Ugello Convergente-Divergente

Dato un ugello tronco conico, con diametro di ingresso D_i=9.6mm, D_g=5 mm e D_u=7mm, si calcolino le condizioni di funzionamento e la relativa portata massica se esso scarica in un ambiente quiescente (p_a=760 mmHg e T_a=20°C) ed è collegato ad un serbatoio contenete aria a temperatura T_o=30°C e pressione:

a) p_o=800 mmHg (assoluta)

b) p_o=1.7 ata

c) p_o=3.3 ata

d) p_o=12 ata

$p_a := 760\cdot\text{torr} \quad T_o := 303\cdot K \quad R := 296.8\cdot\frac{\text{joule}}{\text{kg}\cdot K}$

$D_i := 9.6\cdot\text{mm} \qquad D_g := 5\cdot\text{mm} \qquad D_u := 7\cdot\text{mm}$

$A_i := \frac{\pi\cdot D_i^{\,2}}{4} \qquad A_g := \frac{\pi\cdot D_g^{\,2}}{4} \qquad A_u := \frac{\pi\cdot D_u^{\,2}}{4}$

$A_i = 72.382\,\text{mm}^2 \quad A_g = 19.635\,\text{mm}^2 \quad A_u = 38.485\,\text{mm}^2$

Calcoliamo i punti caratteristici dell' ugello assumendo Mach uguale ad uno in gola. Rp rappresenta il valore del rapporto p/p_o letto dalle tabelle del flusso isentropico e M_A è il M in funzione del rapporto delle aree letto dalle tabelle isoentropiche.

Punto C

$M_C := M_A\left(\frac{A_u}{A_g}, 0.2\right) \qquad R_p(M_C) = 0.934 \qquad M_C = 0.313$

$p_{oC} := \frac{p_a}{R_p(M_C)} \qquad p_{oC} = 1.070\,\text{atm} \qquad T_C := T_o\cdot R_T(M_C)$

$T_C = 297.183\,K \qquad V_C := M_C\cdot\sqrt{\gamma\cdot R\cdot T_C} \qquad V_C = 109.931\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

$\text{port} := \frac{p_{oC}\cdot A_g}{\sqrt{\gamma\cdot R\cdot T_o}}\cdot\psi \qquad \text{port} = 4.862\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\,10^{-3}$

Punto G

$M_G := M_A\left(\frac{A_u}{A_g}, 2.2\right) \qquad R_p(M_G) = 0.097 \qquad M_G = 2.175$

$p_{oG} := \frac{p_a}{R_p(M_G)} \qquad p_{oG} = 10.278\,\text{atm} \qquad T_G := T_o\cdot R_T(M_G)$

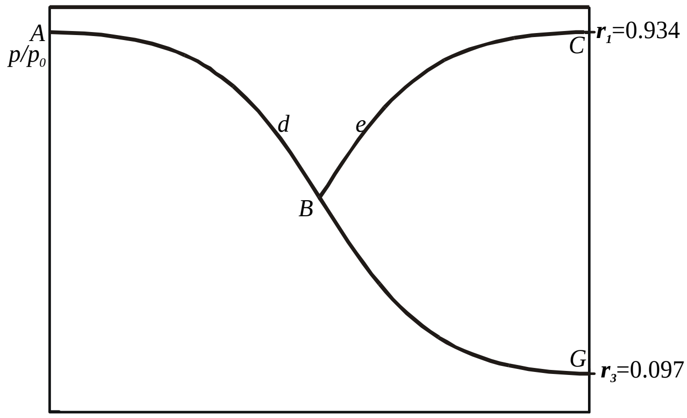
$T_G = 155.712\,K \qquad V_G := M_G\cdot\sqrt{\gamma\cdot R\cdot T_G} \qquad V_G = 553.177\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

$\text{port} := \frac{p_{oG}\cdot A_g}{\sqrt{\gamma\cdot R\cdot T_o}}\cdot\psi \qquad \text{port} = 4.669\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\,10^{-2}$

Punto A

$$M_i := M_A\left(\frac{A_i}{A_g}, 0.2\right)$$

$$R_p(M_i) = 0.982$$



Caso a

$$p_o := 800 \cdot \text{torr} \qquad \frac{p_a}{p_o} = 0.950$$

Il rapporto di pressioni è maggiore di ***r₁*** quindi il moto è tutto subsonico la curva di funzionamento è del tipo c. (M_P è il M in funzione del rapporto delle pressioni letto dalle tabelle isoentropiche ed R_A è il M in funzione del rapporto A/A_c in funzione di M.)

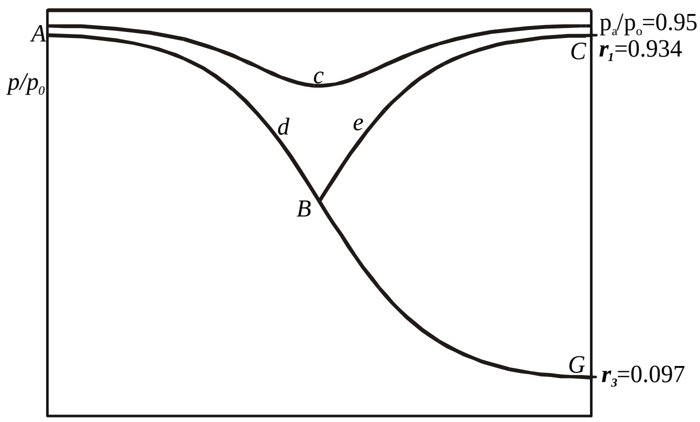
$$M_u := M_p\left(\frac{p_a}{p_o}, 0.2\right) \qquad M_u = 0.270 \qquad R_A(M_u) = 2.237 \qquad A_c := \frac{A_u}{R_A(M_u)}$$

$$M_g := M_A\left(\frac{A_g}{A_c}, 0.2\right) \qquad M_g = 0.644 \qquad R_p(M_g) = 0.757 \qquad A_c = 17.203\,\text{mm}^2$$

$$M_i := M_A\left(\frac{A_i}{A_c}, 0.2\right) \qquad M_i = 0.139 \qquad R_p(M_i) = 0.987$$

$$\text{port} := \frac{p_o \cdot A_c}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o}} \cdot \psi$$

$$\text{port} = 0.419\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\,10^{-2}$$

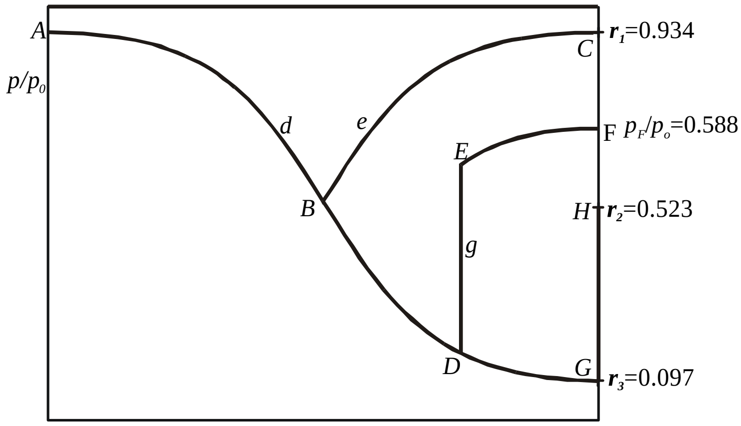


Ugello Convergente-Divergente

Caso b

$p_o := 1.7 \cdot atm \quad \frac{p_a}{p_o} = 0.588$

Il rapporto di pressioni è compreso fra $\boldsymbol{r_1}$ ed $\boldsymbol{r_3}$. Per definire il comportamento dell'ugello è necessario definire il rapporto $\boldsymbol{r_2}$ caratteristico di funzionmento limite non isoentropico con onda d' urto normale nella sezione di uscita del divergente.



$M_G := M_A\left(\frac{A_u}{A_g}, 2.2\right) \quad R_p(M_G) = 0.097 \quad M_G = 2.175$

Dalle tabelle dell'onda d'urto normale si ha:

$M_H := .549 \quad p_H/p_G := 5.378 \quad p_{oH}/p_{oG} := .637$

Si deve calcolare il rapporto $p_H/p_0 = p_H/p_G \cdot p_G/p_0$:

$Rapp := R_p(M_G) \cdot 5.378 \quad Rapp = 0.523$

Poichè questo rapporto è minore di p_a/p_o ci sarà un onda d'urto nel divergente la posizione dell'onda si può calcolare per tentativi. Supponiamo che l'onda sia nella sezione in cui M=1.8.

$M_D := 1.8 \quad R_A(M_D) = 1.439$

Dalle tabelle dell'urto normale si ha:

$M_E := .616 \quad p_E/p_D := 3.613 \quad p_{oE}/p_{oD} = A^*_g/A^*_E := .812$

$A_F/A^*_F = A_F/A_g \; A_g/A^*_F \quad \frac{A_u}{A_g} \cdot .812 = 1.592$ Dove chiaramente $A^*_F = A^*_E$

$M_F := M_A\left(\frac{A_u}{A_g} \cdot .812, 0.2\right) \quad R_p(M_F) = 0.896 \quad M_F = 0.399$

Si calcola $p_F/p_{oD} = p_F/p_{oF} \; p_{oF}/p_{oD}$:

$R_p(M_F) \cdot .812 = 0.727$ Che è maggiore di .588 quindi l' onda è piu' avanzata.

Supponiamo ora che l'onda sia nella sezione in cui **M=2.0**.

$M_D := 2.0 \quad R_A(M_D) = 1.688$

Dalle tabelle dell'urto normale si ha:

$M_E := .577 \qquad p_E/p_D := 4.50 \qquad p_{oE}/p_{oD} = A^*_g/A_E := .721$

$A_F/A^*_F = A_F/A_g \, A_g/A^*_F \qquad .721 \cdot \frac{A_u}{A_g} = 1.413$ Dove chiaramente $A^*_F = A^*_E$

$M_F := M_A\left(\frac{A_u}{A_g} \cdot .721, 0.2\right) \qquad R_p(M_F) = 0.862 \qquad M_F = 0.465$

Si calcola $p_F/p_{oD} = p_F/p_{oF} \, p_{oF}/p_{oD}.$

$R_p(M_F) \cdot .721 = 0.622$ Che è maggiore di .588 quindi l' onda è piu' avanzata

Il nuovo valore di tentativo si può calcolare facendo un'interpolazione lineare:

$$M_D := \frac{1.8 \cdot (0.622 - 0.588) - 2.0 \cdot (0.727 - 0.588)}{(0.622 - 0.588) - (0.727 - 0.588)}$$

$M_D = 2.065 \qquad R_A(M_D) = 1.782$

Dalle tabelle dell'urto normale si ha:

$M_E := .568 \qquad p_E/p_D := 4.79 \qquad p_{oE}/p_{oD} = A^*_g/A_E := .693$

$A_F/A^*_F = A_F/A_g \, A_g/A^*_F \qquad .693 \cdot \frac{A_u}{A_g} = 1.358$ Dove chiaramente $A^*_F = A^*_E$

$M_F := M_A\left(\frac{A_u}{A_g} \cdot .693, 0.2\right) \qquad R_p(M_F) = 0.848 \qquad M_F = 0.491$

Si calcola $p_F/p_{oD} = p_F/p_{oF} \, p_{oF}/p_{oD}.$

$R_p(M_F) \cdot .693 = 0.588$ Che è il valore cercato.

$$port := \frac{p_o \cdot A_g}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o}} \cdot \psi$$

$port = 7.723 \, kg \, s^{-1} \, 10^{-3}$

Utilizziamo ora il metodo diretto consideriamo come punto 1 la sezione critica e come punto 2 la sezione di uscita.

$$p_c := p_o \cdot R_p(1)$$

$$C := \frac{p_c}{p_a} \cdot \frac{A_g}{A_u} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_T(1)}}$$

$$M_u := \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot (\gamma - 1) \cdot C^2}}{\gamma - 1}}$$

$$M_u = 0.490$$

$$p_{o6} := \frac{p_a}{R_p(M_u)} \qquad \frac{p_{o6}}{p_o} = 0.693$$

Con questo rapporto si entra nella tabella delle NSW e si risale al numero di Mach a monte dell' urto.

Ugello Convergente-Divergente

Caso c

$p_o := 3.3 \cdot atm \quad \frac{p_a}{p_o} = 0.303$

Il rapporto di pressioni è compreso fra $\boldsymbol{r_2}$ ed $\boldsymbol{r_3}$ quindi ci sarà un onda d'urto obbliqua all'uscita dell'ugello.

$M_G := M_A\left(\frac{A_u}{A_g}, 2.2\right) \qquad R_p(M_G) = 0.097 \qquad M_G = 2.175$

L' aumento di pressione dovuto all'urto sarà pari a: $p_a/p_G = p_a/p_o \, p_o/p_G$

$\frac{p_a}{p_o} \cdot \frac{1}{R_p(M_G)} = 3.115$

Entrando nelle tabelle dell'onda d'urto normale si trova che:

$M_{Gn} := 1.68 \quad M_{Jn} := 0.646$ da cui ε

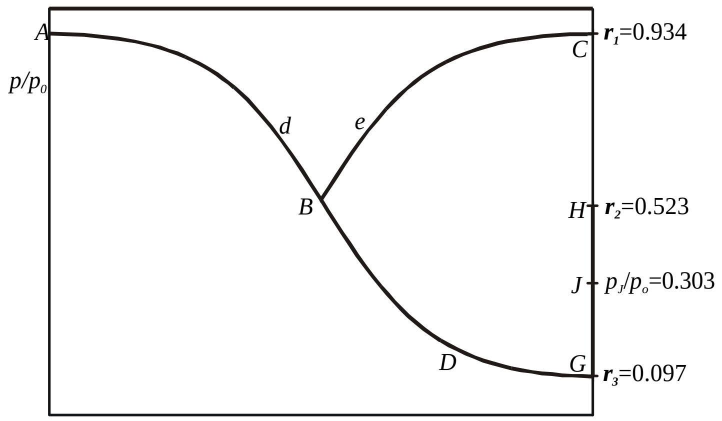
$\varepsilon := \mathrm{asin}\left(\frac{1.68}{M_G}\right) \quad \varepsilon = 50.6\,deg$

$M_{Gt} := \sqrt{M_G^{\,2} - 1.68^2} \qquad M_{Gt} = 1.381$

Per il calcolo del M tangenziale a valle dell'urto si deve ricordare che le velocità tangenziali sono costanti. Quindi leggendo dalle tabelle (NSW) il rapporto delle temperature (1.444) si ha:

$M_{Jt} := M_{Gt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.44}} \qquad M_{Jt} = 1.151 \qquad \delta := \varepsilon - \mathrm{atan}\left(\frac{M_{Jn}}{M_{Jt}}\right) \qquad \delta = 21.272\,deg$

$port := \frac{p_o \cdot A_g}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o}} \cdot \psi \qquad port = 1.499\,kg\,s^{-1}\,10^{-2}$



Ugello Convergente-Divergente

Caso d

$p_o := 12.\cdot atm \qquad \frac{p_a}{p_o} = 0.083$

Poichè il rapporto di pressione è inferiore a $\boldsymbol{r_3}$ ci sarà un ventaglio di espansione all'uscita dell ugello:

$port := \frac{p_o \cdot A_g}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_o}} \cdot \psi \qquad port = 5.451\,kg\,s^{-1}\,10^{-2}$

$M_G := M_A\left(\frac{A_u}{A_g}, 2.2\right)$

$R_p(M_G) = 0.097 \qquad M_G = 2.175$

$M_L := M_p\left(\frac{p_a}{p_o}, 2\right) \qquad M_L = 2.273$

Dalle tabelle di Prandtl-Meyer si trova:

$\nu_G := 31 \qquad \nu_L := 33.6$

$\delta := \nu_L - \nu_G \qquad \delta = 2.600$