MOTO ALLA FANNO (1/2)

Un ugello convergente divergente è collegato ad un condotto adiabatico. Supponendo che:

$$p_0 = 160 \cdot kPa \qquad \frac{A_2}{A_1} = 2.4 \qquad f = 0.003 \qquad D = 4 \cdot in = 0.102 \cdot m$$

Determinare, per $L_{34} = 1.5 \cdot m$ e $5 \cdot m$, l'intervallo di pressione ambiente che provoca un urto nel condotto.

$$L_{34} = 1.5\, m \qquad p_{02} = p_0 \qquad F_{34} = \frac{4 \cdot 0.003 \cdot 1.5}{0.102} = 0.1765$$

La pressione ambiente massima che provoca un urto nel condotto è quella che si ha quando l'onda è nella sezione 2 mentre per quella minima l'onda sarà posta nella sezione 4.
Esaminiamo il primo caso. Dal rapporto delle aree, utilizzando le tabelle (**ISO**), si può trovare:

$$\frac{A_2}{A_1} = 2.4 \xrightarrow{\text{ISO}} M_2 = 2.40 \qquad \frac{p_2}{p_{02}} = 6.84 \cdot 10^{-2}$$

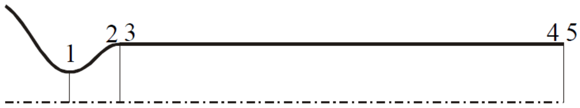
Dal Mach nella sezione 2 si trova (**NSW**):

$$M_2 = 2.40 \xrightarrow{\text{NSW}} M_3 = 0.523 \qquad \frac{p_3}{p_2} = 6.55$$

Dalle tabelle (**FF**), entrando con M_3 si ha:

$$M_3 = 0.523 \xrightarrow{\text{FF}} F_3^* = 0.897 \qquad \frac{p_3}{p^*} = 2.04$$

$$F_3^* = \quad 0.897 \quad > \quad F_{34} = \frac{4fL_{34}}{D} = \quad 0.1765$$



Poiche il rapporto F_3^* è maggiore di quello relativo al condotto il moto, dalla sezione 3 in poi, sarà tutto subsonico. Ora è possibile calcolare il rapporto F_4^* e da questo (**FF**) il numero di Mach all'uscita ed il rapporto di pressione:

$$F_4^* = F_3^* - F_{34} = 0.897 - 0.1765 = \ 0.721$$

Dalle tabelle (**FF**): $\quad M_4 = \ 0.551 \qquad \frac{p_4}{p^*} = \quad 1.930$

Facendo una catena di rapporti si può calcolare la pressione all'uscita del condotto

$$p_4 = \frac{p_4}{p^*}\frac{p^*}{p_3}\frac{p_3}{p_2}\frac{p_2}{p_{02}}p_{02} = \frac{1.930}{2.04}6.55 \cdot 6.84 \cdot 10^{-2} \cdot 160 = 67.8 \cdot kPa$$

Esaminiamo il caso in cui l'onda si trova nella sezione di uscita.
Dal Mach nella sezione 2 si trova (**FF**):

$$M_2 = 2.40 \xrightarrow{\text{FF}} \qquad F_2^* = \quad 0.410 \qquad \frac{p_2}{p_2^*} = \ 0.311$$

Anche in questo caso il rapporto F_2^* è maggiore di quello relativo al condotto quindi il moto sarà supersonico fino alla sezione di uscita dove ci sarà un onda d'urto. Per cui:

$$F_4^* = F_2^* - F_{34} = 0.410 - 0.1765 \qquad F_4^* = 0.234$$

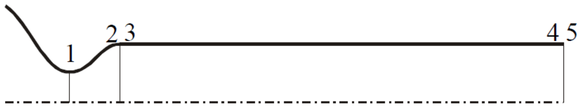
Dalle tabelle (**FF**): $\quad M_4 = \ 1.776 \qquad \frac{p_4}{p^*} = \quad 0.483$ $\qquad$ Dalle tabelle (**NSW**): $\quad \frac{p_5}{p_4} = \quad 3.51$

Facendo una catena di rapporti si può calcolare la pressione all'uscita del condotto

$$p_5 = \frac{p_5}{p_4}\frac{p_4}{p^*}\frac{p^*}{p_2}\frac{p_2}{p_{02}}p_{02} = \ 3.51\frac{0.483}{0.311}6.84 \cdot 10^{-2} \cdot 160 = 59.7 \cdot kPa$$

Ci sarà quindi un onda d'urto nel condotto per una pressione ambiente compresa nell'intervallo $[59.7, 67.8]\ kPa$.

Esaminiamo il caso in cui $L_{34} = 5\ m$. Il rapporto caratteristico vale



$$F_{34} = \frac{4fL_{34}}{D} = \frac{4 \cdot 0.003 \cdot 5}{0.102} = 0.588$$

Poichè questo rapporto è maggiore di quello relativo ad un moto supersonico nel condotto si deve trovare solo il limite superiore per la pressione ambiente, cioè quella che si ha con uno shock nella sezione 2. Per qualsiasi pressione inferiore a questa ci sarà un onda nel condotto.

Il procedimento è analogo a quello già utilizzato nel primo caso ed, in particolare, fino al punto 3 non cambia nulla.

$$F_4^* = F_3^* - F_{34} = 0.897 - 0.588 = 0.309$$

Dalle tabelle (**FF**): $M_4 = 0.656 \qquad \frac{p_4}{p^*} = 1.602$

Facendo una catena di rapporti si può calcolare la pressione all'uscita del condotto

$$p_4 = \frac{p_4}{p^*}\frac{p^*}{p_3}\frac{p_3}{p_2}\frac{p_2}{p_{02}}p_{02} = \frac{1.602}{2.04} 6.55 \cdot 6.84 \cdot 10^{-2} \cdot 160 = 56.3 \cdot kPa$$

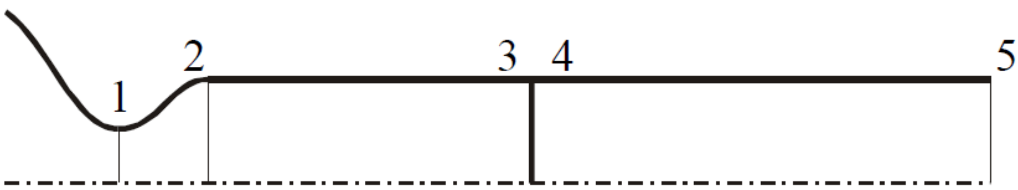
MOTO ALLA FANNO (2/2)

Un ugello convergente divergente è collegato ad un condotto adiabatico. Supponendo che:

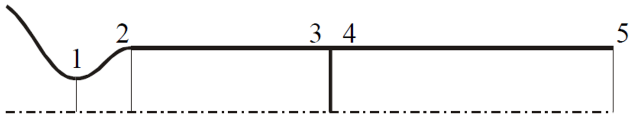
$p_0 = 350 \cdot kPa \qquad p_a = 100 \cdot kPa \qquad \frac{A_2}{A_1} = 2.5 \qquad D = 1 \cdot in = 0.0254 \cdot m$

$f = 0.0025 \qquad L = 1.5 \cdot m$

Determinare la posizione dell'onda d'urto all'interno del condotto.



$L_{25} = 1.5\,m \qquad p_{02} = p_0 \qquad F_{25} = \dfrac{4 \cdot 0.0025 \cdot 1.50}{0.0254} = 0.591$



Dal rapporto delle aree, utilizzando le tabelle (**ISO**), si può trovare il Mach nella sezione 2 e da questo gli altri rapporti caratteristici:

$$M_2 = 2.44 \qquad \frac{p_2}{p_{02}} = 6.43 \cdot 10^{-2}$$

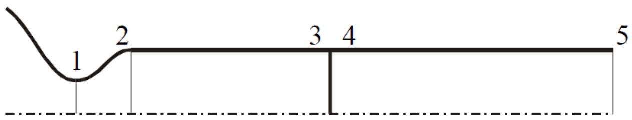
Dalle tabelle (**FF**), entrando con M_2 si ha: $\quad F_2^* = 0.419 \qquad \dfrac{p_2}{p^*} = 0.303$

Da cui:

$$p^* = \frac{p^*}{p_2}\frac{p_2}{p_{02}}p_{02} = \frac{6.43 \cdot 10^{-2}}{0.303}350 = 74.3 \cdot kPa \quad < \quad p_a$$

Poiché il condotto è più lungo della lunghezza critica in regime supersonico l'uscita potrà essere al più sonica, però la pressione critica è minore di quella ambiente quindi l'uscita dovrà essere strettamente subsonica.

Dato che il testo dell'esercizio ci indica che l'onda si trova all'interno del condotto iniziamo a supporre che si trovi a $L_{23}/D = 10$. Quindi:



$$F_{23} = 4fL_{23}/D = 4 \cdot 0.0025 \cdot 10 = 0.1000$$

$$F_3^* = F_2^* - F_{23} = 0.419 - 0.1000 = 0.319$$

Con questo rapporto, dalle tabelle (**FF**), si ha: $\quad M_3 = 2.05 \qquad \dfrac{p_3}{p^*} = 0.394$

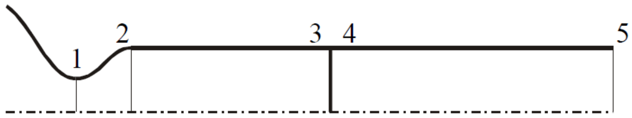
Dalle tabelle (**NSW**), si possono calcolare le condizioni a valle dell'onda:

$$M_4 = 0.569 \qquad \frac{p_4}{p_3} = 4.74$$

Dal numero di Mach si può trovare il punto subsonico della curva di Fanno:

$$F_4^* = 0.628 \qquad \frac{p_4}{p^*} = 1.866$$

Il rapporto di Fanno relativo al segmento 4-5 può essere facilmente calcolato e con questo anche quello critico relativo alla sezione di uscita. Quindi:



$$F_{45} = F_{25} - F_{23} = 0.591 - 0.1000 = \ 0.491$$

$$F_5^* = F_4^* - F_{45} = 0.628 - 0.491 = \ 0.1370$$

Con questo rapporto (F_{c5}), dalle tabelle (**FF**), si ha: $M_5 = \ 0.743$ $\qquad \dfrac{p_5}{p^*} = \ 1.399$

Ora si può calcolare la pressione d'uscita; il modo più naturale sarebbe:

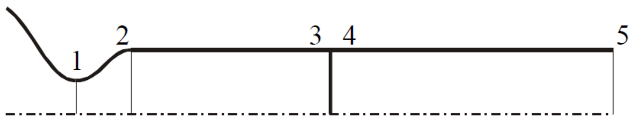
$$p_5 = \frac{p_5}{p^*}\frac{p^*}{p_4}\frac{p_4}{p_3}\frac{p_3}{p^*}p^*$$

Però $\frac{p^*}{p_4}\frac{p_4}{p_3}\frac{p_3}{p^*} = 1$, quindi:

$$p_5 = \frac{p_5}{p^*}p^* = 1.399 \cdot 74.3 = 103.9 \cdot kPa$$

$$e = \frac{p_5 - p_a}{p_a} = \frac{103.9 - 100}{100} = 3.9\%$$

Poichè la pressione all'uscita del condotto è più alta di quella ambiente si deve supporre che l'onda sia più prossima all'uscita, supponiamo quindi $L_{23}/D = 15$. Allora:



$$F_{23} = 4fL_{23}/D = \quad 4 \cdot 0.0025 \cdot 15 = 0.1500$$

$$F_3^* = F_2^* - F_{23} = 0.419 - 0.1500 = 0.269$$

Con questo rapporto, dalle tabelle (**FF**), si ha: $M_3 = \ 1.883$ $\qquad \dfrac{p_3}{p^*} = \ 0.448$

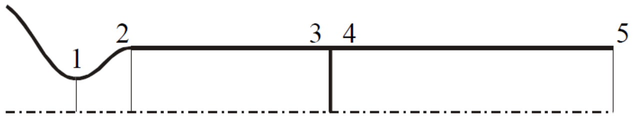
Dalle tabelle (**NSW**), si possono calcolare le condizioni a valle dell'onda:

$$M_4 = \ 0.599 \qquad \frac{p_4}{p_3} = \ 3.97$$

Dal numero di Mach si può trovare il punto subsonico della curva di Fanno:

$$F_4^* = \quad 0.495 \qquad \frac{p_4}{p^*} = \ 1.767$$

Il rapporto di Fanno relativo al segmento 4-5 può essere facilmente calcolato e con questo anche quello critico relativo alla sezione di uscita. Quindi:



$$F_{45} = F_{25} - F_{23} = 0.591 - 0.1500 = 0.441$$

$$F_5^* = F_4^* - F_{45} = 0.495 - 0.441 = \quad 0.054$$

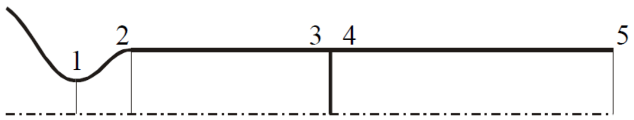
Con questo rapporto (F_5^*), dalle tabelle (**<u>FF</u>**), si ha:

$$M_5 = \ 0.823 \qquad \frac{p_5}{p^*} = \ 1.249$$

Ora si può calcolare la pressione d'uscita:

$$p_5 = \frac{p_5}{p^*} p^* = \ 1.249 \cdot 74.3 = \ 92.8 \cdot kPa \qquad e = \frac{p_5 - p_a}{p_a} = \frac{92.8 - 100}{100} = -7.2\%$$

Utilizzando <u>un'interpolazione lineare</u> si può trovare il prossimo valore di tentativo:



$$\left.\frac{L}{D}\right|^{(3)} = \frac{\left(\left.\frac{L}{D}\right|^{(1)} e^{(2)} - \left.\frac{L}{D}\right|^{(1)} e^{(2)}\right)}{e^{(2)} - e^{(1)}} = \frac{[10(-7.26) - 15(3.9)]}{-7.26 \ - 3.9} = \quad 11.75$$

$$F_{23} = 4fL_{23}/D = \quad 4 \cdot 0.0025 \cdot 11.75 = \quad 0.1175 \longrightarrow F_3^* = F_2^* - F_{23} = 0.419 - 0.1175 = \quad 0.302$$

Con questo rapporto, dalle tabelle (**<u>FF</u>**), si ha: $M_3 = \ 1.990 \qquad \frac{p_3}{p^*} = \ 0.411$

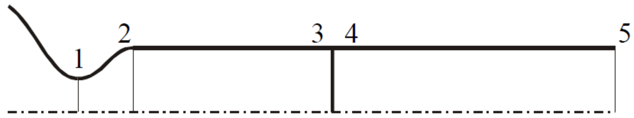
Dalle tabelle (**<u>NSW</u>**), si possono calcolare le condizioni a valle dell'onda:

$$M_4 = \ 0.579 \qquad \frac{p_4}{p_3} = \ 4.45$$

Dal numero di Mach si può trovare il punto subsonico della curva di Fanno:

$$F_4^* = \quad 0.580 \qquad \frac{p_4}{p^*} = \ 1.832$$

Il rapporto di Fanno relativo al segmento 4-5 può essere facilmente calcolato e con questo anche quello critico relativo alla sezione di uscita. Quindi:



$$F_{45} = F_{25} - F_{23} = 0.591 - 0.1175 = \ 0.474$$

$$F_5^* = F_4^* - F_{45} = 0.576 - 0.474 = \ 0.102$$

Con questo rapporto (F_5^*), dalle tabelle (**FF**), si ha:

$$M_5 = \ 0.771 \qquad \frac{p_5}{p^*} = \ 1.344$$

Ora si può calcolare la pressione d'uscita:

$$p_5 = \frac{p_5}{p_c} p^* = 1.344 \cdot 74.3 = 99.9 \cdot kPa$$

Che è praticamente uguale al valore della pressione ambiente.