# UGELLO CONVERGENTE

1. **Si consideri un ugello convergente che scarica in ambiente ($p_a$ = 1*atm*). Sono noti la temperatura di ristagno $T_0$ = 300*K*, il diametro di uscita dell'ugello *D* = 0.01*m* e la differenza di pressione tra monte e valle dell'ugello $\Delta p$ = 7000*mmH₂O* = 68649*Pa*. Si calcoli la portata massica dell'ugello e la velocità nella sezione di uscita.**

Dai valori noti si ricava:

$$A_u = \pi \cdot 0.01^2 / 4 = 7.854 \cdot 10^{-5}\, m^2$$

$$p_0 = p_a + \Delta p = 101.3 + 68.649 = 169.949 kPa$$

e quindi il rapporto:

$$\frac{p_a}{p_0} = 0.596062 > 0.5283$$

Si può dunque concludere che è soddisfatta la condizione di Kutta, ovvero che all'uscita dell'ugello il fluido avrà una pressione proprio pari a quella ambiente. Dal valore di $p_u/p_0 = p_a/p_0$ è possibile ricavare il $M_u$ ed il rapporto $A_u/A^*$ utilizzando le tabelle per il moto isentropico:

$$M_u = 0.8925$$

$$A_u / A^* = 1.0105$$

Dall'ultimo rapporto si ricava:

$$A^* = A_u \cdot A^* / A_u = 7.854 \cdot 10^{-5} / 1.0105 = 7.772 \cdot 10^{-5}\, m^2$$

Per cui la portata risulta essere uguale a:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0}\Psi^* = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{\gamma R T_0}}\Psi^* = \frac{169.949 \cdot 10^3 \cdot 7.772 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} \cdot 0.8102 = 3.082 \cdot 10^{-2}\, kg/s$$

Mentre la velocità nella sezione di uscita dell'ugello:

$$V_u = \frac{\dot{m}}{\rho A_u}$$

Per conoscere la densità $\rho$ posso calcolarmi dapprima $\rho_0$:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{169.949 \cdot 10^3}{287 \cdot 300} = 1.974 kg/m^3$$

leggere dalle tabelle:

$$\rho / \rho_0 = 0.69105$$

e calcolare infine:

$$\rho = \rho_0 \cdot \rho / \rho_0 = 1.974 \cdot 0.69105 = 1.364 kg/m^3$$

Per cui la velocità cercata risulta pari a:

$$V_u = \frac{\dot{m}}{\rho A_u} = \frac{3.082 \cdot 10^{-2}}{1.364 \cdot 7.854 \cdot 10^{-5}} = 287.7 m/s$$

2. **Si vogliono di seguito confrontare i risultati ottenuti per il calcolo della velocità in uscita e della portata per l'ugello dell'esercizio precedente, utilizzando il teorema di *Bernoulli*, il teorema di *Bernoulli* applicato adottando il valore della pressione media fra $p_a$ e $p_o$ e la formula di *de Saint Venant* (cfr. eq. (10.4)). Si faccia infine un confronto tra i risultati delle tre formule per valori crescenti della pressione di ristagno.**

Il teorema di *Bernoulli* può essere applicato calcolando la densità alla pressione di ristagno. La temperatura a cui si calcola la densità è necessariamente quella di ristagno ( si veda esercizio precedente).

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$$

il valore della velocità sarà dunque calcolato come:

$$V_B = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho_0}}$$

e la portata massica sarà espressa come:

$m_B = \rho_0 V_B A$

In alternativa si può applicare il teorema di *Bernoulli* calcolando la densità ad un valore della pressione che sia la media fra la pressione ambiente e la pressione di ristagno:

$$p_m = \frac{p_0 + p_a}{2}, \ \rho_m = \frac{p_m}{RT_0}$$

la velocità risulta adesso:

$$V_{Bm} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho_m}}$$

e la portata massica di conseguenza sarà:

$m_{Bm} = \rho_m V_{Bm} A$

Infine, si può utilizzare la formula di *de Saint Venant*:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$V_e = \sqrt{2 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot R \cdot T_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

da cui consegue:

$m_e = \rho V_e A$

Per il valore della pressione di ristagno dell'esercizio precedente, applicando le formule appena ricavate, si ricava che:

| $V_B$ | $V_{Bm}$ | $V_e$ | $m_B$ | $m_{Bm}$ | $m_e$ | $errV_B$ | $errV_{Bm}$ | $errm_B$ | $errm_{Bm}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 263.739 | 295.233 | 287.794 | 0.040886 | 0.036525 | 0.030831 | -0.08358 | 0.025847 | 0.326145 | 0.18468 |

Si noti che i risultati ottenuti applicando la formula di *de Saint Venant* in pratica coincidono con quelli ricavati consultando le tabelle per moto isentropico. Inoltre, l'applicazione della formula di *Bernoulli* alla pressione media può essere accettata per il calcolo della velocità (errore del 3% ca.) ma non per il calcolo della portata (errore del 18% ca.). La formula di *Bernoulli* semplice, invece, comporta per il calcolo della velocità un errore del 8% e per il calcolo della portata addirittura un errore del 33% ca.

Supponiamo di voler risolvere lo stesso problema dell'esercizio precedente per una pressione di ristagno molto prossima a quella ambiente; sia, per esempio, $\Delta p = 55 mmH_2O = 539.385 Pa$. La pressione di ristagno sarà pari a:

$$p_0 = p_a + \Delta p = 101.3 \cdot 10^3 + 0.539385 \cdot 10^3 = 101.8 \cdot 10^3 \, Pa$$

Per utilizzare le tabelle per moto isentropico, ci occorre il valore del rapporto $p_a/p_0$; tuttavia, per non commettere grossi errori, dovremmo avere una precisione di $p_a$ e $p_0$ molto spinta. Utilizzando le formule di *Bernoulli*, *Bernoulli* alla pressione media e *de Saint Venant*, si ottengono i seguenti valori:

| $V_B$ | $V_{Bm}$ | $V_e$ | $m_B$ | $m_{Bm}$ | $m_e$ | $errV_B$ | $errV_{Bm}$ | $errm_B$ | $errm_{Bm}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30.20008 | 30.24015 | 30.22872 | 0.002806 | 0.002802 | 0.002798 | -0.00095 | 0.000378 | 0.002831 | 0.001502 |

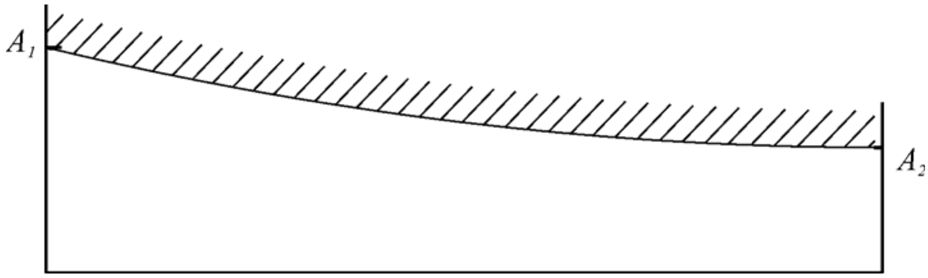
È interessante notare che applicando entrambe le formule di *Bernoulli*, sia nel calcolo della velocità che della portata, si commette un errore mai superiore allo 0.3%.

Di seguito sono riportati i valori degli errori commessi utilizzando le formule di *Bernoulli* al variare della pressione di ristagno e quindi del Mach nella sezione di uscita dell'ugello convergente in esame:

| $\Delta p$ (*mmH2O*) | $\Delta p$ (*Pa*) | $p_0$ | $p_a/p_0$ | $M$ | $errV_B$ | $errV_{Bm}$ | $errm_B$ | $errm_{Bm}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 98,07 | 101398,1 | 0,999033 | 0,037183 | -0,00017 | 6,91E-05 | 0,0005 | 0,000258 |
| 15 | 147,105 | 101447,1 | 0,99855 | 0,045535 | -0,00026 | 0,000104 | 0,000759 | 0,000397 |
| 20 | 196,14 | 101496,1 | 0,998068 | 0,052575 | -0,00035 | 0,000138 | 0,001019 | 0,000535 |
| 55 | 539,385 | 101839,4 | 0,994704 | 0,087133 | -0,00095 | 0,000378 | 0,002831 | 0,001502 |
| 100 | 980,7 | 102280,7 | 0,990412 | 0,1174 | -0,00172 | 0,000684 | 0,005158 | 0,002746 |
| 200 | 1961,4 | 103261,4 | 0,981005 | 0,165744 | -0,00341 | 0,001355 | 0,010315 | 0,005506 |
| 500 | 4903,5 | 106203,5 | 0,953829 | 0,260744 | -0,00836 | 0,003285 | 0,025672 | 0,013764 |
| 1000 | 9807 | 111107 | 0,911734 | 0,365744 | -0,01621 | 0,00625 | 0,050902 | 0,027451 |
| 2000 | 19614 | 120914 | 0,837786 | 0,509264 | -0,03053 | 0,01135 | 0,100097 | 0,054541 |
| 5000 | 49035 | 150335 | 0,673828 | 0,772663 | -0,06529 | 0,021731 | 0,239178 | 0,133638 |
| 7000 | 68649 | 169949 | 0,596061 | 0,892519 | -0,08358 | 0,025847 | 0,326145 | 0,18468 |
| 9000 | 88263 | 189563 | 0,534387 | 0,990118 | -0,09915 | 0,028494 | 0,409402 | 0,234489 |

Nelle tabelle si evidenzia chiaramente come l'utilizzo del teorema di *Bernoulli* corretto (con l'utilizzo cioè della pressione media) per il calcolo della velocità produca un errore sempre minore del 3% ca., mentre utilizzando il teorema di *Bernoulli* approssimato si commette un errore del 3% se $M < 0.5$. Per il calcolo della portata l'utilizzo del teorema di *Bernoulli* corretto e del teorema di *Bernoulli* approssimato produce un errore minore del 3% rispettivamente per $M < 0.4$ e $M < 0.3$.

3. **Si consideri un ugello convergente collegato ad un serbatoio, avente sezione di uscita $A_2$ = 10*cm*$^2$; siano note la temperatura, la pressione e la velocità all'ingresso, $T_1$ = 60°*C*, $p_1$ = 7*atm*, $V_1$ = 260*m*/*s*, e la pressione in cui scarica l'ugello, $p_a$ = 4*atm*. Come fluido si consideri aria ($\gamma$ = 1.4, R = 287*J*/*kgK*). Si calcoli la portata dell'ugello.**




Per determinare la portata dell'ugello è necessario innanzitutto conoscerne il funzionamento: bisogna dunque calcolare il rapporto $p_a/p_o$. Essendo noto il valore di $p_a$ è necessario determinare $p_o$, ricavabile dalla relazione (7.37) a pag.190:

$$\frac{p_o}{p_1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

A sua volta la temperatura di ristagno $T_0$ può essere ricavata dalla (7.33):

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p}$$

dove $c_p = R\frac{\gamma}{\gamma - 1} = 1004 J/kgK$

Si hanno dunque:

$$T_0 = (273 + 60) + \frac{260^2}{2 \cdot 1004} = 366.6K$$

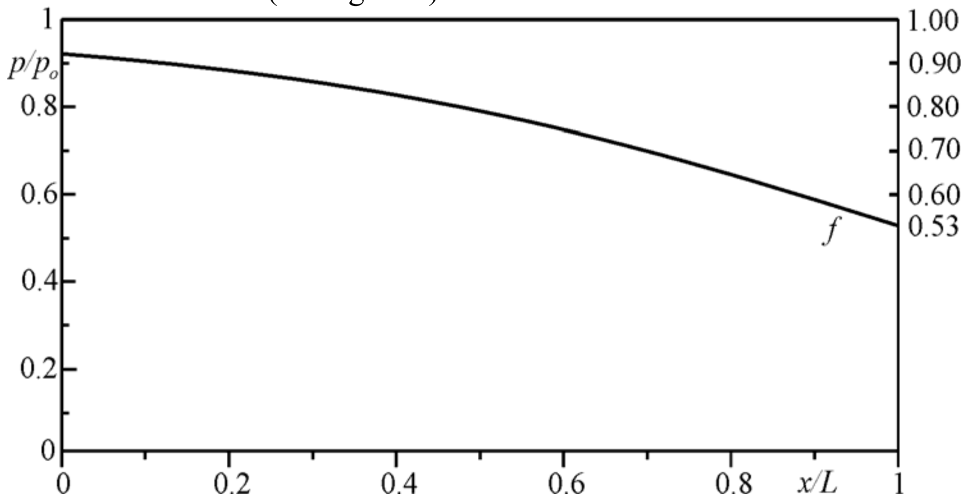
$p_0 = 9.804 atm$, da cui:

$$\frac{p_a}{p_o} = 0.408$$

Poiché si ha $\frac{p_a}{p_o} < 0.5283$ il funzionamento dell'ugello è strozzato, si avrà un ventaglio di espansione all'uscita, ed il calcolo della portata si può effettuare tramite la relazione (10.10), ove si ponga $A^* = A_2$:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0}\psi^* = \frac{9.804 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 366.6}} \cdot 0.81 = 2.096 kg/s$$

La curva di funzionamento è la f (cfr. fig.10.3)




**4. Si consideri l'ugello dell'esercizio precedente e si calcoli la portata tramite l'utilizzo delle tabelle per il moto isentropico. Si calcoli inoltre la spinta dinamica dell'ugello.**

Dalle tabelle per il moto isentropico è possibile ricavare i rapporti $\frac{A_1}{A^*}$, $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{T_1}{T_0}$, $\frac{\rho_1}{\rho_0}$. Noti tali rapporti si risale ai valori di $p_0$ e $T_0$, necessari per il calcolo della portata tramite la relazione (10.10):

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0}\psi^*$$

Si calcola dunque il valore del numero di Mach nella sezione d'ingresso e con questo valore si entra in tabella:

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} = 0.711$$

Dalle tabelle si ricavano i rapporti suddetti:

$$\frac{A_1}{A^*} = 1.087$$

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.714$$

$$\frac{T_1}{T_0} = 0.908$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = 0.786$$

Si passa adesso al calcolo della portata essendo noti

$$p_0 = \frac{p_0}{p_1} p_1 = \frac{1}{0.714} \cdot 7 = 9.804 atm$$

$$T_0 = \frac{T_0}{T_1} \cdot T_1 = 366.6K$$

$$\dot{m} = \frac{9.804 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0.81}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 366.6}} = 2.097 kg/s$$

Per il calcolo della spinta sono necessari i valori della sezione, della densità e della velocità nelle sezioni d'ingresso e d'uscita, essendo

$$S = A_1\left(\rho_1 V_1^2 + p_1\right) - A_2\left(\rho_2 V_2^2 + p_2\right)$$

Noto il valore di $A^* = A_2$, poiché l'ugello è strozzato, come precedentemente visto, si ricava $A_1$ dal primo dei rapporti trovati sulle tabelle:

$$A_1 = \frac{A_1}{A^*} \cdot A^* = 10.87 cm^2$$

analogamente si avranno:

$\frac{p_2}{p_0} = 0.5283$, essendo l'ugello strozzato e dunque $p^* = p_2$

$\frac{T_2}{T_0} = 0.833$ per lo stesso motivo (si vedano infatti le (10.1) e (10.3)).

Da questi rapporti si ricavano:

$$p_2 = \frac{p_2}{p_0} p_0 = 5.180 atm$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} T_0 = 305.4K$$

Per il calcolo di $\rho_1$ e $\rho_2$ si può ricorrere all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 0.742 kg/m^3$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 5.986 kg/m^3$$

Infine si passa al calcolo di $V_2$, che sarà:

$$V_2 = M_2 \cdot \sqrt{\gamma R T_2} = 1 \cdot \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 305.5} = 350.3 m/s$$

Si può adesso calcolare la spinta, che risulta essere:

$$S = 56.41N$$

**5. Si consideri un ugello convergente con sezione d'ingresso pari ad $A_1 = 2mm^2$; siano note le condizioni all'ingresso: $T_1 = 30°C$, $p_1 = 1.75*10^5 Pa$, ed il numero di Mach nella stessa sezione: $M_1 = 0.2$. E' inoltre noto il rapporto fra le aree $\frac{A_1}{A_2} = 2$. Come fluido si consideri aria ($\gamma = 1.4$, $R = 287 J/kgK$). Si calcoli la portata dell'ugello ed il numero di Mach nella sezione di uscita.**

Dalle tabelle relative al moto isentropico, noto il numero di Mach nella sezione d'ingresso $M_1$, si leggono i rapporti fra temperatura e pressione all'ingresso e in condizioni di ristagno, nonché il rapporto fra sezione d'ingresso e sezione critica:

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.9725$$

$$\frac{T_1}{T_0} = 0.992$$

$$\frac{A_1}{A^*} = 2.963$$

Da tali rapporti risultano immediatamente:

$$p_0 = \frac{p_0}{p_1} p_1 = \frac{1}{0.9725} 175 = 179.9 kPa$$

$$T_0 = \frac{T_0}{T_1} T_1 = \frac{1}{0.992} 303 = 305.4 K$$

$$A^* = \frac{A^*}{A_1} A_1 = 0.675 mm^2$$

Essendo il rapporto fra l'area d'ingresso e l'area critica maggiore del rapporto fra le aree d'ingresso e di uscita, si deduce che il funzionamento dell'ugello non è strozzato e non si raggiungono mai le condizioni critiche.

Si calcola di seguito il valore della portata utilizzando l'area critica fittizia:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0} \psi^* = \frac{179.9 \cdot 10^3 \cdot 0.675 \cdot 10^{-6} \cdot 0.81}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 305.4}} = 2.81 \cdot 10^{-4} kg/s$$

Per quanto riguarda il calcolo del numero di Mach nella sezione di uscita, questo è calcolabile a partire dal valore del rapporto fra l'area di gola e l'area critica: entrando con tale valore nelle tabelle relative al moto isentropico, si legge il valore di $M_2$.

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1} \frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{2} \cdot 2.963 = 1.482$$

$M_2 = 0.437$

**6. Si consideri un ugello convergente che scarica in aria a pressione ambiente, $p_a = 1 atm$. Siano note le grandezze di ristagno $p_0 = 2 atm$, $T_0 = 30°C$ e la sezione d'ingresso dell'ugello, $A_1 = 2mm^2$. Sia inoltre noto il rapporto fra l'area d'ingresso e l'area di gola, $\frac{A_1}{A_2} = 2$. Sono richieste le condizioni all'ingresso dell'ugello.**

Innanzitutto si calcoli il rapporto fra la pressione ambiente e la pressione di ristagno per determinare la curva di funzionamento dell'ugello.

$\frac{p_a}{p_o}$=0.5

poiché il rapporto fra le due pressioni è minore di 0.5283, il funzionamento dell'ugello è strozzato e si raggiungono le condizioni critiche in gola:

$A^* = A_2 = 1mm^2$

Il calcolo della portata è effettuabile a tramite la (10.10)

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0}\psi^* = \frac{2 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 0.81}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 303}} = 4.7 \cdot 10^{-4}\ kg/s$$

Essendo l'ugello strozzato si avrà $M_2 = 1$.

Per il calcolo delle grandezze all'ingresso dell'ugello si possono utilizzare i rapporti ricavabili dalle tabelle per il moto isentropico una volta noto il valore di $M_1$. Tale valore si ricava entrando nelle suddette tabelle con il rapporto $\frac{A_1}{A^*}$ = 2. Si ricavano dunque:

$M_1 = 0.306$

$\frac{p_1}{p_0} = 0.937$

$\frac{T_1}{T_0} = 0.9816$

Da questi rapporti si calcolano i valori richiesti:

$$p_1 = \frac{p_1}{p_0} p_0 = 1.874atm$$

$$T_1 = \frac{T_1}{T_0} T_0 = 297.4K$$

Supponiamo adesso che $p_0$ sia più bassa, ad esempio si abbia $p_0 = 1.4atm$.

Si calcola il rapporto tra la pressione ambiente e quella di ristagno, $\frac{p_a}{p_o}$ = 0.7143. Il funzionamento non è strozzato e vale la condizione di Kutta, dunque $p_2 = p_a$. Con il valore del rapporto fra la pressione di uscita e la pressione di ristagno si entra nelle tabelle relative al moto isentropico e si ricava il valore del numero di Mach all'uscita:

$M_2 = 0.7103$

Con tale valore si può ricavare, dalle tabelle di cui sopra, il valore del rapporto $A_2 / A^*$ e da tale rapporto si può ricavare la sezione critica, necessaria per il calcolo della portata.

$\frac{A_2}{A^*} = 1.084$

$A^* = 0.92mm^2$

La portata si calcola mediante la:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{a_0}\psi^* = \frac{1.4 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.92 \cdot 10^{-6} \cdot 0.81}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 303}} = 3.03 * 10^{-4} kg/s$$

Per il calcolo di $M_1$ ci si serve ancora delle tabelle, utilizzando come valore di ingresso il rapporto $\frac{A_1}{A^*}$. Si avrà dunque:

$\frac{A_1}{A^*} = 2.174$

$M_1 = 0.2787$

$$p_1 = \frac{p_1}{p_0} p_0 = 0.9474 \cdot 1.4 \cdot 1.013 \cdot 10^5 = 1.343 \cdot 10^5 Pa$$

$$T_1 = \frac{T_1}{T_0} T_0 = 0.9847 \cdot 303 = 298.4 K$$

Si supponga adesso che la pressione di ristagno sia ancora più bassa, ad esempio si abbia $p_0 = 15 mm_{H2Orel}$. Si inizi col convertire il valore dato in Pascal: si avrà:

$$p_{0rel} = \rho g H = 1000\, kg/m^3 \cdot 9.81\, m/s^2 \cdot 15 \cdot 10^{-3}\, m = 147.1 kg/ms^2$$

Adesso possiamo passare al valore assoluto di $p_0 = 1.013*10^5+147.1 = 1.014*10^5 Pa$

Il rapporto fra la pressione ambiente e la pressione di ristagno è in questo caso:

$$\frac{p_a}{p_o} = 0.999$$

Essendo tale rapporto $\cong 1$, si ha $M^2 << 1$, quindi il moto può essere considerato incompressibile; risulta dunque conveniente utilizzare il teorema di Bernoulli nella sua formulazione incompressibile per il calcolo della velocità, in quanto l'utilizzo delle tabelle per il moto isentropico condurrebbe ad un errore non trascurabile.

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 147.1}{1.166}} = 15.88 m/s$$

dove il calcolo della densità è stato effettuato alla pressione $p_0$, $\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{1.014 \cdot 10^5}{287 \cdot 303} = 1.166 kg/m^3$, essendo piccola la differenza fra la pressione di ristagno e la pressione ambiente. Si sottolinea che la densità deve essere calcolata alla temperatura di ristagno, in quanto la temperatura dell'ambiente in cui scarica l'ugello non influenza in alcun modo il fenomeno di efflusso.

Si può adesso procedere al calcolo della portata mediante la relazione:

$$\dot{m} = \rho_0 V_2 A_2 = 18.52 kg/s$$