MOTO ALLA FANNO – Es. 1

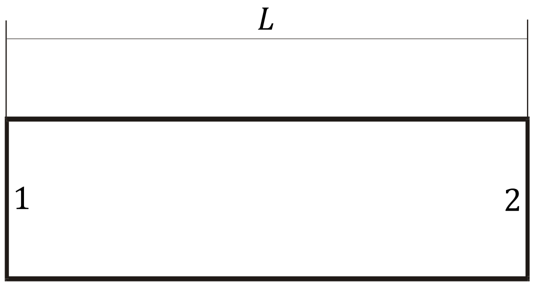
All'ingresso di un condotto che può essere modellato con il modello di moto alla Fanno le condizioni sono:

$$M_1 = 0.2 \qquad p_1 = 200 \cdot kPa \qquad T_1 = 300 \cdot K$$

Se le caratteristiche geometriche sono:

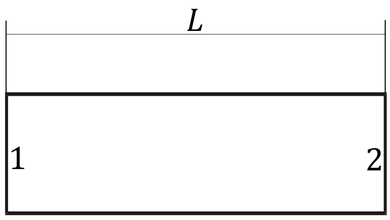
$$L = 50 \cdot m \qquad D = 0.1 \cdot m \qquad f = 0.005$$

determinare le condizioni termofluidodinamiche all'uscita del condotto e la caduta di pressione di ristagno.



$$M_1 = 0.2 \qquad p_1 = 200 \cdot kPa \qquad T_1 = 300 \cdot K$$

$$L = 50 \cdot m \qquad D = 0.1 \cdot m \qquad f = 0.005$$



Noto il numero di Mach nella sezione 1 è possibile, utilizzando le tabelle (ISO), calcolare le condizioni di ristagno:

$$M_1 = 0.2 \xrightarrow{\text{ISO}} \quad \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.973 \qquad p_{0_1} = \frac{p_{o1}}{p_1} p_1 = \frac{200}{0.973} = 206 \cdot kPa$$

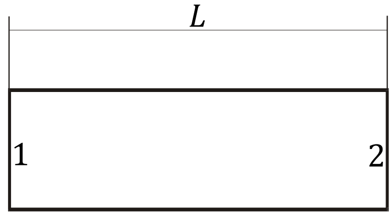
$$\frac{T_1}{T_{0_1}} = 0.992 \qquad T_{0_1} = \frac{T_{o1}}{T_1} T_1 = \frac{300}{0.992} = 302 \cdot K$$

Dalle tabelle del moto alla Fanno (FF) è possibile ricavare le condizioni critiche:

$$M_1 = 0.2 \xrightarrow{\text{FF}} \quad F_1^* = \frac{4 f L_1^*}{D} = 14.53 \qquad \frac{T_1}{T^*} = 1.190$$

$$\frac{p_1}{p^*} = 5.46 \qquad \frac{p_{0_1}}{p_0^*} = 2.96$$

Calcoliamo ora il rapporto caratteristico del moto alla Fanno relativo al nostro condotto:



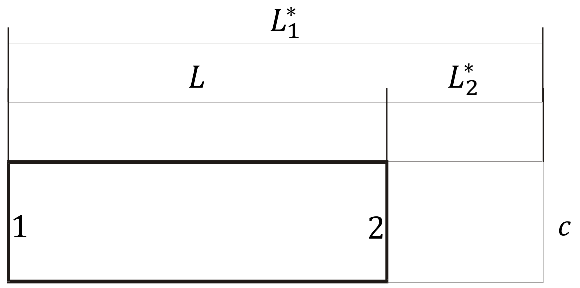
$$F_{12} = \frac{4fL_{12}}{D} = \frac{4 \cdot 0.005 \cdot 50}{0.1} = 10.00$$

Per trovare le condizioni nella sezione 2 è necessario calcolare il rapporto critico relativo alla sezione 2.
Dalla figura sottostante, dove si è indicata la sezione critica fittizia (c), si vede che:

$$L_2^* = L_1^* - L_{12}$$

Poiché, in questo caso, si suppone che f sia costante si ha anche che:

$$F_2^* = F_1^* - F_{12} = 14.53 - 10 = 4.53$$



Dalle tabelle (FF) si possono trovare i rapporti caratteristici ed il numero di Mach nella sezione 2:

$$F_2^* = 4.53 \xrightarrow[(M<1)]{\text{FF}} \qquad M_2 = 0.318 \qquad \frac{T_2}{T^*} = 1.176 \qquad \frac{p_2}{p^*} = 3.41 \qquad \frac{p_{0_2}}{p_0^*} = 1.933$$

Le condizioni critiche sono costanti nel moto alla Fanno, quindi:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1} p_1 = \frac{3.41}{5.46} \cdot 200 = 124.9 \cdot kPa$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*}\frac{T^*}{T_1} T_1 = \frac{1.176}{1.190} \cdot 300 = 296 \cdot K$$

$$p_{0_2} = \frac{p_{0_2}}{p_0{}^*}\frac{p_0{}^*}{p_{0_1}} p_{0_1} = \frac{1.933}{2.96} \cdot 206 = 134.5 \cdot kPa$$

$$p_{0_2} - p_{0_1} = 134.5 - 206 = -72 \cdot kPa$$

MOTO ALLA FANNO – Es. 2

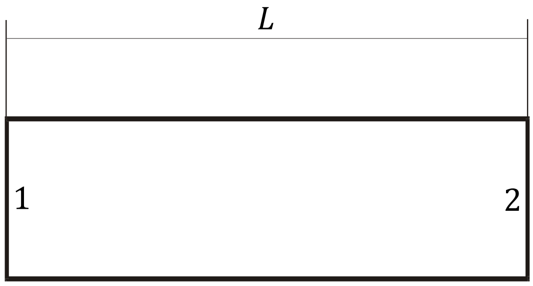
All’uscita di un condotto che può essere modellato con il modello di moto alla Fanno le condizioni sono:

$$M_2 = 0.7 \qquad p_2 = 150 \cdot kPa \qquad T_2 = 300 \cdot K$$

Se le caratteristiche geometriche sono:

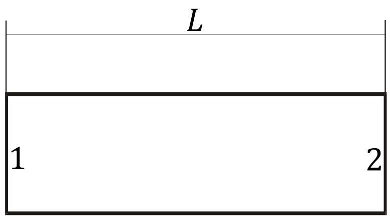
$$L = 25 \cdot m \qquad D = 0.05 \cdot m \qquad f = 0.004$$

determinare le condizioni termofluidodinamiche all’ingresso del condotto e la caduta di pressione di ristagno.



$$M_2 = 0.7 \qquad p_2 = 150 \cdot kPa \qquad T_2 = 300 \cdot K$$

$$L = 25 \cdot m \qquad D = 0.05 \cdot m \qquad f = 0.004$$



Noto il numero di Mach nella sezione 2 è possibile, utilizzando le tabelle (ISO), calcolare le condizioni di ristagno:

$$M_2 = 0.7 \xrightarrow{\text{ISO}} \quad \frac{p_2}{p_{0_2}} = 0.721 \qquad p_{0_2} = \frac{p_{o2}}{p_2} p_2 = \frac{150}{0.721} = 208 \cdot kPa$$

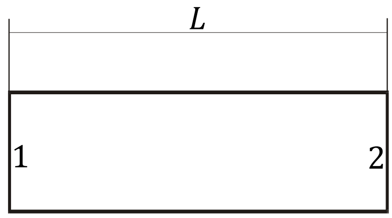
$$\frac{T_2}{T_{0_2}} = 0.911 \qquad T_{0_2} = \frac{T_{o2}}{T_2} T_2 = \frac{300}{0.911} = 329 \cdot \mathrm{K}$$

Dalle tabelle del moto alla Fanno (FF) è possibile ricavare le condizioni critiche:

$$M_2 = 0.7 \xrightarrow{\text{FF}} \quad F_2^* = 0.208 \qquad \frac{T_2}{T^*} = 1.093$$

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.493 \qquad \frac{p_{0_2}}{p_0^*} = 1.094$$

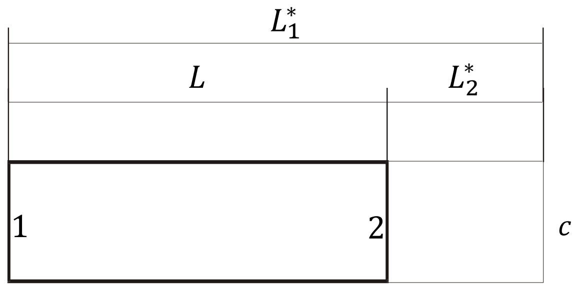
Calcoliamo ora il rapporto caratteristico del moto alla Fanno relativo al nostro condotto:



$$F_{12} = \frac{4fL_{12}}{D} = \frac{4 \cdot 0.004 \cdot 25}{0.05} = \ 8.00$$

Per trovare le condizioni nella sezione 1 è necessario calcolare il rapporto critico relativo alla sezione 1.
Dalla figura sottostante, dove si è indicata la sezione critica fittizia (c), si vede che:

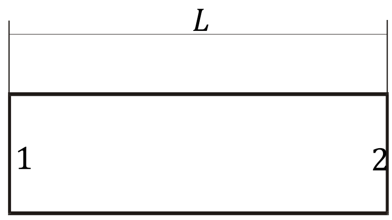
$$L_1^* = L_{12} + L_2^*$$



Poiché, in questo caso, si suppone che f sia costante si ha anche che:

$$F_1^* = F_{12} + F_2^* = 8 + 0.208 = \ 8.21$$

Dalle tabelle (FF) si possono trovare i rapporti caratteristici ed il numero di Mach nella sezione 1:



$$F_1^* = 8.21 \quad \xrightarrow[(M<1)]{\text{FF}} \quad M_1 = \ 0.253 \qquad \frac{T_1}{T^*} = \ 1.185 \qquad \frac{p_1}{p^*} = \ 4.30 \qquad \frac{p_{0_1}}{p_0^*} = 2.37$$

Le condizioni critiche sono costanti nel moto alla Fanno, quindi:

$$p_1 = \frac{p_1}{p^*}\frac{p^*}{p_2}p_2 = \frac{4.30}{1.493} \cdot 150 = \ 432 \cdot kPa$$

$$T_1 = \frac{T_1}{T^*}\frac{T^*}{T_2}T_2 = \frac{1.185}{1.093} \cdot 300 = \ 325 \cdot K$$

$$p_{0_1} = \frac{p_{0_1}}{p_0{}^*}\frac{p_0{}^*}{p_{0_2}}p_{0_2} = \frac{2.37}{1.094} \cdot 208 = \ 451 \cdot kPa$$

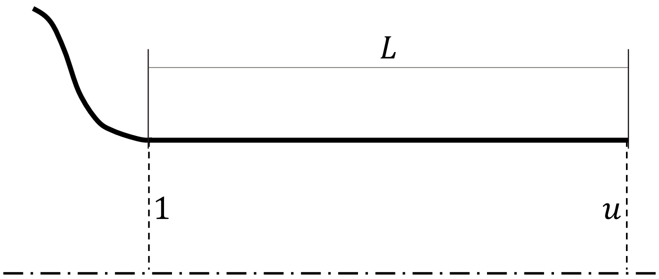
$$p_{0_2} - p_{0_1} = 208 - 451 = -243 \cdot kPa$$

MOTO ALLA FANNO – Es. 3

Un serbatoio è collegato ad un ugello convergente e successivamente ad un condotto adiabatico. Le condizioni di ristagno sono:

$$p_0 = 100 \cdot psi \qquad T_0 = 500 \cdot R$$

Supponendo che il diametro del condotto sia $D = 0.1 \cdot ft$ e $f = 0.0025$, trovare la massima pressione all'uscita che provoca un moto strozzato per una lunghezza del condotto L rispettivamente uguale a: 0 ft, 10 ft e 100 ft. Determinare inoltre la diminuzione percentuale della portata negli ultimi due casi rispetto al primo.



Questo esercizio verrà risolto utilizzando il sistema tecnico anglosassone, ma ad ogni passo si aggiungerà anche la conversione in SI.

A tale proposito si ricorda che:

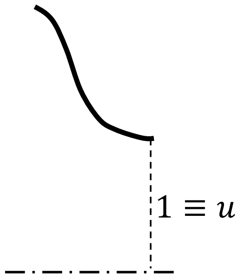
pressioni	$1 \cdot psi = 6.8948 \cdot kPa$	$1\ \text{atm} = 14.696 \cdot psi$		
temperature	$1 \cdot R = 0.556 \cdot K$	$1 \cdot K = 1.8 \cdot R$		
lunghezze	$1 \cdot m = 3.281 \cdot ft$	$1 \cdot ft = 0.3048 \cdot m$	$1 \cdot ft = 12 \cdot in$	$1 \cdot in = 2.54 \cdot cm$

Da cui:

$$p_0 = 100 \cdot psi = 689 \cdot kPa$$

$$T_0 = 500 \cdot R = 278 \cdot K$$

$$R = 287 \cdot \frac{J}{kg \cdot K} = 1716 \frac{ft^2}{s^2 \cdot R}$$



<u>Primo caso:</u> $L = 0\ \text{ft}$

In questo caso abbiamo un ugello semplicemente convergente.

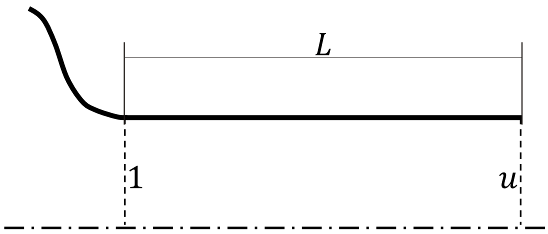
La massima pressione all'uscita per cui il moto risulta strozzato è data dalla pressione critica:

$$p_u = \left(\frac{p^*}{p_0}\right) p_0 = 0.528 \cdot 100 = 52.8 \cdot psi = 364 \cdot kPa$$

Poiché siamo interessati solo alla variazione percentuale della portata, non è necessario calcolare le portate nei tre casi, infatti:

$$\dot{m} = \frac{p_{0_u} A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma\, R\, T_0}} = C\, p_{0_u} \qquad \text{con} \qquad C = \frac{A_u\, \psi^*}{\sqrt{\gamma\, R\, T_0}}$$

Da cui si vede immediatamente che le variazioni percentuali della portata sono proporzionali alle variazioni percentuali della pressione di ristagno all'uscita.



<u>Secondo caso:</u> $L = 10\ \text{ft}$

Anzitutto, calcoliamo il rapporto caratteristico del moto alla Fanno relativo al nostro condotto:

$$F_{12} = \frac{4 f L_{12}}{D} = \frac{4 \cdot 0.0025 \cdot 10}{0.1} = 1.000$$

Poiché siamo interessati al caso in cui la sezione d'uscita sia critica questo rapporto è anche quello critico, quindi dalle tabelle (FF):

$$F_1^* = 1 \xrightarrow[(M<1)]{\text{FF}} \quad M_1 = 0.509 \qquad \frac{p_1}{p^*} = 2.10 \qquad \frac{p_{0_1}}{p_0^*} = 1.323$$

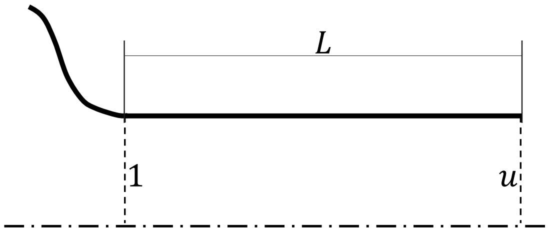
Noto il numero di Mach dalle tabelle (ISO) si può ricavare il rapporto:

$$M_1 = 0.509 \xrightarrow{\text{ISO}} \quad \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.838$$

Da cui: $$p_u = \frac{p_u}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}}\, p_{0_1} = 1 \cdot \frac{1}{2.10} \cdot 0.838 \cdot 100 = 39.9 \cdot psi = 275 \cdot kPa$$

(siccome $p_u = p^*$ e $p_{0_1} = p_0$)

Secondo caso: $L = 10$ ft



Inoltre:

$$p_0^* = \frac{p_0}{\left(\frac{p_{0_1}}{p_0^*}\right)} = \frac{p_0}{1.323} = 75.6 \cdot psi = 521 \cdot kPa$$

Come già detto, la portata è proporzionale alla pressione di ristagno nella sezione critica, che coincide con la sezione d'uscita:

$$\dot{m} = \frac{p_{0_u} A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma\, R\, T_0}} = C\, p_{0_u}$$

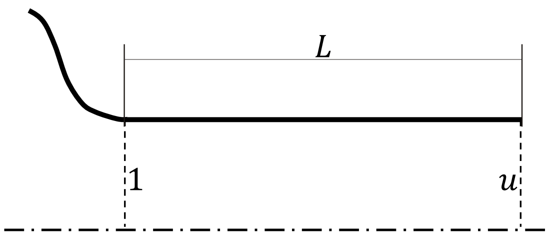
Quindi la variazione percentuale è data da:

$$\Delta\dot{m}\% = \frac{p_{0_u}^{(1)} - p_{0_u}^{(2)}}{p_{0_u}^{(1)}} = \frac{100 - 75.6}{100} = 24.4\%$$

Con $p_{0_u}^{(1)}$ = pressione di ristagno critica (all'uscita) relativa al primo caso ($L = 0$ ft)

$p_{0_u}^{(2)}$ = pressione di ristagno critica (all'uscita) relativa al secondo caso ($L = 10$ ft)

Terzo caso: $L = 100$ ft



Il procedimento è identico al caso precedente. Calcoliamo il rapporto caratteristico del moto alla Fanno:

$$F_{12} = \frac{4 f L_{12}}{D} = \frac{4 \cdot 0.0025 \cdot 100}{0.1} = 10.00$$

Poiché siamo interessati al caso in cui la sezione d'uscita sia critica questo rapporto è anche quello critico, quindi dalle tabelle (FF):

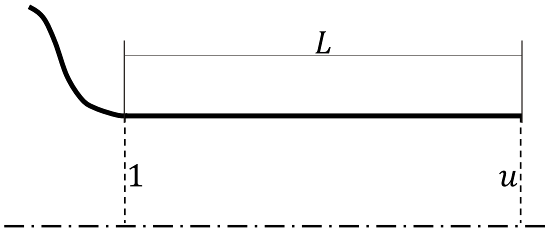
$$F_1^* = 10 \xrightarrow[(M<1)]{\text{FF}} \quad M_1 = 0.234 \qquad \frac{p_1}{p^*} = 4.66 \qquad \frac{p_{0_1}}{p_0^*} = 2.56$$

Noto il numero di Mach dalle tabelle (ISO) si può ricavare il rapporto:

$$M_1 = 0.234 \xrightarrow{\text{ISO}} \quad \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.963$$

Da cui: $$p_u = \frac{p_u}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} p_{0_1} = 1 \cdot \frac{1}{4.66} \cdot 0.963 \cdot 100 = 20.7 \cdot psi = 142.7 \cdot kPa$$

(siccome $p_u = p^*$ e $p_{0_1} = p_0$)



Terzo caso: $L = 100$ ft

Inoltre:

$$p_0^* = \frac{p_0}{\left(\frac{p_{0_1}}{p_0^*}\right)} = \frac{p_0}{2.56} = \quad 39.1 \cdot psi = 270 \cdot kPa$$

Come già detto, la portata è proporzionale alla pressione di ristagno nella sezione critica, che coincide con la sezione d'uscita:

$$\dot{m} = \frac{p_{0_u} A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma\, R\, T_0}} = C\, p_{0_u}$$

Quindi la variazione percentuale è data da:

$$\Delta\dot{m}\% = \frac{p_{0_u}^{(1)} - p_{0_u}^{(3)}}{p_{0_u}^{(1)}} = \frac{100 - 39.1}{100} = \; 60.9\%$$

Con $p_{0_u}^{(1)}$ = pressione di ristagno critica (all'uscita) relativa al primo caso ($L = 0$ ft)

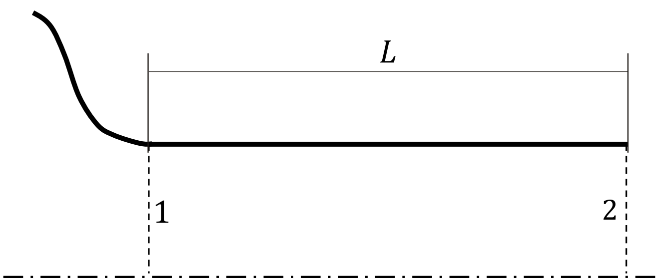
$p_{0_u}^{(3)}$ = pressione di ristagno critica (all'uscita) relativa al terzo caso ($L = 100$ ft)

MOTO ALLA FANNO – Es. 4

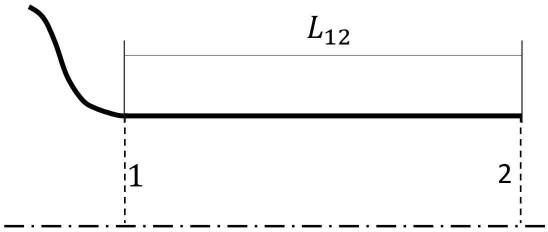
Un serbatoio è collegato ad un ugello convergente e successivamente ad un condotto adiabatico. Le condizioni di ristagno sono:

$p_0 = 1.5 \cdot atm$ $\qquad T_0 = 300 \cdot K$

Supponendo che $D = 0.2 \cdot m$, $L = 4.0 \cdot m$, $f = 0.007$ e $p_a = 1 \cdot atm$, calcolare la pressione nella sezione 1 di ingresso del condotto e la portata.



Calcoliamo il rapporto caratteristico del moto alla Fanno relativo al nostro condotto e il rapporto p_a/p_0:



$$F_{12} = \frac{4fL_{12}}{D} = \frac{4 \cdot 0.007 \cdot 4}{0.2} = 0.560$$

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{1.500} = 0.667$$

Per prima cosa supponiamo che la sezione di uscita sia critica:

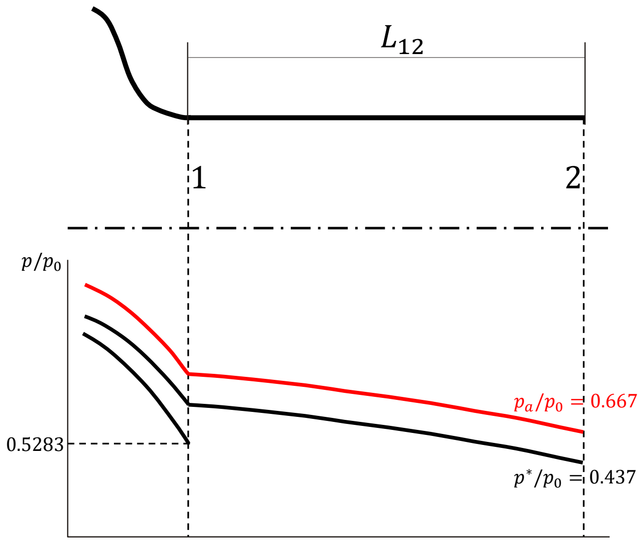
$$F_1^* = F_{12} = 0.560 \xrightarrow[(M<1)]{\text{FF}} M_1 = 0.583 \qquad \frac{p_1}{p^*} = 1.818$$

$$M_1 = 0.583 \xrightarrow{\text{ISO}} \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.794$$

da cui: $$p^* = p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} p_{0_1} = 1 \cdot \frac{1}{1.818} \cdot 0.794 \cdot 1.500 = 0.655 \cdot atm$$

dunque: $$\frac{p^*}{p_0} = \frac{0.655}{1.500} = 0.437$$

$$\frac{p_a}{p_0} = 0.667 \quad > \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.437$$



Quindi il rapporto di pressione è troppo basso; è necessario provare con un altro valore del numero di Mach all'uscita e poi iterare.

Supponiamo che $M_2 = 0.7$.

$$M_2 = 0.7 \xrightarrow{\text{FF}} F_2^* = 0.208 \qquad \frac{p_2}{p^*} = 1.493$$

$$F_1^* = F_{12} + F_2^* = 0.560 + 0.208 = 0.768 \xrightarrow{\text{FF}} \frac{p_1}{p^*} = 1.960 \qquad M_1 = 0.543 \xrightarrow{\text{ISO}} \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.818$$

Infine:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} p_{0_1} = 1.493 \cdot \frac{1}{1.960} \cdot 0.818 \cdot 1.500 = 0.935 \cdot atm \neq 1 \cdot atm \qquad \frac{p_2}{p_0} = 0.623$$

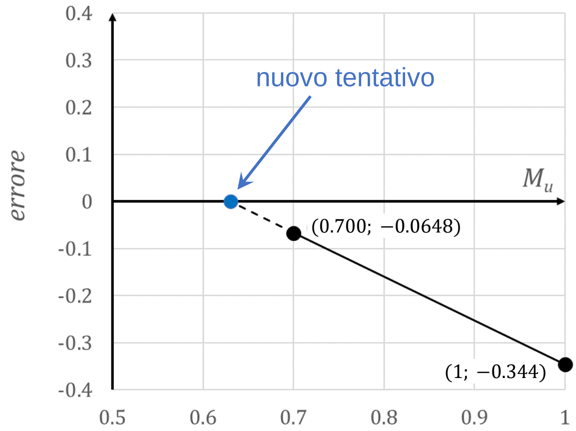
$M_u = 0.7$ non è ancora la soluzione che cerchiamo!

Il nuovo valore di tentativo di M_2 si può calcolare facendo un'interpolazione lineare con il metodo di falsa posizione (*regula falsi*).

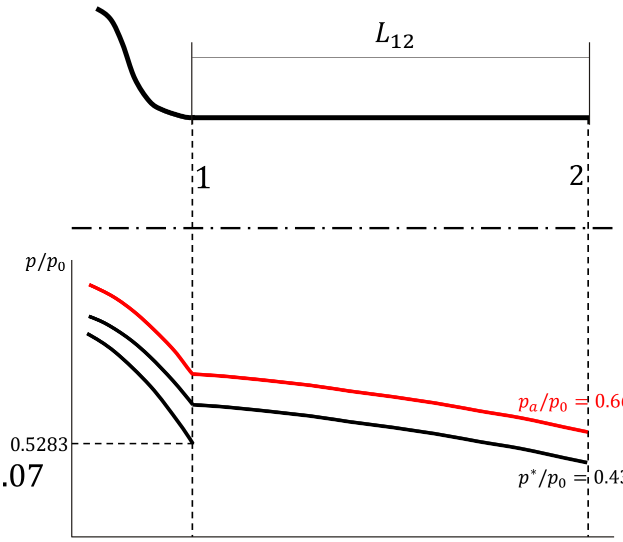
		dalle tabelle (FF) entrando con M_2		$= F_2^* + F_{12}$	dalle tabelle (FF) entrando con F_1^*		da (ISO) con M_1	$p_2 = p_2/p^* \cdot p^*/p_1$ $p_1/p_{0_1} \cdot p_{0_1}$		e
tenta-tivo #	$\boldsymbol{M_2}$	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p^*}}$	$\boldsymbol{F_2^*}$	$\boldsymbol{F_1^*}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p^*}}$	$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p_{0_1}}}$	$\boldsymbol{p_2}$ **(atm)**	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p_0}}$	$\boldsymbol{\frac{p_2 - p_a}{p_a}}$
(1)	1.0	1	0	0.560	1.817	0.583	0.794	0.656	0.437	−0.344
(2)	0.7	1.493	0.208	0.768	1.960	0.543	0.818	0.935	0.623	−0.065

$$M_u^{(3)} = \frac{M_u^{(1)} e^{(2)} - M_u^{(2)} e^{(1)}}{e^{(2)} - e^{(1)}}$$

$$M_u^{(3)} = \frac{1.0 \cdot (-0.065) - 0.7 \cdot (-0.344)}{(-0.065) - (-0.344)} = 0.630$$



$$\frac{p_a}{p_0} = 0.667 \quad > \quad \frac{p_2}{p_0} = 0.623$$



Ripetiamo lo stesso procedimento per il nuovo valore di tentativo appena calcolato: $M_2 = 0.630$.

$$M_2 = 0.630 \xrightarrow{\text{FF}} \quad F_2^* = 0.384 \qquad \frac{p_2}{p^*} = 1.674$$

$$F_1^* = F_{12} + F_2^* = 0.560 + 0.384 = 0.944 \xrightarrow{\text{FF}} \quad \frac{p_1}{p^*} = 2.07 \qquad M_1 = 0.516 \xrightarrow{\text{ISO}} \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.834$$

Infine:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} p_{0_1} = 1.674 \cdot \frac{1}{2.07} \cdot 0.834 \cdot 1.500 = 1.012 \cdot atm \quad \approx 1 \cdot atm \qquad \frac{p_u}{p_0} = 0.675$$

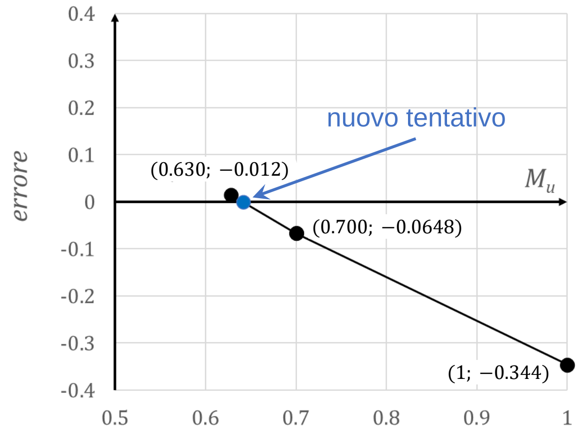
Questo valore della pressione all'uscita differisce del 1.2% rispetto a quello esatto, quindi, nell'ambito di una approssimazione ingegneristica, è corretto fermarsi.
Tuttavia, a scopo didattico si riporta di seguito una successiva iterazione.

$F = 0.560$ $\qquad$ $p_0 = 1.5$ atm $\qquad$ $p_a = 1$ atm

		dalle tabelle (FF) entrando con M_2		$= F_2^* + F_{12}$	dalle tabelle (FF) entrando con F_1^*		da (ISO) con M_1	$p_2 = p_2/p^* \cdot p^*/p_1 \cdot p_1/p_{0_1} \cdot p_{0_1}$		e
tenta-tivo #	$\boldsymbol{M_2}$	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p^*}}$	$\boldsymbol{F_2^*}$	$\boldsymbol{F_1^*}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p^*}}$	$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p_{0_1}}}$	$\boldsymbol{p_2}$ **(atm)**	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p_0}}$	$\boldsymbol{\frac{p_2 - p_a}{p_a}}$
(1)	1.0	1	0	0.560	1.817	0.583	0.794	0.656	0.437	−0.344
(2)	0.7	1.493	0.208	0.768	1.960	0.543	0.818	0.935	0.623	−0.0648
(3)	0.630	1.674	0.384	0.944	2.07	0.516	0.834	1.012	0.675	0.012

$$M_2^{(4)} = \frac{M_2^{(2)} e^{(3)} - M_2^{(3)} e^{(2)}}{e^{(3)} - e^{(2)}}$$

$$M_u^{(4)} = \frac{0.7 \cdot 0.012 - 0.630 \cdot (-0.0648)}{0.012 - (-0.0648)} = 0.641$$



$F = 0.560$ $\qquad$ $p_0 = 1.5$ atm $\qquad$ $p_a = 1$ atm

		dalle tabelle (FF) entrando con M_2		$= F_2^* + F_{12}$	dalle tabelle (FF) entrando con F_1^*		da (ISO) con M_1	$p_2 = p_2/p^* \cdot p^*/p_1 \cdot p_1/p_{0_1} \cdot p_{0_1}$		e
tenta-tivo #	$\boldsymbol{M_2}$	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p^*}}$	$\boldsymbol{F_2^*}$	$\boldsymbol{F_1^*}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p^*}}$	$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{\frac{p_1}{p_{0_1}}}$	$\boldsymbol{p_2}$ **(atm)**	$\boldsymbol{\frac{p_2}{p_0}}$	$\boldsymbol{\frac{p_2 - p_a}{p_a}}$
(1)	1.0	1	0	0.560	1.817	0.583	0.794	0.656	0.437	−0.344
(2)	0.7	1.493	0.208	0.768	1.960	0.543	0.818	0.935	0.623	−0.0648
(3)	0.630	1.673	0.383	0.943	2.07	0.516	0.834	1.012	0.675	0.012
(4)	0.641	1.643	0.350	0.910	2.05	0.521	0.831	0.999	0.666	-0.0010