UNIVERSITY OF NAPLES ***FEDERICO II*** *1224 A.D.*

Gasdinamica

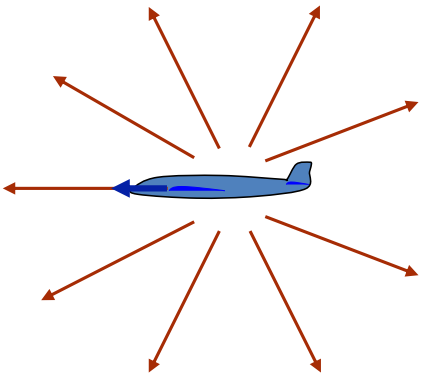
T. Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

Versione del 9.3.2023

Introduzione

E’ stato visto in precedenza che i piccoli disturbi di pressione si propagano alla velocità del suono.

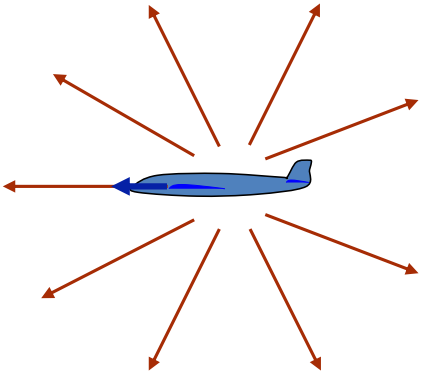
Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto

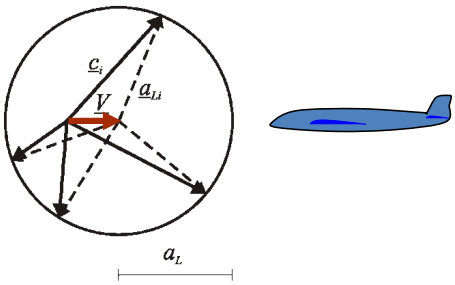


Introduzione

Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto.

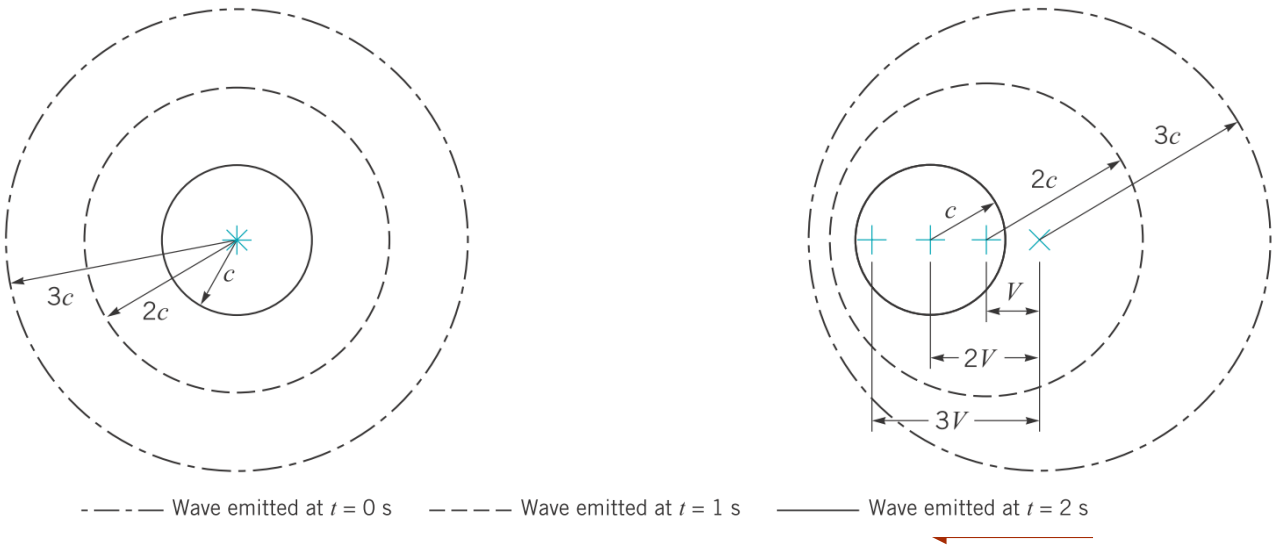
Alternativamente, in un **sistema di riferimento** inerziale per il quale **l'oggetto è fermo** ed è investito da una corrente **subsonica**, questi disturbi riescono a **risalire la corrente** in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto la corrente viaggi verso valle.





Introduzione

Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso.

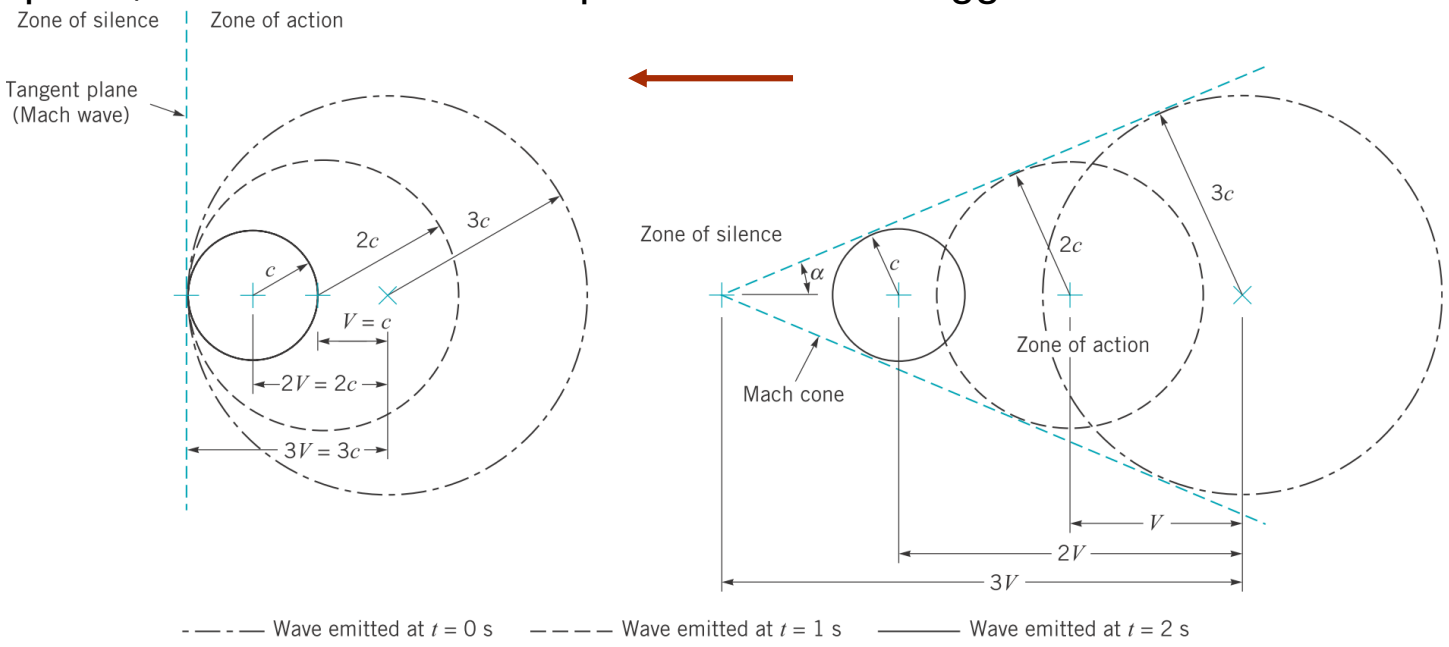


Velocità nulla (M=0)

Velocità Subsonica (M=0.7)

Introduzione

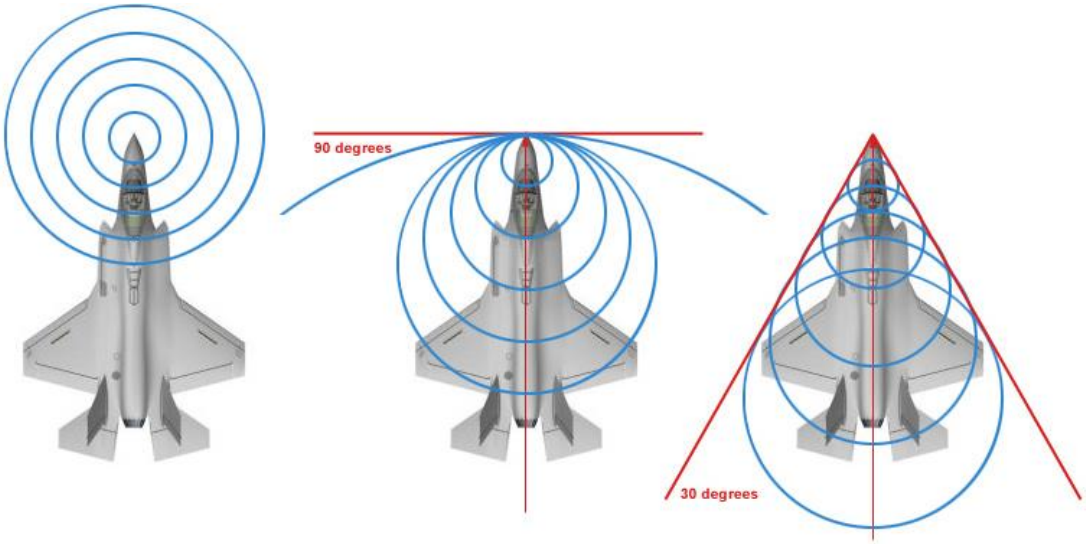
Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.



Velocità sonica (M=1)

Velocità Supersonica (M=2)

Introduzione



Speed = 0

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object remains stationary. There is no shock front.

Origin of each circle is on the tip.

Speed = Mach 1

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object also moves at the speed of sound.

The so called sonic barrier is created because all the pressure fronts created in the past moves at the same speed as the object and hence arrives at the same point as the object.

The shock front is a plane tangent to all the infinite number of pressure fronts ever formed over time and is 90 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly the length of the circle's radius from the tip.

Speed = Mach 2

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object moves at twice the speed of sound.

Because the object is moving twice as fast as the pressure fronts and the boundaries of all pressure fronts are tangent to a conical surface.

At Mach 2, the shock front cone is roughly 30 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly 2 x the radius of the circle itself from the tip.

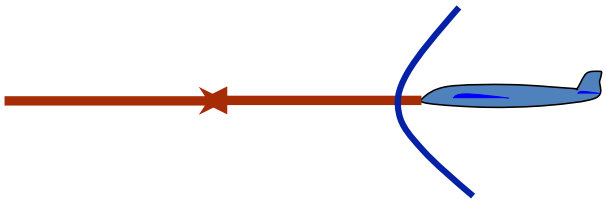
© Dwight Looi. Jan 2007

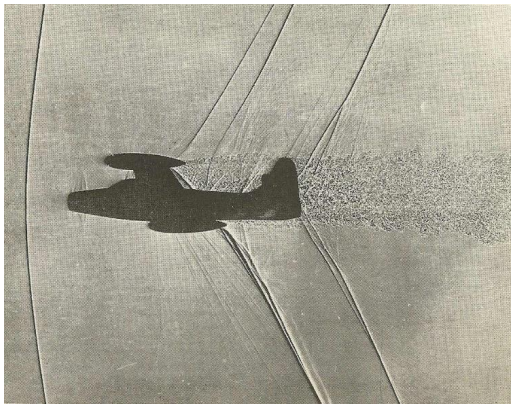
Introduzione

Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

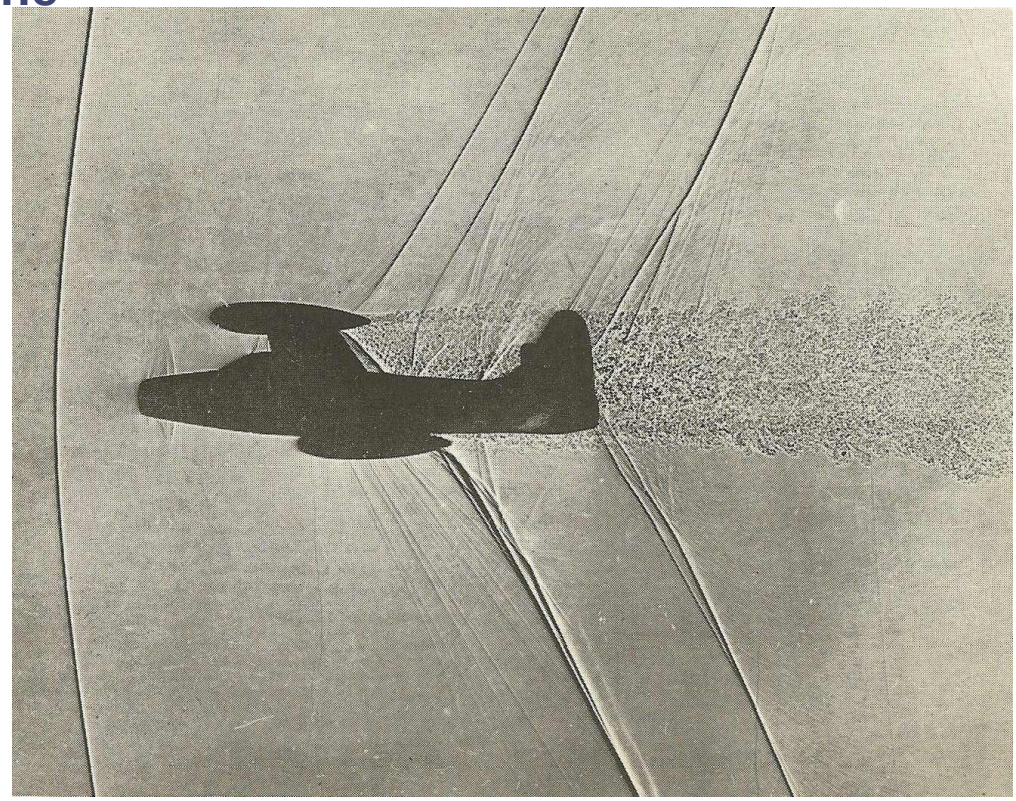
L'oggetto deve, in ogni caso, **passare** e l'aria si deve aprire per farlo passare. Da ciò deriva la presenza di **superfici di discontinuità** (**onde d'urto**) che, rendendo la corrente **subsonica**, e/o **deviando** la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per far passare il corpo.

Le onde d'urto possono essere presenti anche in **altre situazioni fluidodinamiche**.





Introduzione



Shadowgraph del Thunderjet F84 (scala 1/200 , $M = 1.05$). **L'onda d'urto** davanti all'aereo, che viaggia a $M \cong 1$, è praticamente **normale** alla corrente che lo investe.

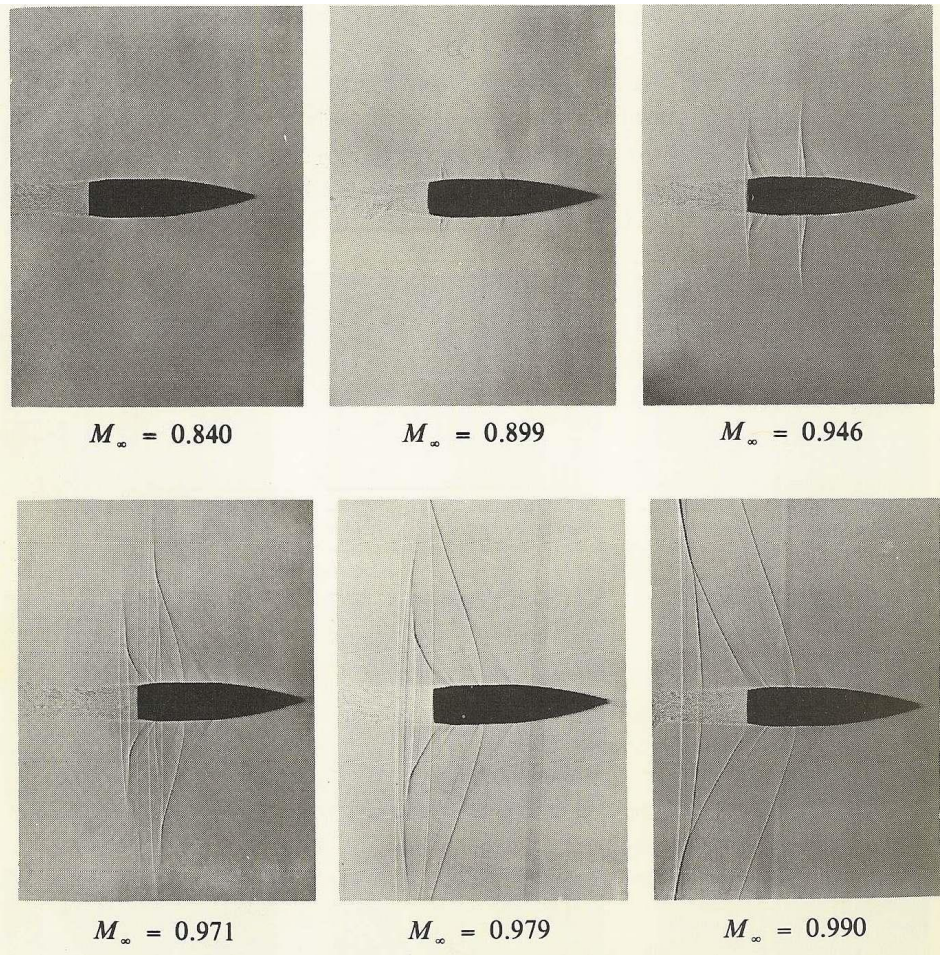
Introduzione

F14 rompe il muro del suono

Introduzione

Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **transonico**.

Pur essendo il moto **subsonico**, si può notare la presenza di onde (di Mach, o deboli onde urto) dove la corrente accelera.

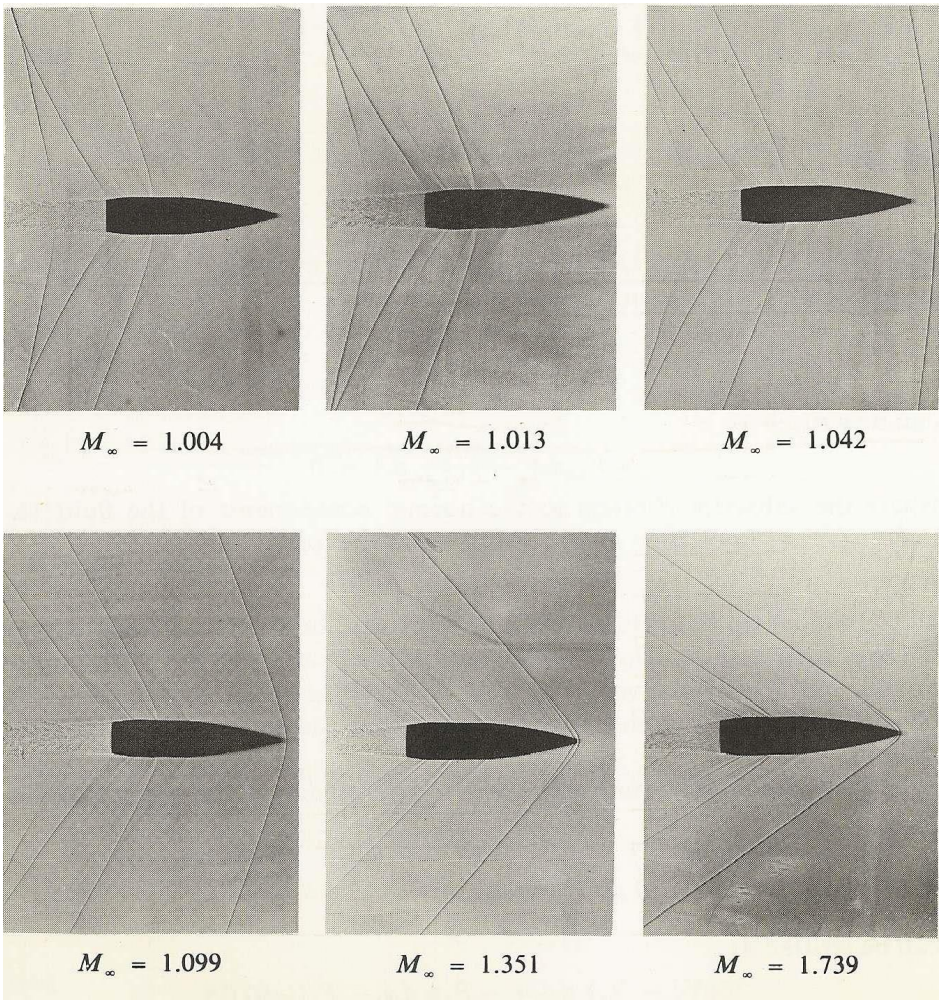


Introduzione

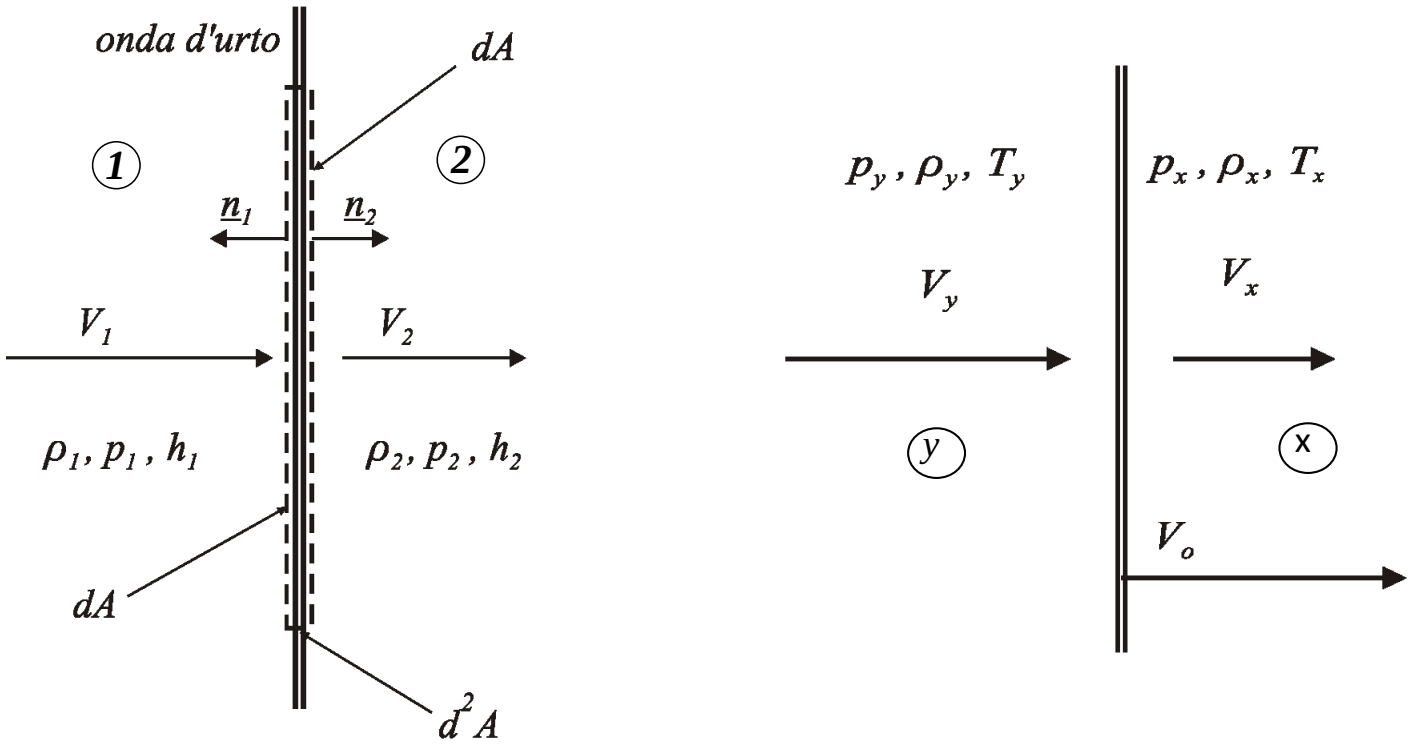
Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **supersonico**.

Ai bassi numeri di Mach (1.004 e 1.013) l'onda si trova molto a monte del corpo e **non appare**.

L'onda d'urto staccata, è quasi **normale**, per $M \cong 1$ e si avvicina al corpo **inclinandosi** verso valle **all'aumentare** del numero di **Mach.**

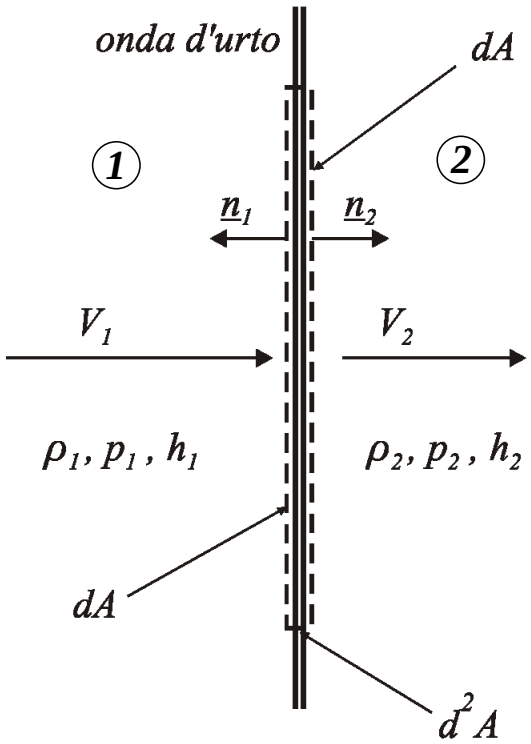


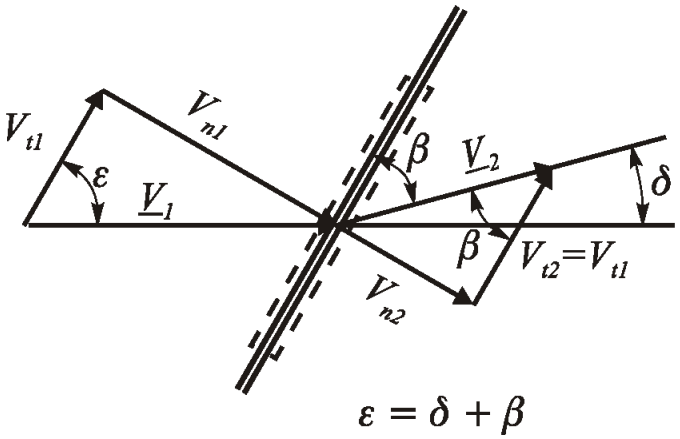
Introduzione



Le condizioni a monte dell'onda sono rispettivamente 1 (a sinistra) e x (a destra) per onde **stazionarie** e **non stazionarie**.

Introduzione





Le onde d'urto si chiamano **normali** (a sinistra), quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda. In caso contrario, si dicono **oblique** (a destra).

Ipotesi

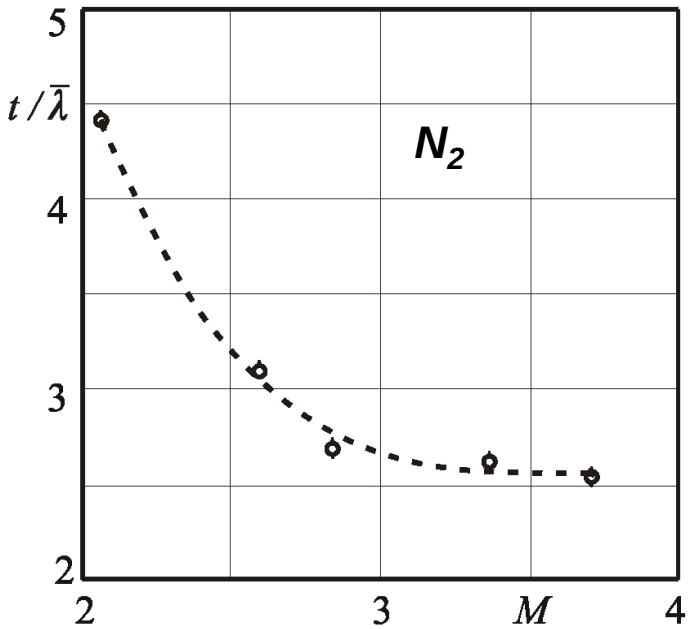
Inizialmente le ipotesi su cui si baserà lo studio sono:

- onde d'urto **adiabatiche** (il fluido non scambia energia nel modo calore);
- onde d'urto **anergodiche** (il fluido non scambia energia nel modo lavoro);

Nella figura a lato è riportato lo **spessore** di un'onda d'urto, misurato per una corrente di azoto N_2, in termini di **libero cammino medio** molecolare, al variare M.

Per aria in condizioni normali il libero cammino medio molecolare è dell'ordine di $0.1\mu m$ (il diametro di un capello umano è $\sim 80\mu m$).

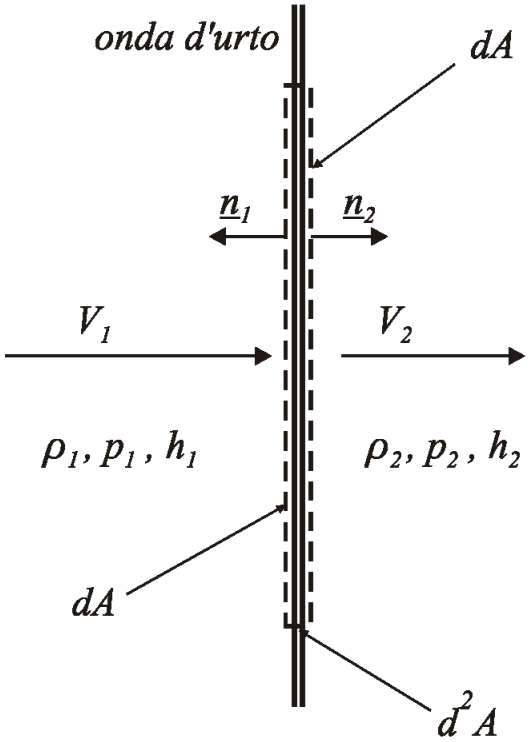
Quindi lo **spessore** di un'onda d'urto, essendo dell'ordine di qualche libero cammino medio molecolare, è **di vari ordini di grandezza inferiore** a quelli di una tipica lunghezza caratteristica.



Ipotesi

In figura è mostrato, con una linea tratteggiata, il **volume** di **controllo** "**a monetina**".

Perché?



Ipotesi

In figura è mostrato, con una linea tratteggiata, il **volume** di **controllo** "**a monetina**".

Perché?

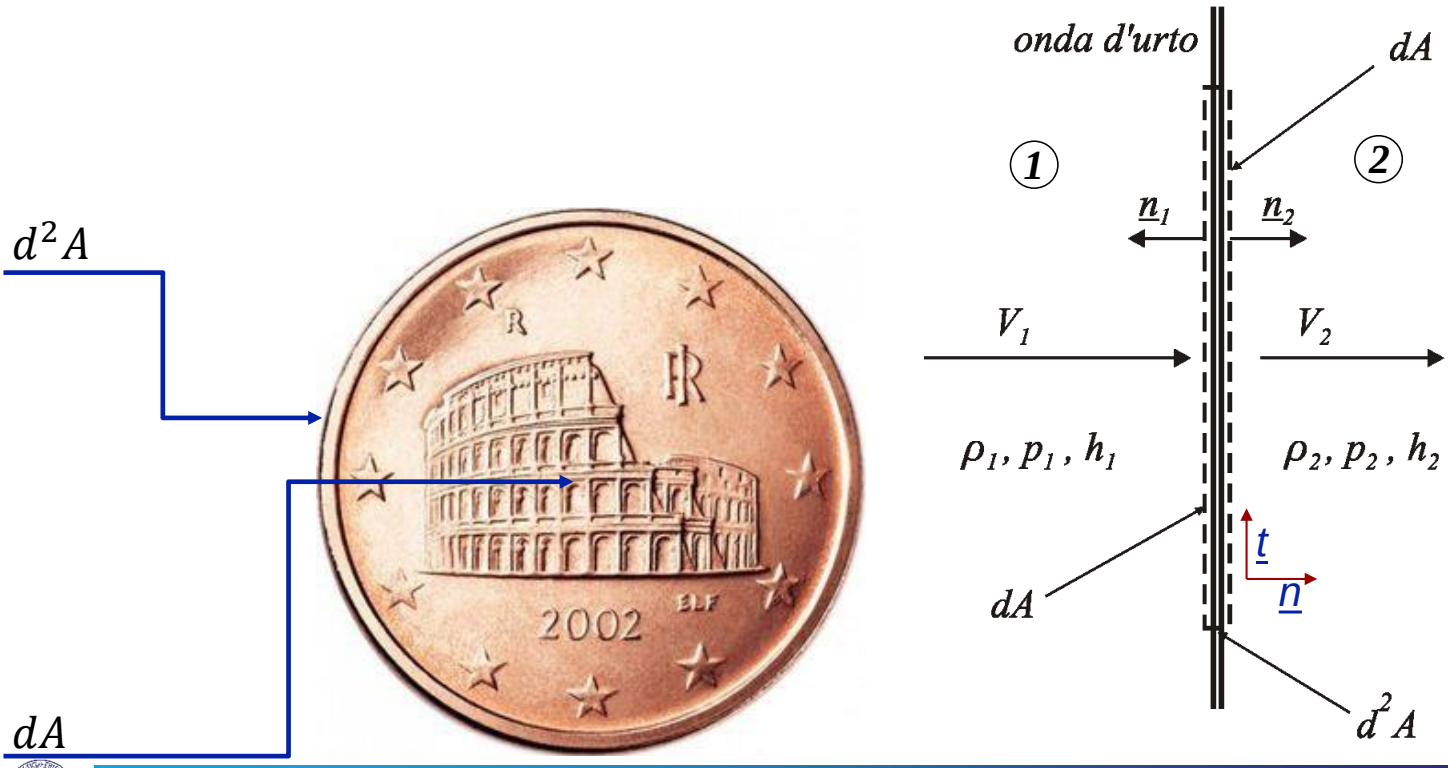
Lo spessore è molto inferiore a al diametro e si possono **trascurare** i termini che dipendono **dallo spessore** (i.e. quelli che dipendono dal volume o dalla superficie laterale).

$dA = ds\mathcal{P}$

$A = \frac{\pi}{4} D^2$

Ipotesi

Per poter considerare anche onde d'urto **curve** si può supporre che il diametro sia infinitesimo e che lo **spessore** sia un **infinitesimo** di **ordine superiore**.



Onde d'urto normali

L'equazione della **quantità di moto** è:

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

Il termine gravitazionale dipende dal volume, mentre la spinta dalla superficie laterale quindi sono entrambi **trascurabili**:

$$d\dot{m}\,(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1\underline{n}_1 + p_2\underline{n}_2) = 0$$

Proiettata In direzione **tangenziale**:

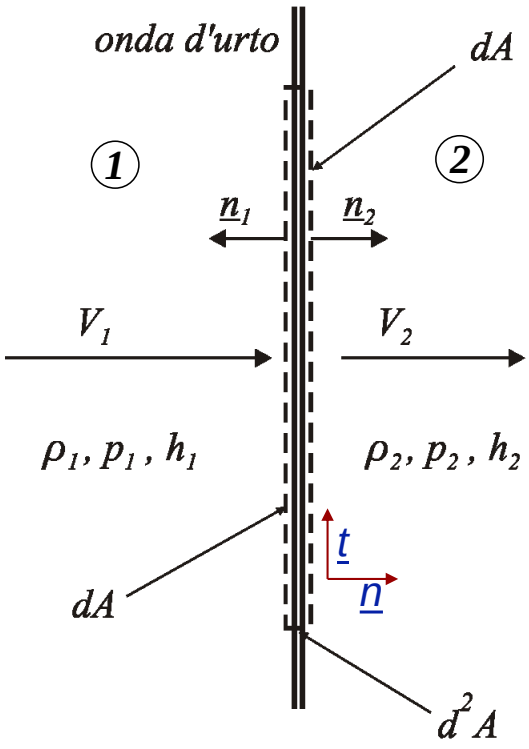
$$d\dot{m}\,(V_{t2} - V_{t1}) = 0 \quad \rightarrow V_{t2} = V_{t1}$$

Un onda d'urto normale **non** provoca una **deviazione** della **corrente**.

L'equazione di conservazione della **massa** è:

$$d\dot{m} = \rho V dA = G dA = cost$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = cost$$



Onde d'urto normali

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = cost$$

$$d\dot{m}\,(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1\underline{n}_1 + p_2\underline{n}_2) = 0$$

Proiettata In direzione **normale** e dividendo per *dA* ($\underline{n}_1 \cdot \underline{n} = -1,\ \underline{n}_2 \cdot \underline{n} = 1$):

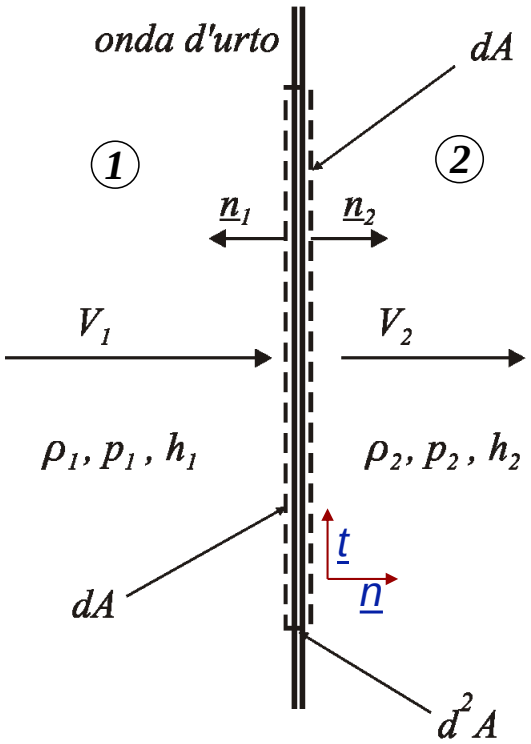
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = cost$$

L'equazione di conservazione dell'**energia** è:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

Nelle ipotesi fatte $\dot{Q} = \dot{L} = 0$. Quindi:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = cost$$



Onde d'urto normali

Ricapitolando, attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = cost$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = cost$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = cost$$

Nella derivazione di queste equazioni non è stata fatta alcuna **ipotesi** sul **modello di gas**. Sono quindi completamente **generali**.

Dalla prima equazione è immediato verificare che se l'onda è di **compressione** (aumento di densità) la **velocità** a valle **diminuisce**.

Dalla seconda e dalla terza ($G = cost$) :

$$p_1 + GV_1 = p_2 + GV_2 = cost$$

Si nota che la **pressione** e l'**entalpia sensibile** devono **aumentare**.

Onde d'urto normali gas più che perfetti

Ricapitolando, attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = cost$$
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = cost$$
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = cost$$

Per **gas più che perfetti** questo sistema d'equazioni, unito alle equazioni di stato, si può risolvere esplicitamente fornendo le grandezze a **valle** dell'onda in funzione di quelle a **monte**.

La **soluzione** benché non particolarmente complessa è **tediosa** e, nel seguito, saranno riportati solo i risultati ed alcuni passaggi più rilevanti.

Combinando queste equazioni si trova la **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali:

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2} = cost$$

Onde d'urto normali gas più che perfetti

Combinando queste equazioni si trova la **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali (naturalmente la relazione è simmetrica):

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2} = cost$$

La **velocità critica del suono** è la **media geometrica** tra la **velocità** a **monte** e a **valle** dell'onda d'urto.

Si richiama per completezza la relazione già trovata in precedenza:

$$a^* = V^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma-1)}{\gamma+1}} = V_l \sqrt{\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Ha senso introdurre il numero di Mach riferito alla velocità del suono critica (*Mach star*):

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

Questo è l'unico caso in cui **non** si **utilizza l'apice** per indicare delle **condizioni critiche**.

Onde d'urto normali gas più che perfetti

La **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali diventa quindi:

$$M_1^* M_2^* = 1$$

Ricordando la $T_o = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$ si ha:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2}\frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{\gamma R T}{\gamma R T^*} = M^2 \frac{T}{T_o}\frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)$$

$$M^{*2} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}\frac{\gamma+1}{2}$$

Sostituendo questa relazione nella relazione di Prandtl si ottiene si ottiene infine la **relazione** che lega il numero di Mach a **valle** M_2 a quello a **monte** M_1 dell'onda:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$

Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$

Si possono fare le seguenti osservazioni (si ricorda che per la stabilità termodinamica $\gamma > 1$):

- per $M_1 = 1$ si ha $M_2 = 1$ che è la soluzione banale;
- il denominatore cresce più rapidamente del numeratore quindi la funzione è strettamente decrescente (quindi $M_2 \leq 1$);
- per $M_1 \to \infty$ si ha un asintoto (in parentesi il valore per $\gamma = 1.4$):

$$M_{2l} = \lim_{M_1 \to \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = (0.3780);$$

- il denominatore si annulla per $M_1 = M_{2l}$ e per valori di M_1 inferiore a questo valore la funzione restituisce valori complessi.

Onde d'urto normali gas più che perfetti

Utilizzando la relazione precedente si possono trovare i seguenti **rapporti caratteristici** per **onda d'urto normale**; essi sono funzione del solo numero di Mach a monte dell'onda d'urto e di γ.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)\right)\left((\gamma - 1)M_1^2 + 2\right)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

Come già detto per $M_1 > 1$ la pressione, la temperatura e la densità aumentano a valle dell'onda ovvero i rapporti, per $\gamma > 1$, **sono maggiori di uno**.

Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)}\left((\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2}\right)^{\gamma}\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)\right)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Il rapporto fra le pressioni di ristagno, invece, è per $M_1 > 1$ **minore di uno**, quindi la pressione di ristagno a valle dell'onda diminuisce.

La relazione fondamentale entopica, applicata in condizioni di ristagno e per $T_{o2} = T_{o1}$ è:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = -R\ln\frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Da cui si valuta la **variazione di entropia** attraverso un onda d'urto:

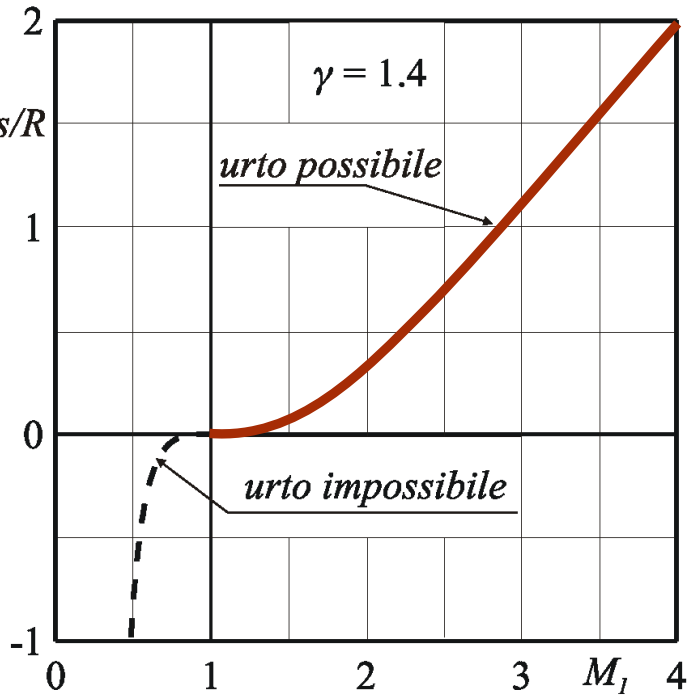
$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma + 1)\ln(\gamma + 1) + \gamma\ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)\right)\right]}{\gamma - 1}$$

Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma+1)\ln(\gamma+1) + \gamma\ln(\gamma-1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\right]}{\gamma-1}$$

Per il **secondo principio** della **termodinamica** il salto di **entropia** deve essere **positivo** ed è possibile dare un verso alla trasformazione.

Dal diagramma si vede che gli unici **urti possibili** sono quelli in cui $M_1 \geq 1$.



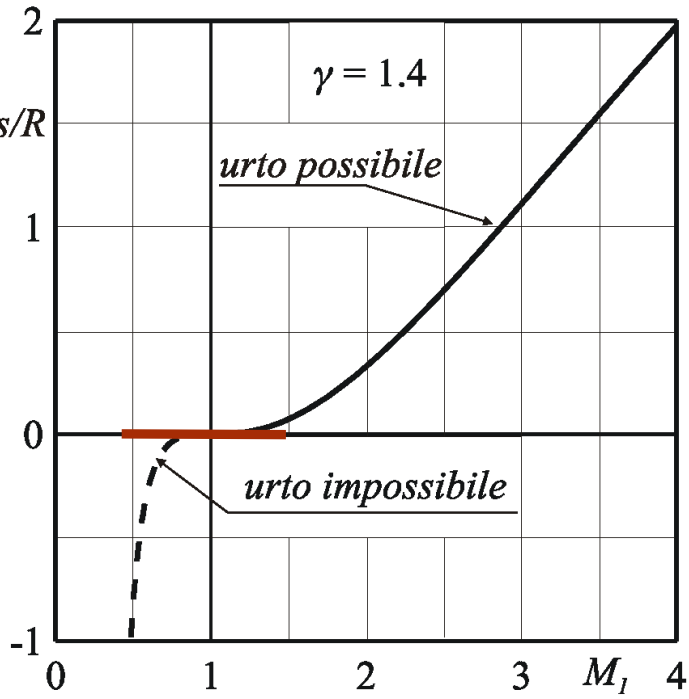
Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma+1)\ln(\gamma+1) + \gamma\ln(\gamma-1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\right]}{\gamma-1}$$

Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di $M_1 = 1$ si ha:

$$\lim_{M_1 \to 1} \frac{\Delta s}{R} = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{(\gamma+1)^2}(M_1^2-1)^3$$

La variazione d'**entropia** ha un **flesso a tangente orizzontale**, ovvero la prime due derivate, nell'intorno di $M_1 = 1$ sono nulle.

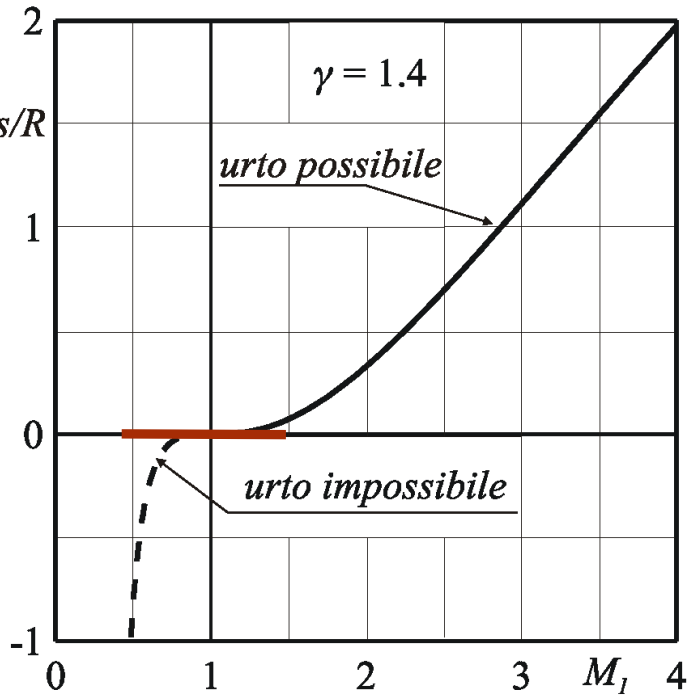


Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma+1)\ln(\gamma+1) + \gamma\ln(\gamma-1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\right]}{\gamma-1}$$

Le onde d'urto che avvengono per $M_1 = 1$, dette **onde di Mach**, sono praticamente **isoentropiche**, cioè **reversibili**.

Le onde di Mach, essendo reversibili possono essere sia di **compressione** sia di **espansione**.

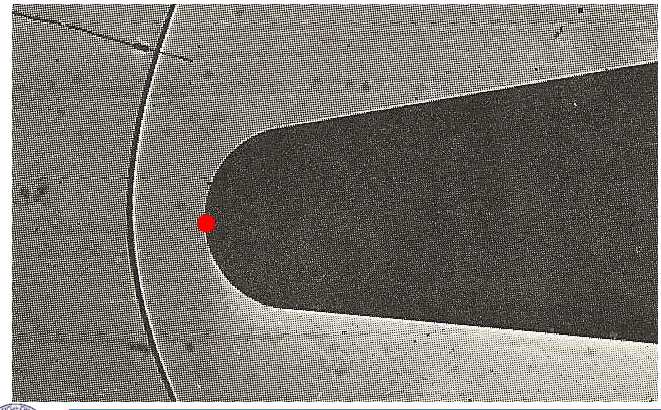


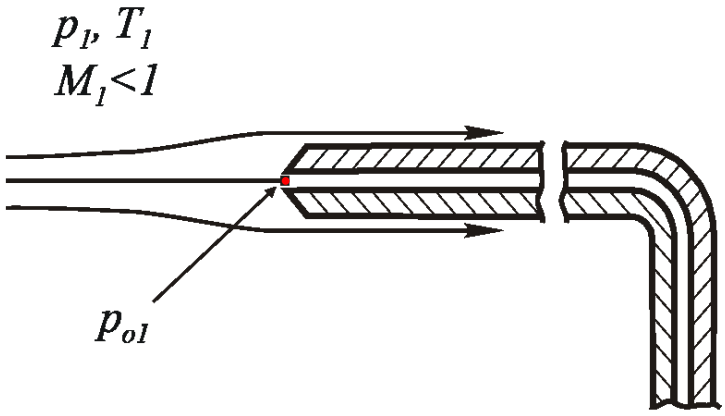
Onde d'urto normali gas più che perfetti

In regime **subsonico** il **tubo di Pitot** è utilizzato per **misurare** la **velocità della corrente**. Si ipotizza che la corrente rallenti in modo **adiabatico** ed **isentropico** raggiungendo le condizioni di ristagno nel punto rosso di figura. Il tubo di Pitot misura la **pressione di ristagno**.

Applicando le relazioni **isentropiche** o, se il regime di moto è incompressibile, l'equazione di **Bernoulli** si può facilmente calcolare la **velocità**.

In regime **supersonico**, il tubo di Pitot si comporta come un **corpo tozzo** e nasce un onda d'urto.

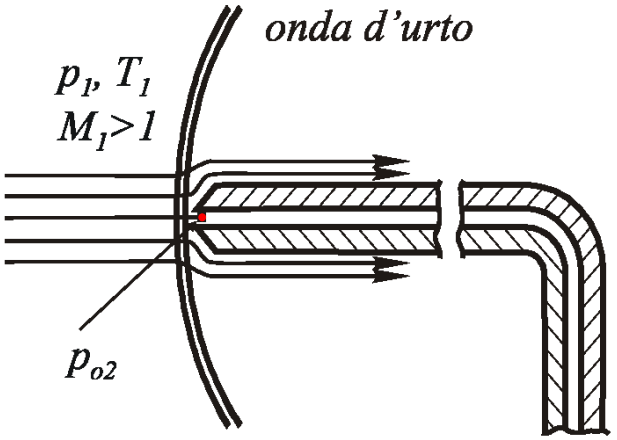


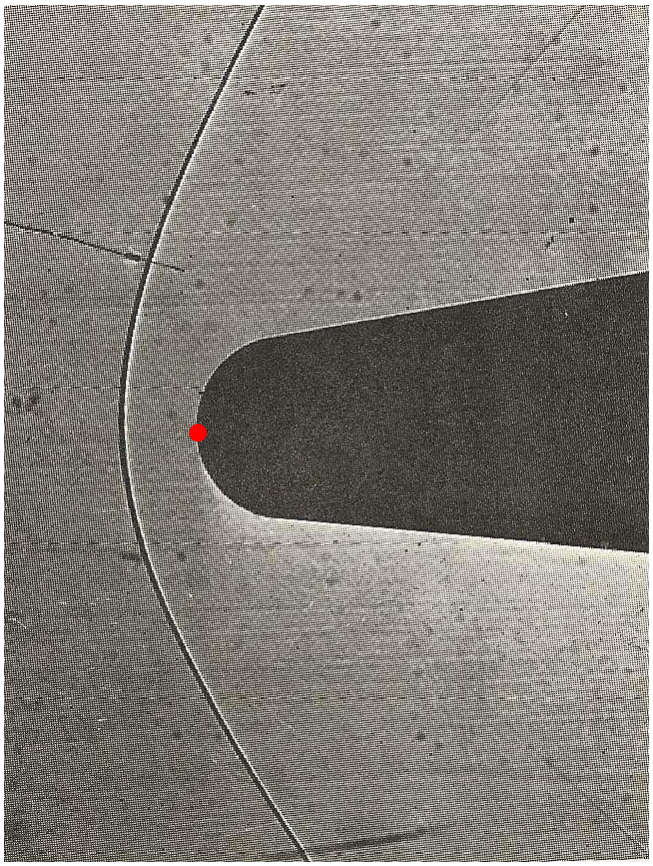


Onde d'urto normali gas più che perfetti

In figura è visualizzata l'onda d'urto generata in un flusso **supersonico** su un cono smussato a $M = 1.36$.

L'onda, sull'asse del cono, è **normale** all'asse stesso e, in questo caso, nel punto rosso si raggiungono le condizioni si **ristagno** a **valle** dell'onda d'urto.



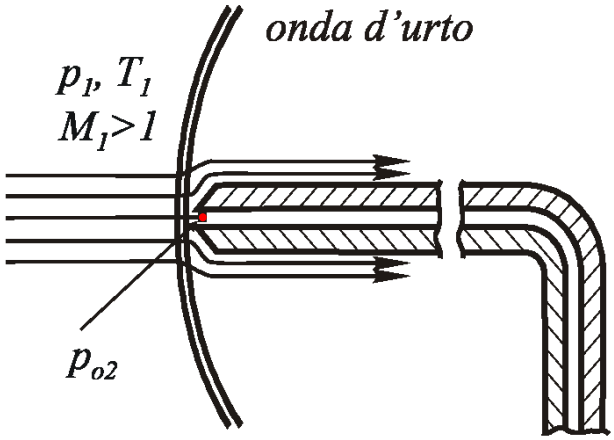


Onde d'urto normali gas più che perfetti

In un tunnel **supersonico** è relativamente facile misurare la pressione statica p_1 a **monte dell'onda** d'urto con una presa di pressione posta sulle pareti del tunnel.

Il rapporto p_{o2}/p_1, detto anche **funzione di Rayleigh**, è quindi utile per la misura del numero di Mach in un tunnel supersonico.

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Ricapitolando:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\right)\left((\gamma-1)M_1^2+2\right)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma+1)^{-(\gamma+1)}\left((\gamma-1)+\frac{2}{M_1^2}\right)^{\gamma}\left(2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\right)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Onde d'urto normali gas più che perfetti

Oppure in forma più compatta con:

$$\Theta = 2\gamma M_1^2-(\gamma-1), \qquad \Xi = (\gamma-1)M_1^2+2:$$

$$M_2^2 = \frac{\Xi}{\Theta}:$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{\Xi}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Theta}{\gamma+1}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Theta\Xi}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = (\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{\Xi}{M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\Theta^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{\Theta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

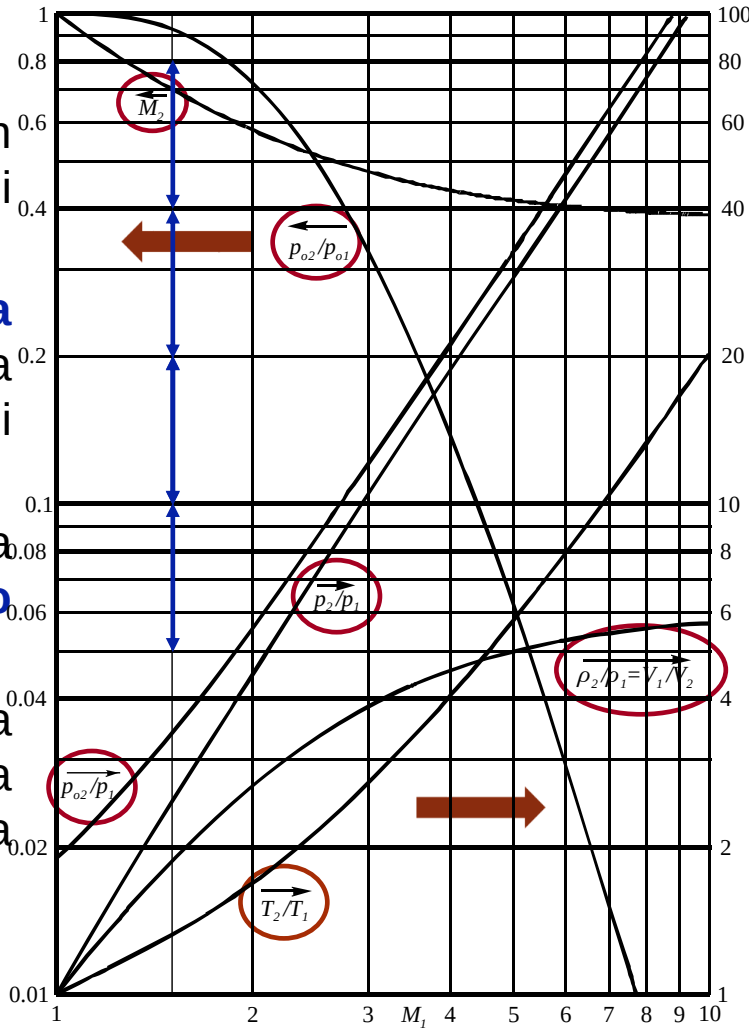
Onde d'urto normali gas PCP

Il diagramma è **bi-logaritmico**. In modo da meglio visualizzare grandi variazioni.

In un diagramma **logaritmico a** parità di distanza lungo un asse sia hanno le stesse variazioni percentuali.

I rapporti che si leggono sulla scala di **destra** comportano un **aumento** della grandezza attraverso l'urto.

I rapporti che si leggono sulla scala di **sinistra** comportano una **diminuzione** della grandezza attraverso l'urto.

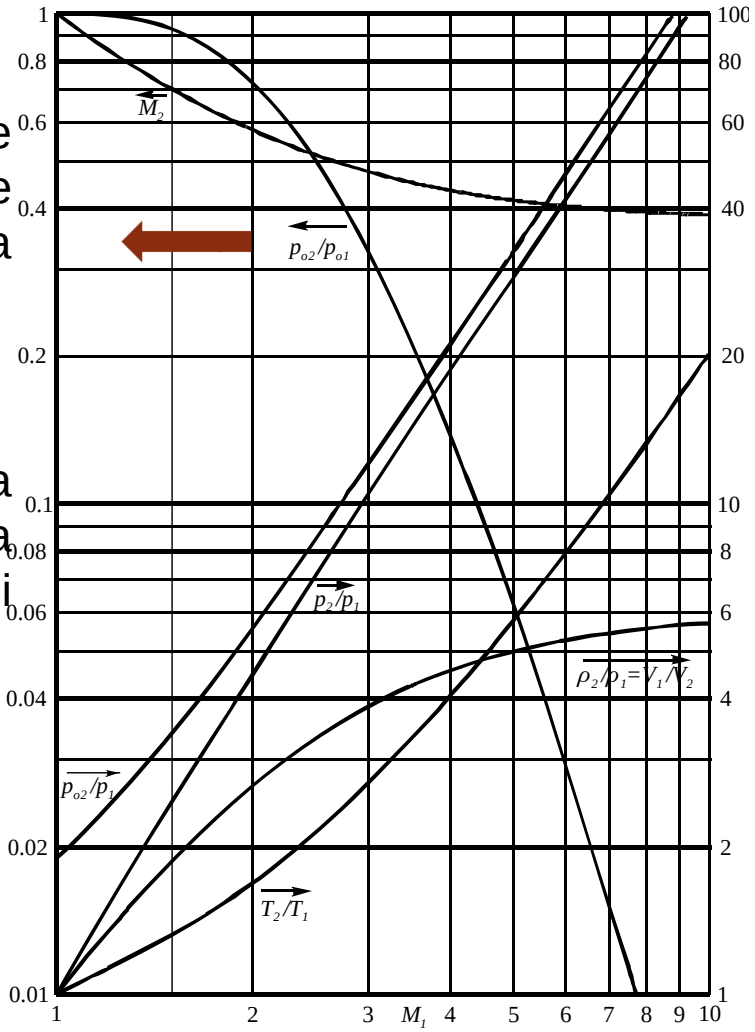


Onde d'urto normali gas PCP

Per numero di **Mach** a monte prossimo a 1 si ha $p_{o2}/p_{o1} \cong 1$ e l'onda può essere considerata **isentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Infatti la pendenza iniziale della **pressione** e **maggiore** di quella della **densità** che è maggiore di quella della **temperatura**.



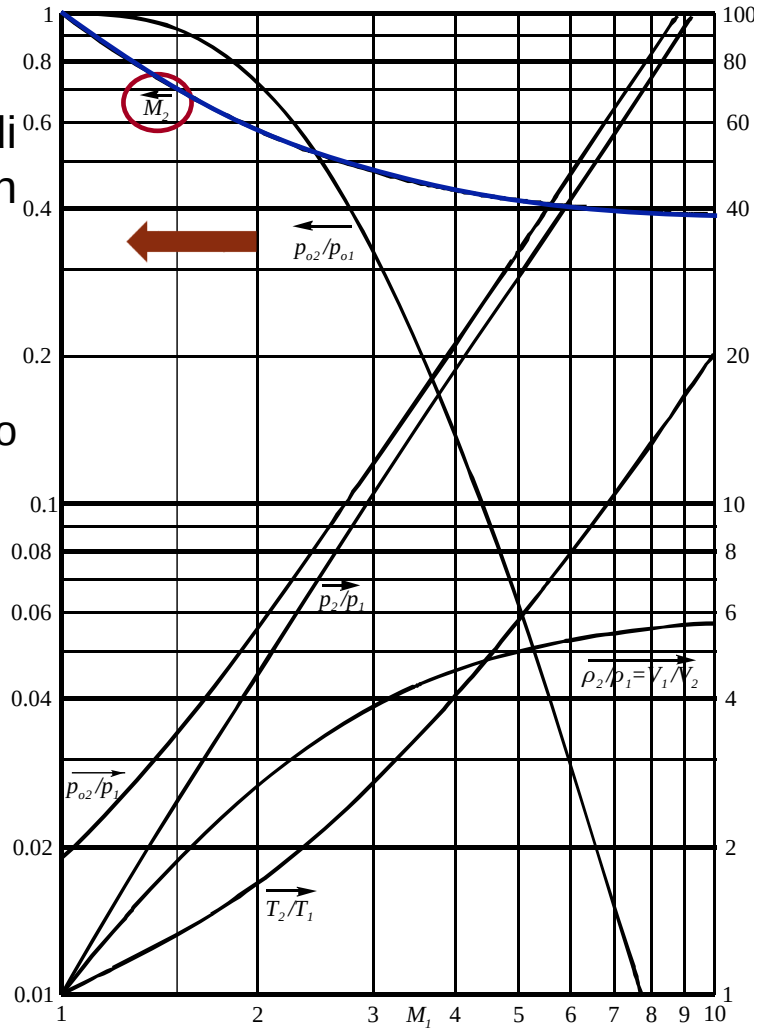
Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una diminuzione:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$

- del numero di Mach a valle M_2, sino al valore asintotico M_{2l};

$$M_{2l} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = (0.3780);$$



Onde d'urto normali gas PCP

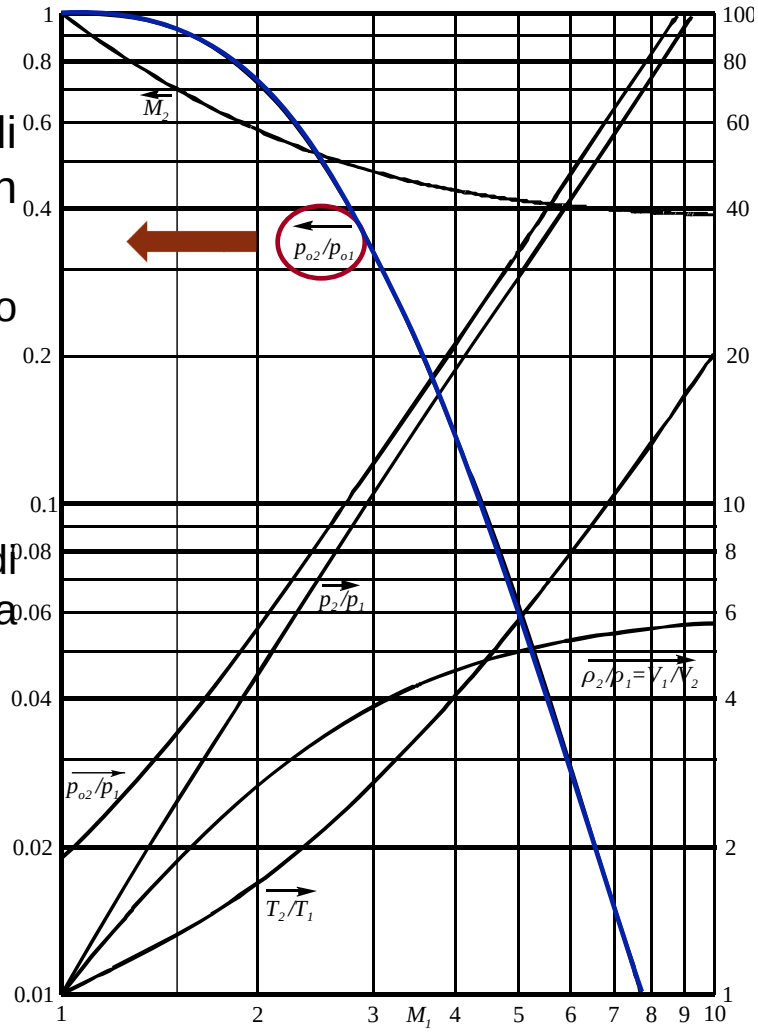
All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una diminuzione:

- del numero di Mach a valle M_2, sino al valore asintotico M_{2l};

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = (\gamma+1)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\Xi}{M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

- del rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia) sino a zero.

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = cost\, M_1^{\frac{2}{1-\gamma}} = 0;$$



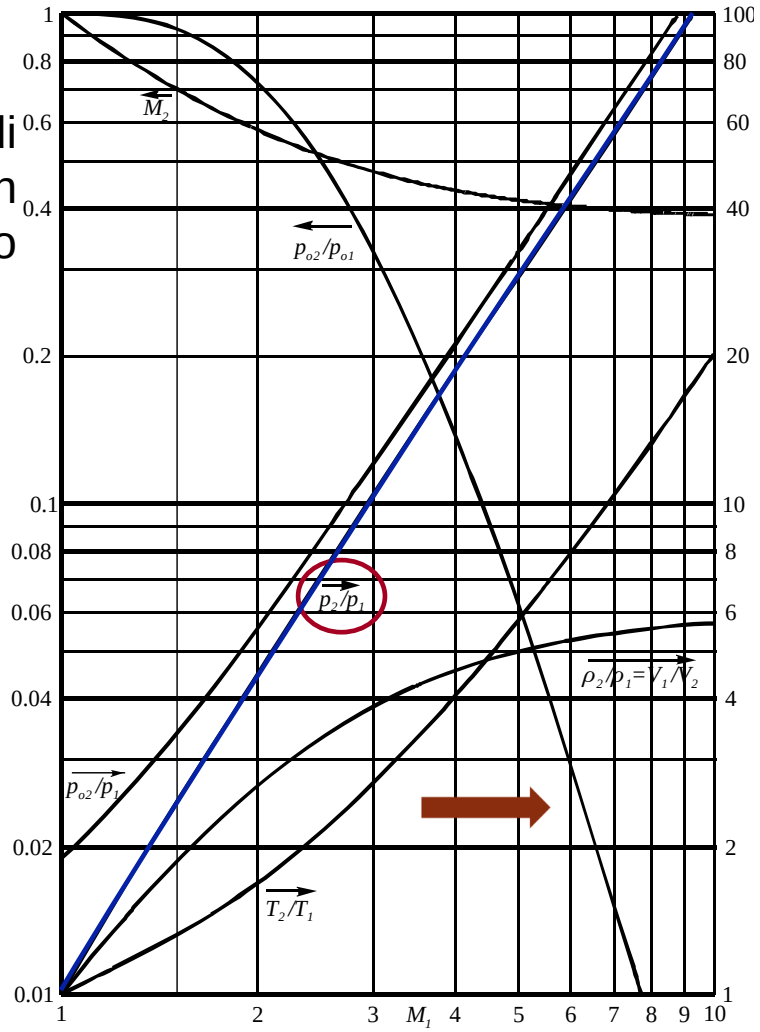
Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una aumento indefinito dei rapporti di:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1};$$

- pressione;

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



Onde d'urto normali gas PCP

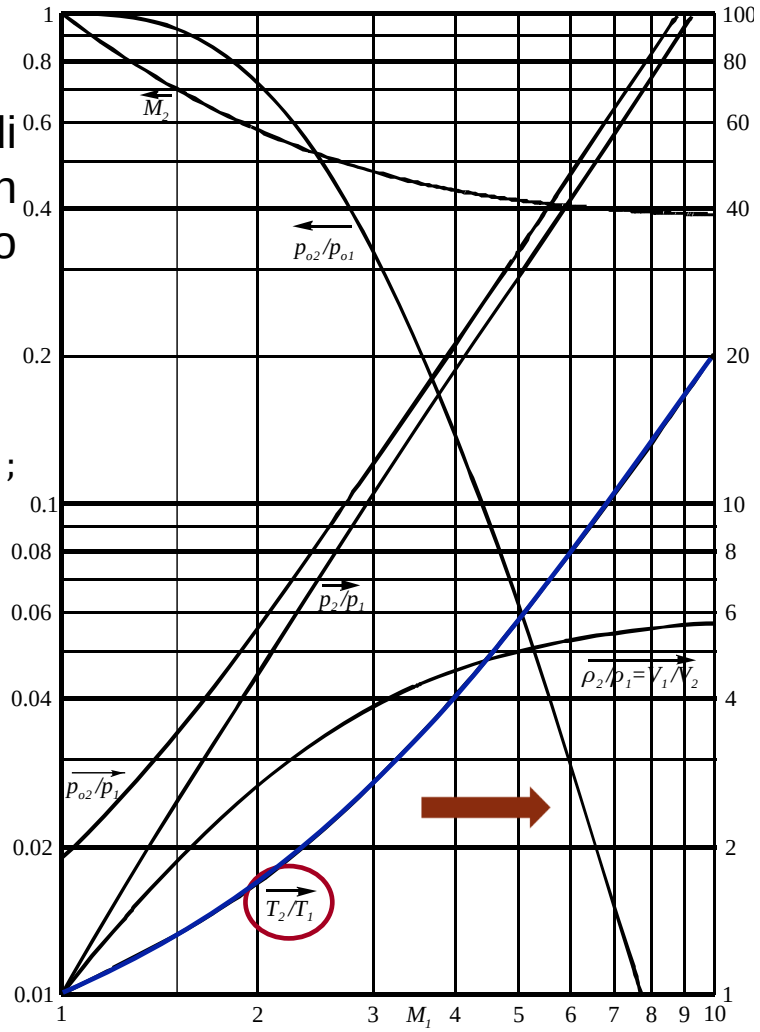
All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)\right)\left((\gamma - 1)M_1^2 + 2\right)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2};$$

- temperatura;

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



Onde d'urto normali gas PCP

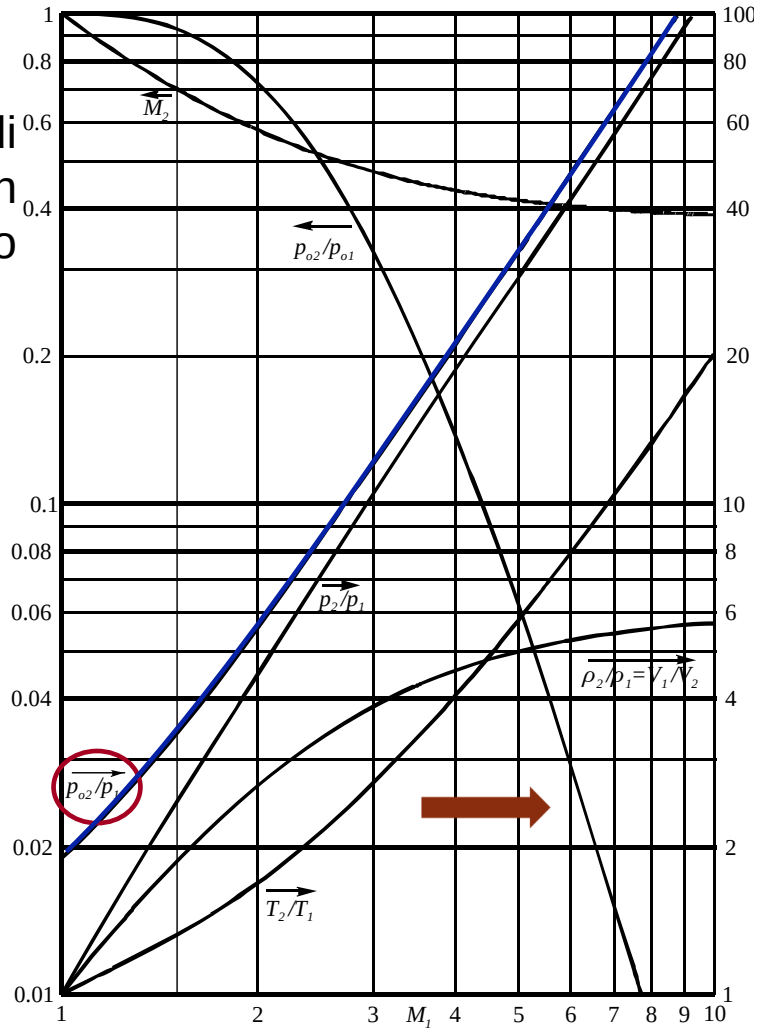
All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- della funzione di Rayleigh;

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{p_{o2}}{p_1} = cost\ M_1^2 = \infty$$



Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di **Mach** a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;
- della funzione di Rayleigh;

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}$$

L'aumento della **densità** è invece **limitato:**

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} = (6)$$

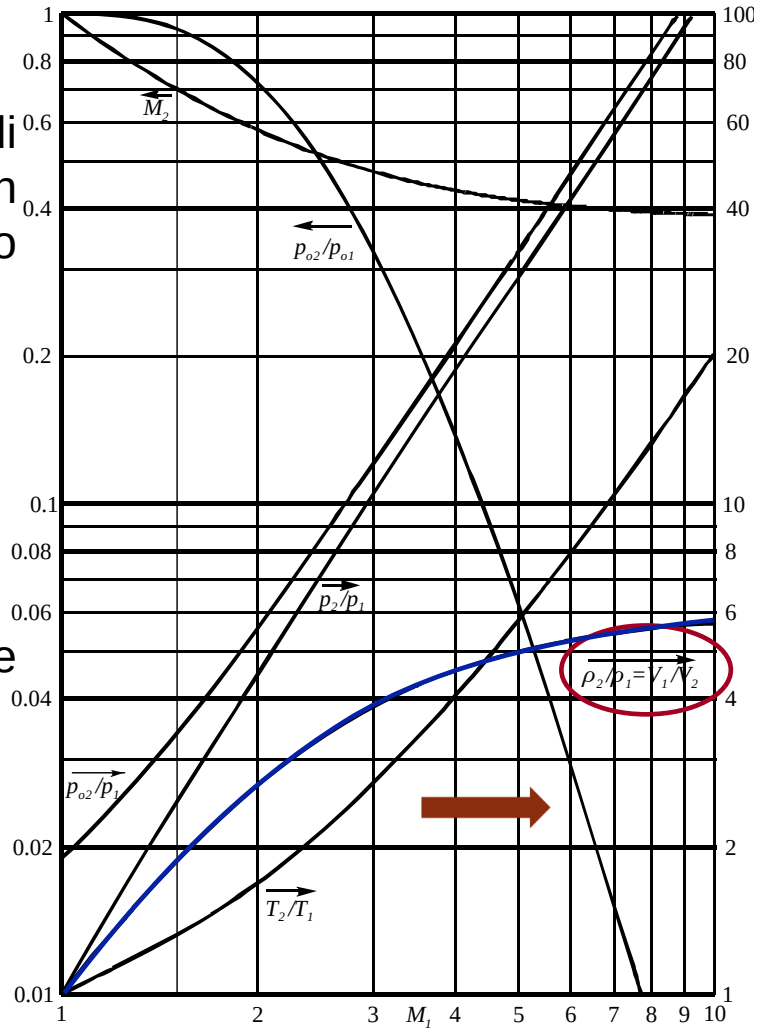
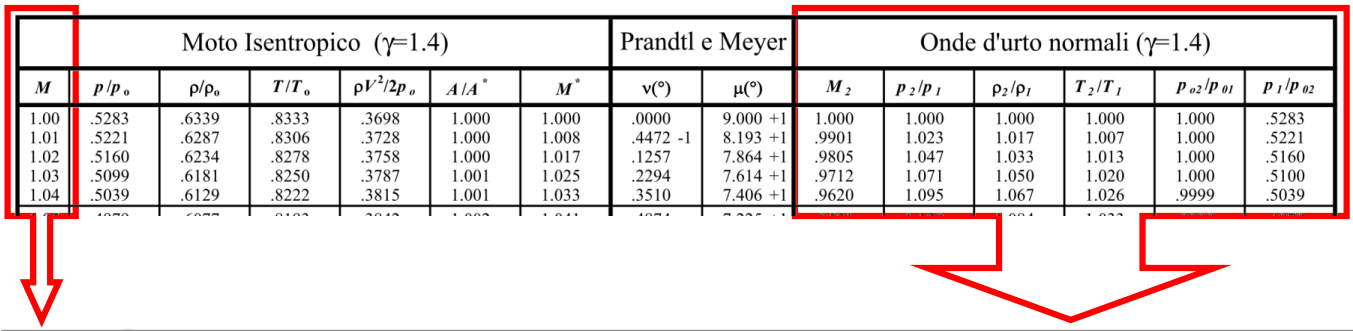


Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:



	Moto Isentropico (γ=1.4)						Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali (γ=1.4)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	ν(°)	μ(°)	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

	Onde d'urto normali (γ=1.4)					
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:

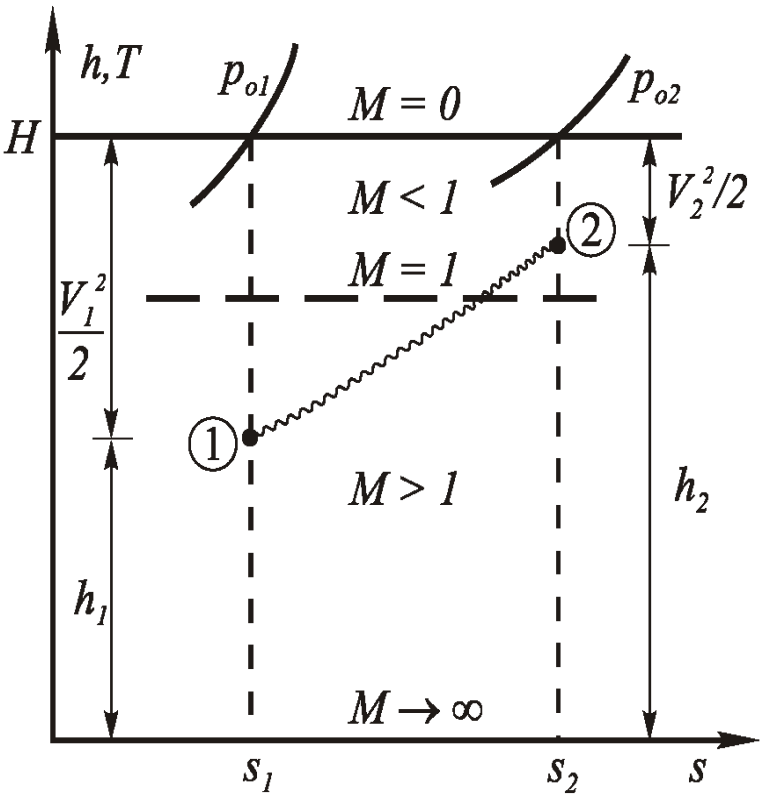
	Onde d'urto normali (γ=1.4)					
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039
15.00	.3823	2.623 +2	5.870	4.469 +1	.4395 -3	.3446 -2
17.50	.3811	3.571 +2	5.904	6.049 +1	.2074 -3	.2533 -2
20.00	.3804	4.665 +2	5.926	7.872 +1	.1078 -3	.1940 -2
∞	.3780	∞	6.000	∞	.0000	.0000

Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

$$h = c_p T$$

- a entalpia costante;



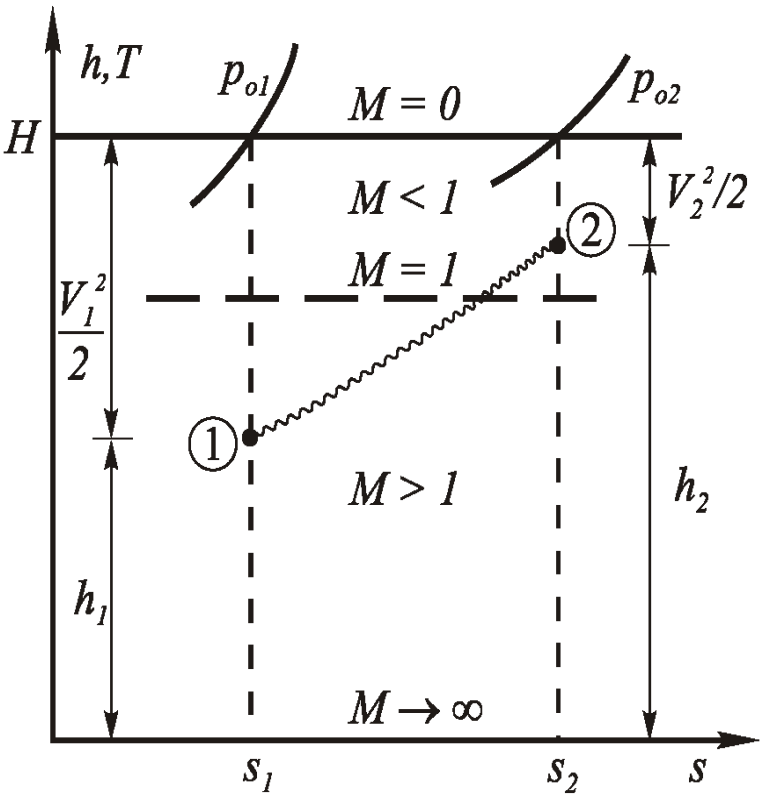
Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

- a velocità costante;



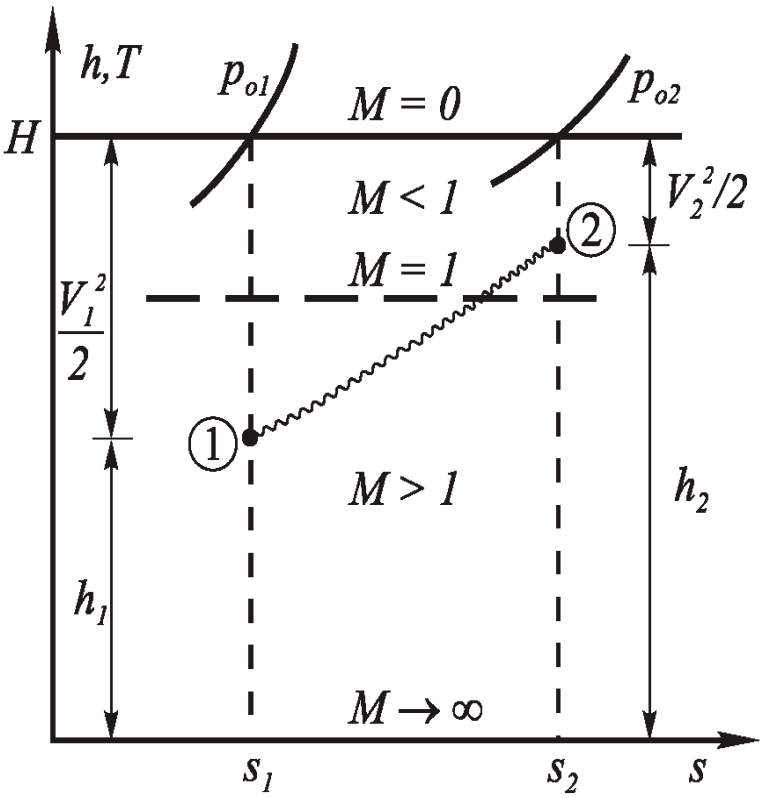
Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto H=cost mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}$$

- a numero di Mach costante;

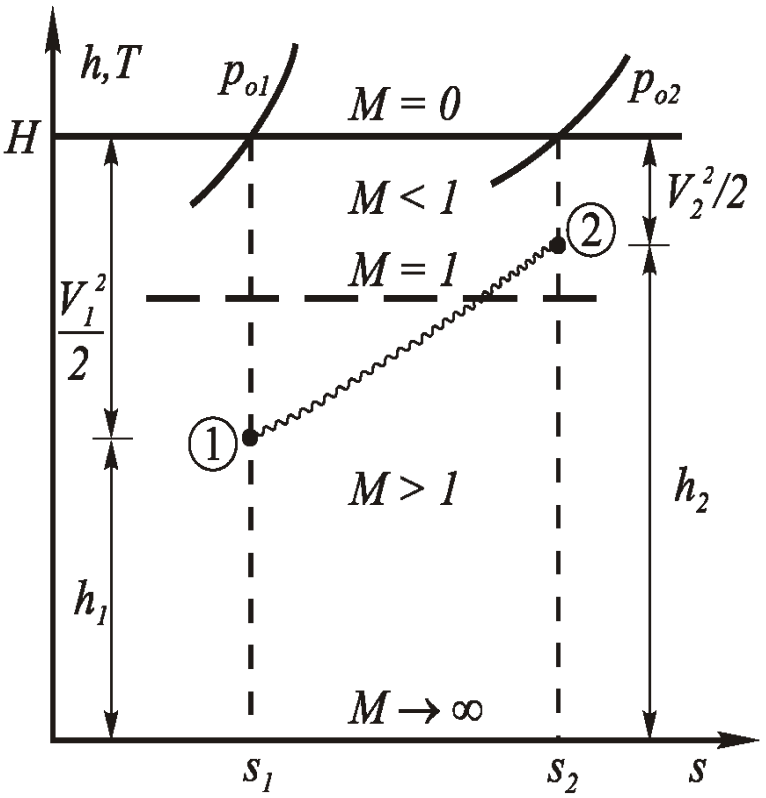


Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto H=cost mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;
- a numero di Mach costante;

La retta a M=1, indicata in figura con il tratteggio, separa il moto **supersonico** da quello **subsonico**. I punti a monte (1) ed a valle (2) sono indicati in figura.



Il collegamento è indicato con una linea **ondulata** per mettere in risalto che la trasformazione **non** è **reversibile** ($\dot{s} > 0$).

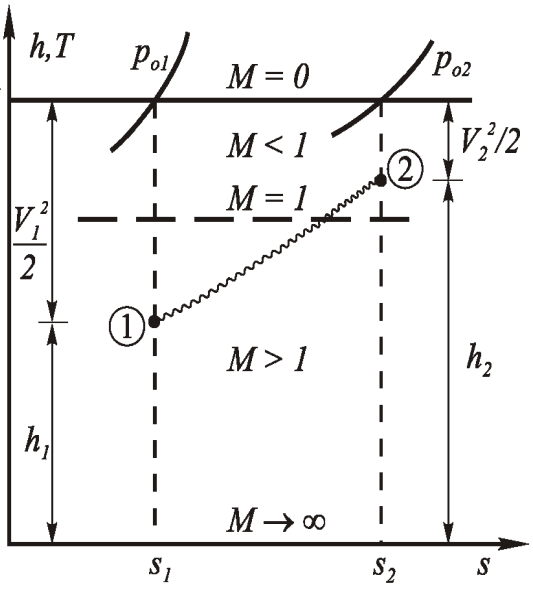
Onde d'urto normali gas PCP

Un **onda d'urto** è una superficie di **discontinuità** attraverso la quale avviene una **brusca conversione** di **energia cinetica ordinata** in energia cinetica **disordinata** ad entalpia totale costante.

$$\rho V = G = cost$$

Per la continuità la **diminuzione di velocità** dà luogo ad un brusco **innalzamento** della **densità.**

$$p + \rho V^2 = p + GV = I = cost$$



Dal bilancio della **quantità di moto** un aumento della **pressione**.

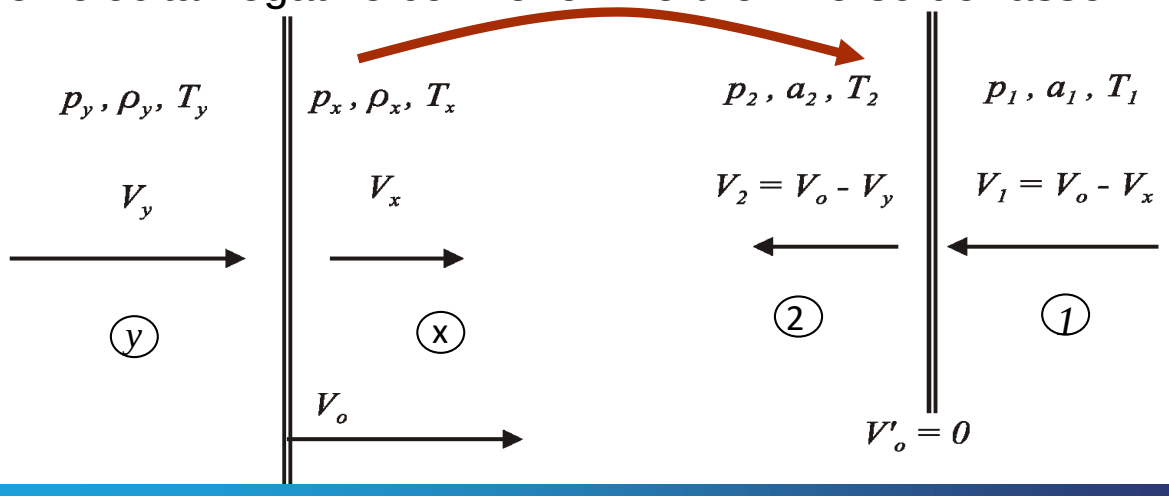
$$h + \frac{V^2}{2} = H = cost$$

Dalla conservazione dell'**energia** un aumento di **temperatura** e **entalpia**. Ovviamente anche l'**entropia** aumenta.

Onde d'urto normali non stazionarie

Un'onda d'urto che si **muove** con una velocità V_o costante, rispetto al **sistema di riferimento** inerziale scelto, è il caso più semplice di onda **non stazionaria**. Si suppone inoltre che il fluido a monte dell'onda si muova a velocità $V_x < V_o$ a monte e $V_y < V_o$ a valle.

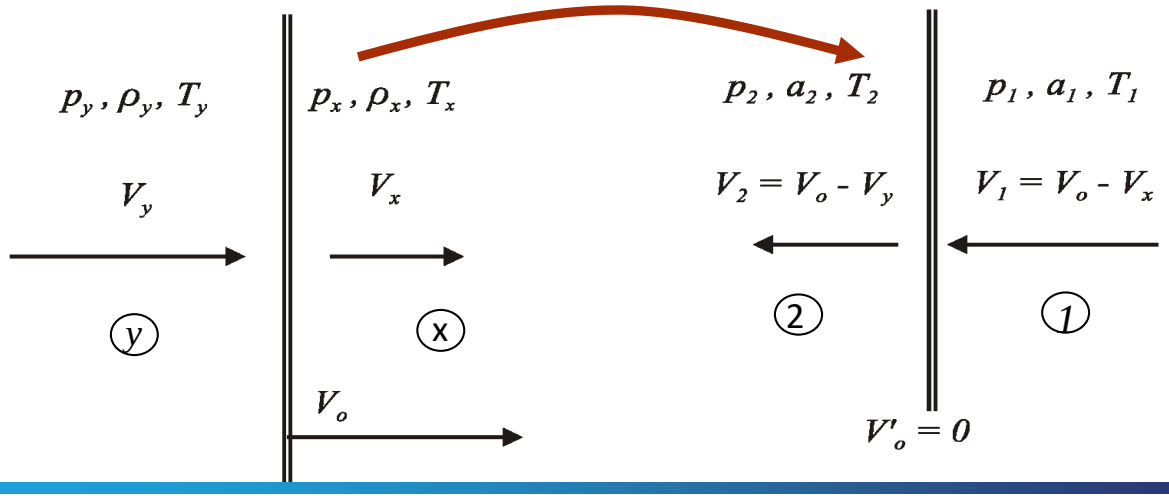
Per rendere l'onda **stazionaria**, è necessario osservarla in un **nuovo sistema di riferimento** (sempre inerziale) **fermo** rispetto all'**onda**. Occorre, quindi, **sottrarre** la V_o a tutte le velocità di figura. Per evitare di avere velocità negative conviene invertire il verso dell'asse x.



Onde d'urto normali non stazionarie

Le condizioni **statiche** della corrente, evidentemente **non dipendono** dal **sistema di riferimento** quindi:

$$p_x = p_1, \qquad T_x = T_1, \qquad a_x = a_1;$$
$$p_y = p_2, \qquad T_y = T_2, \qquad a_y = a_2;$$



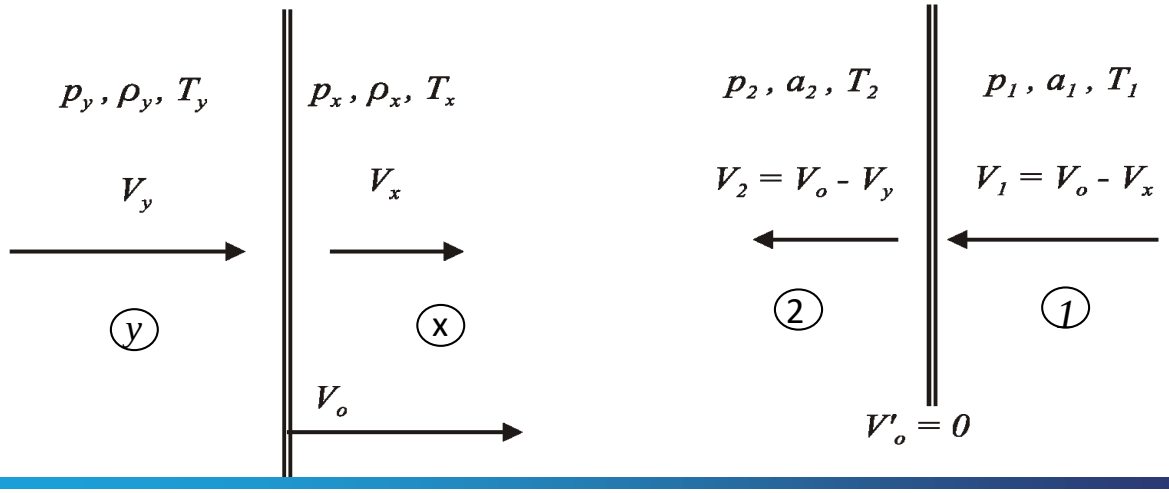
Onde d'urto normali non stazionarie

I numeri di Mach nel sistema di **riferimento** con **l'onda** d'urto in **movimento**, sono:

$$M_x = \frac{V_x}{a_x} = \frac{V_x}{a_1}, \qquad M_y = \frac{V_y}{a_y} = \frac{V_y}{a_2};$$

mentre nel **sistema** con l'**onda** d'urto **stazionaria**

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_0 - V_x}{a_1}, \qquad M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_o - V_y}{a_2}.$$



Onde d'urto normali non stazionarie

I numeri di Mach nel sistema di **riferimento** con **l'onda** d'urto in **movimento**, sono:

$$M_x = \frac{V_x}{a_x} = \frac{V_x}{a_1}, \qquad M_y = \frac{V_y}{a_y} = \frac{V_y}{a_2};$$

mentre nel **sistema** con l'**onda** d'urto **stazionaria**.

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_0 - V_x}{a_1}, \qquad M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_o - V_y}{a_2}.$$

Quindi, se si conosce $V_o, V_x \; e \; a_x$, è facile calcolare il numero di Mach a monte dell'onda nel sistema con l'**onda** d'urto **stazionaria** e utilizzando le formule ricavate per le onde d'urto stazionarie calcolare le grandezze **statiche** a valle dell' onda note quelle a monte.

Onde d'urto normali non stazionarie

Le grandezze di **ristagno**, al contrario di quelle statiche dipendono dal sistema di riferimento e devono essere valutate nel giusto sistema di riferimento ad esempio a monte:

$$T_{ox} = T_x\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2\right) \neq T_{o1} = T_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right);$$

$$p_{ox} = p_x\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \neq p_{o1} = p_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$

Al contrario di quello che succede per le onde stazionarie, T_{ox} **è normalmente diversa da** T_{oy}.

Inoltre, nel sistema di riferimento con **l'onda** d'urto in **movimento**, la **pressione di ristagno** a **valle** dell'onda può essere **maggiore, minore** o al limite **uguale** a quella **monte**.

$$p_{o2} < p_{01} \qquad T_{o2} = T_{01} \qquad \begin{matrix} > \\ p_{oy} = p_{ox} \\ < \end{matrix} \qquad \begin{matrix} > \\ T_{oy} = T_{ox} \\ < \end{matrix}$$

Onde d'urto normali non stazionarie

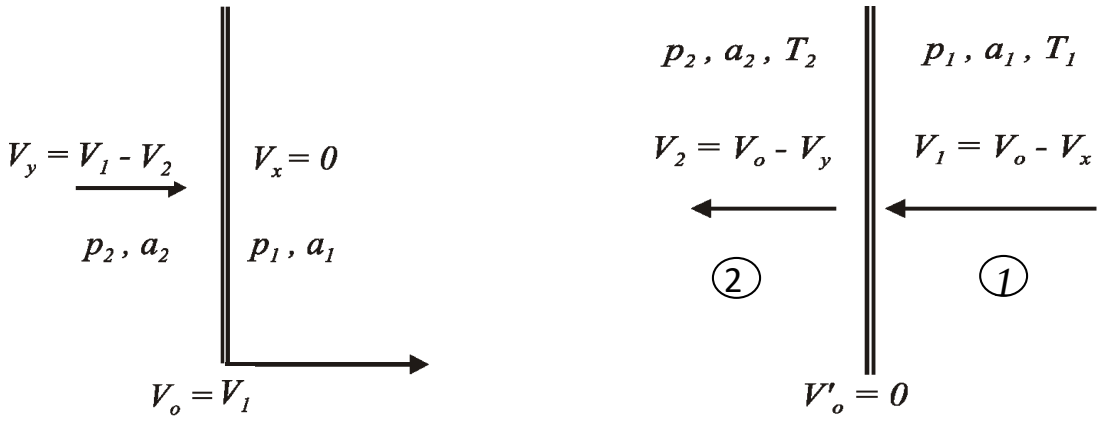
$$p_{o2} < p_{01} \qquad T_{o2} = T_{01} \qquad \begin{matrix} > \\ p_{oy} = p_{ox} \\ < \end{matrix} \qquad \begin{matrix} > \\ T_{oy} = T_{ox} \\ < \end{matrix}$$

Ad **esempio** se $V_x = 0$ cioè quando **l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete** si ha:

$$p_{ox} = p_x \quad e \quad T_{ox} = T_x$$

- A valle dell'onda d'urto sia la pressione che la temperatura aumentano:

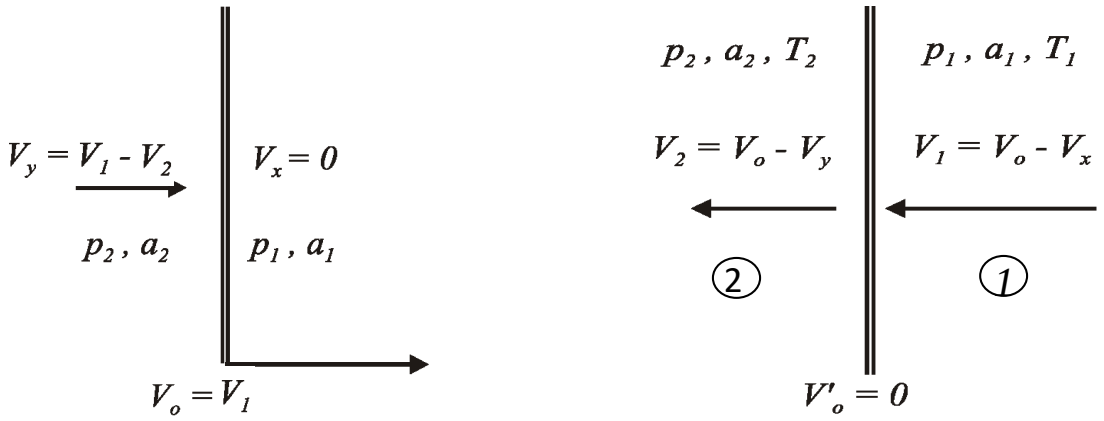
$$p_{oy} > p_y > p_x = p_{ox} \quad e \quad T_{oy} > T_y > T_x = T_{ox}$$



Onde d'urto normali non stazionarie

Ad **esempio** se $V_x = 0$ cioè quando **l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete** si ha:

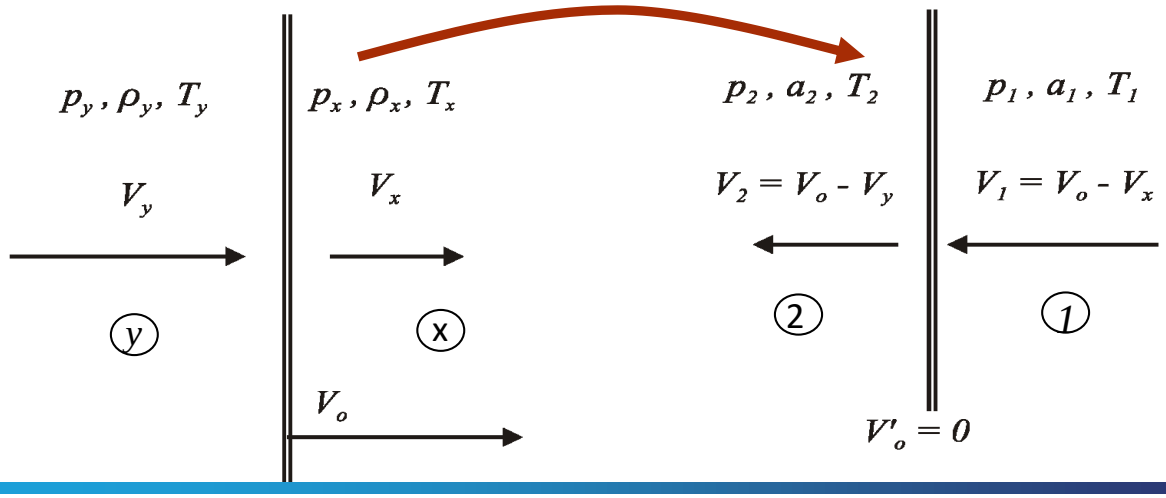
- A valle dell'onda d'urto sia la **pressione** che la **temperatura** di **ristagno aumentano**;
- poiché $V_1 = V_o > V_2$ e $V_y = V_0 - V_2 = V_1 - V_2 > 0$ il **fluido** a valle di un'onda d'urto che si propaga in un fluido in quiete **segue** l'onda;
- poiché $V_1 = V_o > a_1$ un'**onda d'urto** (non di Mach) si **propaga** in un fluido in **quiete** con una **velocità maggiore** della **velocità del suono** nello stesso fluido.



Onde d'urto normali non stazionarie

La **soluzione** del problema di un'onda d'urto in moto, di cui si **conoscano** le velocità di propagazione V_o, del suono a_x e del fluido V_x in cui si propaga, si risolve con i seguenti 4 passi successivi:

- l'onda d'urto è **resa stazionaria sottraendo** la **velocità dell'onda** a quella del fluido in cui si propaga e si **determina** il numero di **Mach a monte**;



Onde d'urto normali non stazionarie

La **soluzione** del problema di un'onda d'urto in moto, di cui si **conoscano** le velocità di propagazione V_o, del suono a_x e del fluido V_x in cui si propaga, si risolve con i seguenti 4 passi successivi:

- l'onda d'urto è **resa stazionaria sottraendo** la **velocità dell'onda** a quella del fluido in cui si propaga e si **determina** il numero di **Mach a monte**;
- si **risolve** il problema per quanto riguarda le **grandezze statiche** e la V_2 con le formule già ricavate per l'onda d'urto **stazionaria**;
- si **calcolano** i numeri di **Mach** per l'onda d'urto in **movimento**;
- si **calcolano** infine le **grandezze di ristagno** per l'onda d'urto in **movimento**;

Se la **velocità dell'onda non fosse** nota, ma lo sono V_x, V_y e a_x si può dimostrare che la velocità di propagazione è data da:

$$V_o = \frac{(\gamma+1)V_y - (\gamma-3)V_x}{4} + \sqrt{a_x^2 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (V_y - V_x)^2}$$

e si ricade nel problema precedente.

Onde d'urto normali non stazionarie

Se la **velocità dell'onda non fosse** nota, ma lo sono V_x, V_y e a_x si può dimostrare che la velocità di propagazione è data:

$$V_o = \frac{(\gamma+1)V_y - (\gamma-3)V_x}{4} + \sqrt{a_x^2 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (V_y - V_x)^2}$$

e si ricade nel problema precedente.

Una valida alternativa è **procedere per tentativi** ad esempio**:**

- si assegna V_o^k a piacere (il pedice *k* indica l'iterazione ed inizialmente $k = 0$);
- si calcola V_y^k con il procedimento precedente;
- si valuta l'errore $e^k = V_y^e - V_y^k$ e se fosse maggiore dell'approssimazione fissata si utilizza un metodo di soluzione di equazioni non lineari (e.g. falsa posizione) per valutare V_o^{k+1} e iterare il procedimento.

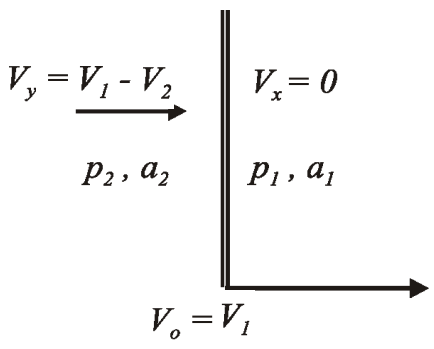
Onde d'urto normali non stazionarie

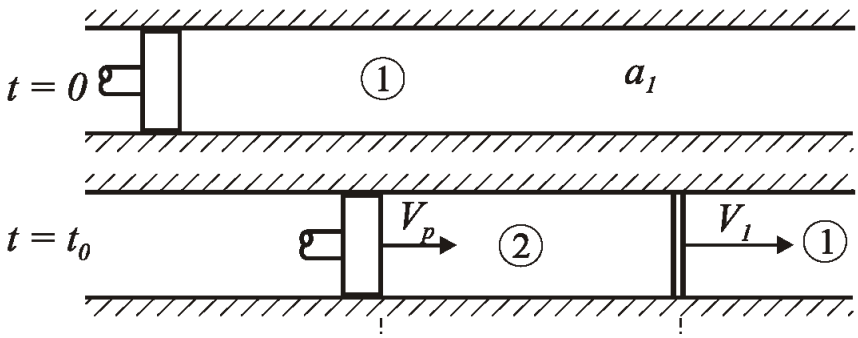
Un caso **rilevante** è quello che consente di determinare la **velocità** di propagazione dell'**onda** d'urto generata dall'**accelerazione impulsiva** alla velocità V_p di un **pistone** all'interno di un condotto.

A monte del pistone il fluido è in quiete ($V_x = 0$) la velocità a valle dell'onda è nota $V_y = V_p$ mentre la velocità dell'onda $V_1 = V_0$ è incognita.

Si trova prima: $M_p = \frac{V_p}{a_1} = \frac{2}{\gamma+1}\frac{M_1^2-1}{M_1}$

Risolvendo in M_1 si ha: $M_1 = \frac{\gamma+1}{4}M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$

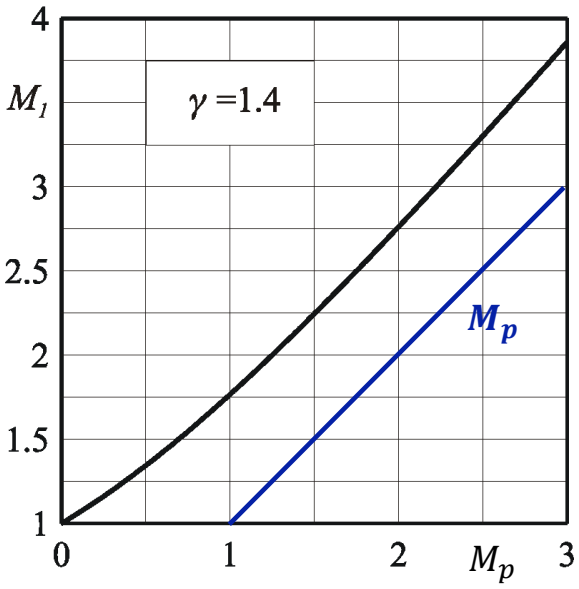


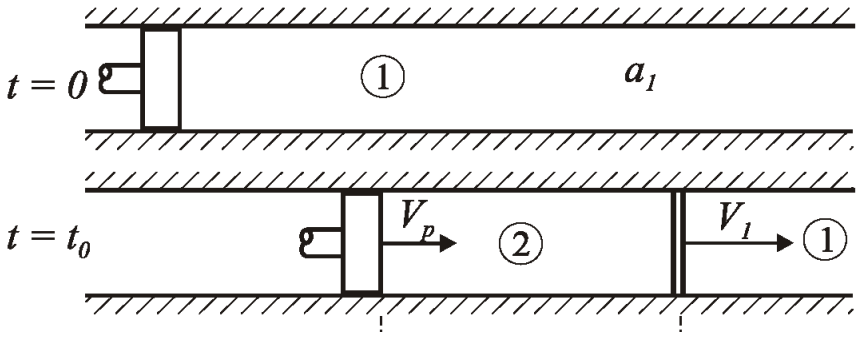


Onde d'urto normali non stazionarie

$$M_1 = \frac{\gamma+1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

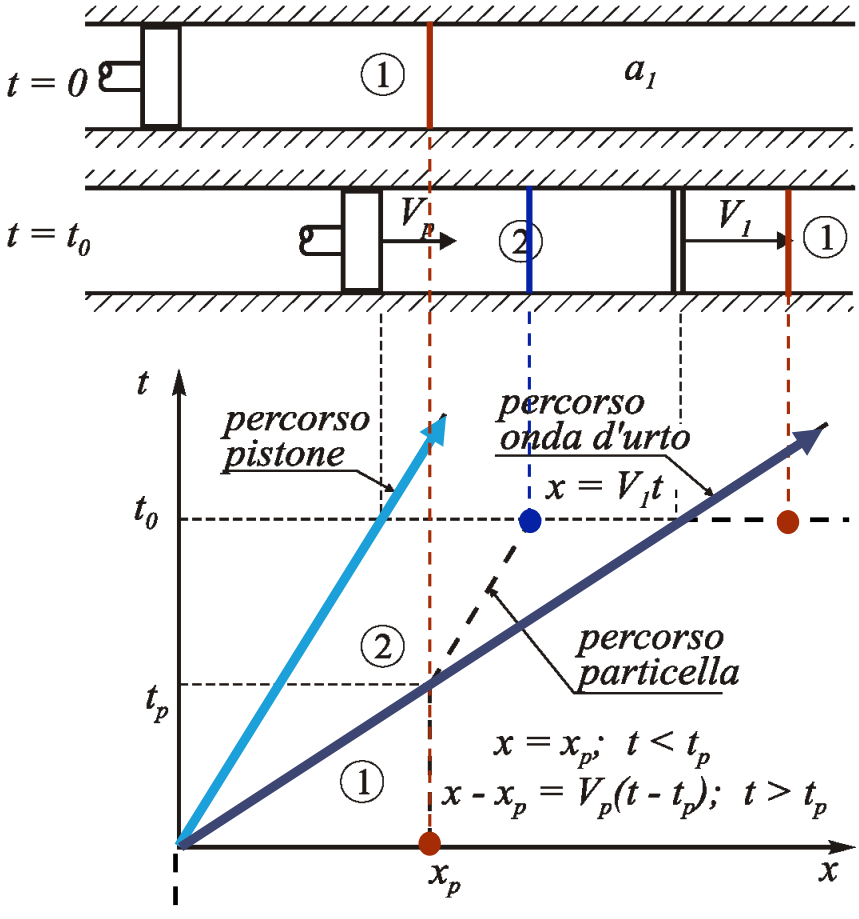
Come si vede anche dalla figura $M_1 > M_p$.





Onde d'urto normali non stazionarie

A seguito dell'accelerazione **impulsiva** del **pistone**, alla velocità V_p, **nasce un'onda d'urto** che si propaga alla velocità V_1.

Nella zona **(1)**, a monte dell'onda d'urto, il fluido è indisturbato.

L'**onda** fa **accelerare** il fluido a valle, nella zona **(2)**, alla stessa velocità del pistone.