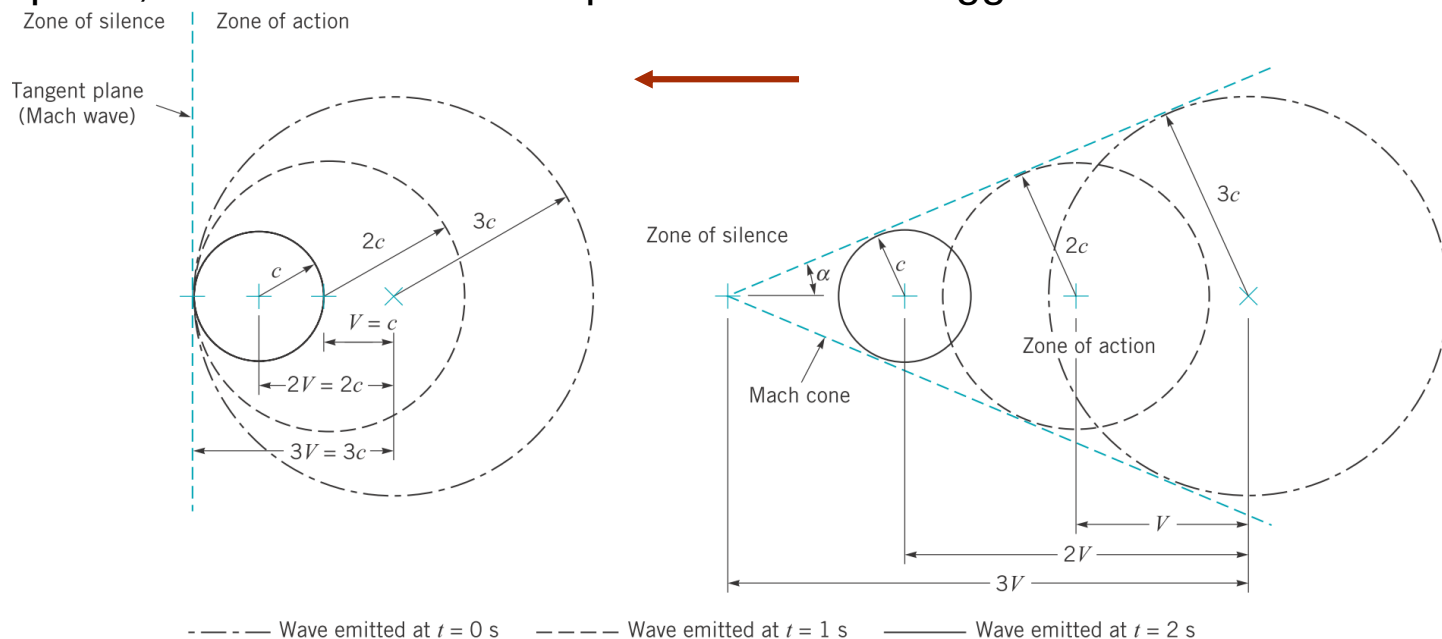


Velocità Subsonica ( $M=0.7$ )



# Introduzione

Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.



Velocità sonica (M=1)

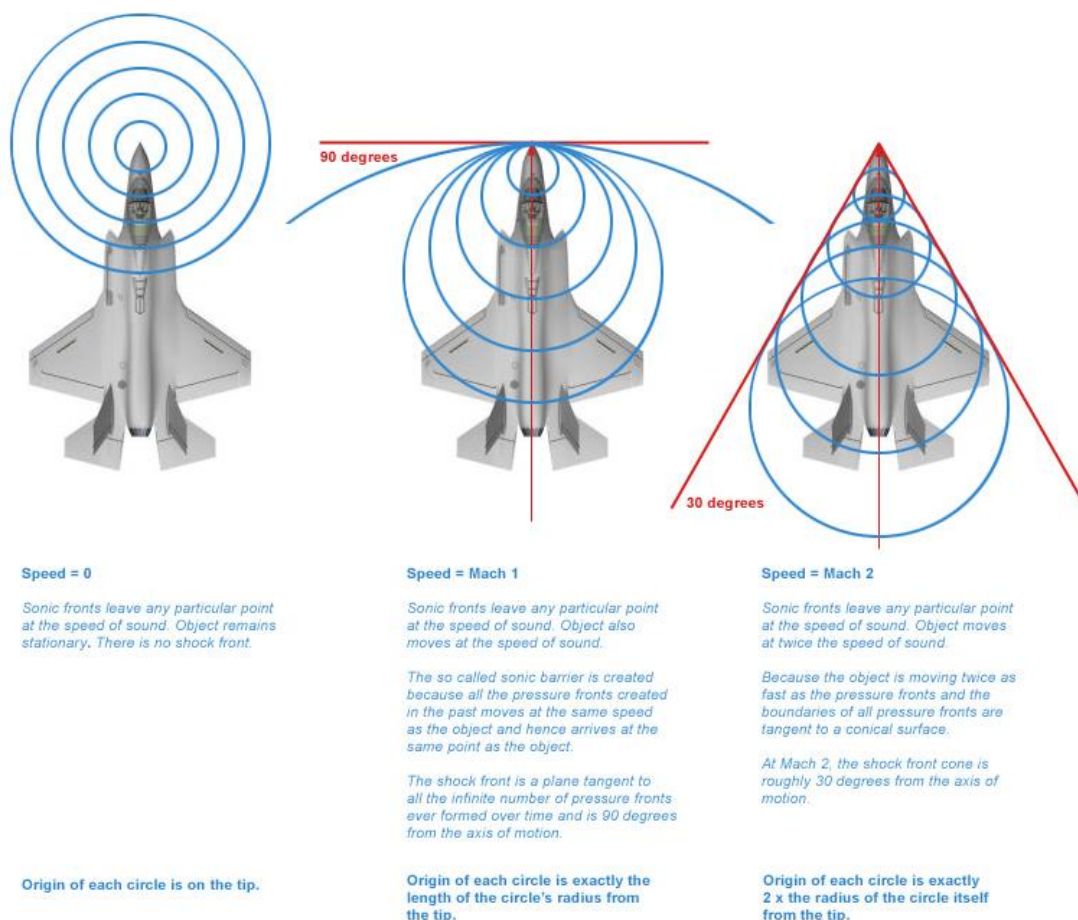
Velocità Supersonica (M=2)



Gasdinamica – GA 3.1 Onde d'urto - [astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

5

# Introduzione



© Dwight Looi, Jan 2007



Gasdinamica – GA 3.1 Onde d'urto - [astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

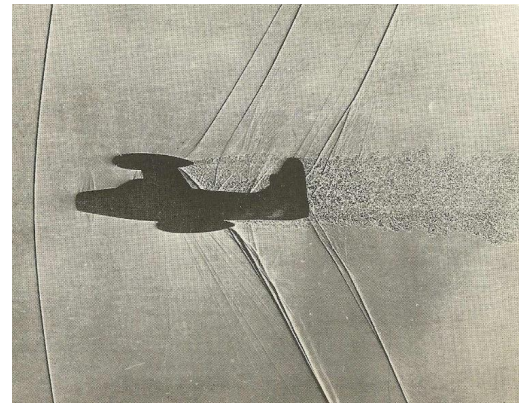
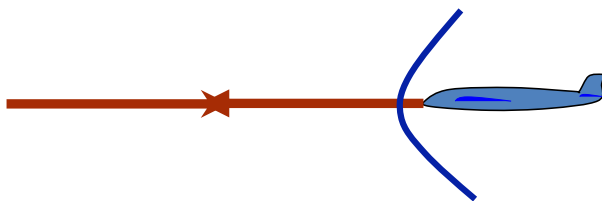
6

# Introduzione

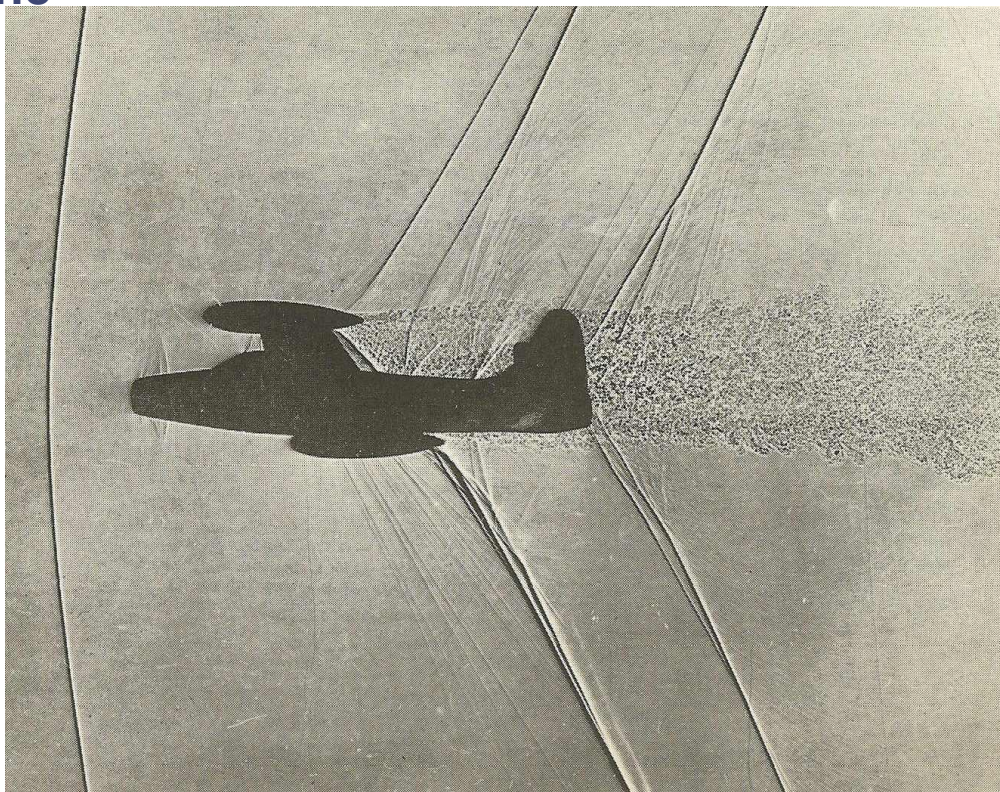
Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

**L'oggetto** deve, in ogni caso, **passare** e l'aria si deve aprire per farlo passare. Da ciò deriva la presenza di **superfici di discontinuità (onde d'urto)** che, rendendo la corrente **subsonica**, e/o **deviando** la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per far passare il corpo.

Le onde d'urto possono essere presenti anche in **altre situazioni fluidodinamiche**.



# Introduzione



Shadowgraph del Thunderjet F84 (scala 1/200 ,  $M = 1.05$ ). **L'onda d'urto** davanti all'aereo, che viaggia a  $M \cong 1$ , è praticamente **normale** alla corrente che lo investe.





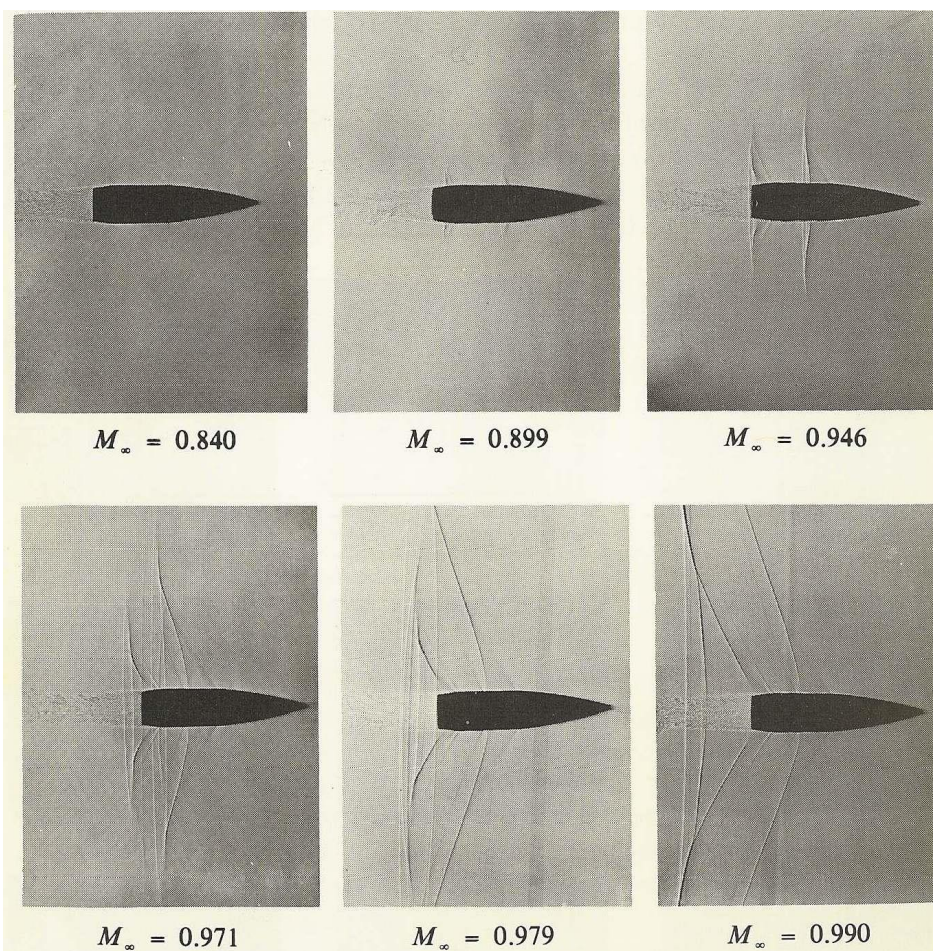
F14 rompe il muro del suono



## Introduzione

Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **transonico**.

Pur essendo il moto **subsonico**, si può notare la presenza di onde (di Mach, o deboli onde urto) dove la corrente accelera.

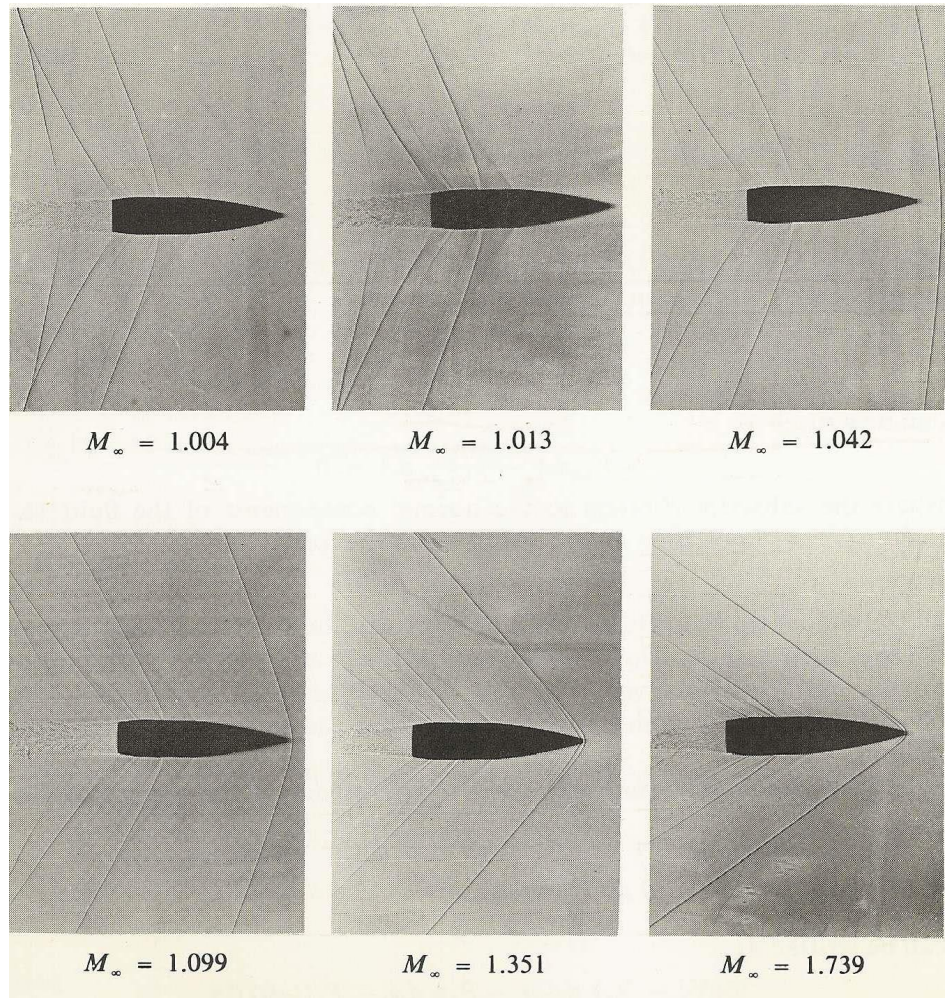


# Introduzione

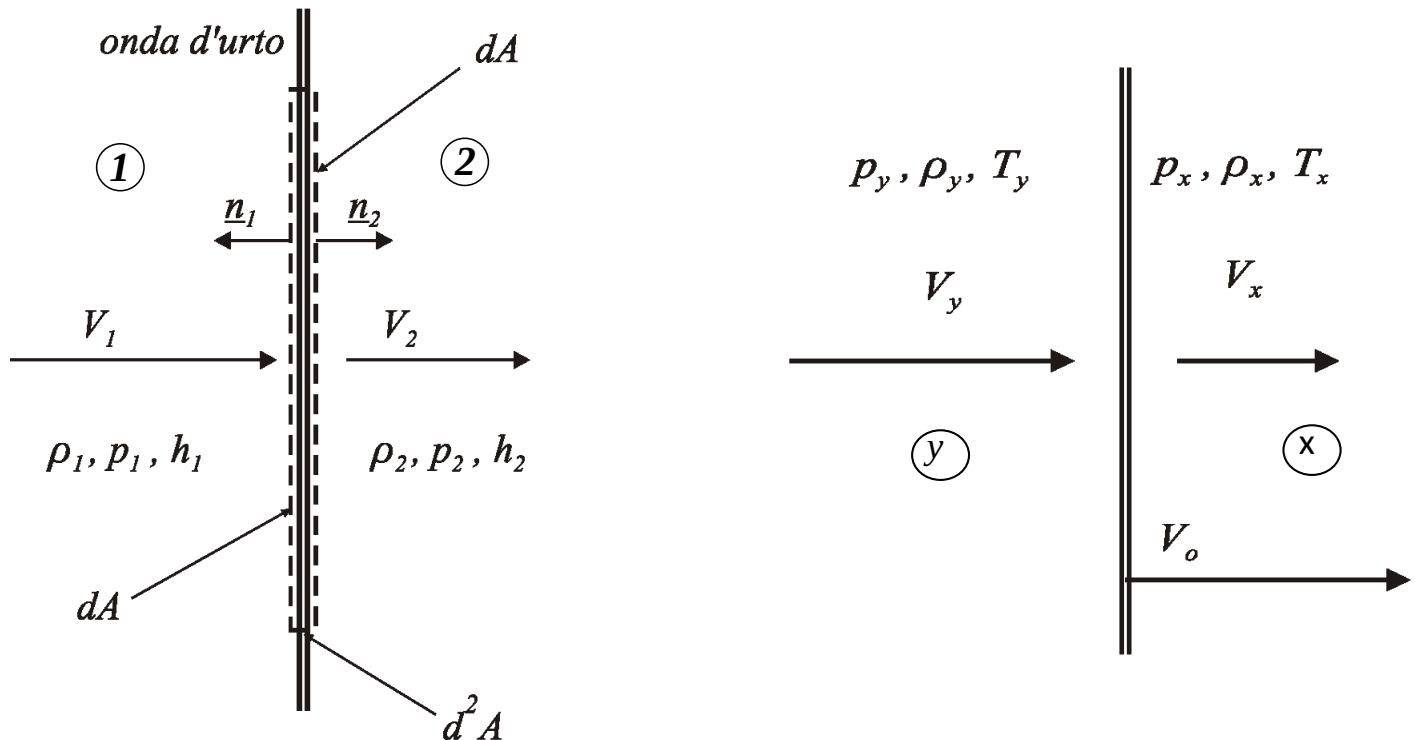
Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **supersonico**.

Ai bassi numeri di Mach (1.004 e 1.013) l'onda si trova molto a monte del corpo e **non appare**.

L'onda d'urto staccata, è quasi **normale**, per  $M \cong 1$  e si avvicina al corpo **inclinandosi** verso valle **all'aumentare** del numero di **Mach**.



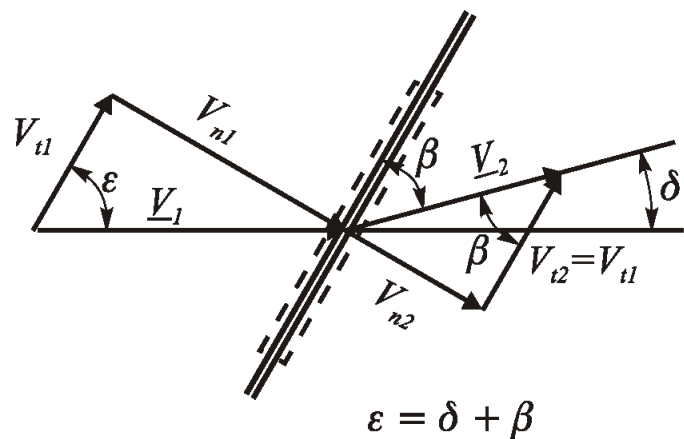
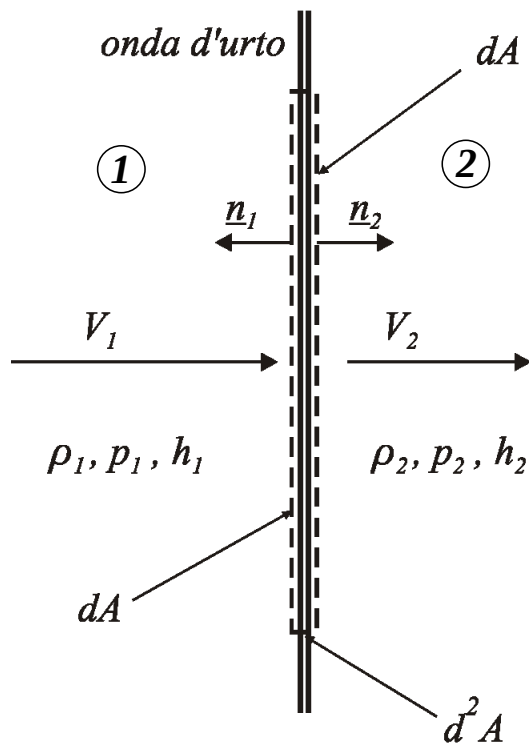
## Introduzione



Le condizioni a monte dell'onda sono rispettivamente 1 (a sinistra) e x (a destra) per onde **stazionarie** e **non stazionarie**.



# Introduzione



Le onde d'urto si chiamano **normali** (a sinistra), quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda. In caso contrario, si dicono **oblique** (a destra).



## Ipotesi

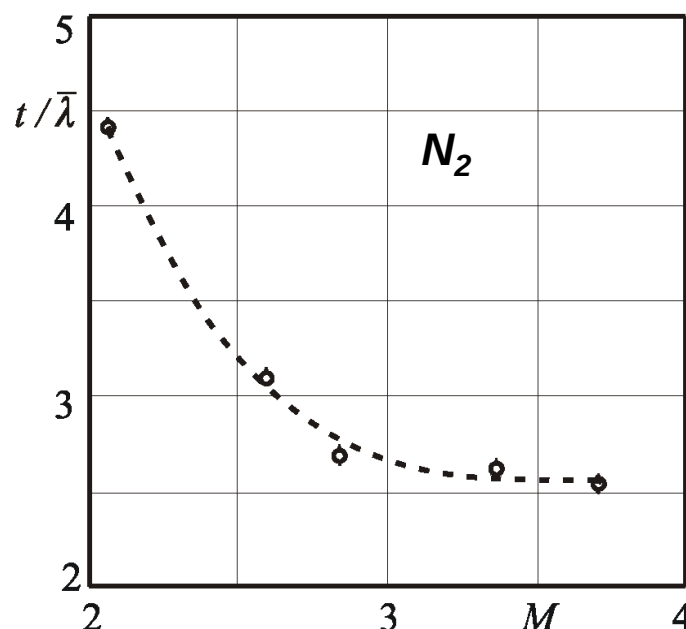
Inizialmente le ipotesi su cui si baserà lo studio sono:

- onde d'urto **adiabatiche** (il fluido non scambia energia nel modo calore);
- onde d'urto **anergodiche** (il fluido non scambia energia nel modo lavoro);

Nella figura a lato è riportato lo **spessore** di un'onda d'urto, misurato per una corrente di azoto  $N_2$ , in termini di **libero cammino medio** molecolare, al variare  $M$ .

Per aria in condizioni normali il libero cammino medio molecolare è dell'ordine di  $0.1\mu m$  (il diametro di un capello umano è  $\sim 80\mu m$ ).

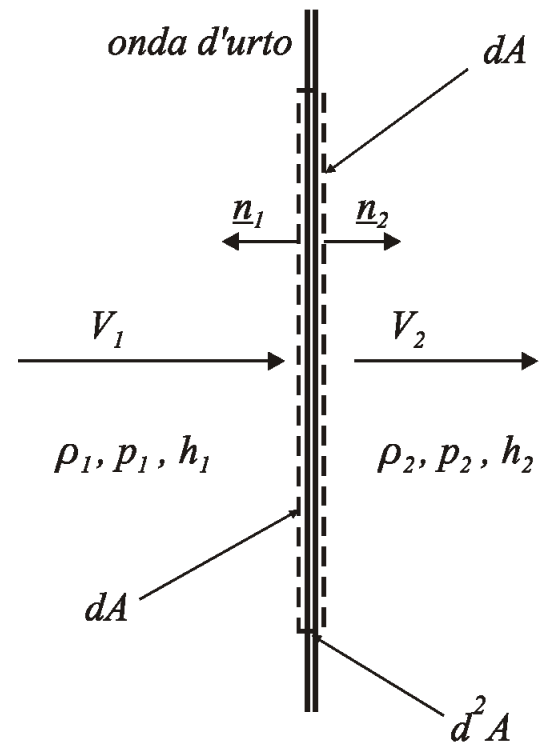
Quindi lo **spessore** di un'onda d'urto, essendo dell'ordine di qualche libero cammino medio molecolare, è **di vari ordini di grandezza inferiore** a quelli di una tipica lunghezza caratteristica.



## Ipotesi

In figura è mostrato, con una linea tratteggiata, il **volume** di **controllo** "a monetina".

**Perché?**



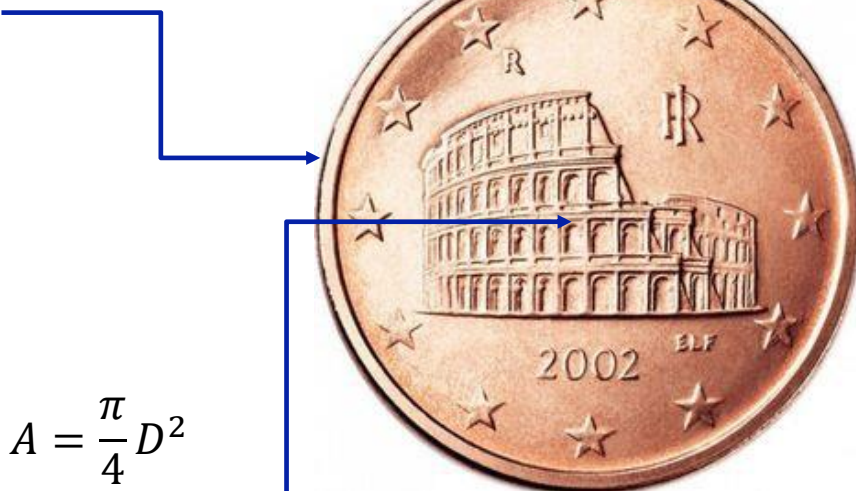
## Ipotesi

In figura è mostrato, con una linea tratteggiata, il **volume** di **controllo** "a monetina".

**Perché?**

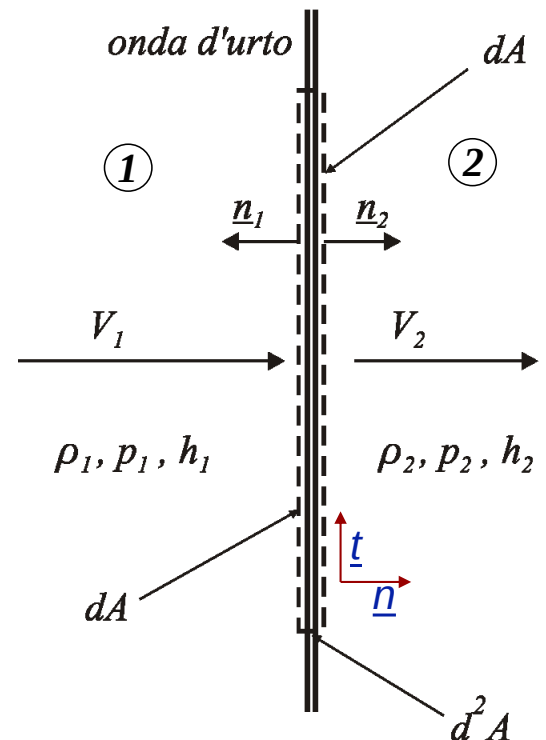
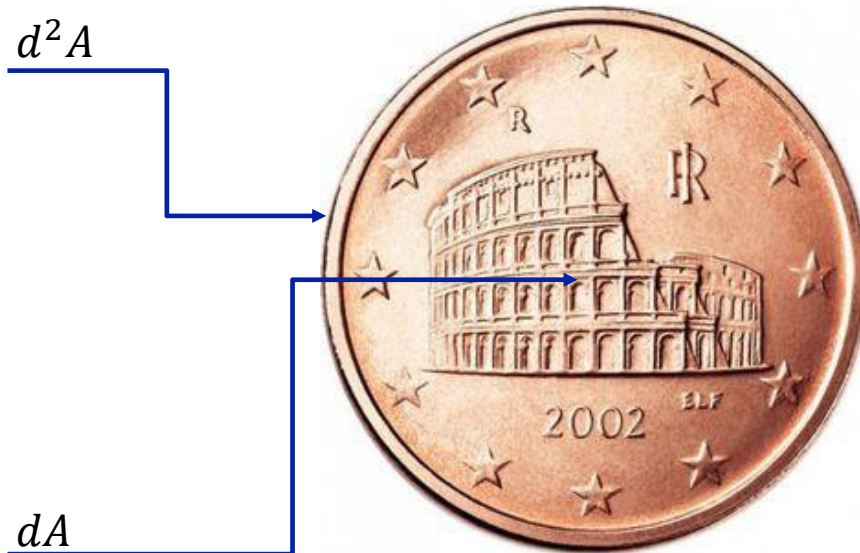
Lo spessore è molto inferiore a al diametro e si possono **trascurare** i termini che dipendono **dallo spessore** (i.e. quelli che dipendono dal volume o dalla superficie laterale).

$$dA = ds\mathcal{P}$$



# Ipotesi

Per poter considerare anche onde d'urto **curve** si può supporre che il diametro sia infinitesimo e che lo **spessore** sia un **infinitesimo** di **ordine superiore**.



## Onde d'urto normali

L'equazione della **quantità di moto** è:

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Il termine gravitazionale dipende dal volume, mentre la spinta dalla superficie laterale quindi sono entrambi **trascurabili**:

$$d\dot{m}(V_2 - V_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

Proiettata in direzione **tangenziale**:

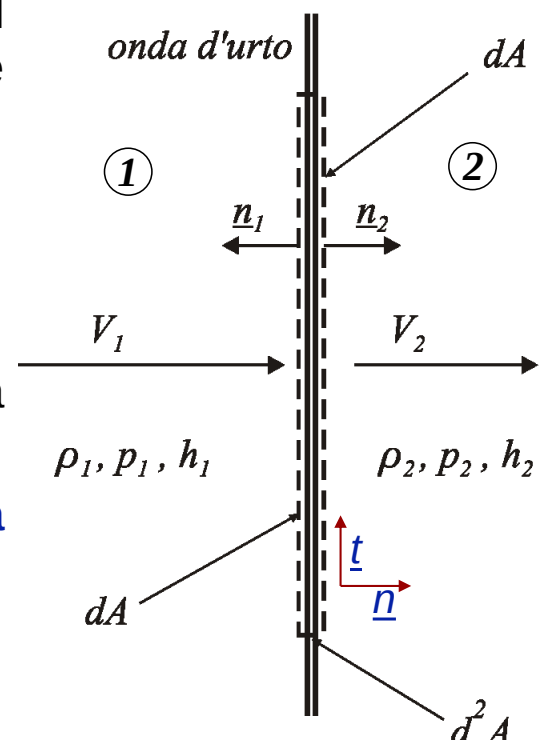
$$d\dot{m}(V_{t2} - V_{t1}) = 0 \rightarrow V_{t2} = V_{t1}$$

Un onda d'urto normale **non** provoca una **deviazione** della **corrente**.

L'equazione di conservazione della **massa** è:

$$d\dot{m} = \rho V dA = G dA = \text{cost}$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$



## Onde d'urto normali

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

$$d\dot{m} (V_2 - V_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

Proiettata in direzione **normale** e dividendo per  $dA$  ( $\underline{n}_1 \cdot \underline{n} = -1$ ,  $\underline{n}_2 \cdot \underline{n} = 1$ ):

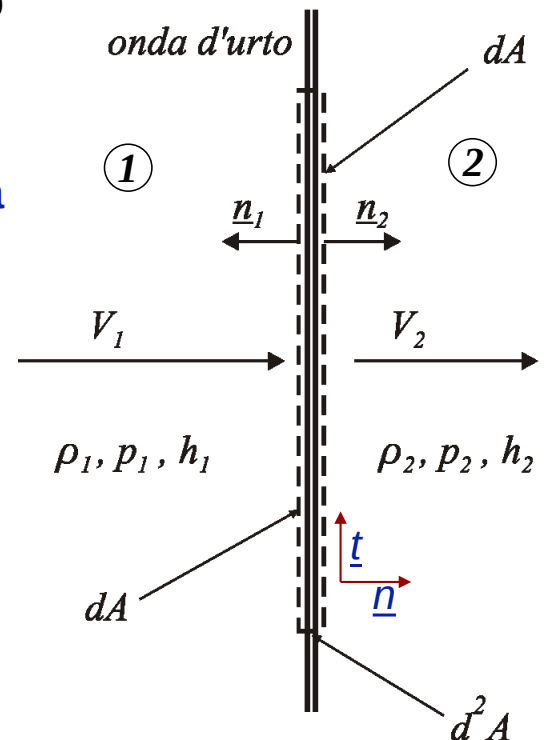
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

L'equazione di conservazione dell'**energia** è:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

Nelle ipotesi fatte  $\dot{Q} = \dot{L} = 0$ . Quindi:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$



## Onde d'urto normali

Ricapitolando, attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

Nella derivazione di queste equazioni non è stata fatta alcuna **ipotesi** sul **modello di gas**. Sono quindi completamente **generali**.

Dalla prima equazione è immediato verificare che se l'onda è di **compressione** (aumento di densità) la **velocità** a valle **diminuisce**.

Dalla seconda e dalla terza ( $G = \text{cost}$ ):

$$p_1 + G V_1 = p_2 + G V_2 = \text{cost}$$

Si nota che la **pressione** e l'**entalpia sensibile** devono **aumentare**.



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

Ricapitolando, attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\begin{aligned}\rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 = G = \text{cost} \\ p_1 + \rho_1 V_1^2 &= p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost} \\ h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}\end{aligned}$$

Per **gas più che perfetti** questo sistema d'equazioni, unito alle equazioni di stato, si può risolvere esplicitamente fornendo le grandezze a **valle** dell'onda in funzione di quelle a **monte**.

La **soluzione** benché non particolarmente complessa è **tediosa** e, nel seguito, saranno riportati solo i risultati ed alcuni passaggi più rilevanti.

Combinando queste equazioni si trova la **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali:

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2} = \text{cost}$$



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

Combinando queste equazioni si trova la **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali (naturalmente la relazione è simmetrica):

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2} = \text{cost}$$

La **velocità critica del suono** è la **media geometrica** tra la **velocità a monte** e a **valle** dell'onda d'urto.

Si richiama per completezza la relazione già trovata in precedenza:

$$a^* = V^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma-1)}{\gamma+1}} = V_l \sqrt{\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Ha senso introdurre il numero di Mach riferito alla velocità del suono critica (*Mach star*):

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

Questo è l'unico caso in cui **non** si **utilizza l'apice** per indicare delle **condizioni critiche**.



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

La **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali diventa quindi:

$$M_1^* M_2^* = 1$$

Ricordando la  $T_o = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$  si ha:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{\gamma R T}{\gamma R T^*} = M^2 \frac{T}{T_o} \frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)$$

$$M^{*2} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{\gamma+1}{2}$$

Sostituendo questa relazione nella relazione di Prandtl si ottiene si ottiene infine la **relazione** che lega il numero di Mach a **valle**  $M_2$  a quello a **monte**  $M_1$  dell'onda:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$

Si possono fare le seguenti osservazioni (si ricorda che per la stabilità termodinamica  $\gamma > 1$ ):

- per  $M_1 = 1$  si ha  $M_2 = 1$  che è la soluzione banale;
- il denominatore cresce più rapidamente del numeratore quindi la funzione è strettamente decrescente (quindi  $M_2 \leq 1$ );
- per  $M_1 \rightarrow \infty$  si ha un asintoto (in parentesi il valore per  $\gamma = 1.4$ ):

$$M_{2l} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = (0.3780);$$

- il denominatore si annulla per  $M_1 = M_{2l}$  e per valori di  $M_1$  inferiore a questo valore la funzione restituisce valori complessi.



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

Utilizzando la relazione precedente si possono trovare i seguenti **rapporti caratteristici** per **onda d'urto normale**; essi sono funzione del solo numero di Mach a monte dell'onda d'urto e di  $\gamma$ .

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

Come già detto per  $M_1 > 1$  la pressione, la temperatura e la densità aumentano a valle dell'onda ovvero i rapporti, per  $\gamma > 1$ , **sono maggiori di uno**.



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[ (\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left( (\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Il rapporto fra le pressioni di ristagno, invece, è per  $M_1 > 1$  **minore di uno**, quindi la pressione di ristagno a valle dell'onda diminuisce.

La relazione fondamentale entropica, applicata in condizioni di ristagno e per  $T_{o2} = T_{o1}$  è:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Da cui si valuta la **variazione di entropia** attraverso un onda d'urto:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[ -(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

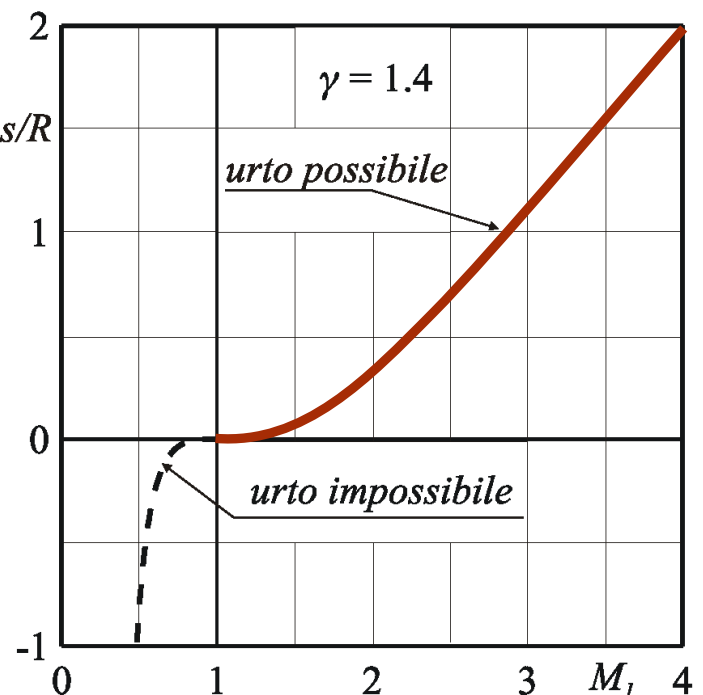


## Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[ -(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Per il **secondo principio** della **termodinamica** il salto di **entropia**  $\Delta s/R$  deve essere **positivo** ed è possibile dare un verso alla trasformazione.

Dal diagramma si vede che gli unici **urti possibili** sono quelli in cui  $M_1 \geq 1$ .



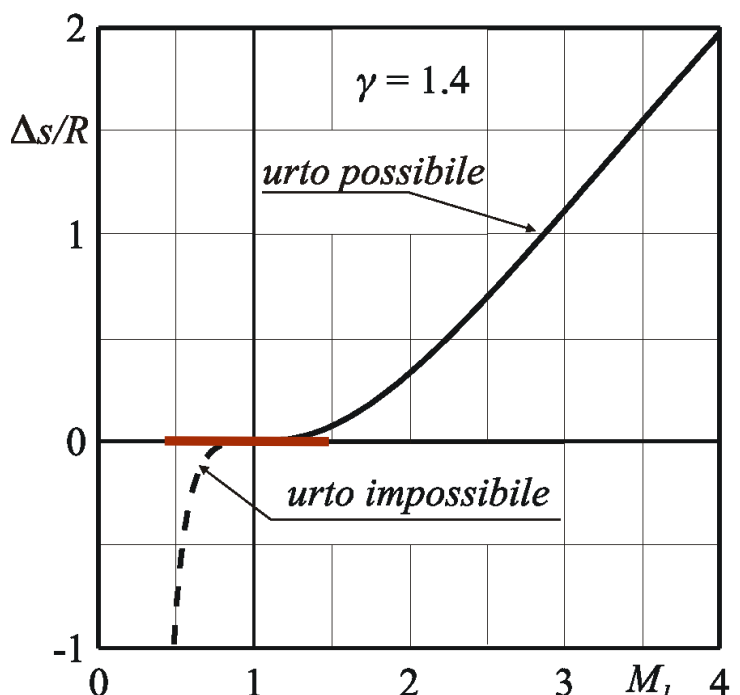
## Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[ -(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di  $M_1 = 1$  si ha:

$$\lim_{M_1 \rightarrow 1} \frac{\Delta s}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

La variazione d'**entropia** ha un **flesso a tangente orizzontale**, ovvero la prime due derivate, nell'intorno di  $M_1 = 1$  sono nulle.

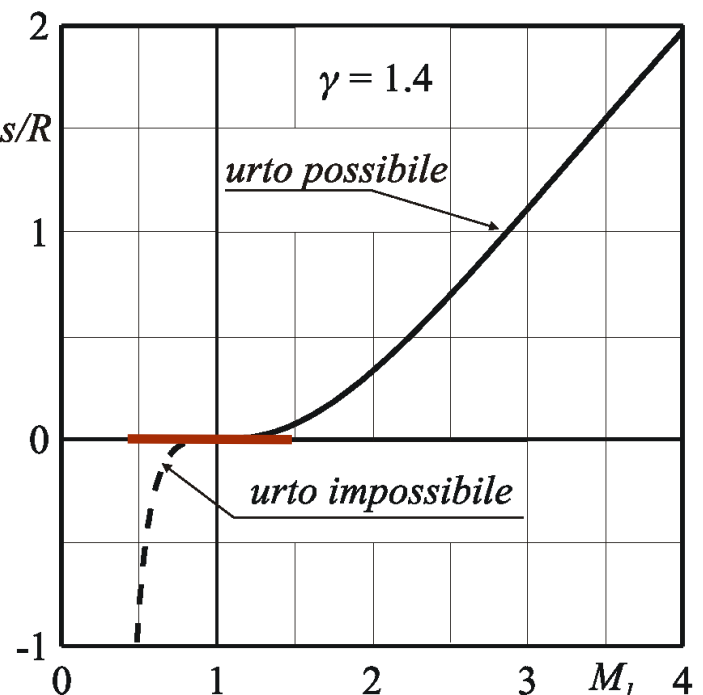


## Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[ -(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Le onde d'urto che avvengono per  $M_1 = 1$ , dette **onde di Mach**, sono  $\Delta s/R$  praticamente **isoentropiche**, cioè **reversibili**.

Le onde di Mach, essendo reversibili possono essere sia di **compressione** sia di **espansione**.

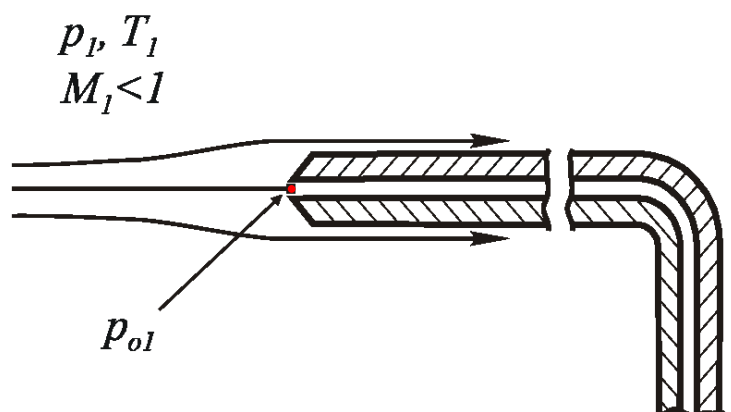
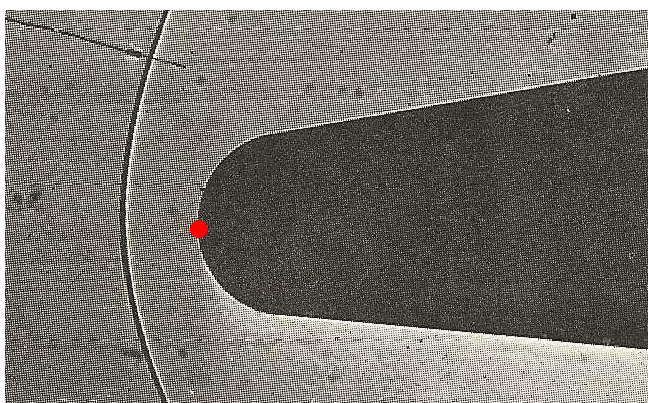


## Onde d'urto normali gas più che perfetti

In regime **subsonico** il **tubo di Pitot** è utilizzato per **misurare** la **velocità della corrente**. Si ipotizza che la corrente rallenti in modo **adiabatico** ed **isentropico** raggiungendo le condizioni di ristagno nel punto rosso di figura. Il tubo di Pitot misura la **pressione di ristagno**.

Applicando le relazioni **isentropiche** o, se il regime di moto è incompressibile, l'equazione di **Bernoulli** si può facilmente calcolare la **velocità**.

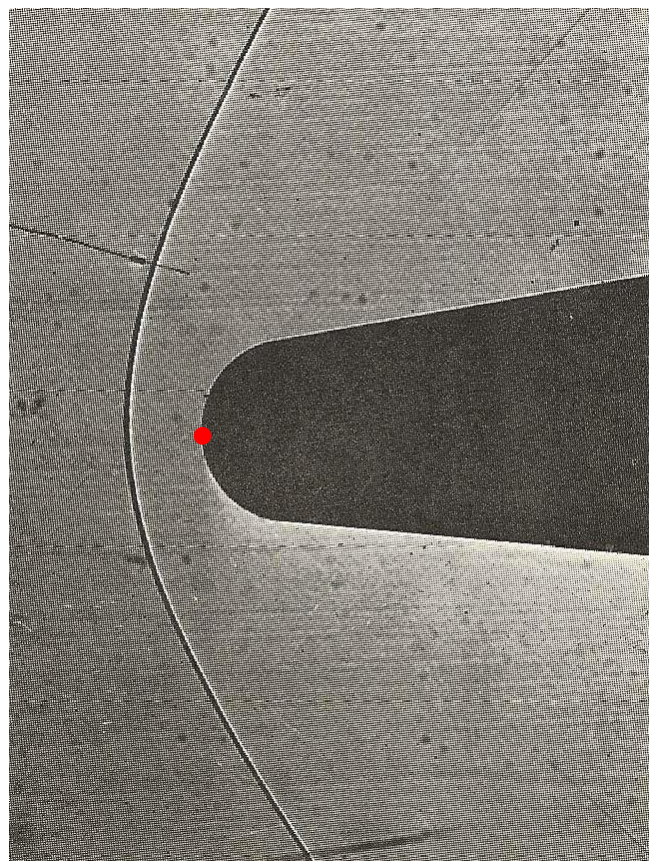
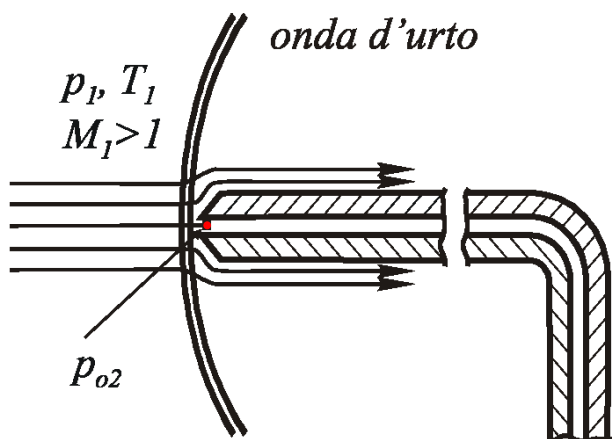
In regime **supersonico**, il tubo di Pitot si comporta come un **corpo tozzo** e nasce un'onda d'urto.



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

In figura è visualizzata l'onda d'urto generata in un flusso **supersonico** su un cono smussato a  $M = 1.36$ .

L'onda, sull'asse del cono, è **normale** all'asse stesso e, in questo caso, nel punto rosso si raggiungono le condizioni si **ristagno** a **valle** dell'onda d'urto.

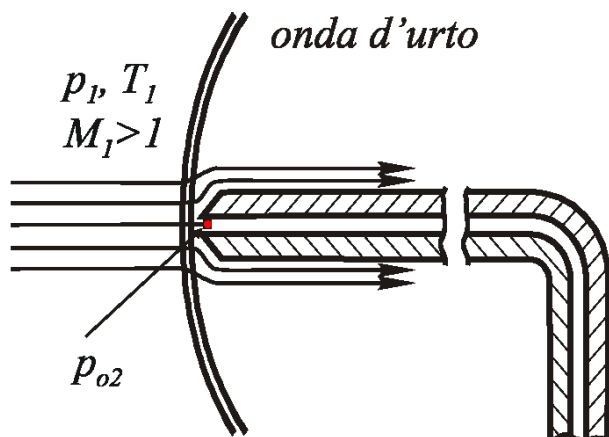


## Onde d'urto normali gas più che perfetti

In un tunnel **supersonico** è relativamente facile misurare la pressione statica  $p_1$  a **monte dell'onda** d'urto con una presa di pressione posta sulle pareti del tunnel.

Il rapporto  $p_{o2}/p_1$ , detto anche **funzione di Rayleigh**, è quindi utile per la misura del numero di Mach in un tunnel supersonico.

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

Ricapitolando:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[ (\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left( (\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



## Onde d'urto normali gas più che perfetti

Oppure in forma più compatta con:

$$\Theta = 2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1), \quad \Xi = (\gamma - 1)M_1^2 + 2:$$

$$M_2^2 = \frac{\Xi}{\Theta}:$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{\Xi}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Theta}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Theta \Xi}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = (\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{\Xi}{M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Theta^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{2M_1^{2\gamma}}{\Theta} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



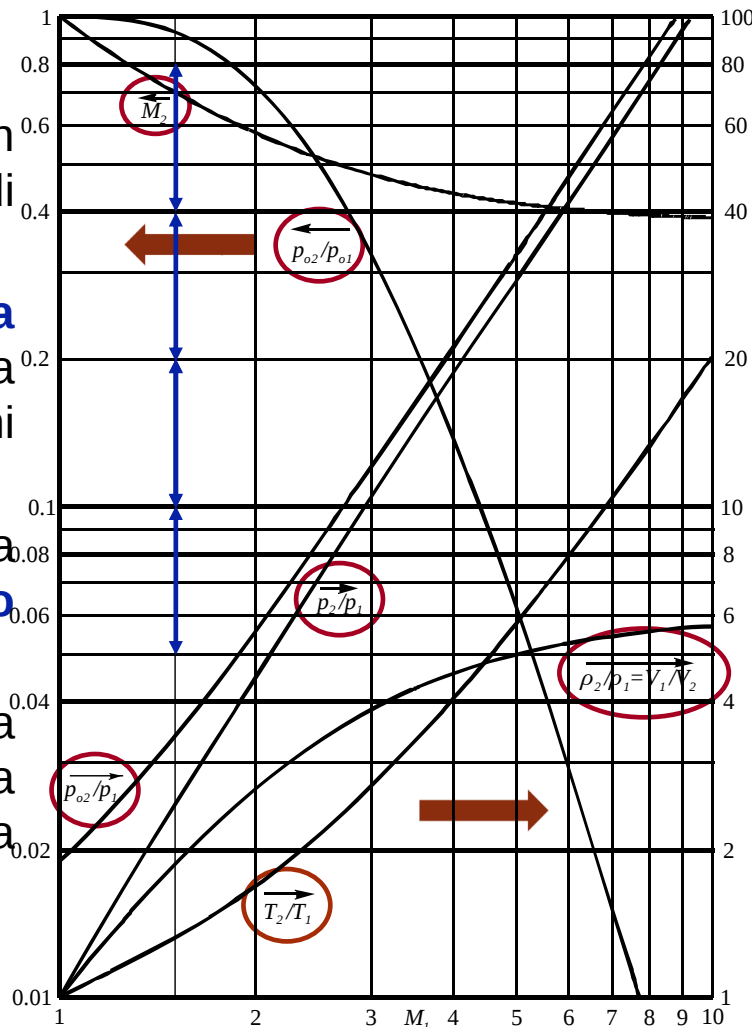
## Onde d'urto normali gas PCP

Il diagramma è **bi-logaritmico**. In modo da meglio visualizzare grandi variazioni.

In un diagramma **logaritmico a** parità di distanza lungo un asse sia hanno le stesse variazioni percentuali.

I rapporti che si leggono sulla scala di **destra** comportano un **aumento** della grandezza attraverso l'urto.

I rapporti che si leggono sulla scala di **sinistra** comportano una **diminuzione** della grandezza attraverso l'urto.

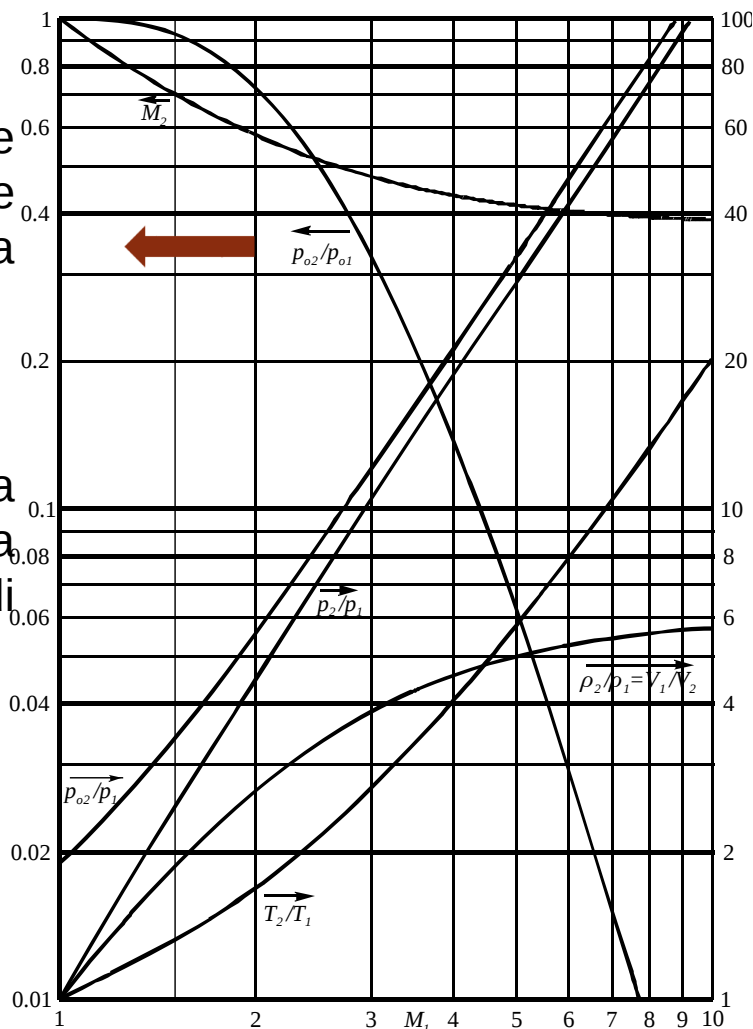


## Onde d'urto normali gas PCP

Per numero di **Mach** a monte prossimo a 1 si ha  $p_{o2}/p_{o1} \cong 1$  e l'onda può essere considerata **isentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Infatti la pendenza iniziale della **pressione** è **maggiore** di quella della **densità** che è maggiore di quella della **temperatura**.



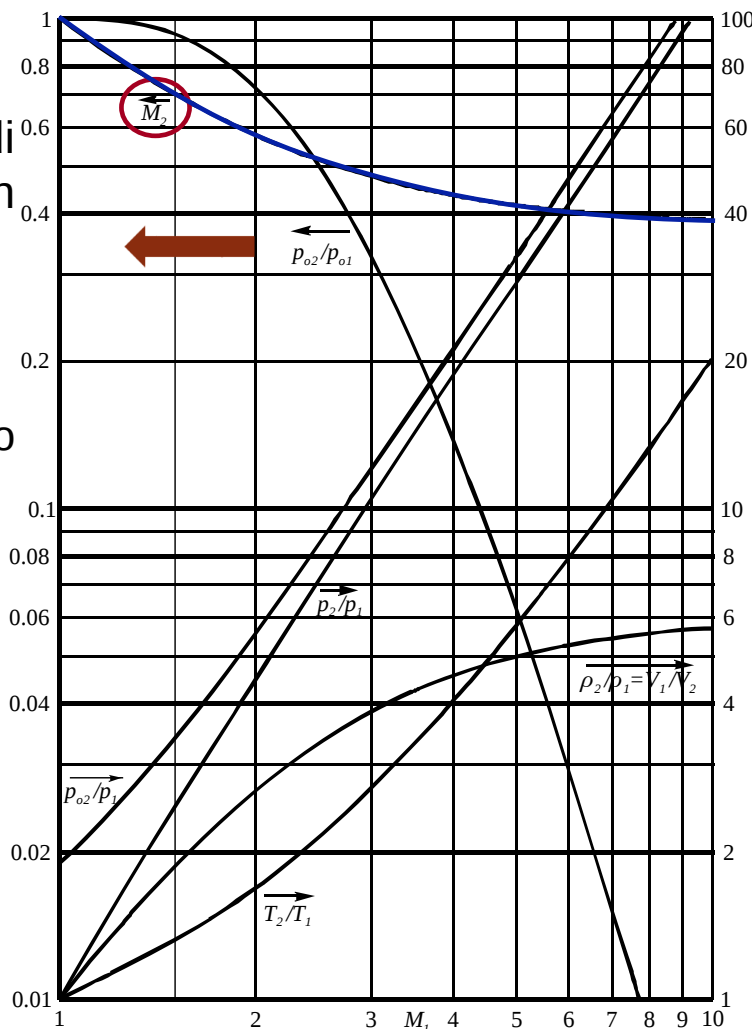
## Onde d'urto normali gas PCP

**All'aumentare** del numero di **Mach** a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha una diminuzione:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

- del numero di Mach a valle  $M_2$ , sino al valore asintotico  $M_{2l}$ ;

$$M_{2l} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} = (0.3780);$$



## Onde d'urto normali gas PCP

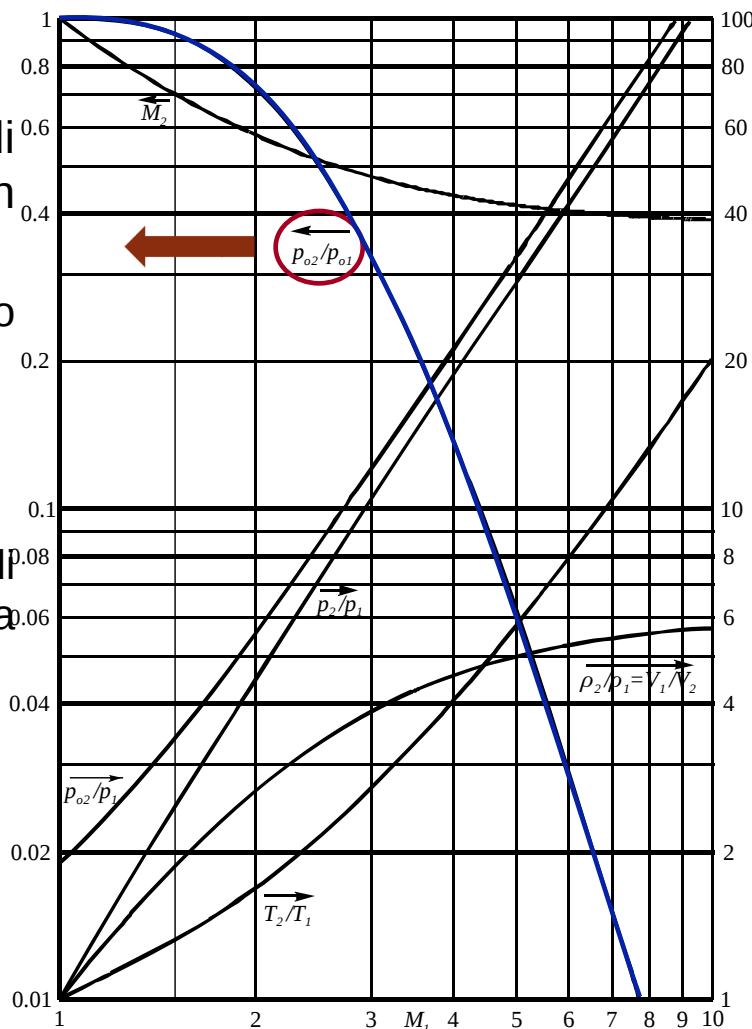
**All'aumentare** del numero di **Mach** a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha una diminuzione:

- del numero di Mach a valle  $M_2$ , sino al valore asintotico  $M_{2l}$ ;

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = (\gamma + 1)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{\Xi}{M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{\Theta^{\frac{1}{\gamma-1}}};$$

- del rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia) sino a zero.

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \text{cost } M_1^{\frac{2}{1-\gamma}} = 0;$$



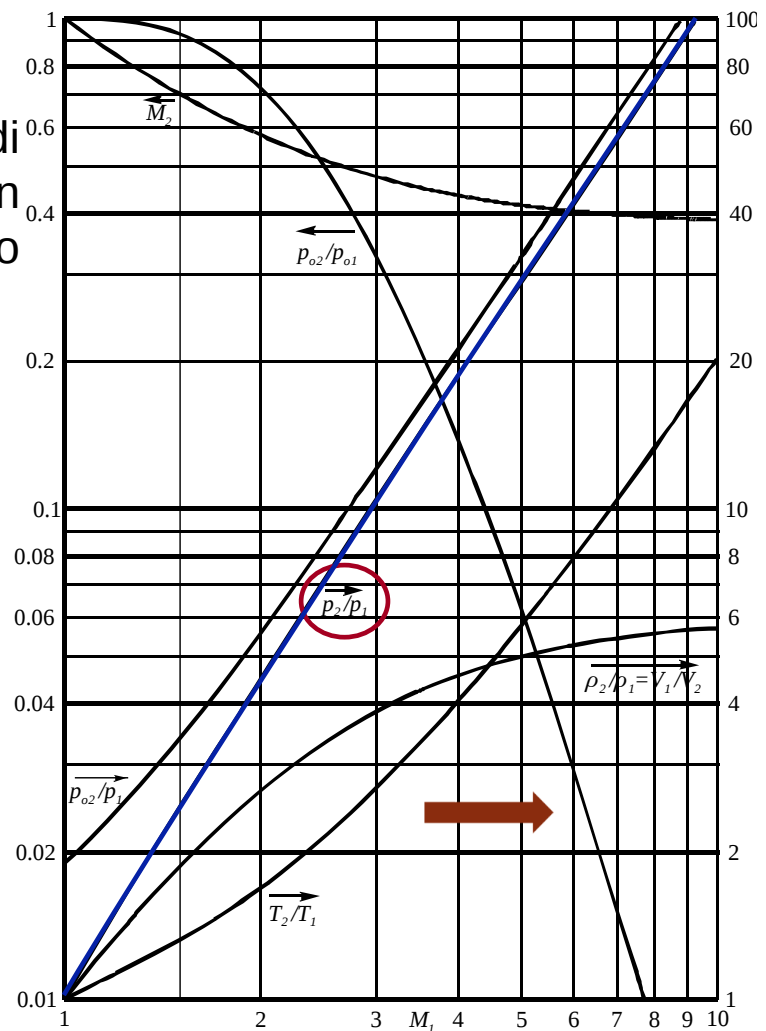
## Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1};$$

- pressione;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



## Onde d'urto normali gas PCP

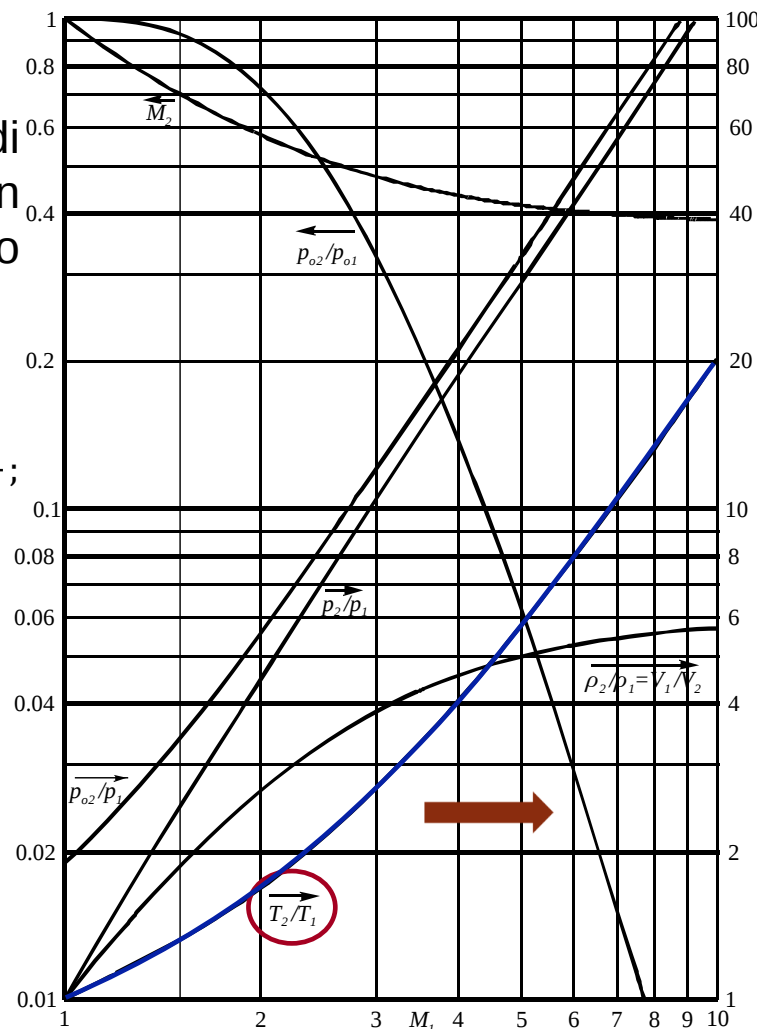
All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2};$$

- temperatura;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



## Onde d'urto normali gas PCP

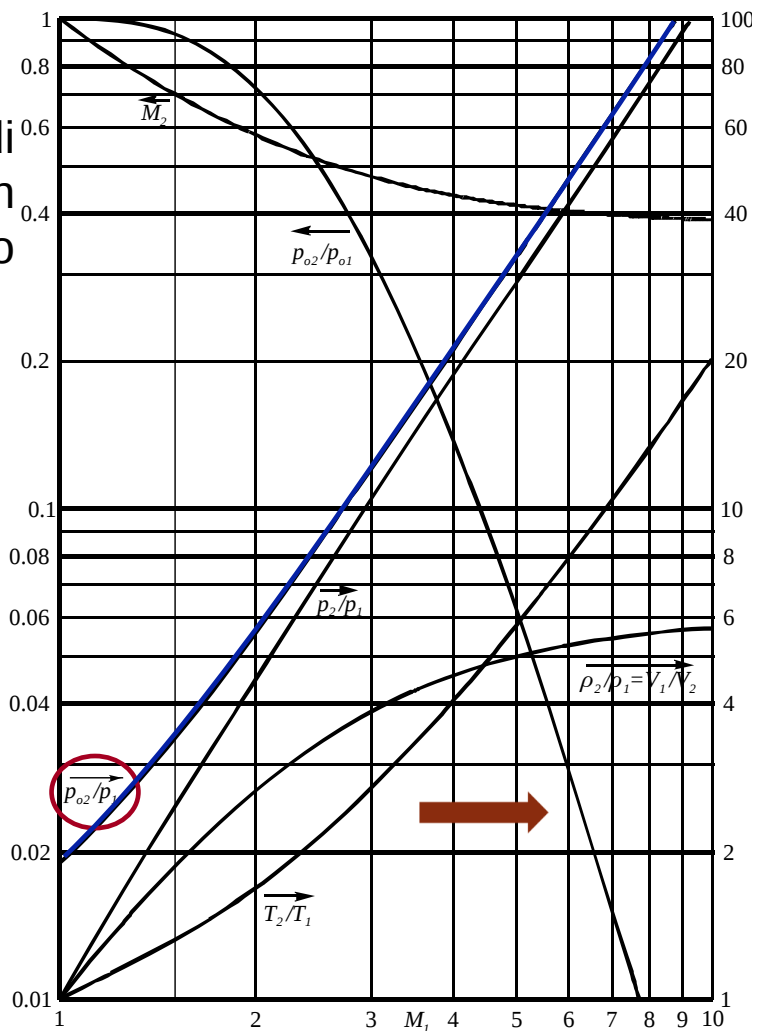
All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- della funzione di Rayleigh;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_1} = \text{cost } M_1^2 = \infty$$



## Onde d'urto normali gas PCP

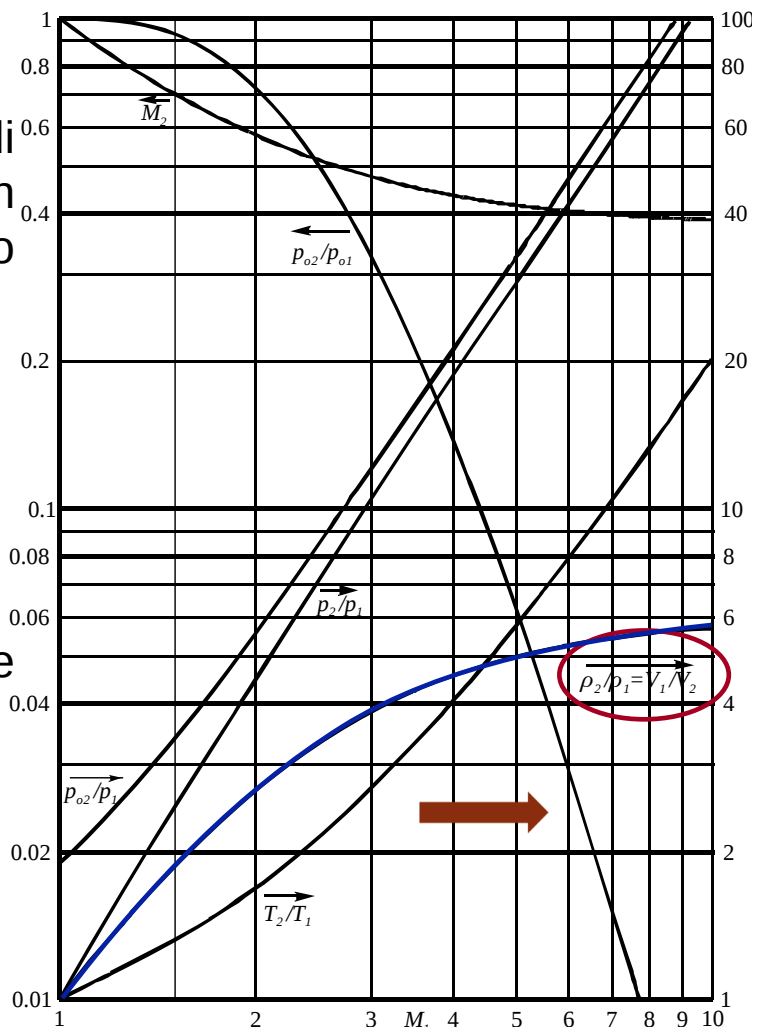
All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda  $M_1$  da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;
- della funzione di Rayleigh;

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

L'aumento della **densità** è invece **limitato**:

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = (6)$$



## Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:

| Moto Isentropico ( $\gamma=1.4$ ) |         |               |         |                 |         |       | Prandtl e Meyer |                 | Onde d'urto normali ( $\gamma=1.4$ ) |           |                 |           |                 |              |
|-----------------------------------|---------|---------------|---------|-----------------|---------|-------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|--------------|
| $M$                               | $p/p_o$ | $\rho/\rho_o$ | $T/T_o$ | $\rho V^2/2p_o$ | $A/A^*$ | $M^*$ | $v(^{\circ})$   | $\mu(^{\circ})$ | $M_2$                                | $p_2/p_1$ | $\rho_2/\rho_1$ | $T_2/T_1$ | $p_{o2}/p_{o1}$ | $p_1/p_{o2}$ |
| 1.00                              | .5283   | .6339         | .8333   | .3698           | 1.000   | 1.000 | .0000           | 9.000 +1        | 1.000                                | 1.000     | 1.000           | 1.000     | 1.000           | .5283        |
| 1.01                              | .5221   | .6287         | .8306   | .3728           | 1.000   | 1.008 | .4472 -1        | 8.193 +1        | .9901                                | 1.023     | 1.017           | 1.007     | 1.000           | .5221        |
| 1.02                              | .5160   | .6234         | .8278   | .3758           | 1.000   | 1.017 | .1257           | 7.864 +1        | .9805                                | 1.047     | 1.033           | 1.013     | 1.000           | .5160        |
| 1.03                              | .5099   | .6181         | .8250   | .3787           | 1.001   | 1.025 | .2294           | 7.614 +1        | .9712                                | 1.071     | 1.050           | 1.020     | 1.000           | .5100        |
| 1.04                              | .5039   | .6129         | .8222   | .3815           | 1.001   | 1.033 | .3510           | 7.406 +1        | .9620                                | 1.095     | 1.067           | 1.026     | .9999           | .5039        |

| Onde d'urto normali ( $\gamma=1.4$ ) |       |           |                 |           |                 |              |
|--------------------------------------|-------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|--------------|
| $M$                                  | $M_2$ | $p_2/p_1$ | $\rho_2/\rho_1$ | $T_2/T_1$ | $p_{o2}/p_{o1}$ | $p_1/p_{o2}$ |
| 1.00                                 | 1.000 | 1.000     | 1.000           | 1.000     | 1.000           | .5283        |
| 1.01                                 | .9901 | 1.023     | 1.017           | 1.007     | 1.000           | .5221        |
| 1.02                                 | .9805 | 1.047     | 1.033           | 1.013     | 1.000           | .5160        |
| 1.03                                 | .9712 | 1.071     | 1.050           | 1.020     | 1.000           | .5100        |
| 1.04                                 | .9620 | 1.095     | 1.067           | 1.026     | .9999           | .5039        |



## Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:

| Onde d'urto normali ( $\gamma=1.4$ ) |       |           |                 |           |                 |              |
|--------------------------------------|-------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|--------------|
| $M$                                  | $M_2$ | $p_2/p_1$ | $\rho_2/\rho_1$ | $T_2/T_1$ | $p_{o2}/p_{o1}$ | $p_1/p_{o2}$ |
| 1.00                                 | 1.000 | 1.000     | 1.000           | 1.000     | 1.000           | .5283        |
| 1.01                                 | .9901 | 1.023     | 1.017           | 1.007     | 1.000           | .5221        |
| 1.02                                 | .9805 | 1.047     | 1.033           | 1.013     | 1.000           | .5160        |
| 1.03                                 | .9712 | 1.071     | 1.050           | 1.020     | 1.000           | .5100        |
| 1.04                                 | .9620 | 1.095     | 1.067           | 1.026     | .9999           | .5039        |



|          |       |          |       |          |          |          |
|----------|-------|----------|-------|----------|----------|----------|
| 15.00    | .3823 | 2.623 +2 | 5.870 | 4.469 +1 | .4395 -3 | .3446 -2 |
| 17.50    | .3811 | 3.571 +2 | 5.904 | 6.049 +1 | .2074 -3 | .2533 -2 |
| 20.00    | .3804 | 4.665 +2 | 5.926 | 7.872 +1 | .1078 -3 | .1940 -2 |
| $\infty$ | .3780 | $\infty$ | 6.000 | $\infty$ | .0000    | .0000    |

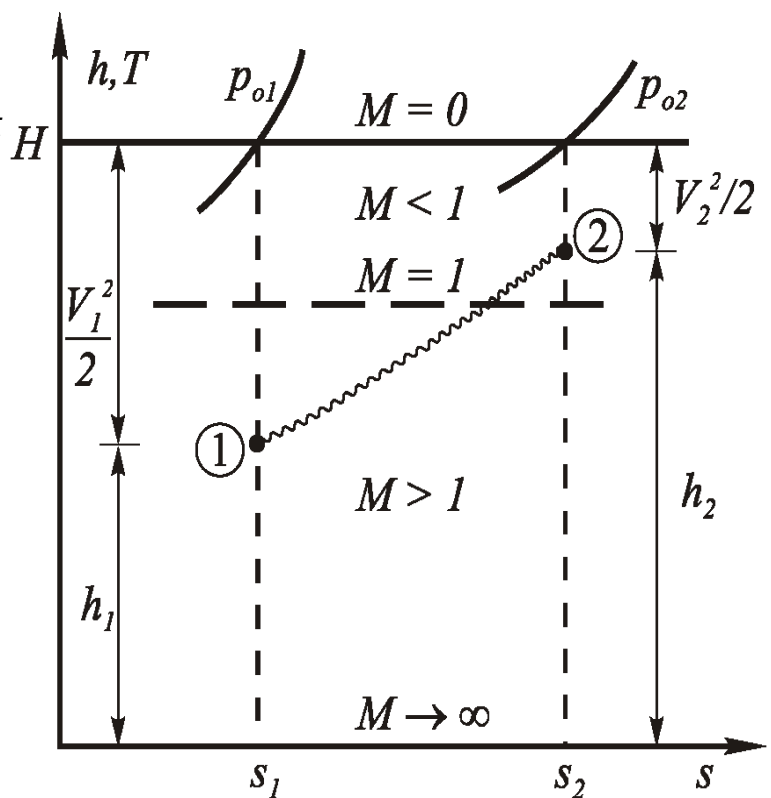


## Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto  $H = \text{cost}$  mentre  $s$  aumenta. Avendo fissato  $T_o$  (e  $H$ ) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

$$h = c_p T$$

- a entalpia costante;



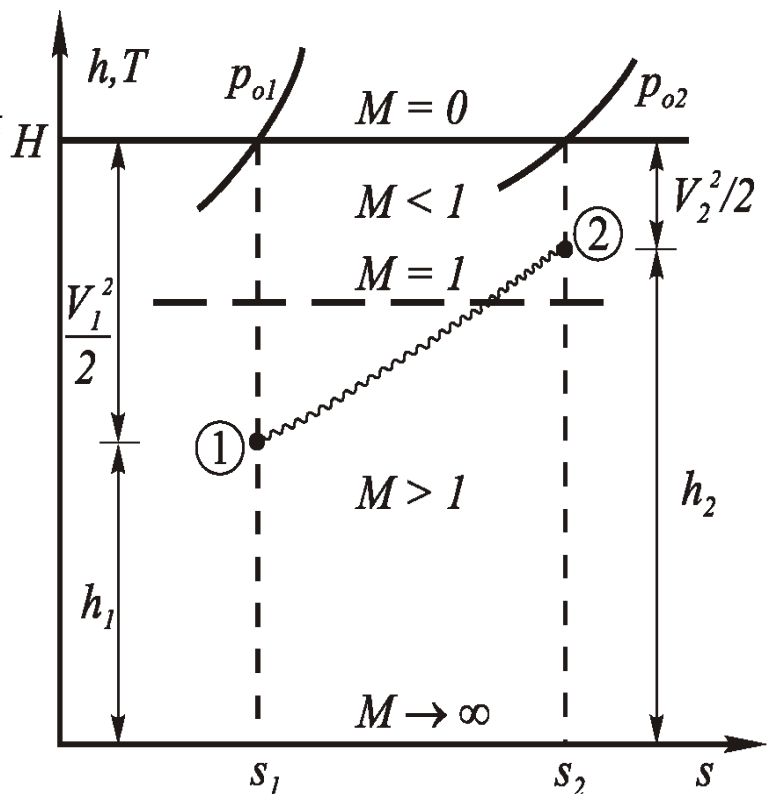
## Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto  $H = \text{cost}$  mentre  $s$  aumenta. Avendo fissato  $T_o$  (e  $H$ ) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

- a velocità costante;



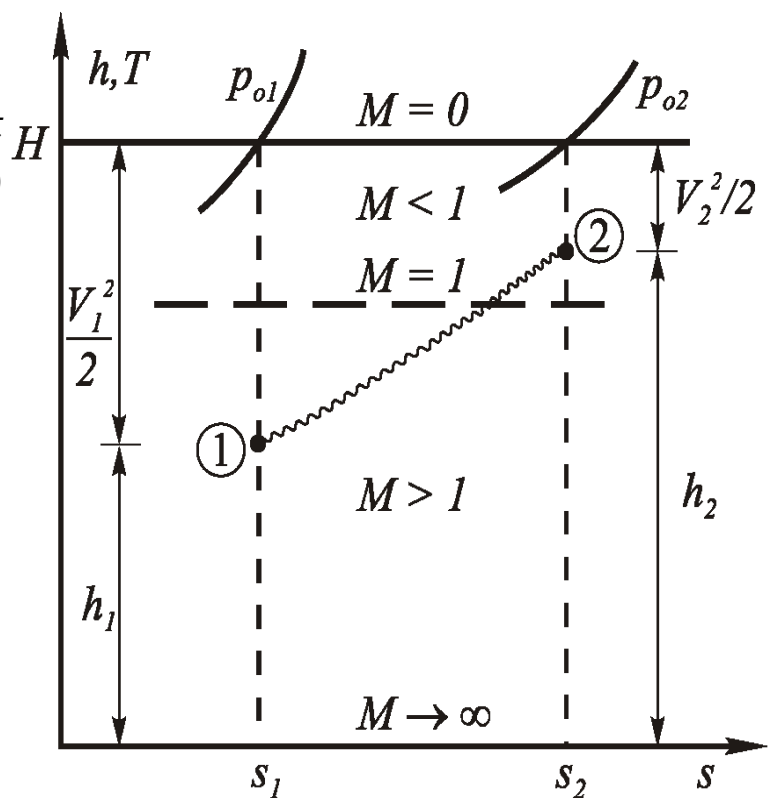
## Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto  $H=cost$  mentre  $s$  aumenta. Avendo fissato  $T_o$  (e  $H$ ) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}$$

- a numero di Mach costante;

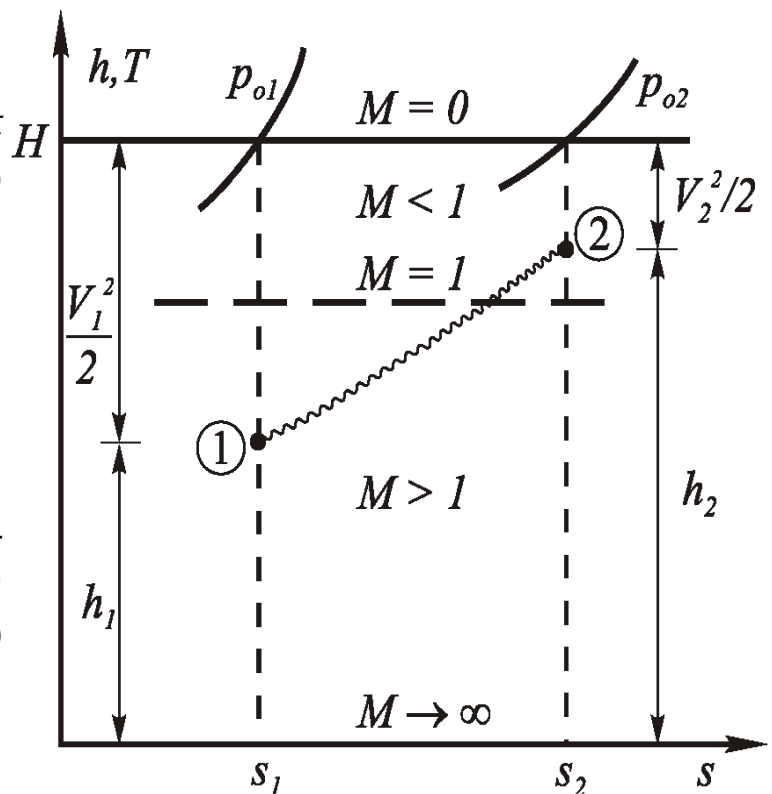


## Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto  $H=cost$  mentre  $s$  aumenta. Avendo fissato  $T_o$  (e  $H$ ) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;
- a numero di Mach costante;

La retta a  $M=1$ , indicata in figura con il tratteggio, separa il moto **supersonico** da quello **subsonico**. I punti a monte (1) ed a valle (2) sono indicati in figura.



Il collegamento è indicato con una linea **ondulata** per mettere in risalto che la trasformazione **non** è **reversibile** ( $\dot{s} > 0$ ).

## Onde d'urto normali gas PCP

Un **onda d'urto** è una superficie di **discontinuità** attraverso la quale avviene una **brusca conversione** di **energia cinetica ordinata** in energia cinetica **disordinata** ad entalpia totale costante.

$$\rho V = G = \text{cost}$$

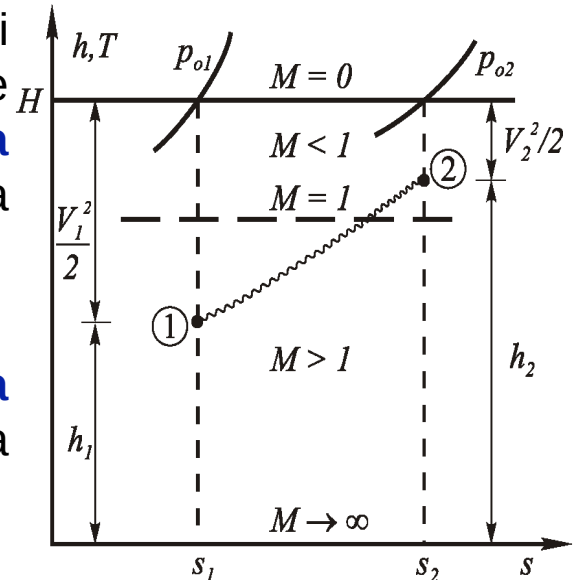
Per la continuità la **diminuzione di velocità** dà luogo ad un brusco **innalzamento** della **densità**.

$$p + \rho V^2 = p + GV = I = \text{cost}$$

Dal bilancio della **quantità di moto** un aumento della **pressione**.

$$h + \frac{V^2}{2} = H = \text{cost}$$

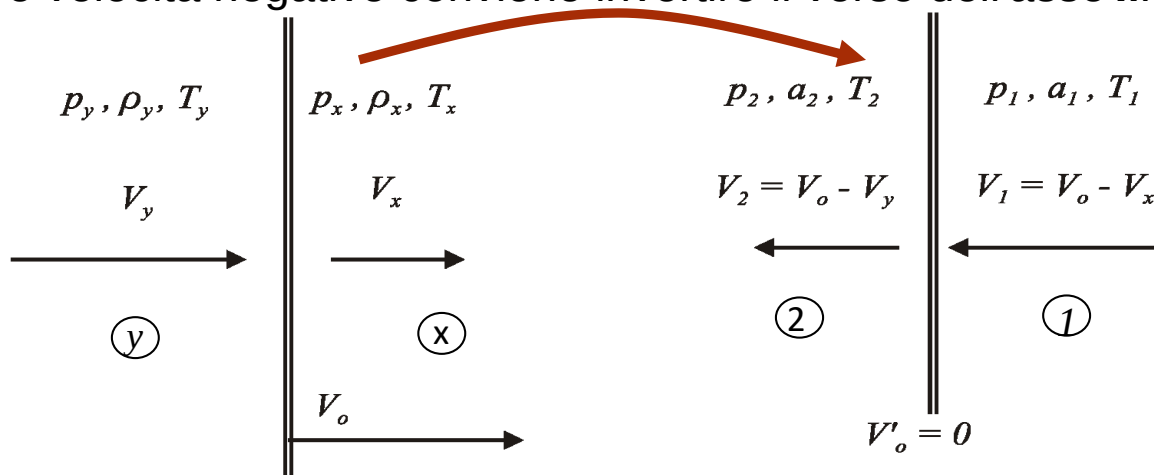
Dalla conservazione dell'**energia** un aumento di **temperatura** e **entalpia**. Ovviamente anche l'**entropia** aumenta.



## Onde d'urto normali non stazionarie

Un'onda d'urto che si **muove** con una velocità  $V_o$  costante, rispetto al **sistema di riferimento** inerziale scelto, è il caso più semplice di onda **non stazionaria**. Si suppone inoltre che il fluido a monte dell'onda si muova a velocità  $V_x < V_o$  a monte e  $V_y < V_o$  a valle.

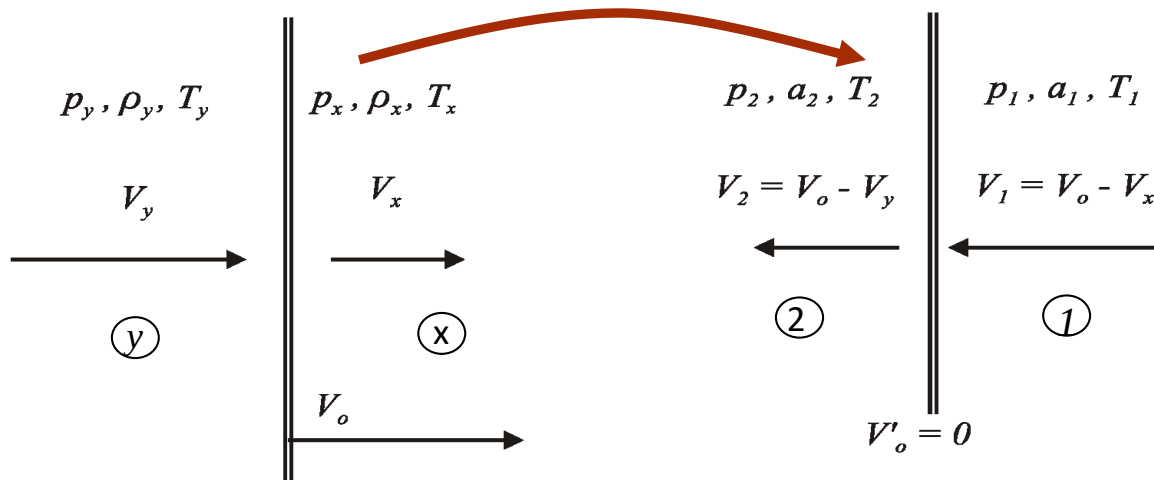
Per rendere l'onda **stazionaria**, è necessario osservarla in un **nuovo sistema di riferimento** (sempre inerziale) **fermo** rispetto all'**onda**. Occorre, quindi, **sottrarre** la  $V_o$  a tutte le velocità di figura. Per evitare di avere velocità negative conviene invertire il verso dell'asse  $x$ .



## Onde d'urto normali non stazionarie

Le condizioni **statiche** della corrente, evidentemente **non dipendono** dal **sistema di riferimento** quindi:

$$\begin{array}{lll} p_x = p_1, & T_x = T_1, & a_x = a_1; \\ p_y = p_2, & T_y = T_2, & a_y = a_2; \end{array}$$



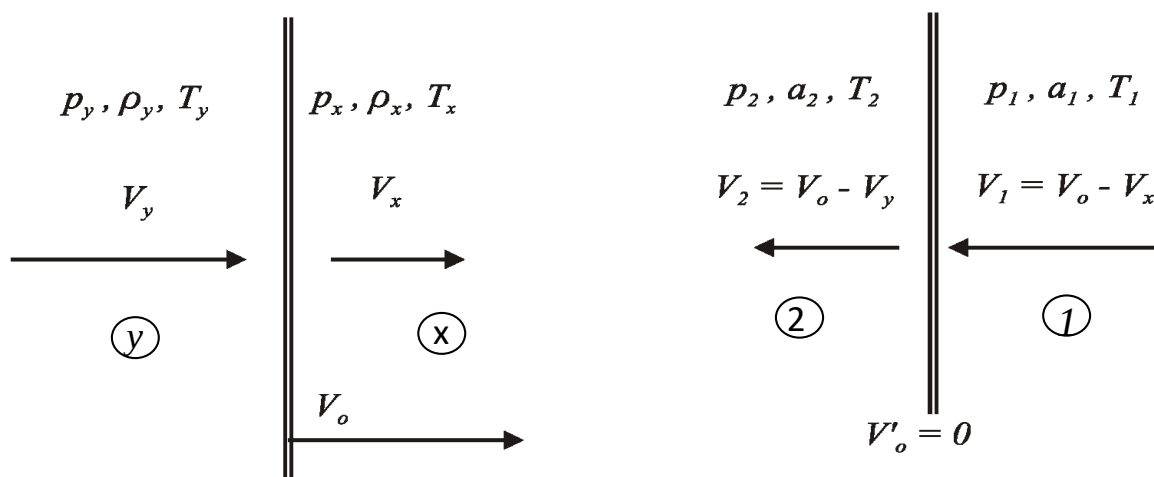
## Onde d'urto normali non stazionarie

I numeri di Mach nel sistema di **riferimento** con **l'onda** d'urto in **movimento**, sono:

$$M_x = \frac{V_x}{a_x} = \frac{V_x}{a_1}, \quad M_y = \frac{V_y}{a_y} = \frac{V_y}{a_2};$$

mentre nel **sistema** con **l'onda** d'urto **stazionaria**

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_o - V_x}{a_1}, \quad M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_o - V_y}{a_2}.$$



## Onde d'urto normali non stazionarie

I numeri di Mach nel sistema di **riferimento** con **l'onda** d'urto in **movimento**, sono:

$$M_x = \frac{V_x}{a_x} = \frac{V_x}{a_1}, \quad M_y = \frac{V_y}{a_y} = \frac{V_y}{a_2};$$

mentre nel **sistema** con **l'onda** d'urto **stazionaria**.

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_0 - V_x}{a_1}, \quad M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_0 - V_y}{a_2}.$$

Quindi, se si conosce  $V_0, V_x$  e  $a_x$ , è facile calcolare il numero di Mach a monte dell'onda nel sistema con **l'onda** d'urto **stazionaria** e utilizzando le formule ricavate per le onde d'urto stazionarie calcolare le grandezze **statiche** a valle dell'onda note quelle a monte.



## Onde d'urto normali non stazionarie

Le grandezze di **ristagno**, al contrario di quelle statiche dipendono dal sistema di riferimento e devono essere valutate nel giusto sistema di riferimento ad esempio a monte:

$$T_{ox} = T_x \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right) \neq T_{o1} = T_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right);$$
$$p_{ox} = p_x \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \neq p_{o1} = p_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}};$$

Al contrario di quello che succede per le onde stazionarie,  **$T_{ox}$**  è **normalmente diversa da  $T_{oy}$** .

Inoltre, nel sistema di riferimento con **l'onda** d'urto in **movimento**, la **pressione di ristagno** a **valle** dell'onda può essere **maggiore, minore** o al limite **uguale** a quella **monte**.

$$p_{o2} < p_{o1} \quad T_{o2} = T_{o1} \quad \begin{matrix} > \\ p_{oy} = p_{ox} \\ < \end{matrix} \quad \begin{matrix} > \\ T_{oy} = T_{ox} \\ < \end{matrix}$$



## Onde d'urto normali non stazionarie

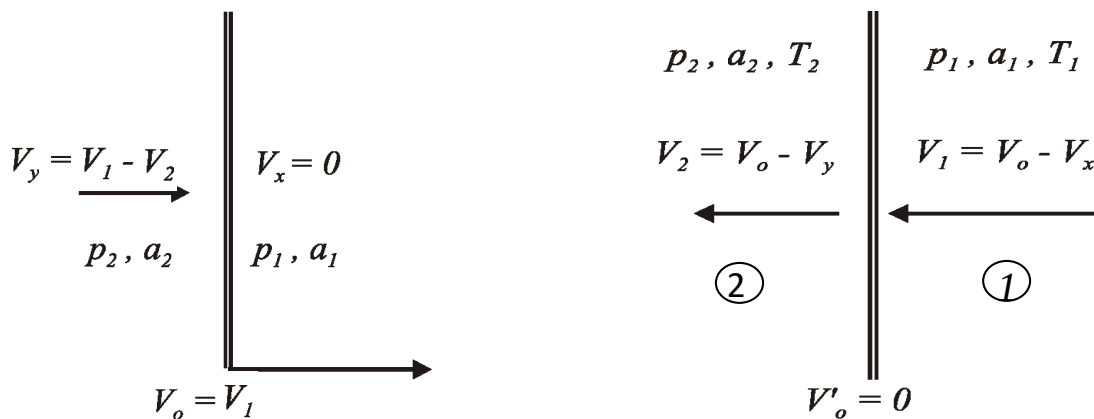
$$p_{o2} < p_{o1} \quad T_{o2} = T_{o1} \quad p_{oy} = p_{ox} \quad T_{oy} = T_{ox}$$

Ad **esempio** se  $V_x = 0$  cioè quando **l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete** si ha:

$$p_{ox} = p_x \quad e \quad T_{ox} = T_x$$

- A valle dell'onda d'urto sia la pressione che la temperatura aumentano:

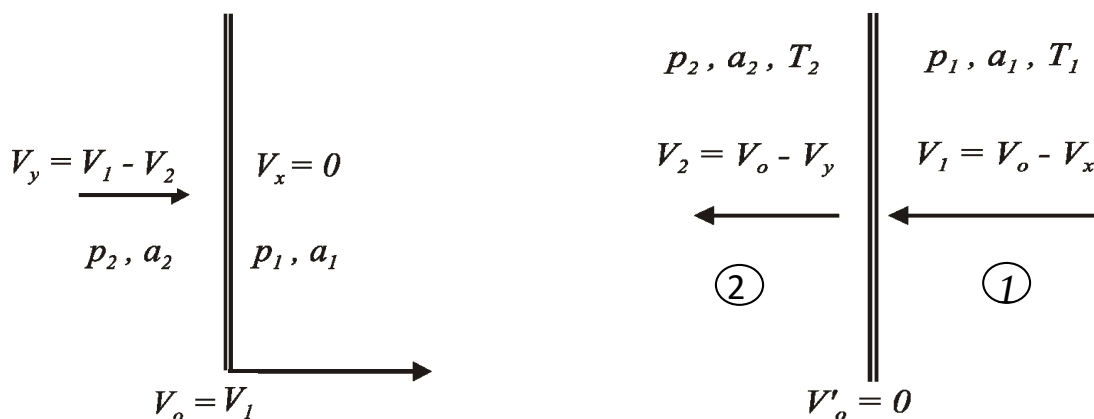
$$p_{oy} > p_y > p_x = p_{ox} \quad e \quad T_{oy} > T_y > T_x = T_{ox}$$



## Onde d'urto normali non stazionarie

Ad **esempio** se  $V_x = 0$  cioè quando **l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete** si ha:

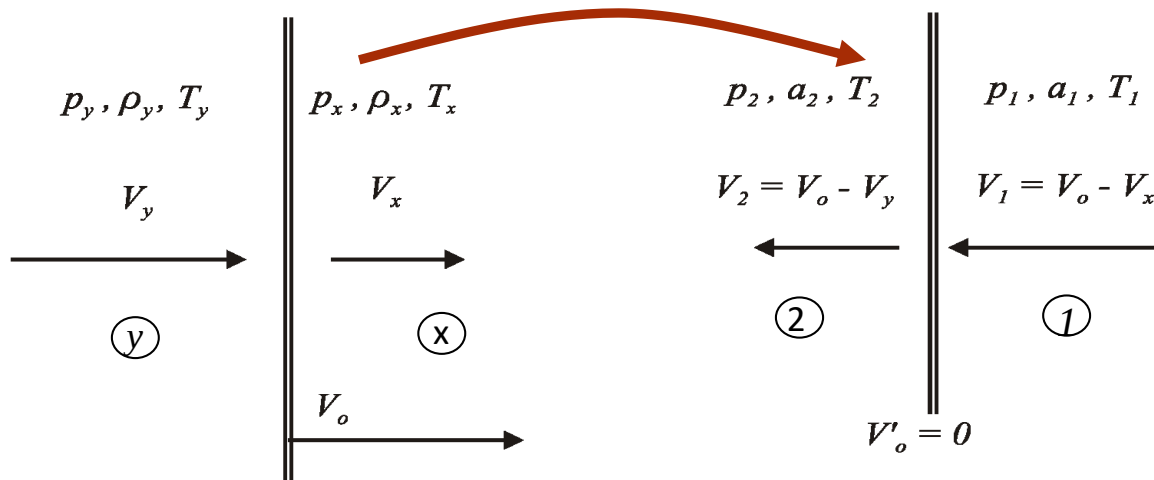
- A valle dell'onda d'urto sia la **pressione** che la **temperatura** di **ristagno aumentano**;
- poiché  $V_1 = V_0 > V_2$  e  $V_y = V_0 - V_2 = V_1 - V_2 > 0$  il **fluido** a valle di un'onda d'urto che si propaga in un fluido in quiete **segue** l'onda;
- poiché  $V_1 = V_0 > a_1$  un'**onda d'urto** (non di Mach) si **propaga** in un fluido in **quiete** con una **velocità maggiore** della **velocità del suono** nello stesso fluido.



## Onde d'urto normali non stazionarie

La **soluzione** del problema di un'onda d'urto in moto, di cui si **conoscano** le velocità di propagazione  $V_o$ , del suono  $a_x$  e del fluido  $V_x$  in cui si propaga, si risolve con i seguenti 4 passi successivi:

- l'onda d'urto è **resa stazionaria sottraendo** la **velocità dell'onda** a quella del fluido in cui si propaga e si **determina** il numero di **Mach a monte**;



## Onde d'urto normali non stazionarie

La **soluzione** del problema di un'onda d'urto in moto, di cui si **conoscano** le velocità di propagazione  $V_o$ , del suono  $a_x$  e del fluido  $V_x$  in cui si propaga, si risolve con i seguenti 4 passi successivi:

- l'onda d'urto è **resa stazionaria sottraendo** la **velocità dell'onda** a quella del fluido in cui si propaga e si **determina** il numero di **Mach a monte**;
- si **risolve** il problema per quanto riguarda le **grandezze statiche** e la  $V_2$  con le formule già ricavate per l'onda d'urto **stazionaria**;
- si **calcolano** i numeri di **Mach** per l'onda d'urto in **movimento**;
- si **calcolano** infine le **grandezze di ristagno** per l'onda d'urto in **movimento**;

Se la **velocità dell'onda non fosse** nota, ma lo sono  $V_x$ ,  $V_y$  e  $a_x$  si può dimostrare che la velocità di propagazione è data:

$$V_o = \frac{(\gamma + 1)V_y - (\gamma - 3)V_x}{4} + \sqrt{a_x^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 (V_y - V_x)^2}$$

e si ricade nel problema precedente.



## Onde d'urto normali non stazionarie

Se la **velocità dell'onda non fosse** nota, ma lo sono  $V_x$ ,  $V_y$  e  $a_x$  si può dimostrare che la velocità di propagazione è data:

$$V_o = \frac{(\gamma + 1)V_y - (\gamma - 3)V_x}{4} + \sqrt{a_x^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 (V_y - V_x)^2}$$

e si ricade nel problema precedente.

Una valida alternativa è **procedere per tentativi** ad esempio:

- si assegna  $V_o^k$  a piacere (il pedice  $k$  indica l'iterazione ed inizialmente  $k = 0$ );
- si calcola  $V_y^k$  con il procedimento precedente;
- si valuta l'errore  $e^k = V_y^e - V_y^k$  e se fosse maggiore dell'approssimazione fissata si utilizza un metodo di soluzione di equazioni non lineari (e.g. falsa posizione) per valutare  $V_o^{k+1}$  e iterare il procedimento.



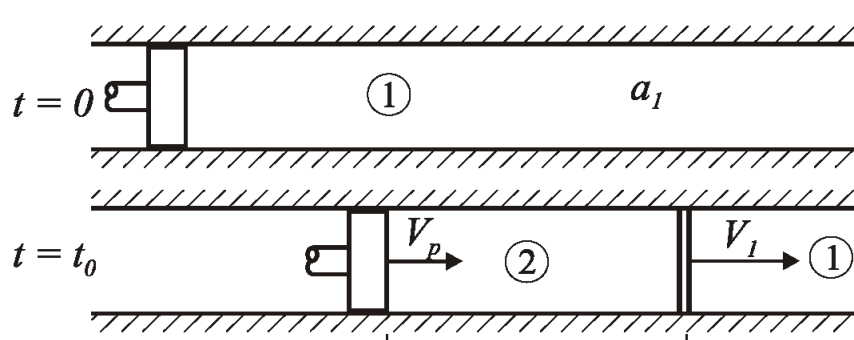
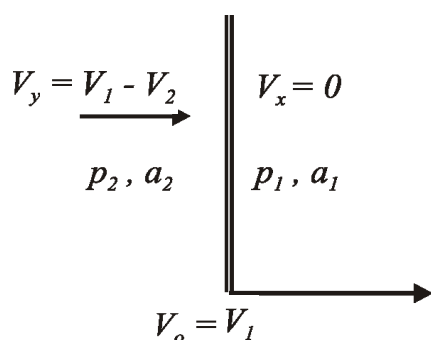
## Onde d'urto normali non stazionarie

Un caso **rilevante** è quello che consente di determinare la **velocità** di propagazione dell'**onda** d'urto generata dall'**accelerazione impulsiva** alla velocità  $V_p$  di un **pistone** all'interno di un condotto.

A monte del pistone il fluido è in quiete ( $V_x = 0$ ) la velocità a valle dell'onda è nota  $V_y = V_p$  mentre la velocità dell'onda  $V_1 = V_o$  è incognita.

Si trova prima:  $M_p = \frac{V_p}{a_1} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}$

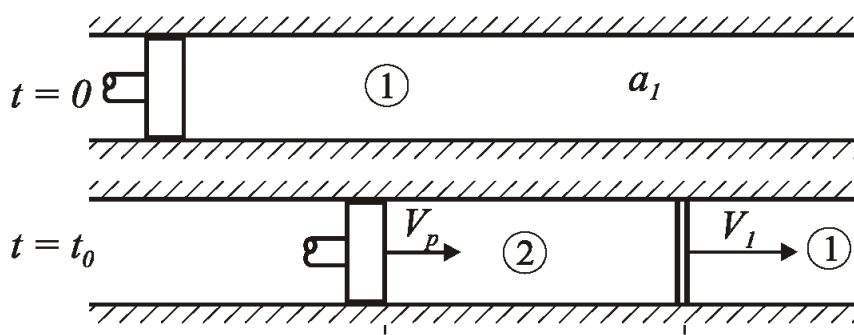
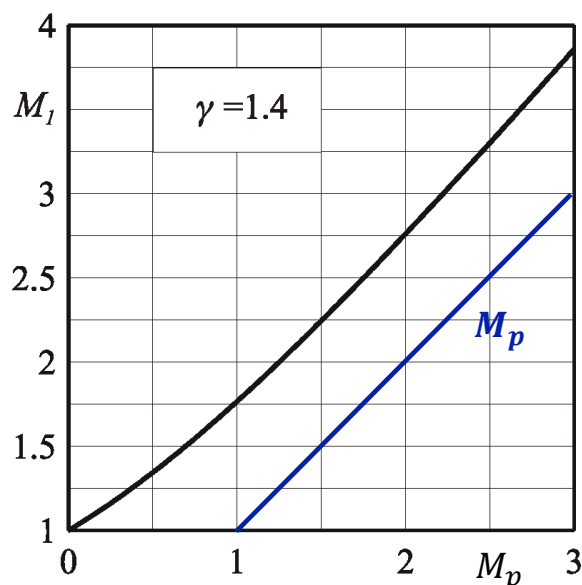
Risolvendo in  $M_1$  si ha:  $M_1 = \frac{\gamma+1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$



## Onde d'urto normali non stazionarie

$$M_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

Come si vede anche dalla figura  $M_1 > M_p$ .



## Onde d'urto normali non stazionarie

A seguito dell'accelerazione **impulsiva** del **pistone**, alla velocità  $V_p$ , **nasce un'onda d'urto** che si propaga alla velocità  $V_1$ .

Nella zona **(1)**, a monte dell'onda d'urto, il fluido è indisturbato.

L'**onda** fa **accelerare** il fluido a valle, nella zona **(2)**, alla stessa velocità del pistone.

