



## Gasdinamica

T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

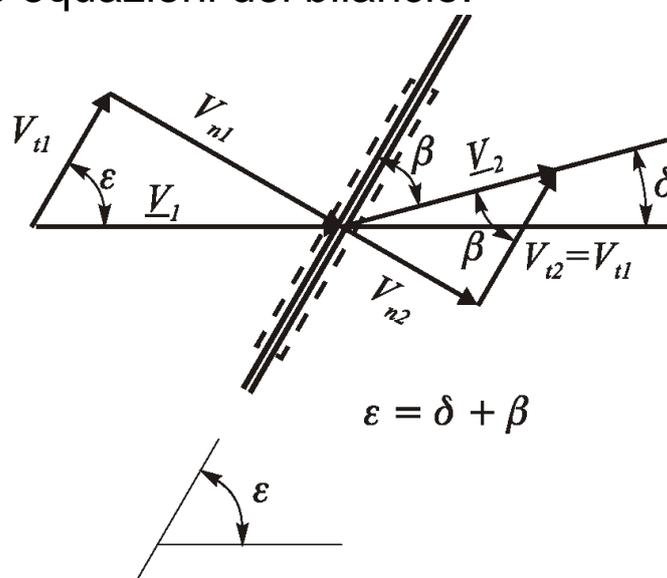
[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

Versione del 30.3.2022

### Onde d'urto oblique

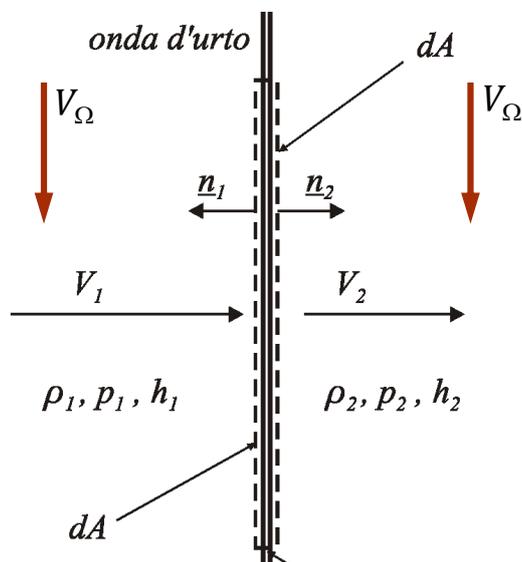
Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di un'onda d'urto **obliqua** stazionaria inclinata di un angolo  $\epsilon \neq 90^\circ$  (detto **angolo d'urto**) rispetto alla direzione della corrente a monte.

Questo caso si può **derivare** da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, **cambiando** il **sistema di riferimento** inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.



## Onde d'urto oblique

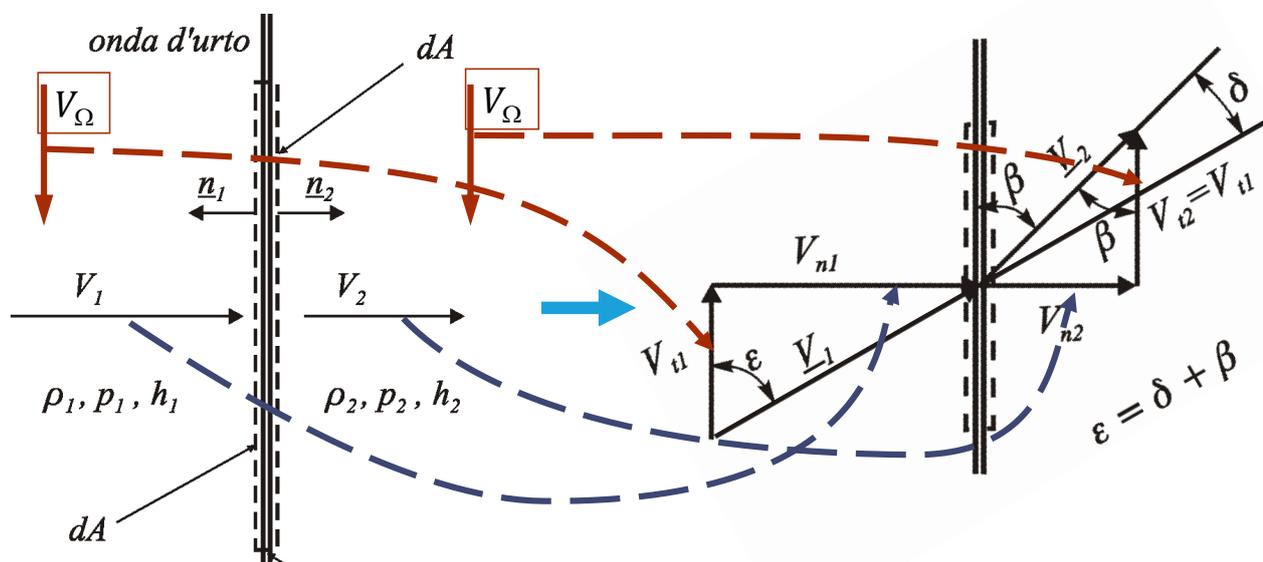
Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale. Il **nuovo** sistema di riferimento inerziale si muove dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con **velocità  $V_\Omega$  costante** rispetto al precedente.



## Onde d'urto oblique

In questo **nuovo** sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità  $V_1$  e  $V_2$ , normali all'onda, anche di una **velocità parallela all'onda** che è la stessa per entrambi i fluidi ed è pari a:

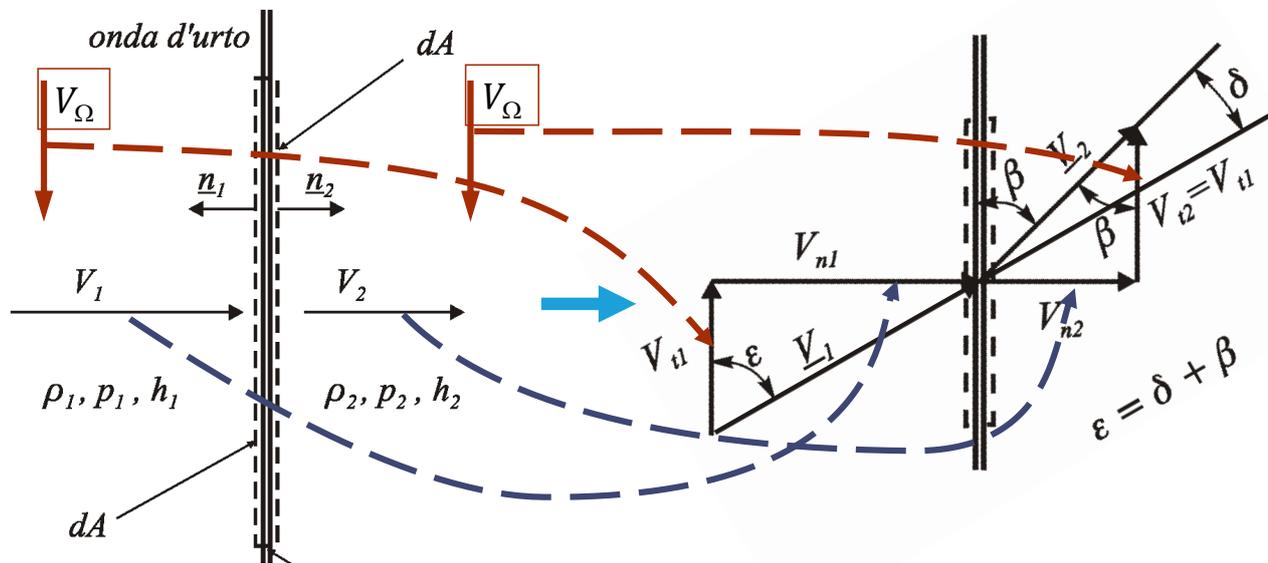
$$V_{t1} = V_{t2} = V_t = -V_\Omega$$



## Onde d'urto oblique

Le grandezze statiche non cambiano nel nuovo sistema di riferimento, quindi, intuitivamente, **è possibile trattare l'onda d'urto obliqua con le stesse relazioni dell'onda d'urto normale** purché si considerino solamente le componenti normali delle velocità a monte e a valle.

Per comodità si ruota il sistema di riferimento.



## Onde d'urto oblique

Sostituendo  $V_{n1}$  e  $V_{n2}$  rispettivamente al posto di  $V_1$  e  $V_2$  nell'equazione di conservazione della **massa** si ottiene:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

Dal bilancio della **quantità di moto**:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \Rightarrow p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

Che rappresenta la proiezione in **direzione normale** dell'equazione:

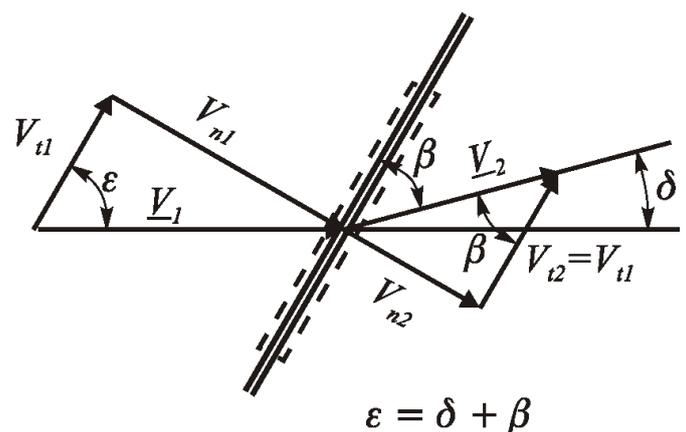
$$d\dot{m} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

Dalla proiezione in direzione **tangenziale**:

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}$$

Per la continuità si ritrova la **costanza** della velocità **tangenziale**:

$$V_{t1} = V_{t2}$$



## Onde d'urto oblique

La **costanza** della componente **tangenziale** della **velocità**, associata alla **riduzione** della componente **normale**, genera la **deviazione** della corrente di un angolo  $\delta$  (**detto angolo di deviazione della corrente**).

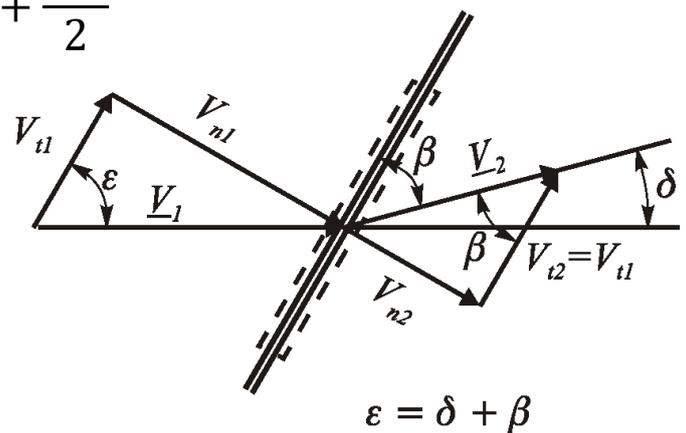
La corrente **ruota** verso **l'onda d'urto** stessa, cioè tende ad **adagiarsi** sull'onda.

Sostituendo  $V_{n1}$  e  $V_{n2}$  al posto di  $V_1$  e  $V_2$  nell'equazione di conservazione dell'**energia** si ottiene:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}$$

Dalla costanza della componente **tangenziale** della velocità si può verificare che le due equazioni sono in realtà coincidenti:

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} \left[ + \frac{V_{t1}^2}{2} \right] = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2} \left[ + \frac{V_{t2}^2}{2} \right]$$



## Onde d'urto oblique

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

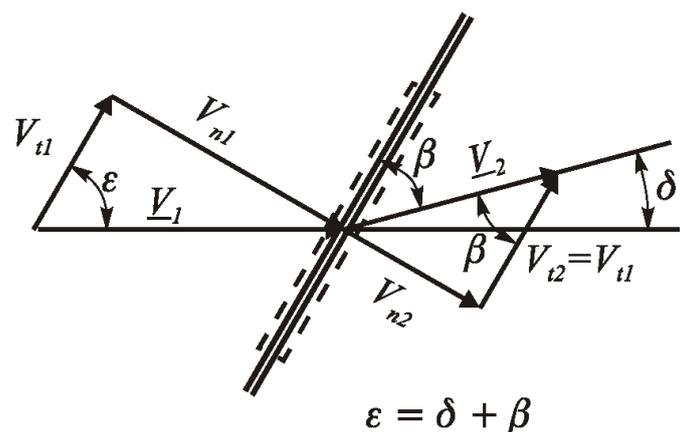
$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} \left[ + \frac{V_{t1}^2}{2} \right] = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2} \left[ + \frac{V_{t2}^2}{2} \right]$$

Un'onda d'urto **obliqua** è quindi **riconducibile** ad un'onda d'urto **normale** purché si considerino le sole componenti normali della velocità.

Queste equazioni possono essere risolte in modo analogo al caso delle onde d'urto normali quindi si **possono riutilizzare le formule** già trovate.

Si deve però utilizzare la **componente normale** del numero di Mach a monte al posto di  $M_1$ .



## Onde d'urto oblique

La **componente normale** (spesso detta semplicemente *Mach normale*) del numero di Mach a monte dell'onda d'urto è definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \epsilon}{a_1} = M_1 \sin \epsilon$$

Quella a valle è:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin \beta}{a_2} = M_2 \sin \beta = M_2 \sin(\epsilon - \delta)$$

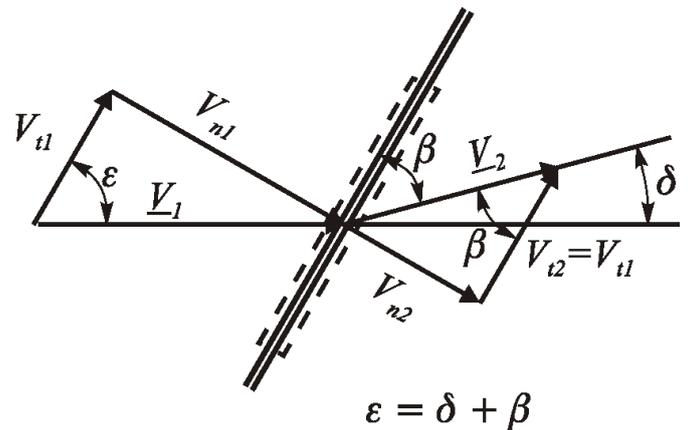
Evidentemente si ha:

$$M_{n1} > 1, \quad M_{n2} < 1$$

E.g. con queste posizioni si ha:

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)}$$

$$M_2^2 \sin^2 \beta = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \epsilon + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \epsilon - (\gamma - 1)}$$



## Onde d'urto oblique

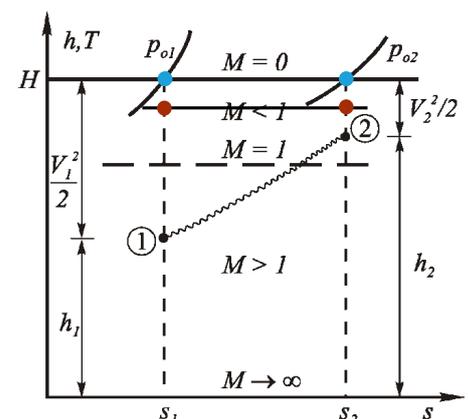
Non è formalmente corretto ricavare il rapporto delle **pressioni di ristagno**, dalla relazione relativa alle onde d'urto normali poiché questa non tiene conto della componente tangenziale della velocità.

Tuttavia, se sul piano  $h-s$  si individuano i due **stati di ristagno normali**, essi risulteranno allineati in orizzontale, così come lo saranno i due **stati totali** i quali si ottengono aggiungendo ai primi lo stesso contributo entalpico relativo all'uguale componente tangenziale della velocità.

La differenza fra le entropie statiche non dipende dal sistema di riferimento e dalla:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

si può verificare che anche il salto di pressione di ristagno è indipendente.



## Onde d'urto oblique

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \epsilon - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

Il **salto di pressione**, che è una misura della **forza** di un'onda d'urto, aumenta con l'**angolo d'urto**.

Evidentemente l'onda d'urto **normale** ( $\epsilon = 90^\circ \rightarrow \sin \epsilon = 1$ ) è quella che provoca il **massimo salto di pressione** attraverso l'urto.

Viceversa l'onda diventa **evanescente** (salto di pressione unitario ovvero forza nulla) per il valore minimo dell'angolo d'urto che corrisponde all'**onda di Mach**. Cioè quando:

$$M_{n1} = M_1 \sin \epsilon = 1 \rightarrow \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$$

Evidentemente valori di  $\epsilon < \mu$  non **sono possibili** perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda **risulterebbe inferiore all'unità**.

$\mu$  è detto **angolo di Mach**.



## Onde d'urto oblique

Partendo dalla costanza della componente tangenziale della velocità si può determinare il legame fra  $M_1$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ :

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1} \quad \left( \cot \epsilon = \frac{1}{\tan \epsilon} \right)$$

La **deviazione** della corrente è **nulla** quando:

- $\cot \epsilon = 0 \rightarrow \epsilon = 90^\circ$  che corrisponde al caso di **onda normale**;
- $\sin^2 \epsilon = 1/M_1^2 \rightarrow \epsilon = \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$  che corrisponde al caso di **onda di Mach**.

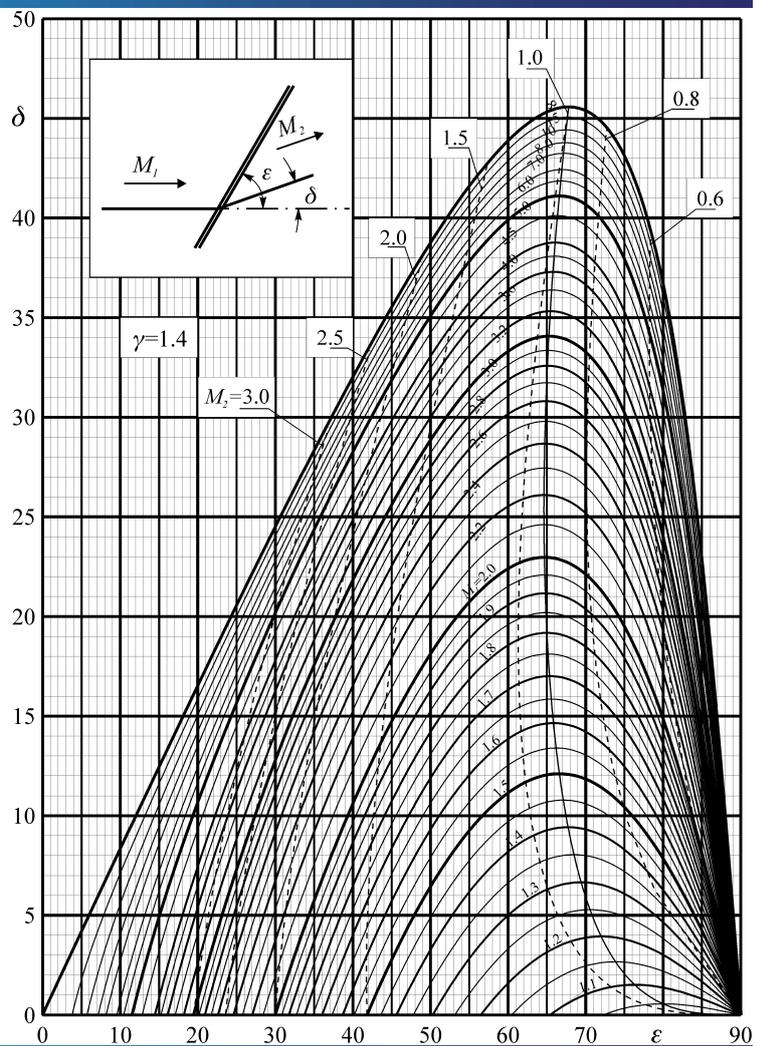
Come già detto l'**onda di Mach** è quella per la quale il numero di Mach **normale** è **unitario** per cui essa **non comporta** alcuna **variazione** finita delle **proprietà termofluidodinamiche del fluido**.



## Onde d'urto oblique

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per  $\epsilon = \mu$  e per  $\epsilon = 90^\circ$ ; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.



## Onde d'urto oblique

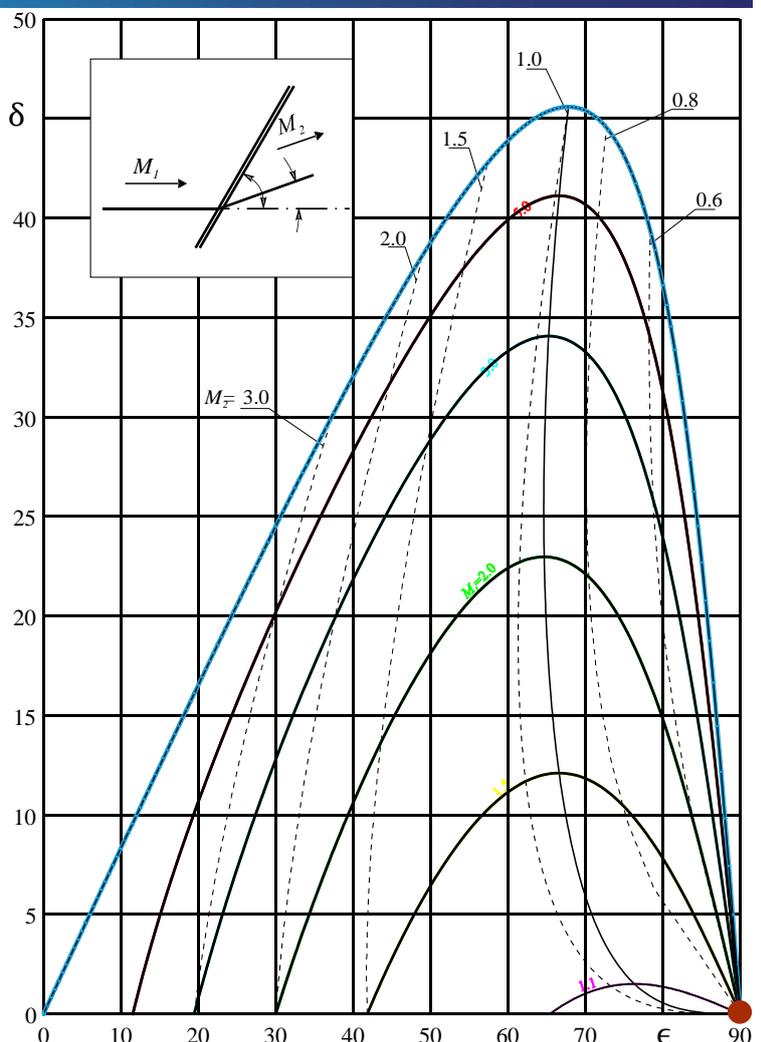
$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per  $\epsilon = \mu$  e per  $\epsilon = 90^\circ$ ; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.

La **parabola** si **sposta** verso l'**alto ingrandendosi** all'**aumentare** del numero di **Mach**.

La **parabola** si **sposta** verso il **basso** rimpicciolendosi al **diminuire** del numero di **Mach**.

Nel limite di  $M_1 \rightarrow 1$  la curva degenera nel punto  $\delta = 0, \epsilon = 90$ .



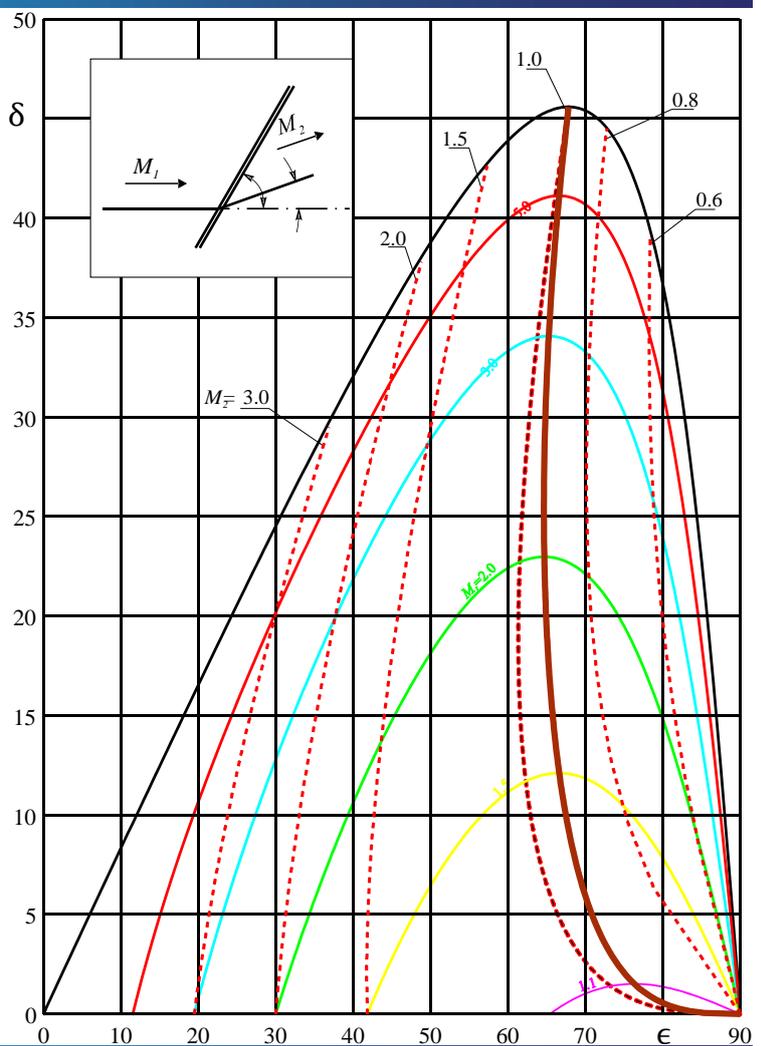
## Onde d'urto oblique

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

Le linee tratteggiate indicano le curve **isovalore** del numero di **Mach a valle**.

In particolare la curva relativa a  $M_2 = 1$  separa le zone in cui il moto a valle è **supersonico** (a sinistra) da quelle in cui è **subsonico** (a destra).

La linea continua individua invece il luogo dei punti in cui l'**angolo di deviazione è massimo**.



## Onde d'urto oblique

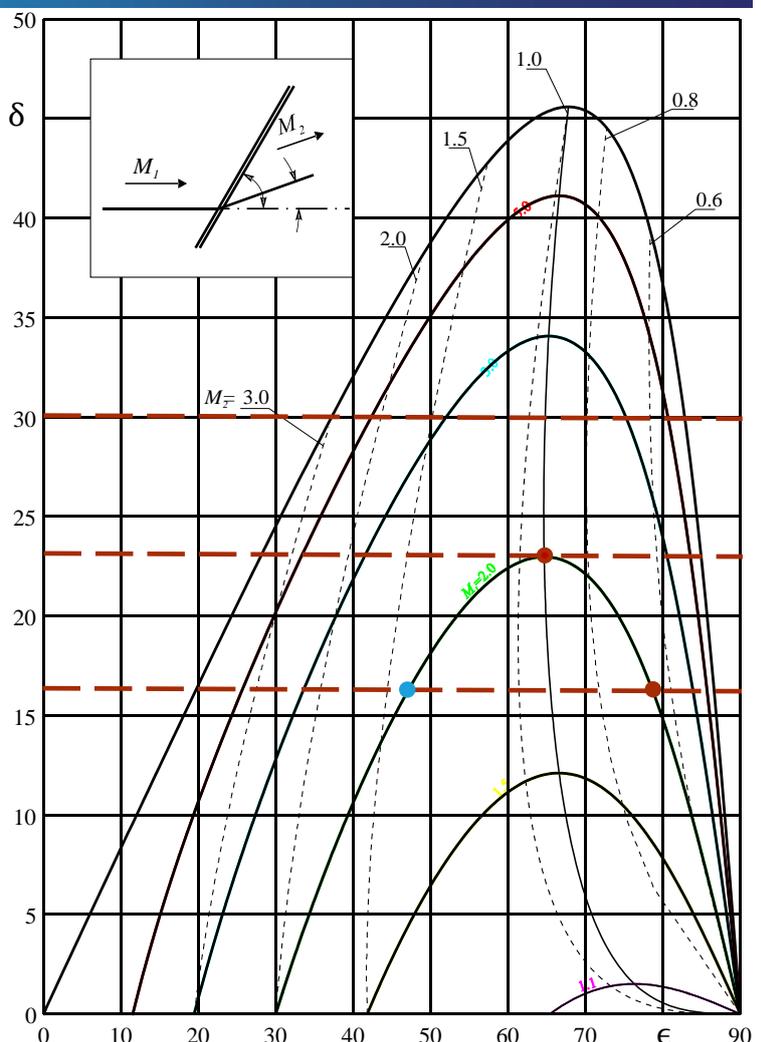
Per un **dato** numero di **Mach** (e.g. 2.0) e per  $\delta$  **crescente** si hanno tre possibilità:

- **due soluzioni** con due valori distinti per l'angolo  $\epsilon$ ;
- **una sola soluzione**;
- **nessuna** soluzione.

La soluzione unica corrisponde alla **deviazione massima**  $\delta_{max}$  per un dato numero di Mach.

Per  $\delta > \delta_{max}$  non esistono soluzioni.

Se  $\delta > \delta_{max}$  **non** è **possibile deviare** la corrente con una **semplice** onda d'urto obliqua.



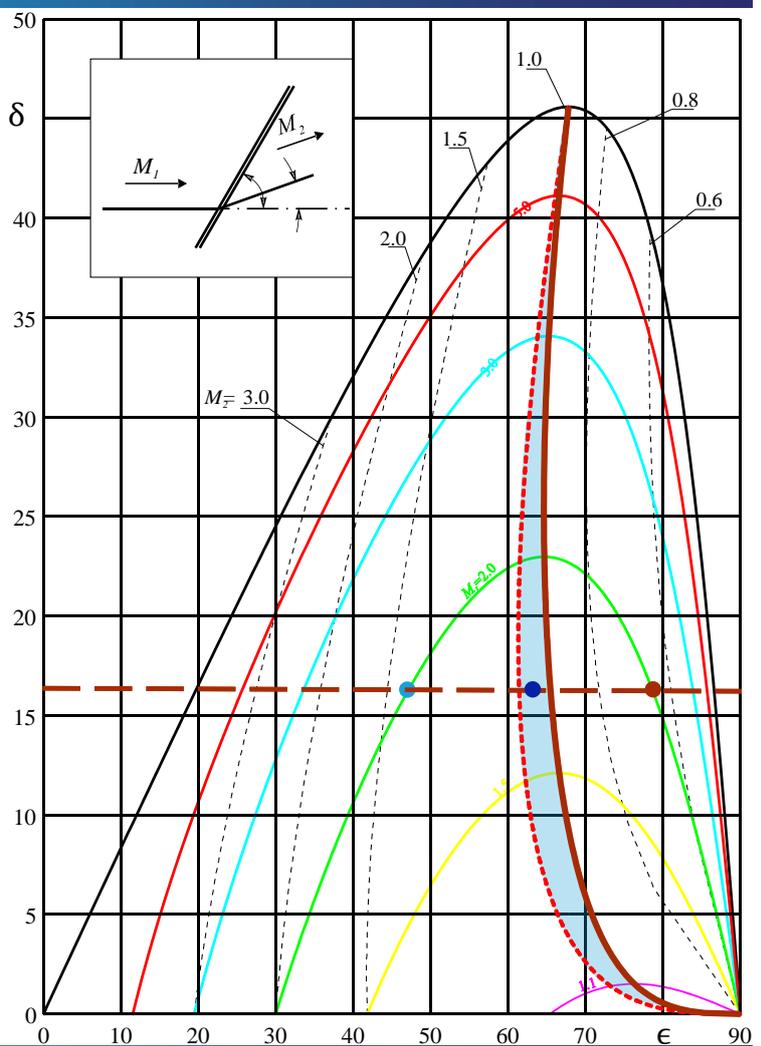
## Onde d'urto oblique

Nel caso delle due soluzioni, la **prima** (valore di  $\epsilon$  inferiore) è detta soluzione **debole** mentre l'altra è la soluzione **forte**.

Infatti, per un dato numero  $M_1$ , valori **maggiori** di  $\epsilon$  corrispondono ad un più **elevato** numero di **Mach normale** e, di conseguenza, ad una maggiore **intensità (forza)** dell'urto.

La soluzione **forte** provoca sempre  $M_2 < 1$ ;

La soluzione **debole** dà luogo quasi sempre a  $M_2 > 1$ , salvo che nella **falce** vicino all'angolo di deviazione massima della corrente per la quale  $M_2 < 1$ .

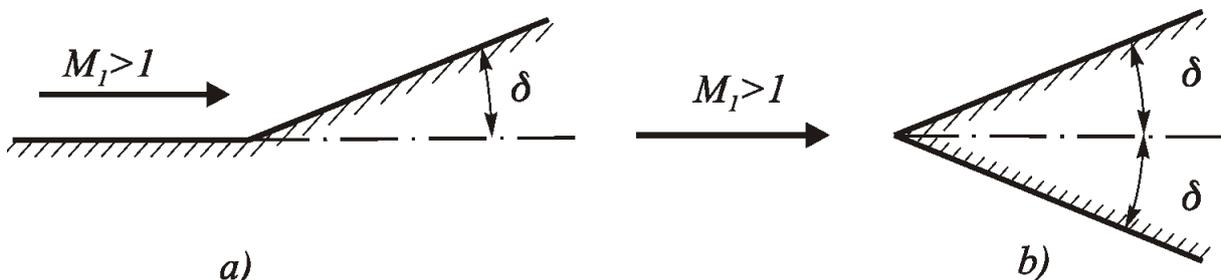


## Moto supersonico su un diedro

Si consideri un flusso **supersonico** su una parete che devia bruscamente di un **angolo  $\delta$**  per la presenza di una **concavità** o di un **diedro infinito** (la geometria è bidimensionale piano).

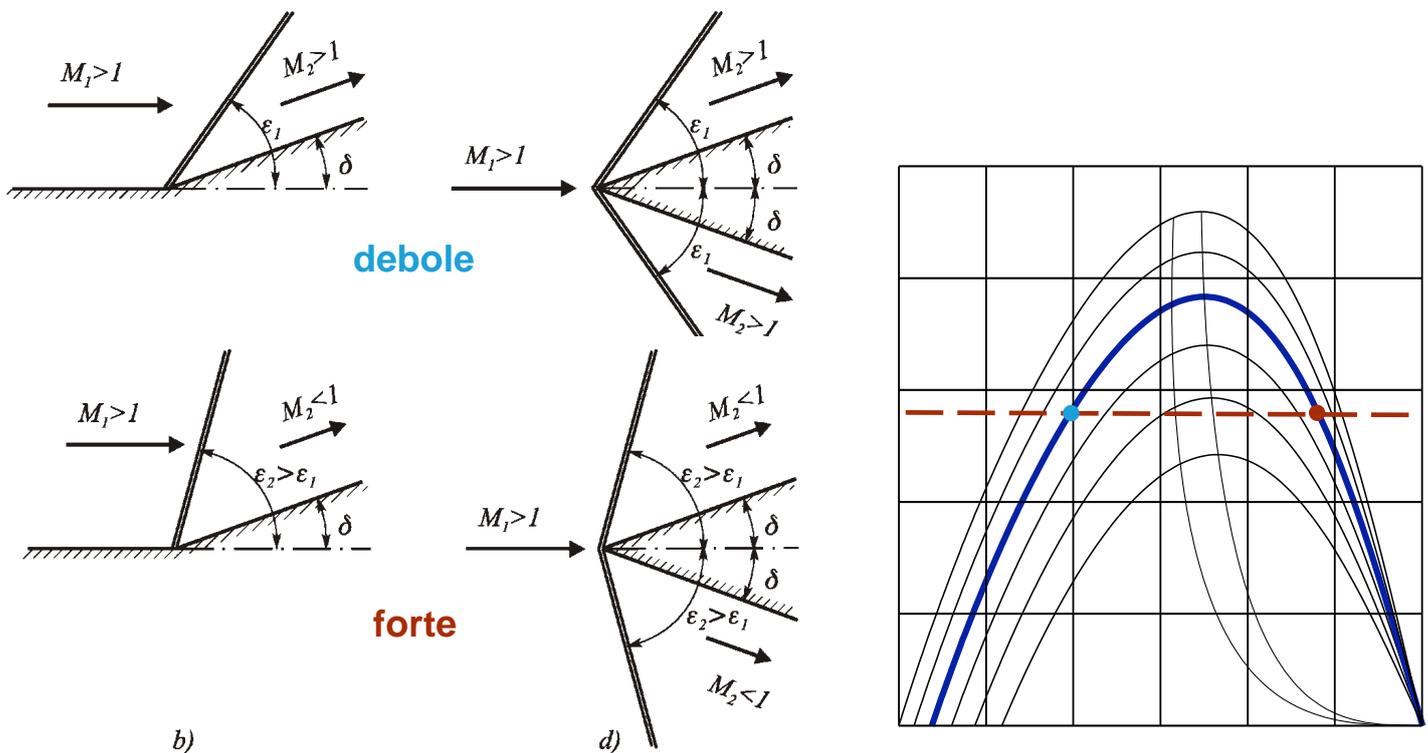
In dipendenza dai valori di  $M_1$  e di  $\delta$ , sono possibili i tre comportamenti prima descritti.

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione  $\delta$  imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a  $M_1$ ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.



## Moto supersonico su un diedro

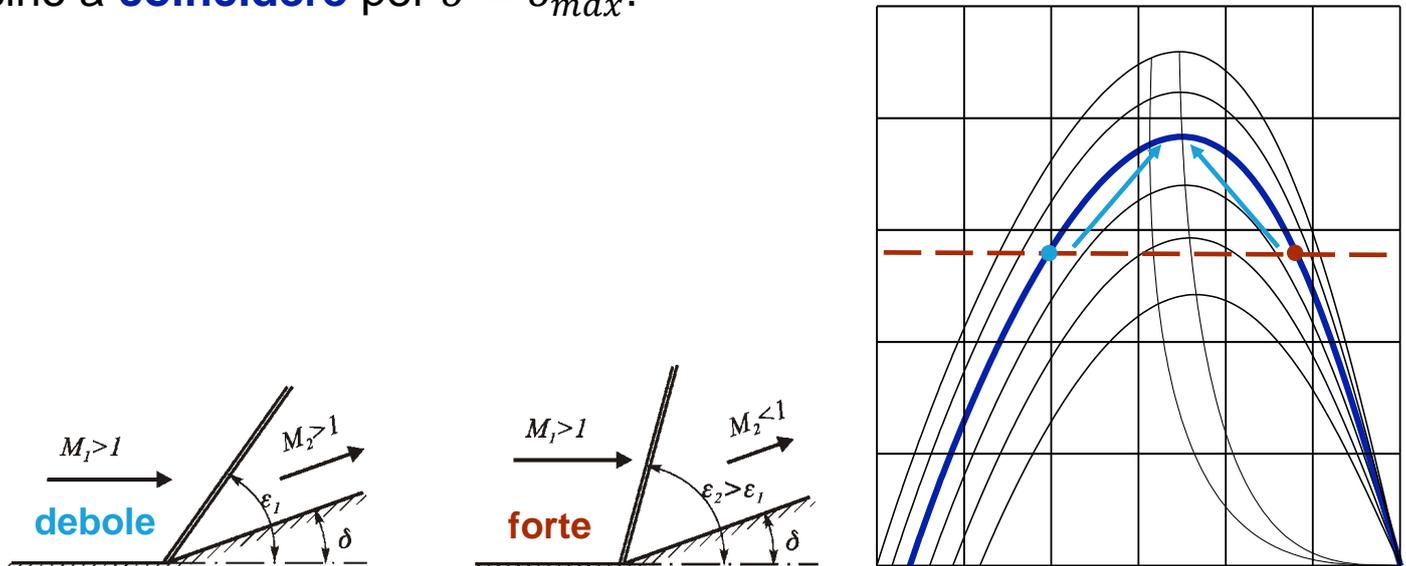
Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione  $\delta$  imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a  $M_1$ ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.



## Moto supersonico su un diedro

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione  $\delta$  imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a  $M_1$ ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.

All'aumentare di  $\delta$ , e/o al **diminuire**  $M_1$ , i due **angoli di inclinazione**  $\epsilon$  relativi alla soluzione **debole** e a quella **forte**, tendono ad avvicinarsi sino a **coincidere** per  $\delta = \delta_{max}$ .



# Moto supersonico su un diedro

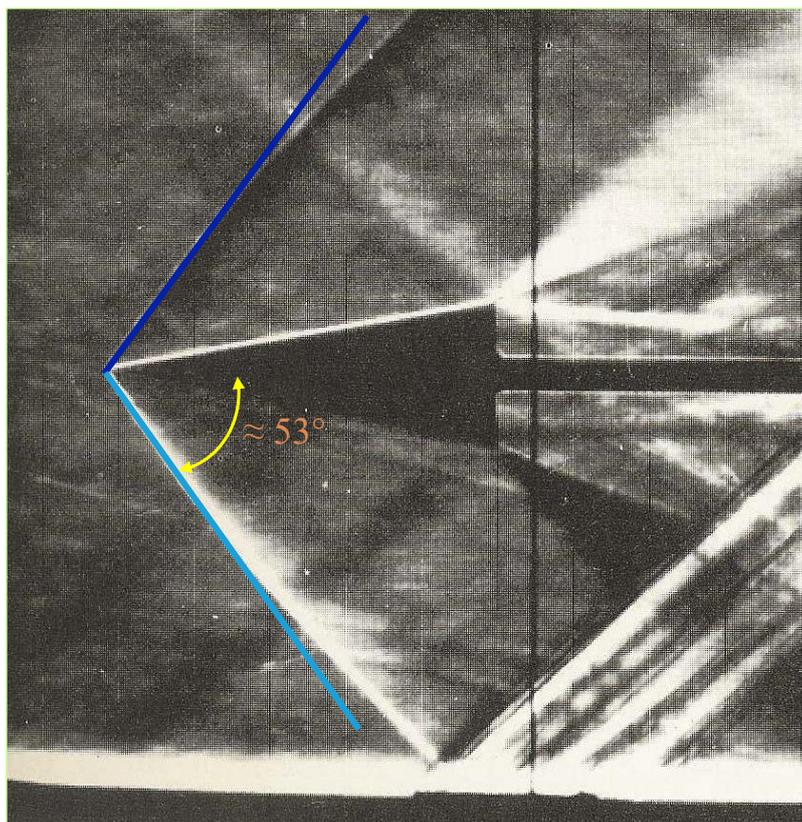
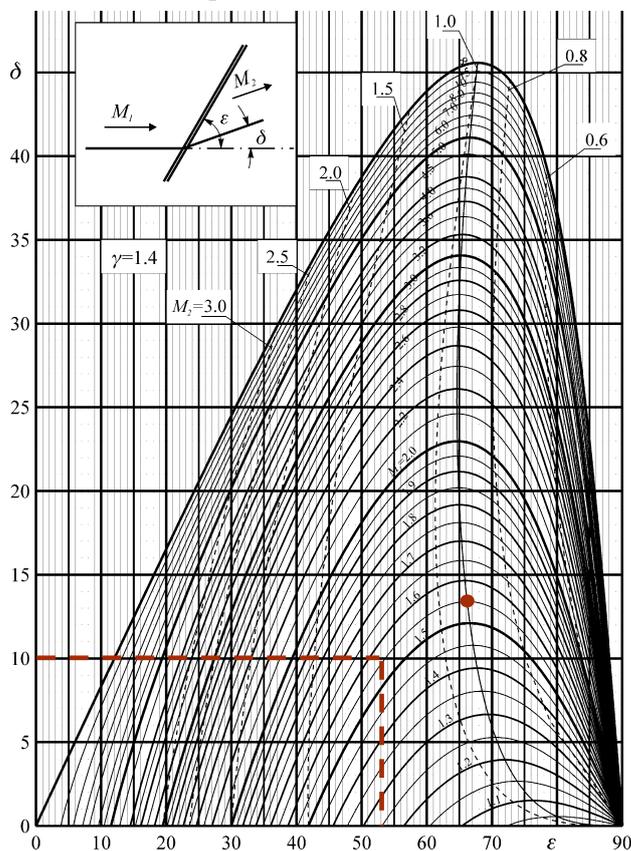


Immagine Schlieren di un flusso **supersonico** di aria su un **diedro** con  $M_1 = 1.56$  e  $\delta = 10^\circ (< \delta_{max})$ . La soluzione in questo caso è **debole**.

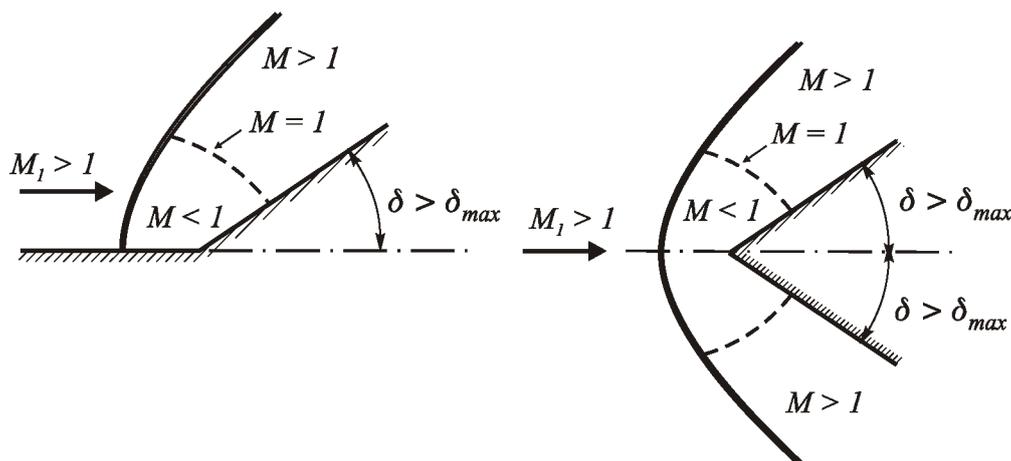


# Moto supersonico su un diedro

Per  $\delta > \delta_{max}$  **non esiste** un'onda **d'urto obliqua** in grado di deviare la corrente dell'angolo assegnato.

Per  $\gamma = 1.4$ , ciò accade sicuramente qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se  $\delta > 45.58^\circ$  che il limite per  $M \rightarrow \infty$ .

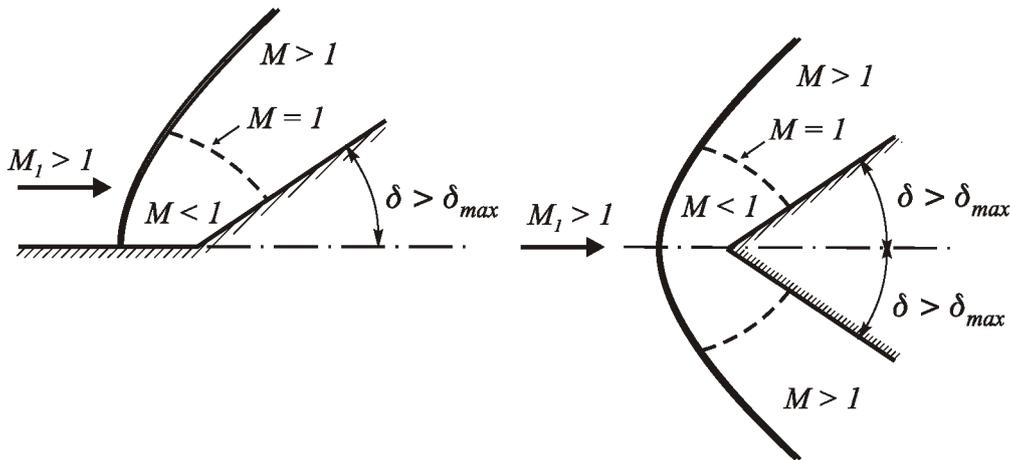
L'onda d'urto allora si stacca dal punto angoloso e si sposta a monte di quest'ultimo (**onda d'urto staccata**).



## Moto supersonico su un diedro

Sulla **parete** (o sul **piano di mezzeria** nel caso del diedro) la **corrente** deve seguire la parete e **non** può essere **deviata**, pertanto l'onda d'urto sulla parete (o sul piano di mezzeria del diedro) deve essere necessariamente **normale** alla direzione della **corrente**.

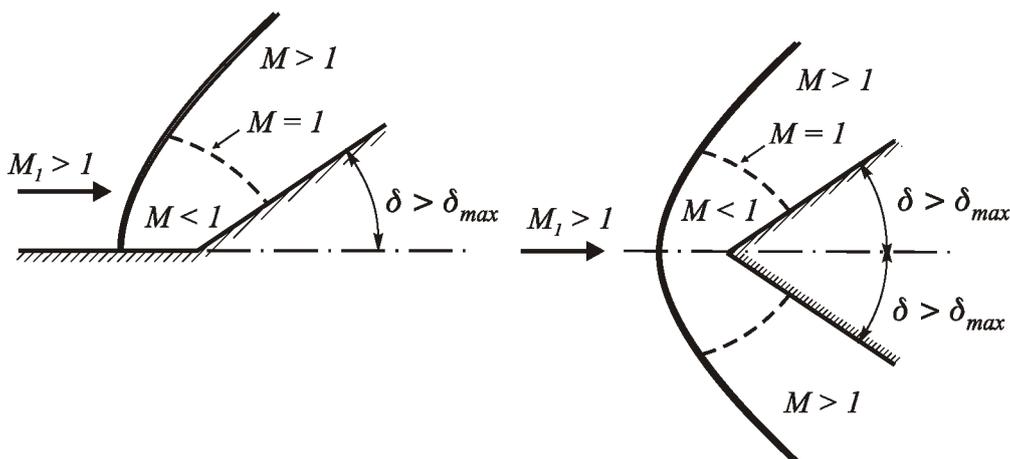
In prossimità dello **spigolo** il moto è subsonico permettendo, al flusso di deviare di un angolo maggiore di  $\delta_{max}$ .



## Moto supersonico su un diedro

L'onda d'urto diventa progressivamente **meno verticale** ( $\epsilon$  diminuisce e l'onda diventa meno forte) **allontanandosi** dalla parete (o dal piano di mezzeria) ed il numero di Mach, a valle di essa, tende ad aumentare sino a poter diventare anche supersonico.

Le linee tratteggiate rappresentano le linee soniche (sulle quali  $M=1$ ).



## Moto supersonico su un diedro

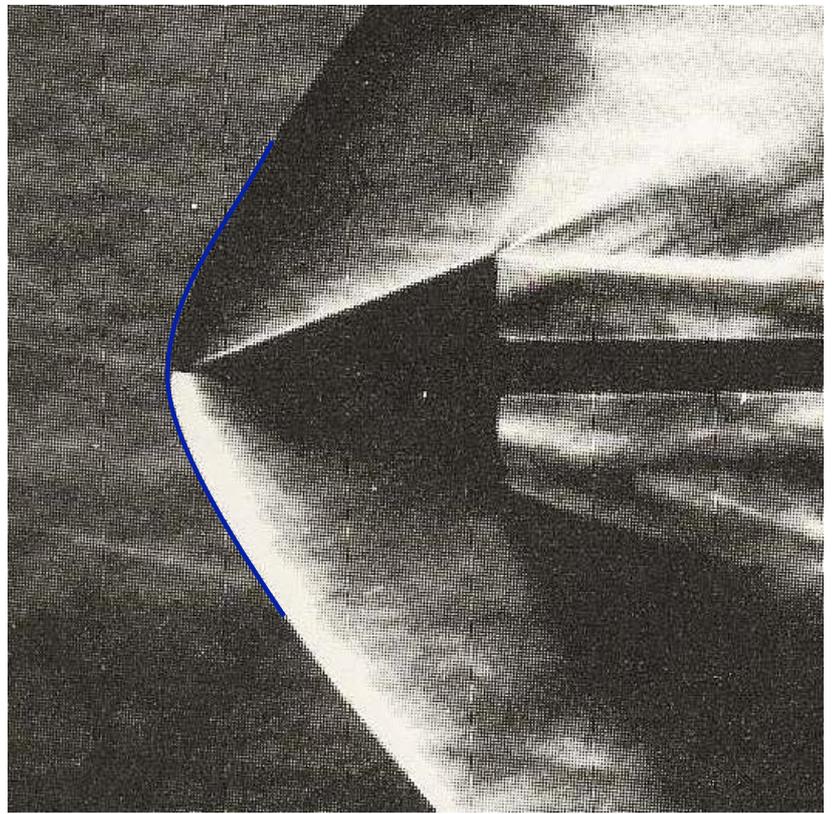
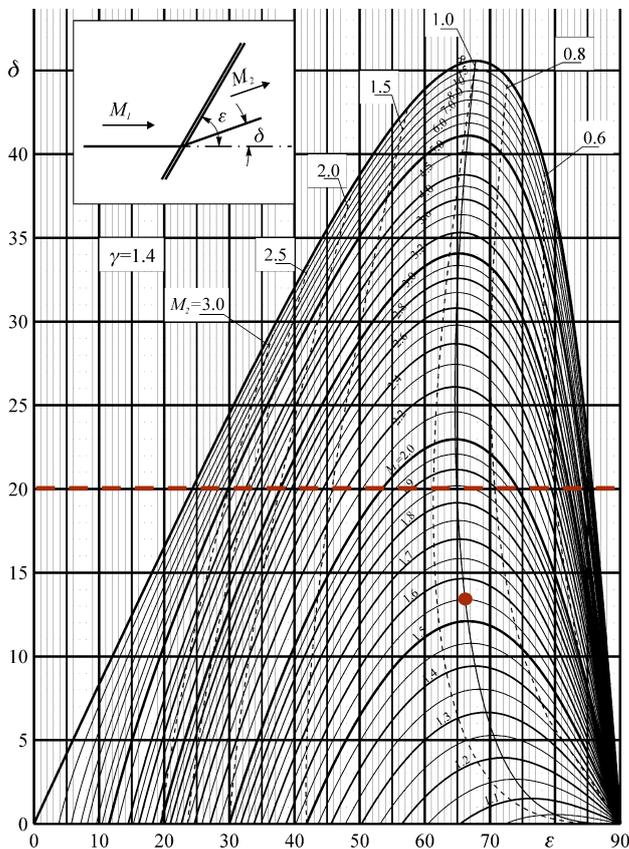


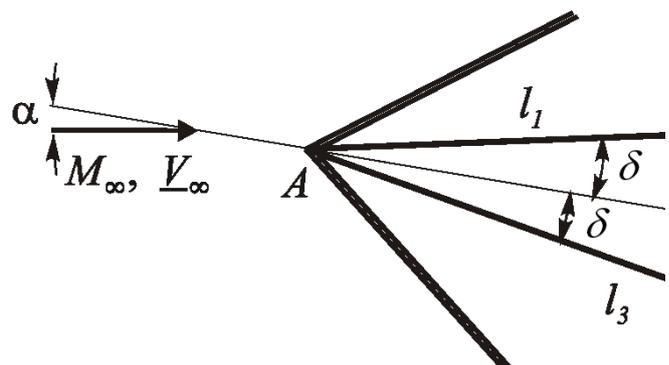
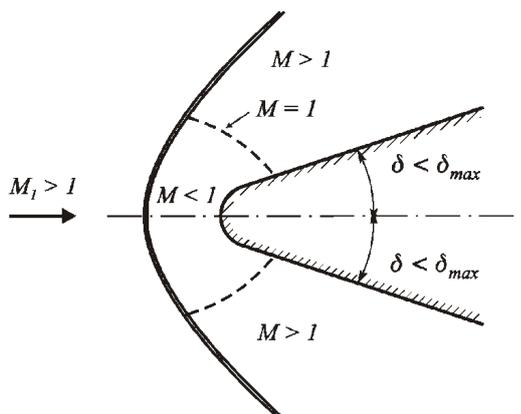
Immagine Schlieren di un flusso **supersonico** di aria su un **diedro** con  $M_1 = 1.56$  e  $\delta = 20^\circ (> \delta_{max})$ . Onda d'urto è **staccata** dal corpo.



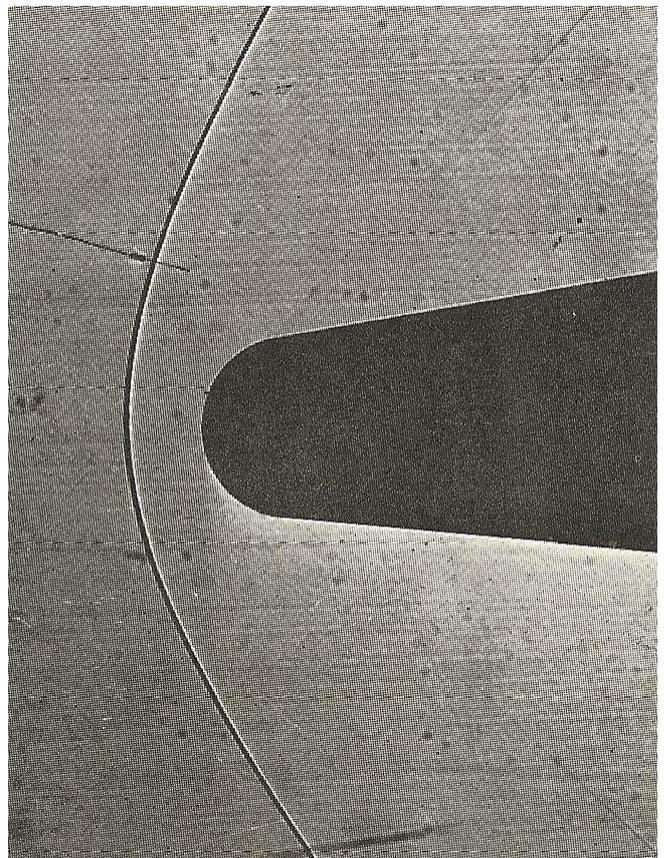
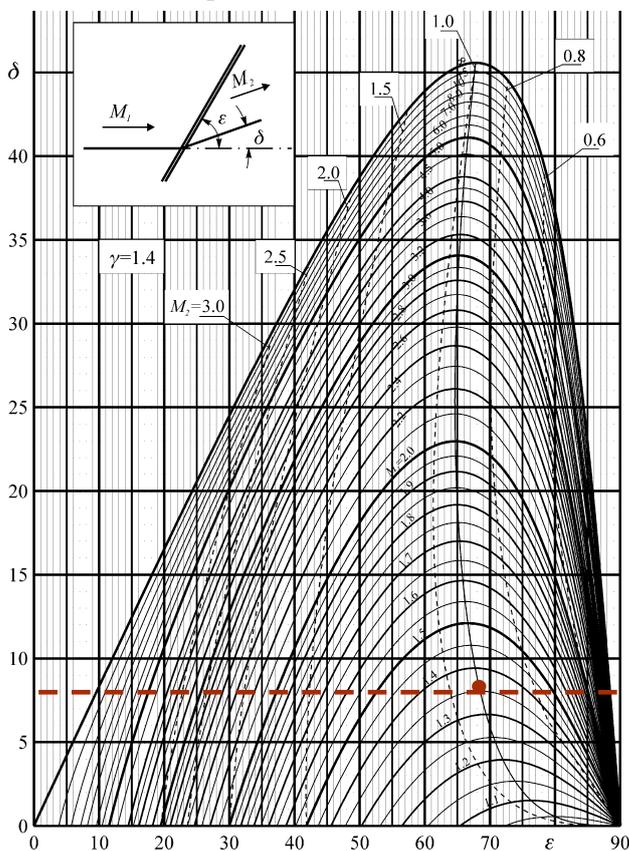
## Moto supersonico su un diedro

Un corpo **tozzo** (non affilato), in una corrente **supersonica**, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulti **minore** dell'angolo di **deviazione massimo**, comporterà senz'altro la presenza di un'onda **d'urto staccata** dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di  $\delta_{max}$ .

In ogni caso, se un corpo in regime supersonico deve avere un **basso coefficiente di resistenza** (e.g. un profilo alare) è preferibile che il suo **bordo di attacco** sia quanto più possibile **affilato** in modo generare **piccole** deviazioni della corrente e onde d'urto relativamente **deboli**.



## Moto supersonico su un diedro



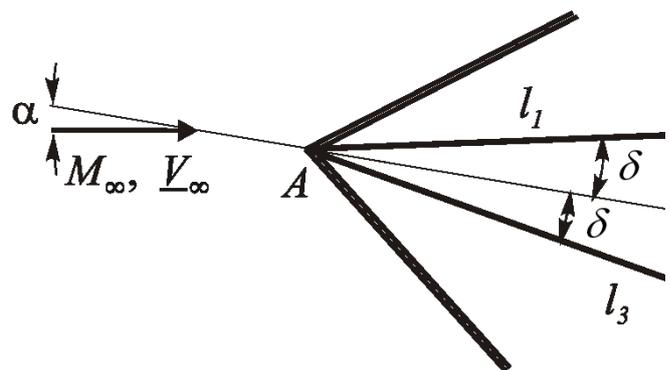
Shadowgraph di un'onda d'urto su un diedro smussato  $M_1 = 1.36$  e  $\delta = 8^\circ (< \delta_{max})$ . Onda d'urto è **staccata** dal corpo.



## Moto supersonico su un diedro

Nel caso di un **diedro** con angolo di semiapertura  $\delta$  posto ad un angolo di attacco  $\alpha$  rispetto alla direzione della corrente **supersonica**, se i due angoli di deviazione della corrente (rispettivamente  $\delta - \alpha$  per la zona superiore e  $\delta + \alpha$  per la zona inferiore) sono **entrambi inferiori** a  $\delta_{max}$ , le **due soluzioni** per i campi di moto **superiore** ed **inferiore** sono **indipendenti** una dall'altra, cioè, a differenza di quanto accade in moto subsonico, i due moti **non si influenzano**.

Se, invece, la deviazione fosse più **elevata** (e.g. se  $\delta + \alpha > \delta_{max}$ ), l'onda d'urto si **staccerebbe** dal diedro ed i due campi di moto **non** sarebbero più **indipendenti**; il campo di moto inferiore influenzerebbe il superiore e viceversa.





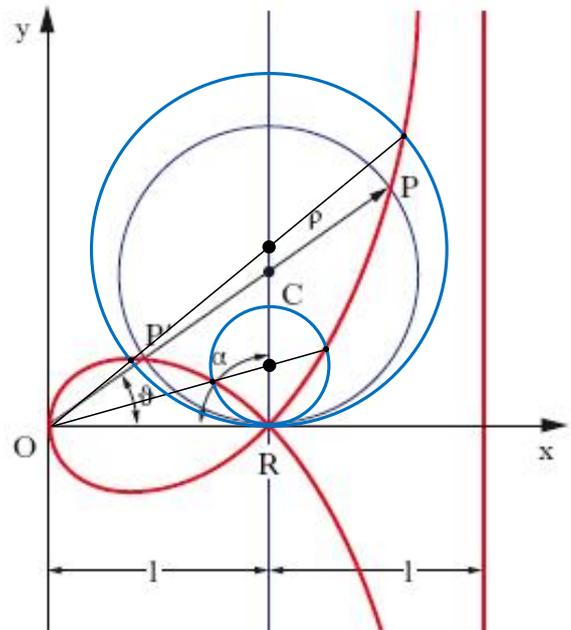
# La relazione di Prandtl e la polare d'urto

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{\frac{2V_1^2}{\gamma + 1} - V_1 u + a^{*2}}$$

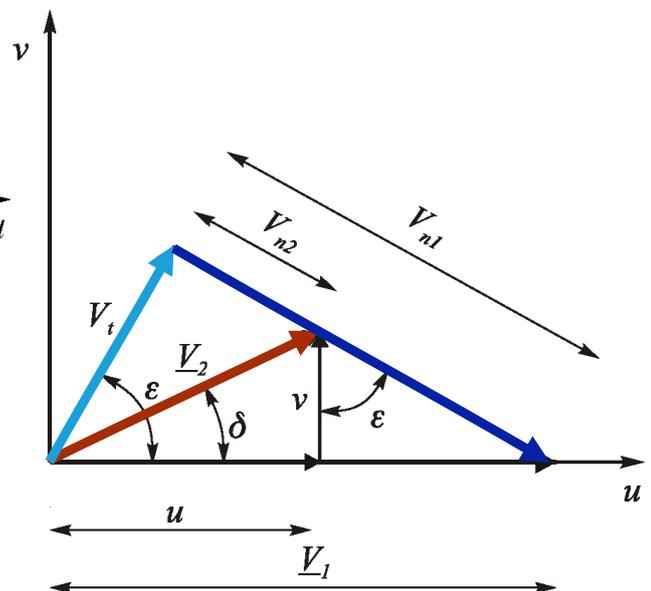
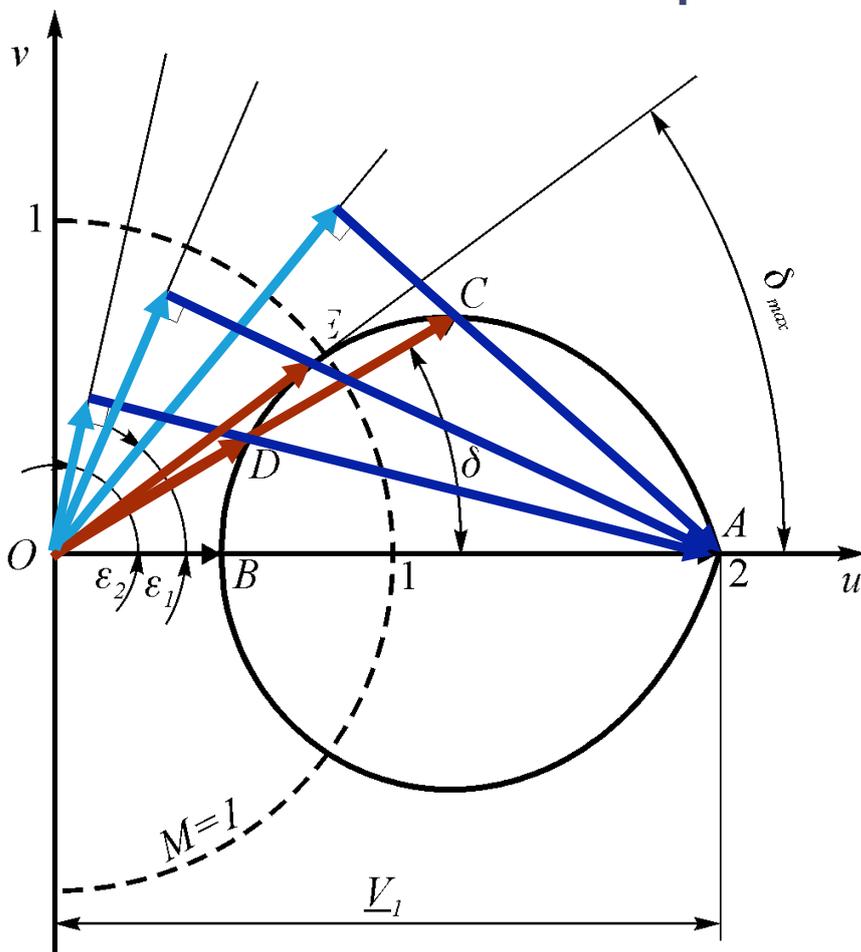
La formula precedente, che restituisce due valori di  $v$  uno positivo l'altro negativo corrispondenti alla deviazione verso l'alto o verso il basso è l'equazione di una curva **strofoide**, o **polare d'urto**.

- $O$ : polo;
- $R$ : punto fisso;
- Asse  $RC$ : curva generatrice;

Ruotando la retta  $OP$  si trovano i punti  $P$  e  $P'$  tali che:  $\overline{P'C} = \overline{CP} = \overline{CR}$



# La relazione di Prandtl e la polare d'urto



## La relazione di Prandtl e la polare d'urto

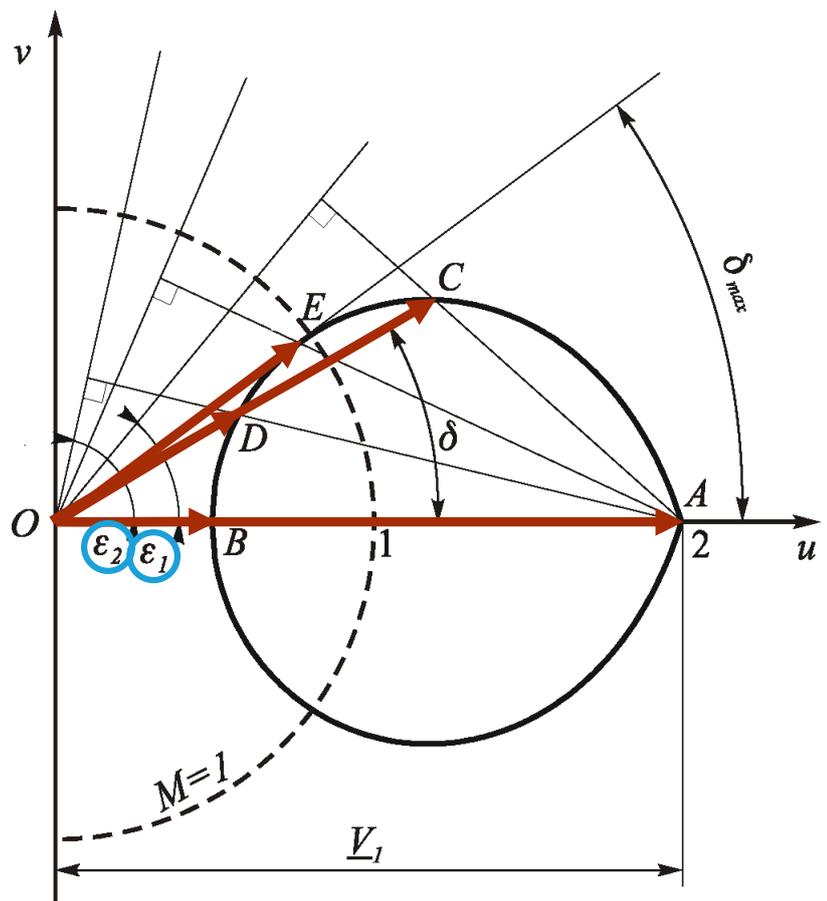
Per ogni  $\delta < \delta_{max}$  esistono due soluzioni:

- la soluzione debole OC che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo  $\epsilon_1$ ;
- la soluzione forte OD che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ .

per  $\delta = 0$  le due soluzioni si riducono:

- all'onda di Mach OA
- all'onda d'urto normale OB.

Nella figura è stata anche indicata l'unica soluzione OE esistente per  $\delta = \delta_{max}$ .

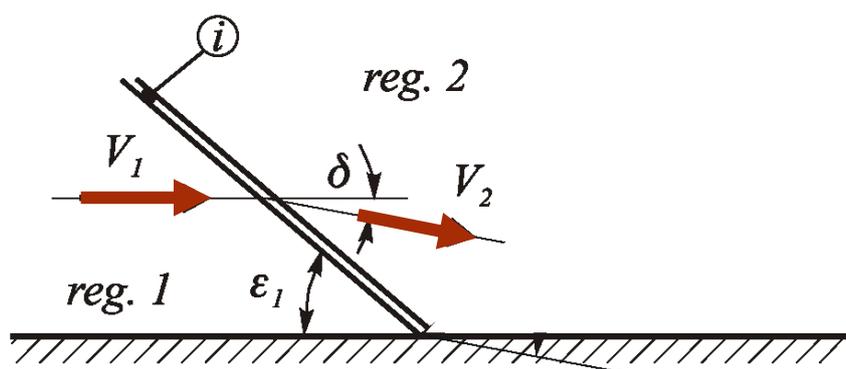


## Riflessione di onde d'urto

In figura è mostrata un'onda obliqua **incidente** su una superficie piana. **Prima** dell'onda d'urto (reg. 1) la **corrente** è **parallela** alla **superficie** e l'onda devia la corrente di un angolo  $\delta$  **verso la parete**.

La direzione della corrente a valle dell'onda (reg. 2) è **incompatibile** con la presenza della parete, è deve necessariamente esistere un evento che **raddrizza** la corrente (deviandola verso l'alto di un angolo pari a  $-\delta$ ), riportandola quindi parallela alla parete.

Questo evento è un'altra onda d'urto obliqua, che parte dal punto di incidenza dell'onda  $i$  sulla parete e che viene detta **onda riflessa**.

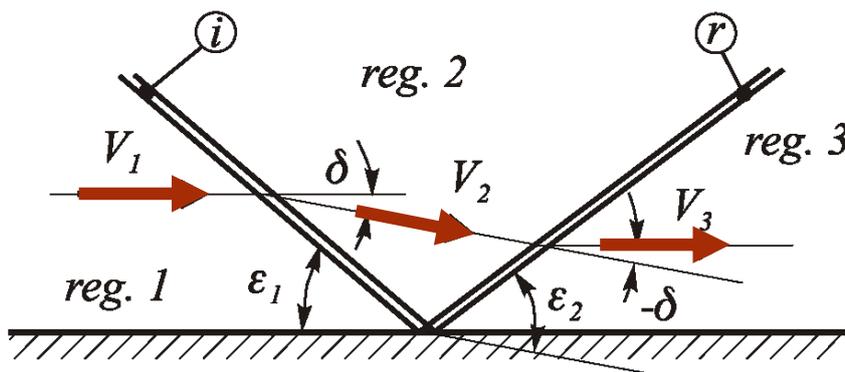


## Riflessione di onde d'urto

Ovviamente sarà  $M_1 > M_2 > M_3$  (e anche  $V_1 > V_2 > V_3$  e  $p_3 > p_2 > p_1$ ). Una riflessione del tipo indicato in figura si chiama **riflessione regolare**.

La fenomenologia è analoga anche se l'onda incidesse su un piano di simmetria

**Non** si tratta di una riflessione **speculare** in quanto, in generale,  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 - \delta$ ;  $\epsilon_2$  è tale che l'onda consenta alla corrente di raddrizzarsi.

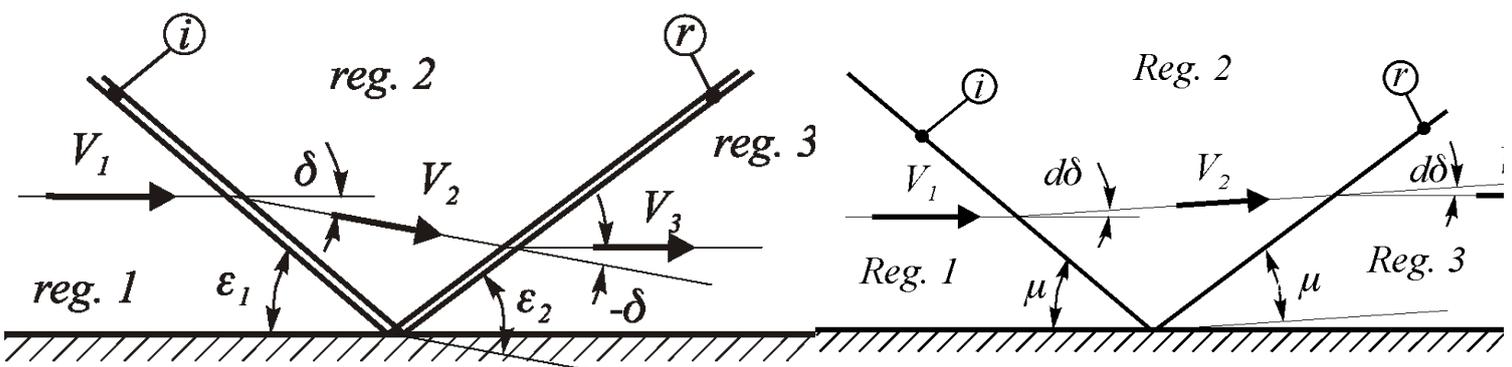


## Riflessione di onde d'urto

I due angoli  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  sono uguali (riflessione **speculare**) solo se l'onda d'urto è un'onda di Mach. Infatti, in questo caso l'angolo di deviazione  $\delta$  è infinitesimo e quindi:  $\epsilon_1 = \mu_1 = \epsilon_2 = \mu_2$ .

Un'onda di Mach di **compressione** (deviazione **infinitesima** verso il basso; Fig. di sinistra) si **riflette** come onda di Mach di **compressione** (deviazione infinitesima verso l'alto) con intensità dell'urto infinitesima.

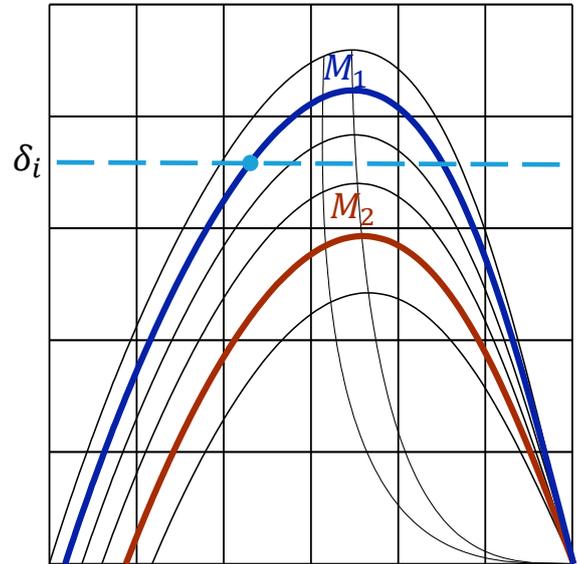
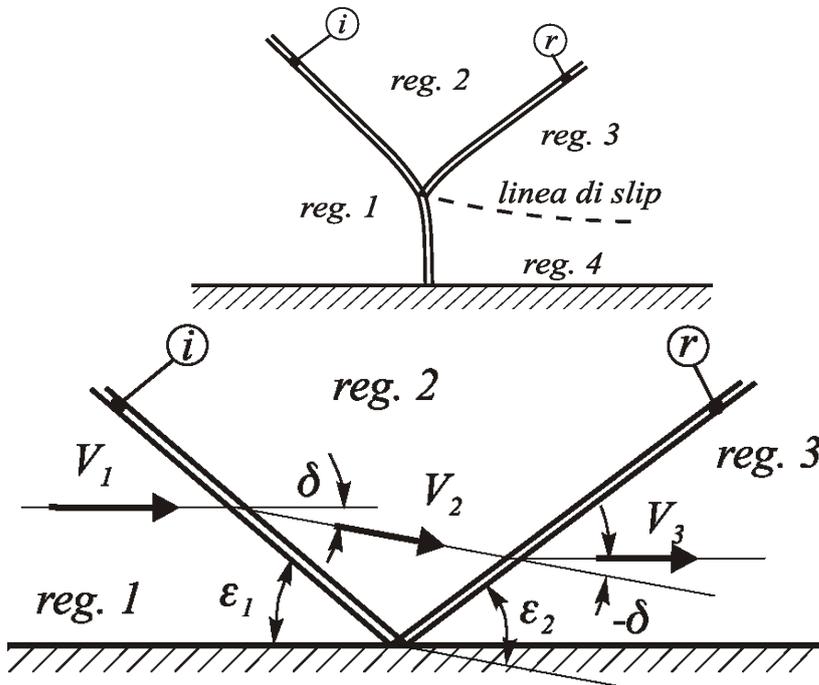
Un'onda di Mach di **espansione**, che ha una prima deviazione **infinitesima** verso l'alto, si **riflette** come onda di Mach di **espansione**, con una deviazione **infinitesima** verso il basso.



## Riflessione di onde d'urto

Visto che  $\delta_{max}(M)$  è una funzione strettamente **crescente** di  $M$  e  $M_2 < M_1$ , si può verificare che, pur essendo  $M_2 > 1$ ,  $\delta_i > \delta_{max}(M_2)$ .

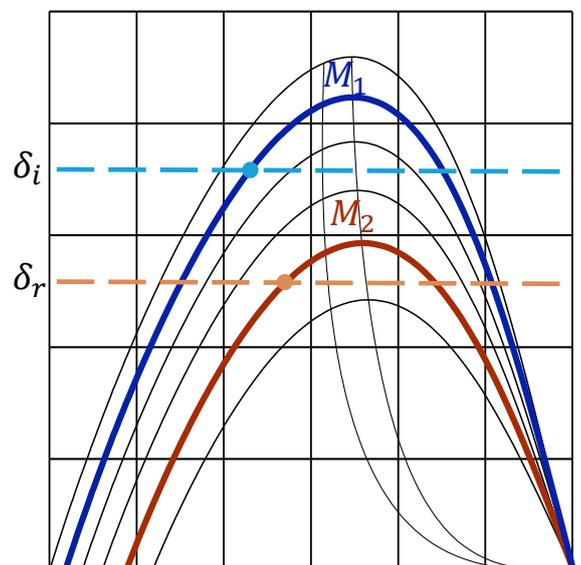
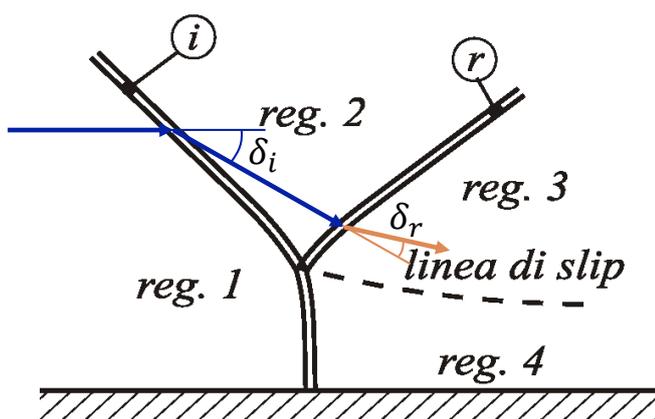
In questi casi, una riflessione **regolare non** è **possibile** e si ha una **riflessione a  $\lambda$**  (rovesciata) anche detta **riflessione alla Mach**.



## Riflessione di onde d'urto

A causa della **diversa** inclinazione delle varie onde d'urto (che in alcuni casi anche curve) il vettore **velocità** varierà da punto a punto e con esso anche l'entropia (dal teorema di Crocco il moto è rotazionale).

Come si vede dalla figura la **rotazione** imposta dall'onda **riflessa** (passando dalla zona 2 alla 3) è **minore** di quella imposta dall'onda **incidente** ( $\delta_r < \delta_i$ ).



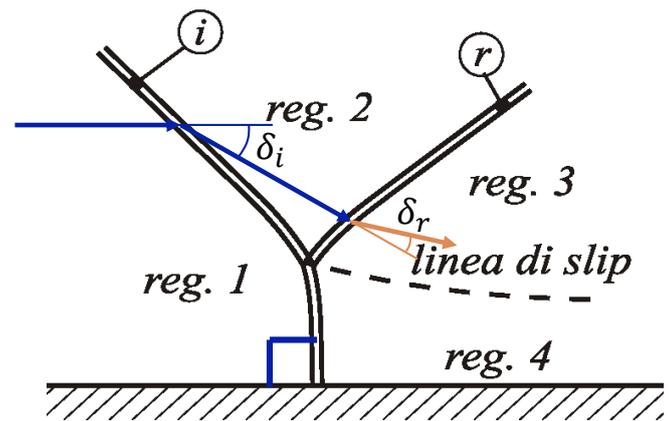
## Riflessione di onde d'urto

L'onda **incidente** deve diventare **normale** in prossimità della parete perché non è possibile una riflessione regolare.

Attraverso la **linea di slip** (anche detta superficie **libera** o di linea di **contatto**) la **direzione** della **velocità** e la **pressione** rimangono **costanti** mentre le altre grandezze possono avere dei salti.

La linea di slip, che è coincidente con una linea di corrente, deve essere **curva** per bilanciare il **gradiente di pressione** provocato dalla maggiore **forza** dell'onda **normale** rispetto alle **due oblique**.

Nella regione 4 il moto è **subsonico** e tende ad **accelerare** per la convergenza dell'area di passaggio.

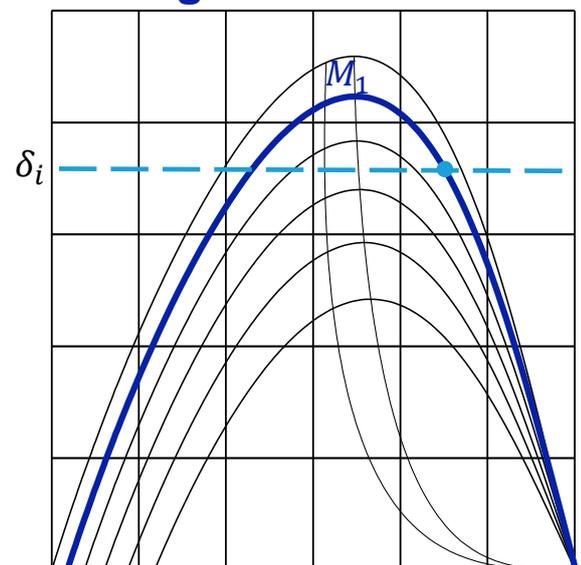
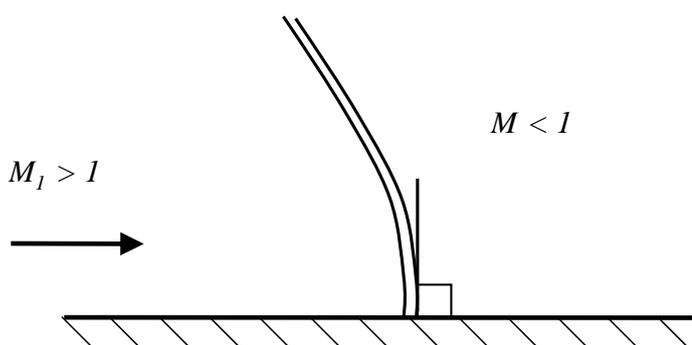


## Riflessione di onde d'urto

Se l'onda incidente provoca un moto **subsonico** a **valle** (all'interno della *falce* o soluzione forte) **non** può avere luogo alcuna **riflessione**.

Poiché la corrente non può essere deviata in prossimità della parete l'onda d'urto deve incurvarsi e, anche in questo, caso sarà localmente **normale** alla parete.

In ogni caso, se non è possibile una **riflessione regolare** l'onda deve essere **normale** alla **parete**.

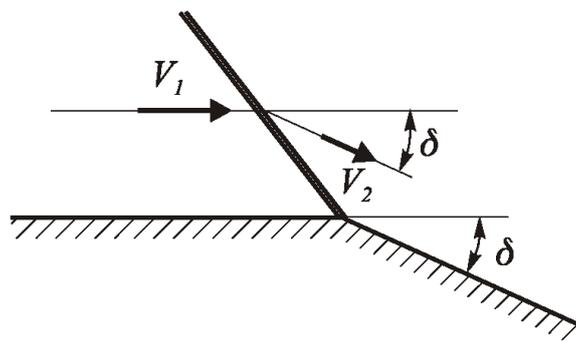


## Riflessione di onde d'urto

Esistono solo due casi in cui un'onda incidente **non si riflette**:

- Onda **normale**;
- L'onda d'urto incide su una parete esattamente dove questa devia di un **angolo**  $\delta_p$  **uguale** all'angolo di deviazione della corrente provocato dall'onda  $\delta_i$ .

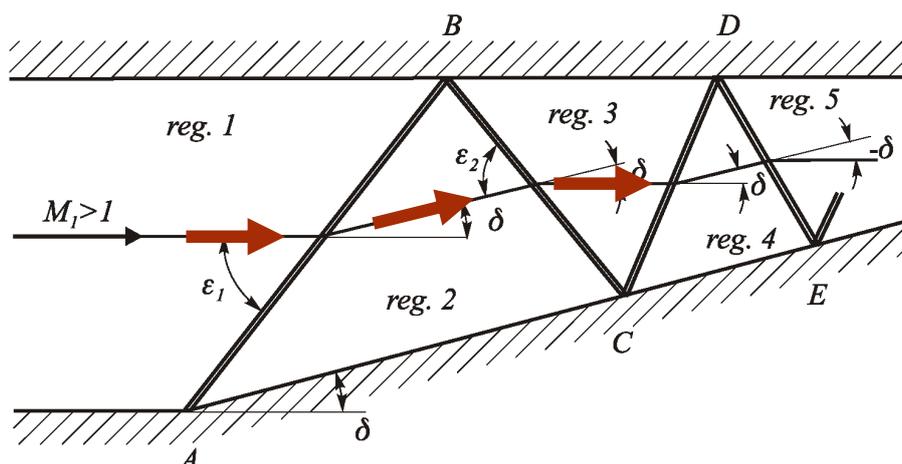
In quest'ultimo caso se la deviazione della parete fosse minore (i.e.  $\delta_p < \delta_i$ ) nasce un'onda riflessa che, però, sarebbe meno forte di quella relativa ad una parete piana.



## Riflessione di onde d'urto

Se una corrente supersonica fluisce in un canale in cui la parete inferiore curva verso l'**alto** di  $\delta$  (piccolo così per avere riflessioni regolari) nasce una **prima** onda che fa ruotare la corrente e la rende **parallela** alla parete inferiore.

Quest'onda va a impingere sulla parete **superiore** e si **riflette** in un'altra onda che devia la corrente di  $-\delta$ , riportandola **orizzontale**.

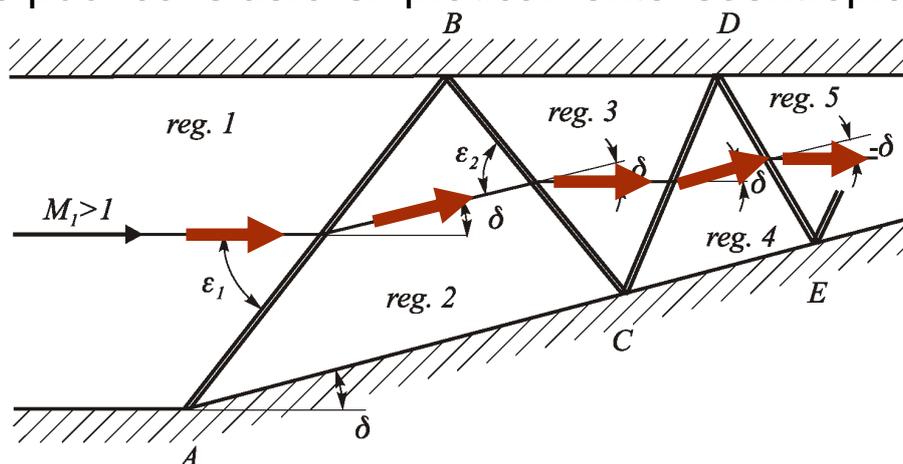


## Riflessione di onde d'urto

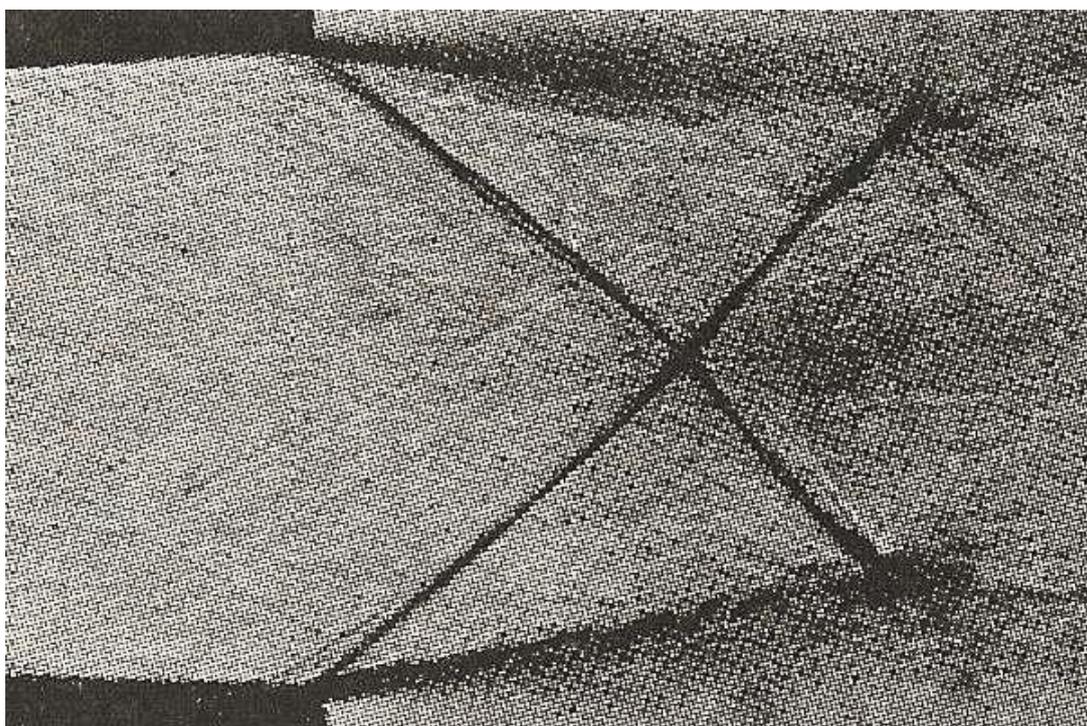
Questo comportamento **continua** fino a che il numero di Mach (che per i successivi urti, sia pure obliqui, va progressivamente diminuendo) è **tale che  $\delta_{max} > \delta$** .

Per la continua diminuzione del numero di Mach, l'onda **CD** (rispettivamente l'onda DE) risulterà **più inclinata** verso l'alto (cioè più verticale) dell'onda **AB** (rispettivamente dell'onda BC).

Per **piccoli** angoli  $\delta$ , le onde tendono a diventare **onde di Mach** e la compressione può considerarsi praticamente isoentropica.



## Intersezione di onde d'urto oblique



Visualizzazione Schlieren che mostra **l'intersezione** di onde d'urto **oblique** all'uscita di un ugello supersonico

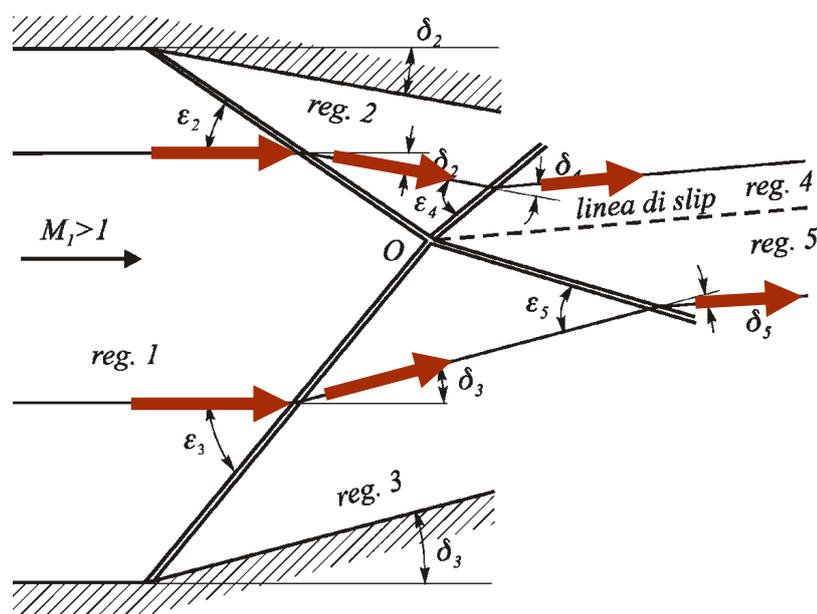
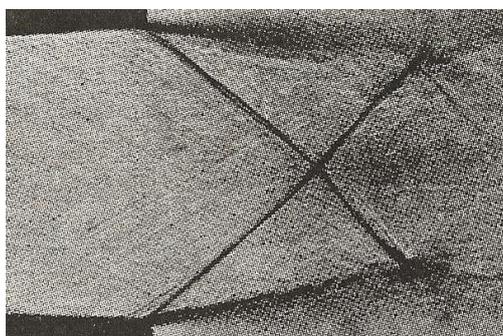


## Intersezione di onde d'urto oblique

Ad **esempio** una corrente, che fluisce in un condotto con  $M_1 > 1$ , subisce due deviazioni  $\delta_2$  e  $\delta_3$  (in generale, diverse tra loro) provocate da due onde d'urto oblique.

A **valle** degli **urti**, nelle due regioni 2 e 3 le correnti avranno in generale proprietà **diverse** e, soprattutto, due direzioni diverse.

Le due nuove correnti devono a loro volta essere **deviate** in modo che alla fine esse abbiano la **stessa direzione e pressione**.



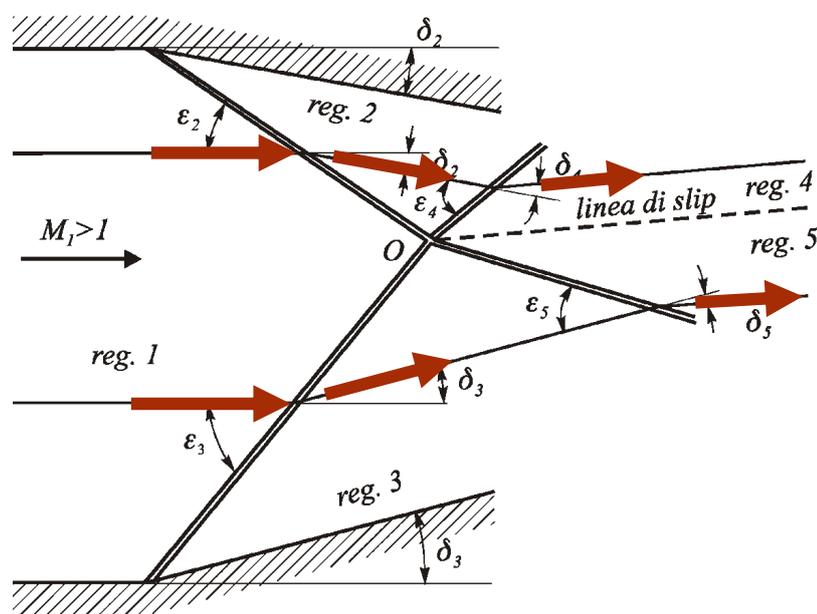
## Intersezione di onde d'urto oblique

Queste ulteriori deviazioni sono possibili solo mediante **riflessione** con altre due onde d'urto oblique, come indicato in figura nel caso **d'intersezione regolare**.

Per la soluzione del problema occorre procedere per **tentativi** trovando la direzione **comune** delle due correnti nelle regioni 4 e 5 che permette di avere **pressioni uguali**.

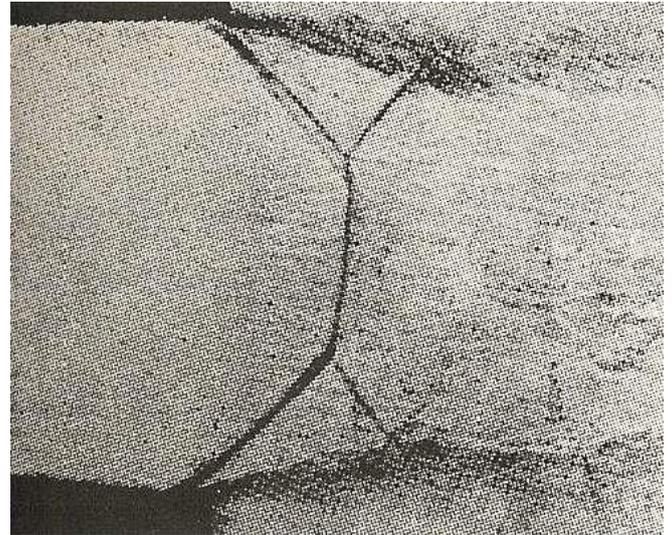
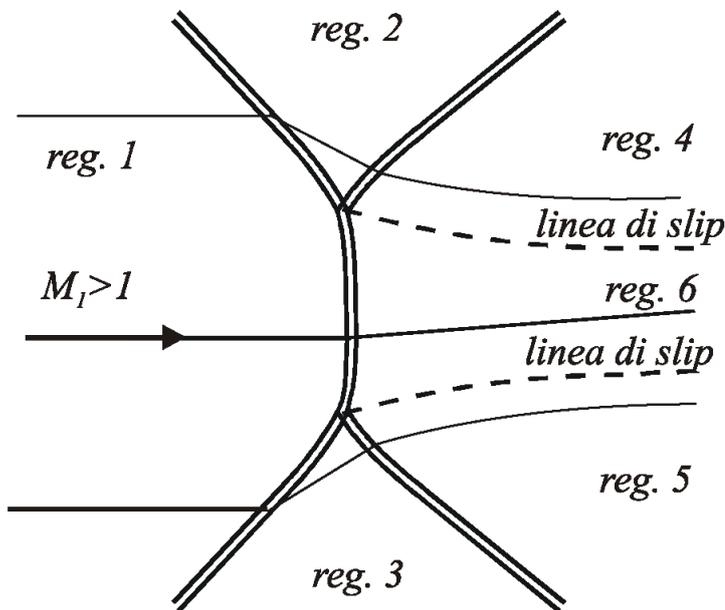
La linea che separa le regioni 4 e 5 è una **linea di slip**.

**Non** è sempre **possibile** avere una **intersezione regolare**, e.g. se i numeri di Mach a valle non sono tali da consentire una deviazione pari  $\delta_4$  o  $\delta_5$ .



## Intersezione di onde d'urto oblique

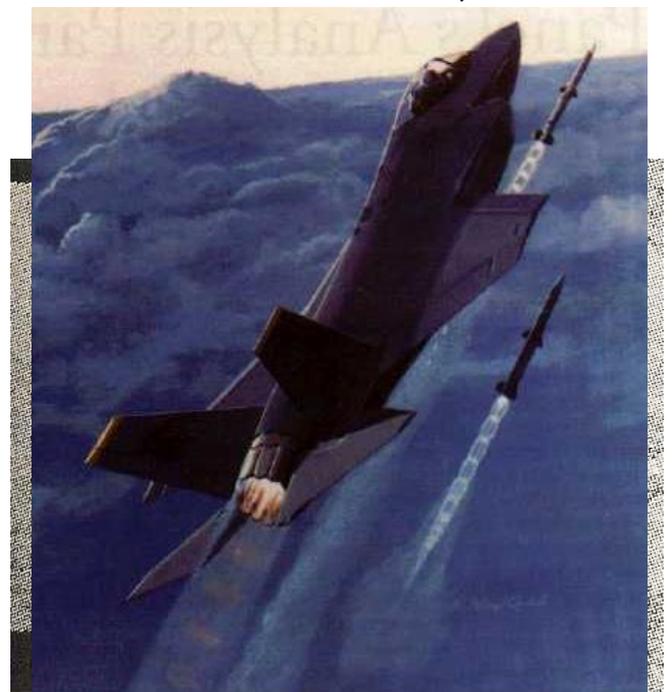
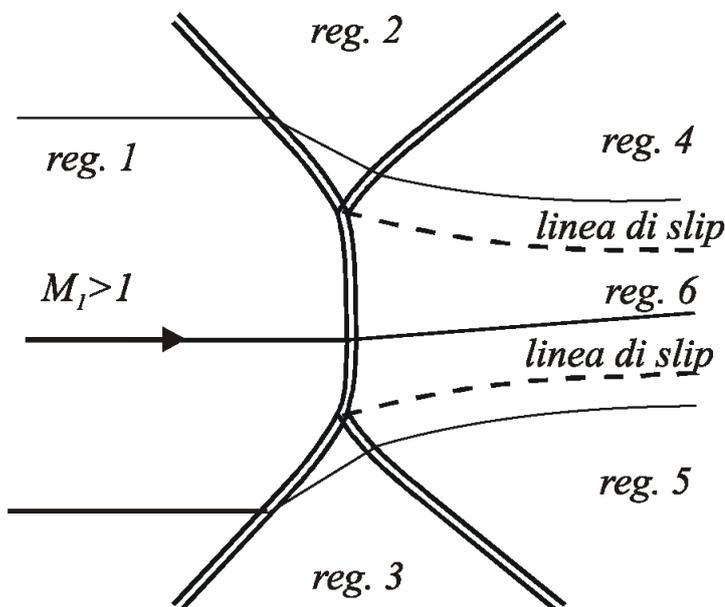
**Non** è sempre **possibile** avere una **intersezione regolare**, e.g. se i numeri di Mach a valle non sono tali da consentire una deviazione pari  $\delta_4$  o  $\delta_5$ . In questo caso, si ha una **intersezione alla Mach**, o a **doppio  $\lambda$** .



## Intersezione di onde d'urto oblique

L'intersezione alla Mach è una **doppia riflessione** a  $\lambda$  con la presenza di due linee (superfici) di slip.

L'onda d'urto quasi normale che separa le regioni 1 e 6 è anche detta onda d'urto di Mach e, nel caso di moto **assialsimmetrico**, **disco di Mach**.



## Onde d'urto coniche

L'ipotesi di fenomenologia **bidimensionale piana** non è applicabile in varie applicazioni come nella parte prodiera di un aereo, o di un missile, dove il moto è **assialsimmetrico**.

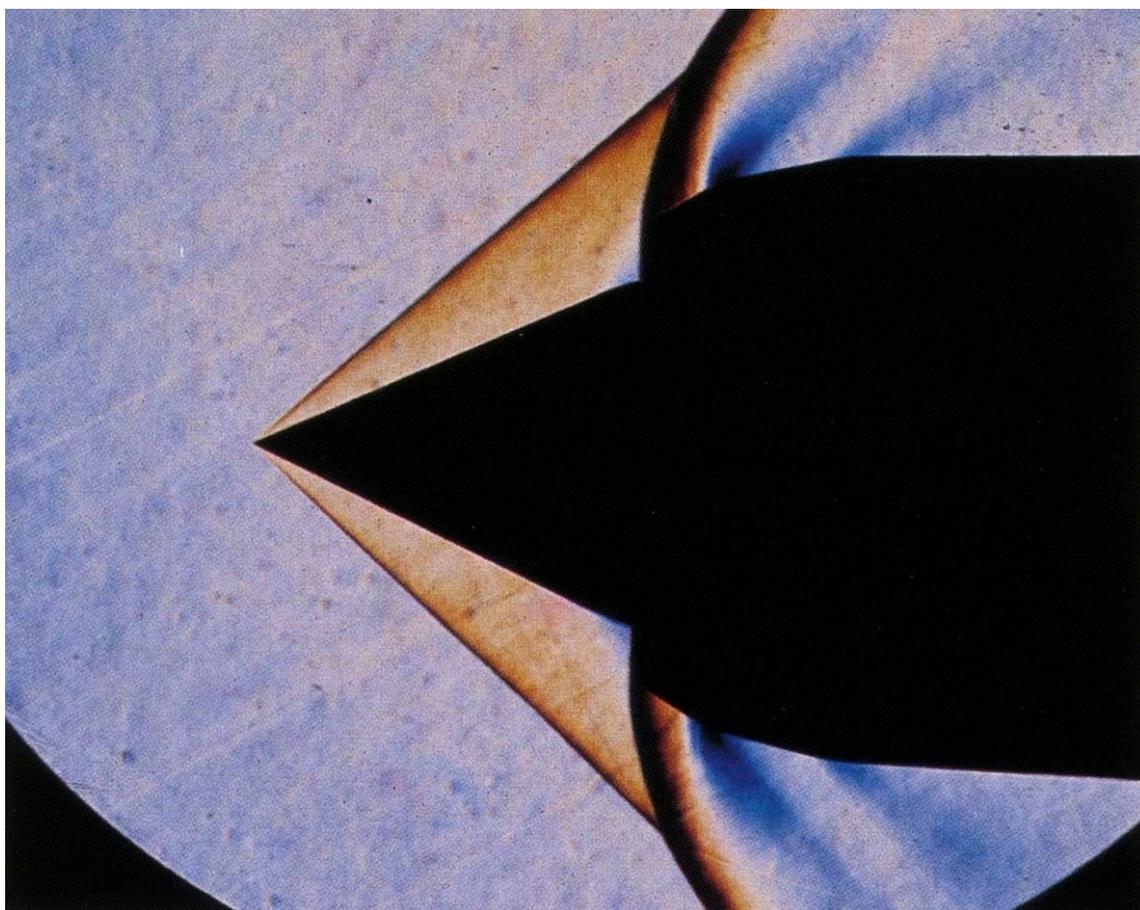
È interessante analizzare il moto stazionario di una corrente supersonica che investe un **cono** ad angolo **d'attacco nullo**.

Questa ipotesi è necessaria poiché la presenza di un **angolo d'incidenza non nullo** provoca la perdita della simmetria assiale ed una notevole complicazione della trattazione.

In questa trattazione, si ignoreranno le sottigliezze analitiche discutendo in dettaglio solo le ipotesi ed i risultati dell'analisi.



## Onde d'urto coniche



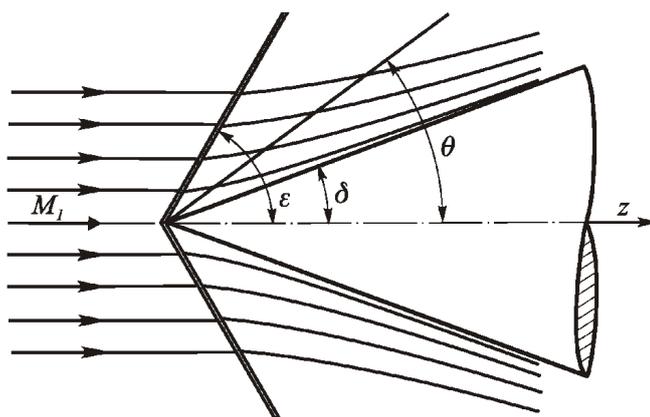
Schlieren a colori di una presa d'aria supersonica ( $M = 2, \delta = 24^\circ$ ).



## Onde d'urto coniche

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
  - la **proiezione** del campo di moto su un piano che comprende l'asse del cono non è influenzata dalla scelta del piano e cioè, in un sistema di riferimento di tipo cilindrico, è **indipendente** dalla **coordinata azimutale**;
  - dal bilancio del **momento** della **quantità di moto** prima e dopo l'onda d'urto, la **componente normale** a questo piano del vettore velocità risulterebbe identicamente **nulla**.



## Onde d'urto coniche

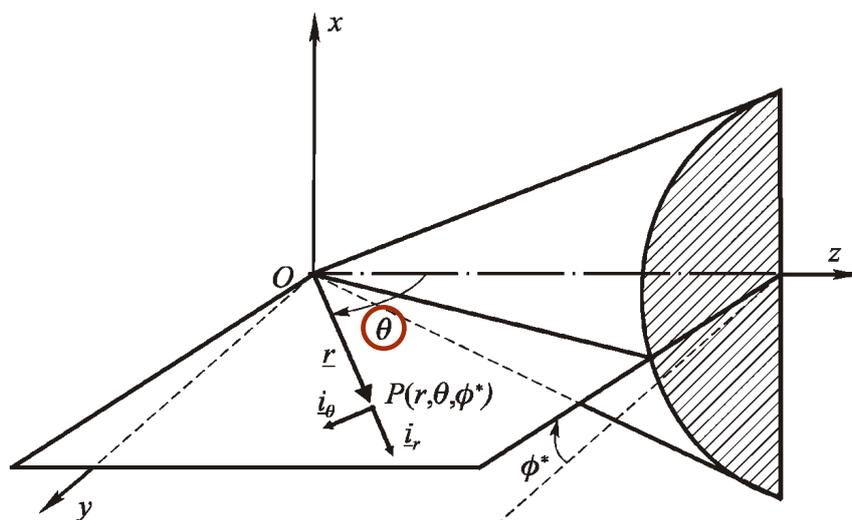
Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
- Oltre ad essere **omoenergetico**, il moto è **omoentropico** sia prima che dopo l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'**onda** d'urto sia conica e **attaccata** al vertice del cono, altrimenti l'angolo  $\epsilon$  varierebbe lungo il cono.
- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**.



## Onde d'urto coniche

- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**
- Quindi se si considera un sistema di riferimento sferico tutte le grandezze termofluidodinamiche devono essere funzione della sola variabile  $\theta$ .



## Onde d'urto coniche

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
- Oltre ad essere **omoenergetico**, il moto è **omoentropico** sia prima che dopo l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'**onda d'urto** sia conica e **attaccata** al vertice del cono, altrimenti l'angolo  $\epsilon$  varierebbe lungo il cono.
- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**

Per onde d'urto attaccate al vertice di un cono a angolo d'attacco nullo e alti numeri di Reynolds locali, queste **tre ipotesi sono verificate sperimentalmente**.

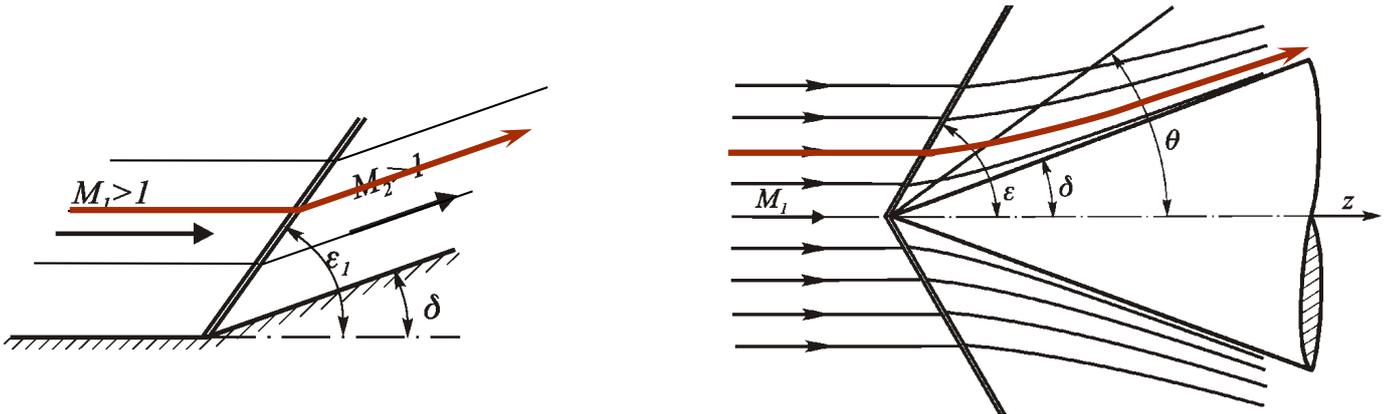


## Onde d'urto coniche

Nel caso di un **diedro**, dopo l'onda d'urto, le linee di corrente sono **dritte** e parallele alla superficie del diedro.

Per il **cono** le linee di corrente, dopo l'onda d'urto Invece, sono curve e **convergenti** tra loro.

La convergenza delle linee di corrente può essere spiegata dimostrando che esse **non** possono né essere **parallele** tra loro, né **divergere**.

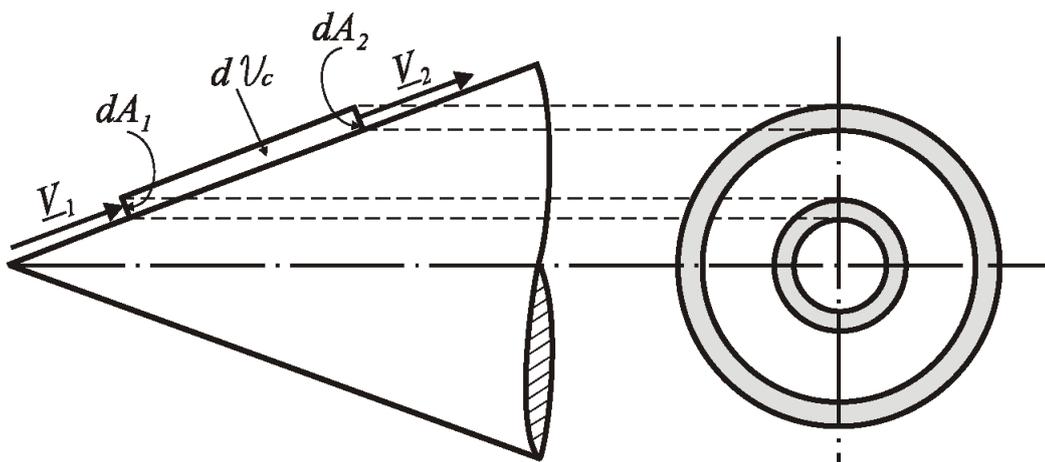


## Onde d'urto coniche

Il fluido entra dalla sezione di area  $dA_1$  esce da quella di area  $dA_2$  (avente la **stessa altezza**).

Si supponga, per assurdo, che il fluido si muova **parallelamente** alla generatrice del **cono**.

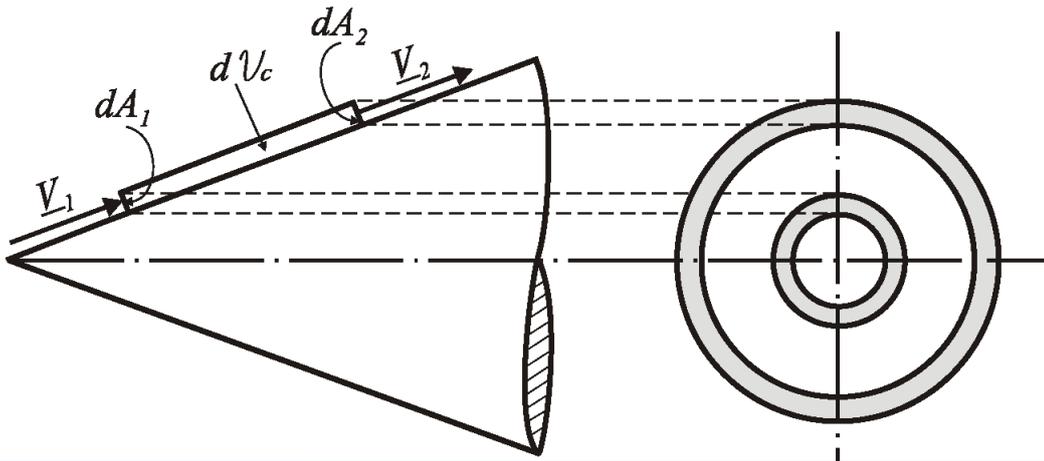
Come si vede chiaramente nella vista laterale si ha  $dA_1 < dA_2$ . Si è quindi in presenza di un moto con **aumento** dell'area di passaggio.



## Onde d'urto coniche

In regime **supersonico** la corrente dovrebbe accelerare provocando un continuo aumento del numero di Mach ed una diminuzione della portata. Questo è in contrasto con l'ipotesi che il **cono è indefinito** perché il numero di Mach dovrebbe tendere all'infinito e la pressione a zero. Un ragionamento analogo vale anche per il regime subsonico.

Chiaramente le linee di corrente **non possono divergere**, altrimenti anche l'altezza del tubo di flusso aumenterebbe comportando un conseguente **maggior aumento di area**.



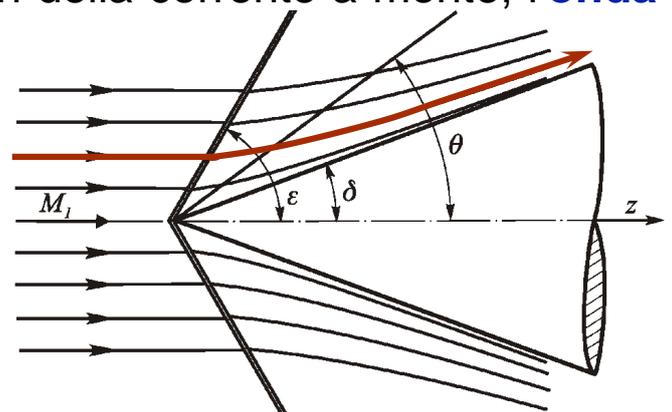
## Onde d'urto coniche

La **convergenza** delle linee di corrente a valle dell'onda d'urto provoca una **variazione** delle variabili **termofluidodinamiche** che, per le ipotesi fatte, devono seguire una trasformazione **isoentropica**.

Dopo l'onda d'urto la **pendenza** delle linee di corrente **cresce** finché queste non diventano, molto a valle, **parallele** alla superficie del **cono**. Simultaneamente, il numero di Mach diminuisce e la pressione aumenta.

L'**ulteriore deviazione** della corrente a valle dell'onda fa sì che, a parità di angolo di deviazione e di Mach della corrente a monte, l'**onda** d'urto sia **meno intensa**.

Ovvero, a **parità di angolo d'urto** e numero di **Mach**, che la **deviazione** finale della corrente dell'onda **conica** sia **maggior** di quella relativa all'onda d'urto piana.



# Onde d'urto coniche

Essendo l'angolo d'urto costante, per il teorema di **Crocco**, l'ipotesi di **omopotenzialità** implica **l'irrotazionalità** del campo di moto a valle dell'onda.

Dall'irrotazionalità e dal bilancio di massa locale in coordinate sferiche, si giunge all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che prende il nome di equazione di **Taylor-Maccoll**.

I **risultati** dell'integrazione numerica dell'equazione di Taylor-Maccoll sono **presentati** di seguito sotto forma di diagrammi, per il caso particolare di  $\gamma = 1.4$



## Onde d'urto coniche

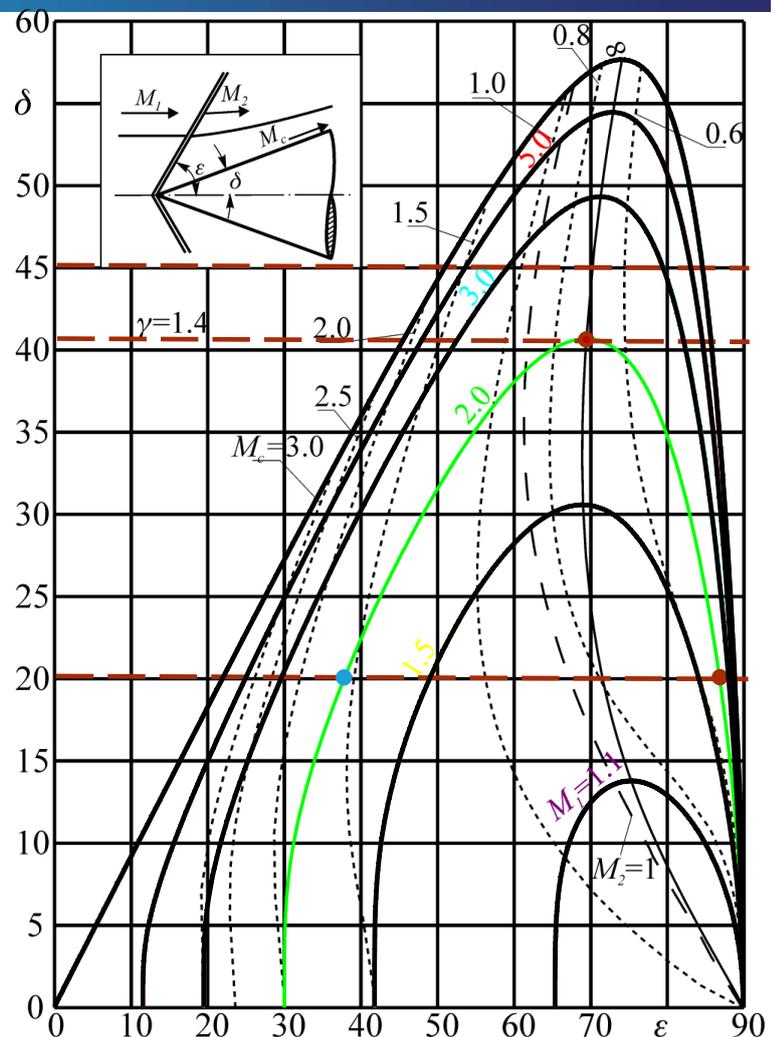
Anche in questo caso il valore di  $\epsilon$  varia tra l'angolo di Mach  $\mu$  e  $90^\circ$ .

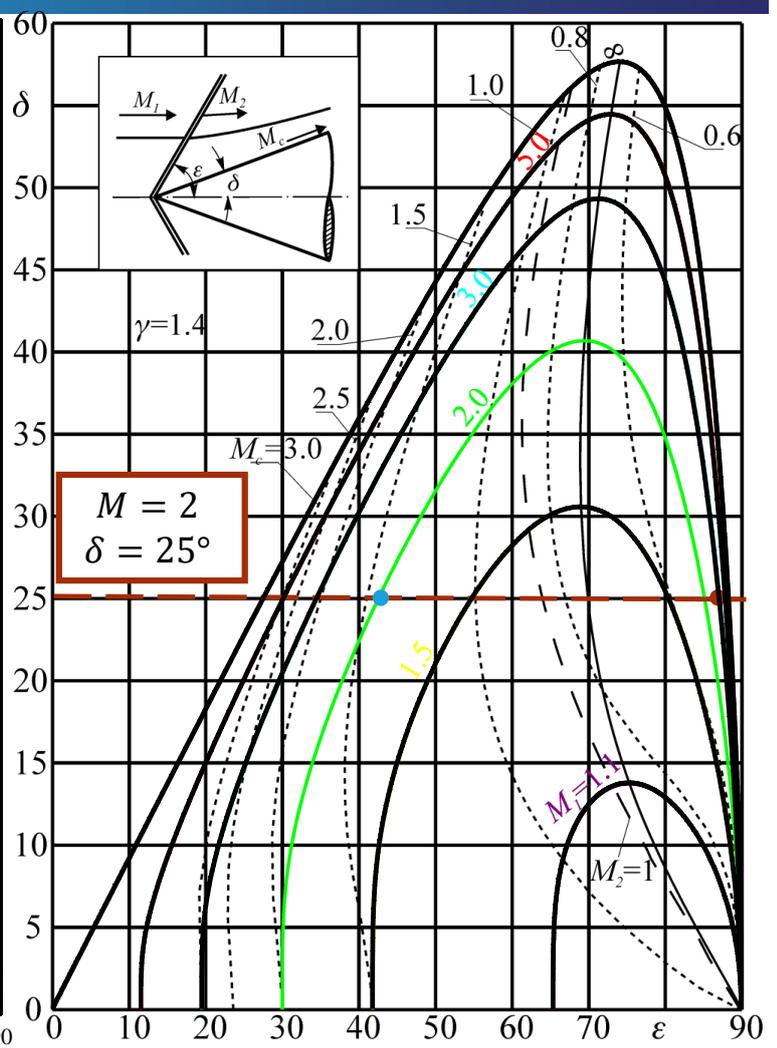
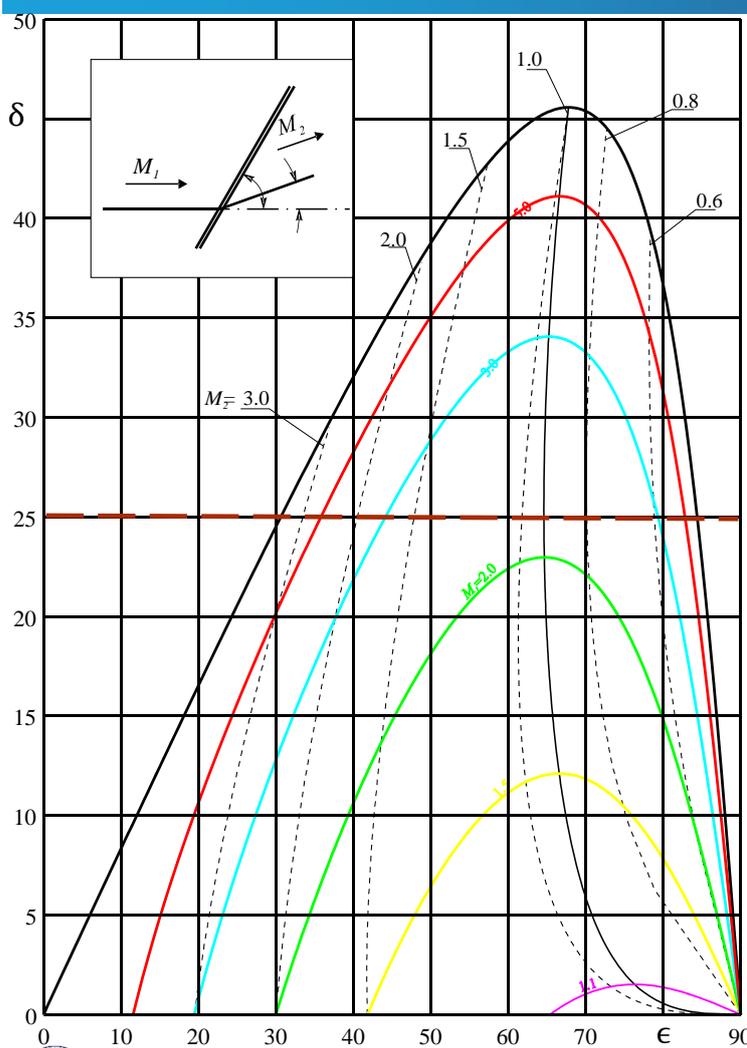
Per un dato numero di **Mach**, al crescere del valore di  $\delta$ , si hanno tre possibilità:

- **due soluzioni** con due valori distinti per l'angolo  $\epsilon$ ;
- **una sola soluzione**;
- **nessuna soluzione**.

La soluzione unica corrisponde alla **deviazione massima**  $\delta_{max}$  per un dato numero di Mach.

Per  $\delta > \delta_{max}$  non esistono soluzioni.

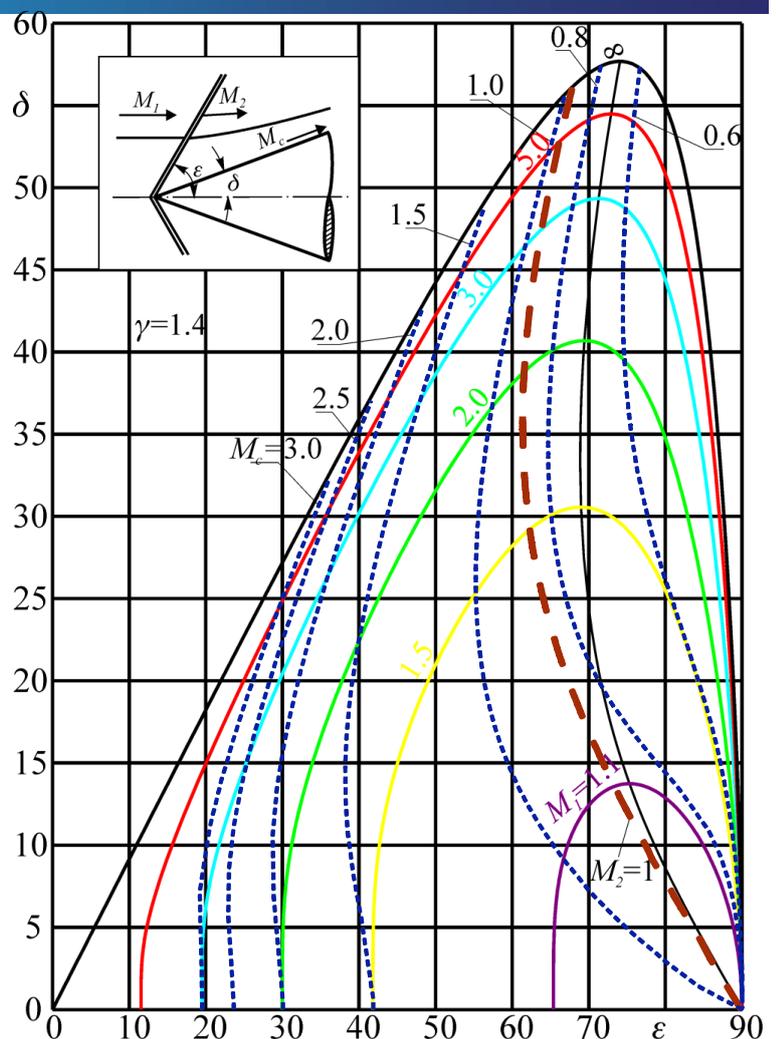




## Onde d'urto coniche

Con l'eccezione di  $M_2 = 1$  sono diagrammate le curve a  $M_c = \text{cost}$  (numero di Mach sulla superficie del cono).

Il moto a valle dell'onda d'urto è **isoentropico** e noto  $M_c$  e le condizioni a valle dell'onda d'urto, dalle tabelle (ISO), si possono determinare tutte le grandezze **termofluidodinamiche** sulla superficie del cono.

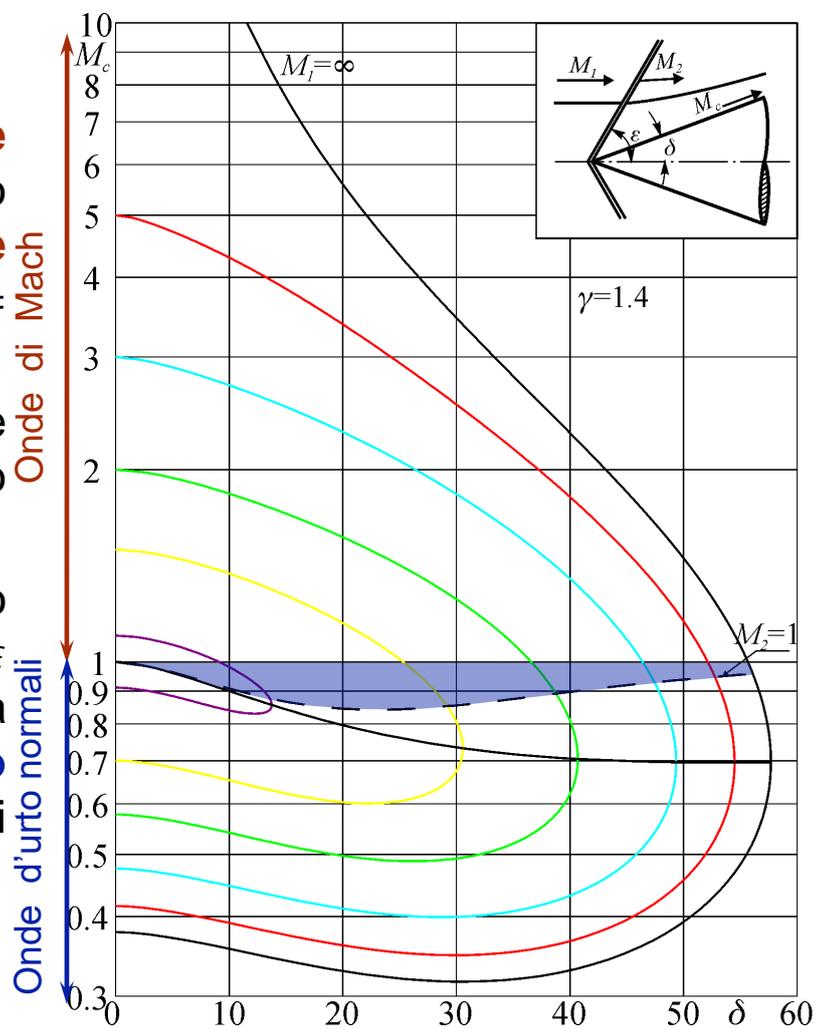


## Onde d'urto coniche

I numeri di **Mach a monte** dell'onda  $M_1$  sono identificabili con le **intercette** delle relative curve per  $\delta = 0, M_c \geq 1$ .

Per  $\delta = 0, M_c \leq 1$  si ricade invece nelle onde d'urto **normali**.

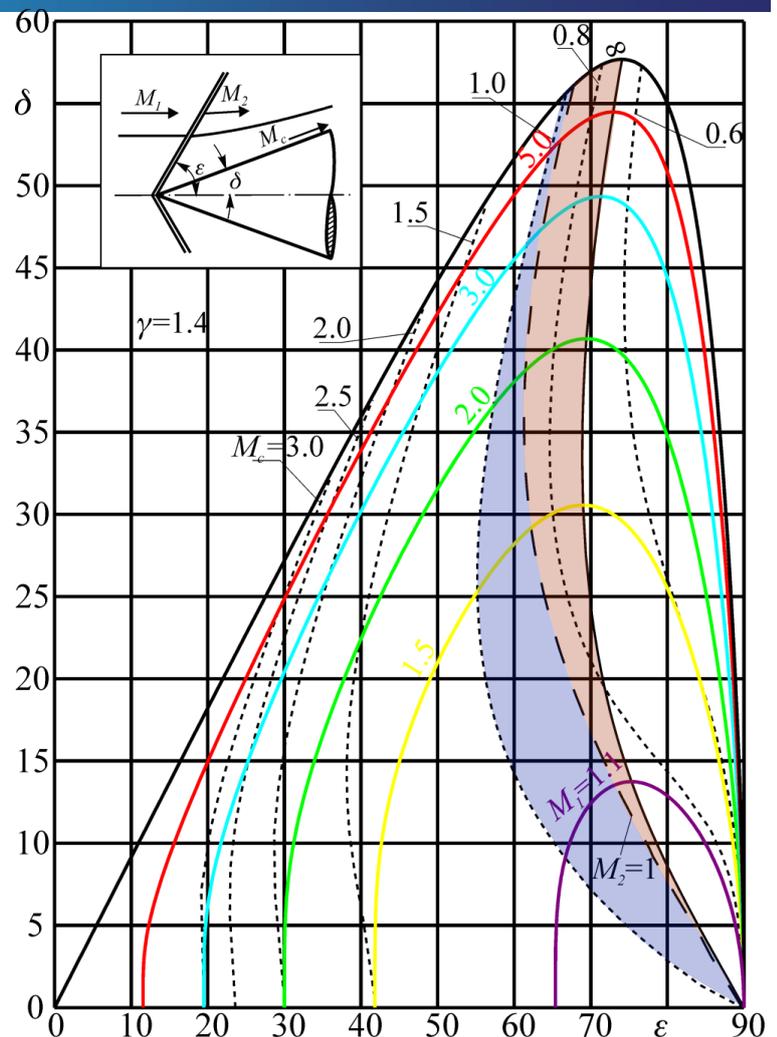
Qualunque sia  $M_1$ , esistono sempre coppie di valori  $\delta$  e  $\epsilon$  per cui il moto a valle dell'onda passa da regime **supersonico** a **subsonico** senza ulteriori onde d'urto (punti nella **falce**).



## Onde d'urto coniche

Qualunque sia  $M_1$ , esistono sempre coppie di valori  $\delta$  e  $\epsilon$  per cui il moto a valle dell'onda passa da regime **supersonico** a **subsonico** senza ulteriori onde d'urto (punti nella **falce**).

Chiaramente la **falce** che individua le onde deboli con  $M_2 < 1$ , che era già **presente** nel caso bidimensionale **piano**, è presente anche per le onde **coniche**.



# Onde d'urto coniche

Per onde coniche la **deviazione** è associata a due contributi:

- **onda d'urto**;
- **convergenza delle linee di corrente**;

Quindi, a parità di  $\delta$  l'onda d'urto conica è **meno intensa** ed il disturbo prodotto dal corpo sulla corrente a monte è più piccolo.

Inoltre l'angolo di **deviazione massimo** è **maggiore** nel caso del cono ( $57.68^\circ$ ) rispetto al caso piano ( $45.58^\circ$ ).

Chiaramente, in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso del diedro piano, se l'**angolo** di semiapertura del cono è **maggiore** di  $\delta_{max}$  l'onda d'urto si **stacca dal vertice**.

