



Propulsione Aerospaziale

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

Versione del 4.3.2024

Termodinamica

Il fluido all'interno di un motore aerospaziale può essere modellato come un **Gas perfetto**. Le ipotesi fondamentali sono:

- Le forze intermolecolari sono piccole;
- Il volume proprio delle molecole può essere trascurato rispetto al volume occupato dal gas.

In queste ipotesi la prima equazione di stato è:

$$p = \rho RT$$

Dove R è la costante dei gas che può essere espressa in termini della costante universale dei gas:

$$R = \frac{\bar{R}}{MW} \quad \bar{R} = 8314.5 \frac{J}{kmol \cdot K}$$

La seconda equazione di stato è una fra le seguenti:

$$dh = c_p dT \quad de = c_v dT$$

Dove c_p e c_v sono i **calori specifici** a pressione e volume costante, mentre h ed e sono l'**entalpia** e l'**energia** interna ($h = e + pv$).

Termodinamica

In generale:

$$c_p = c_p(T) \quad c_v = c_v(T)$$

Nell'ipotesi di gas **più che perfetto** i calori specifici sono costanti e la seconda equazione di stato può essere espressa come:

$$h = h_0 + c_p T \quad e = e_0 + c_v T$$

Le tre costanti sono legate dalla relazione di Meyer:

$$c_p = c_v + R$$

Il rapporto fra i calori specifici è indicato con:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Si ha anche con $k = \frac{\gamma-1}{\gamma}$:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R = \frac{1}{k} R \quad c_v = \frac{1}{\gamma-1} R$$



Termodinamica

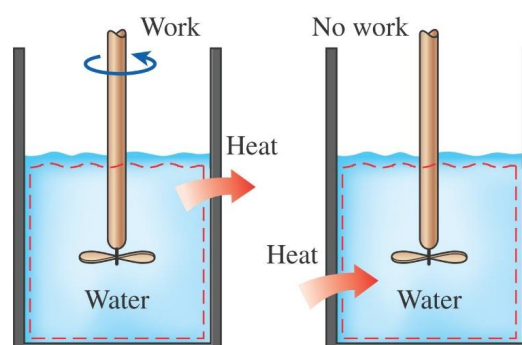
Per un sistema a massa costante, il **primo principio della termodinamica** è:

$$de = \delta q - \delta w$$

Dove per convenzione si considerano positivi il flusso di calore **entrante** δq nel sistema ed il lavoro δw fornito (**uscente**) dal sistema.

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un **verso** nelle trasformazioni termodinamiche.

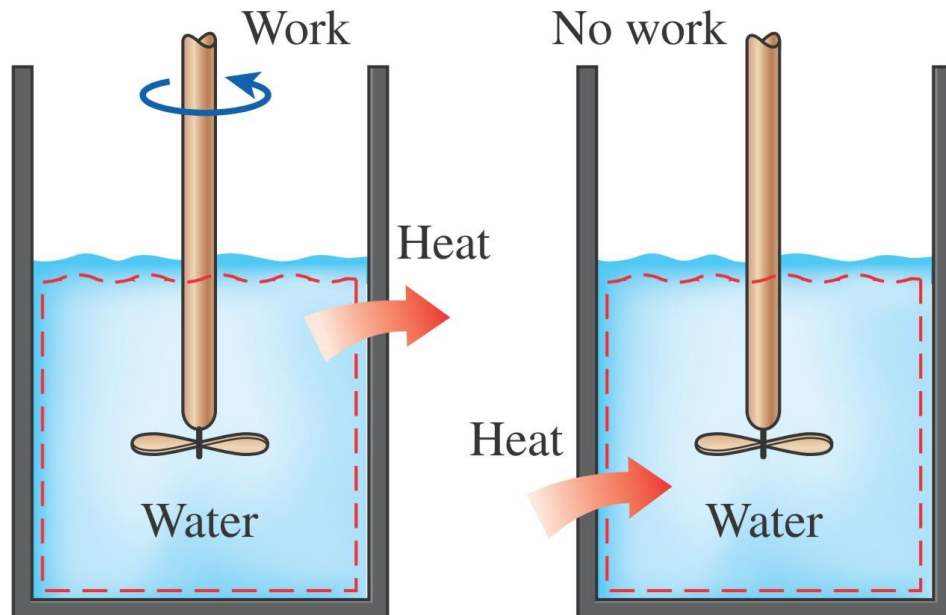
Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.



Termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un verso nelle trasformazioni termodinamiche.

Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.

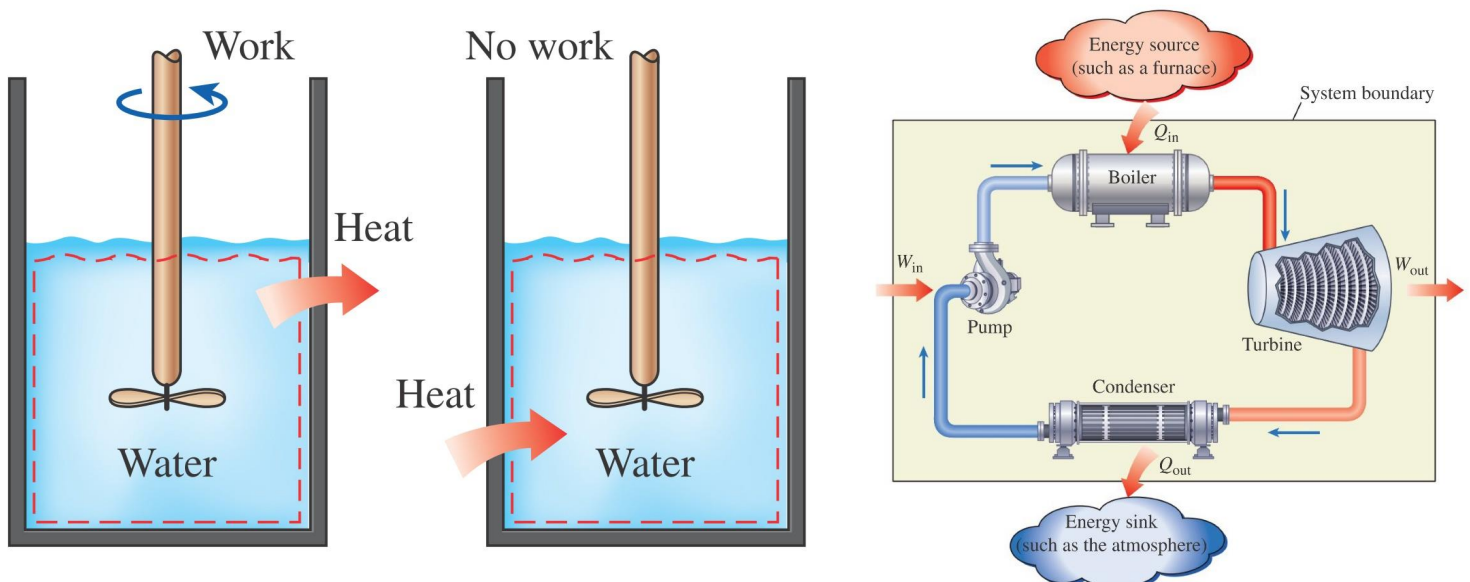


Termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un verso nelle trasformazioni termodinamiche.

Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.

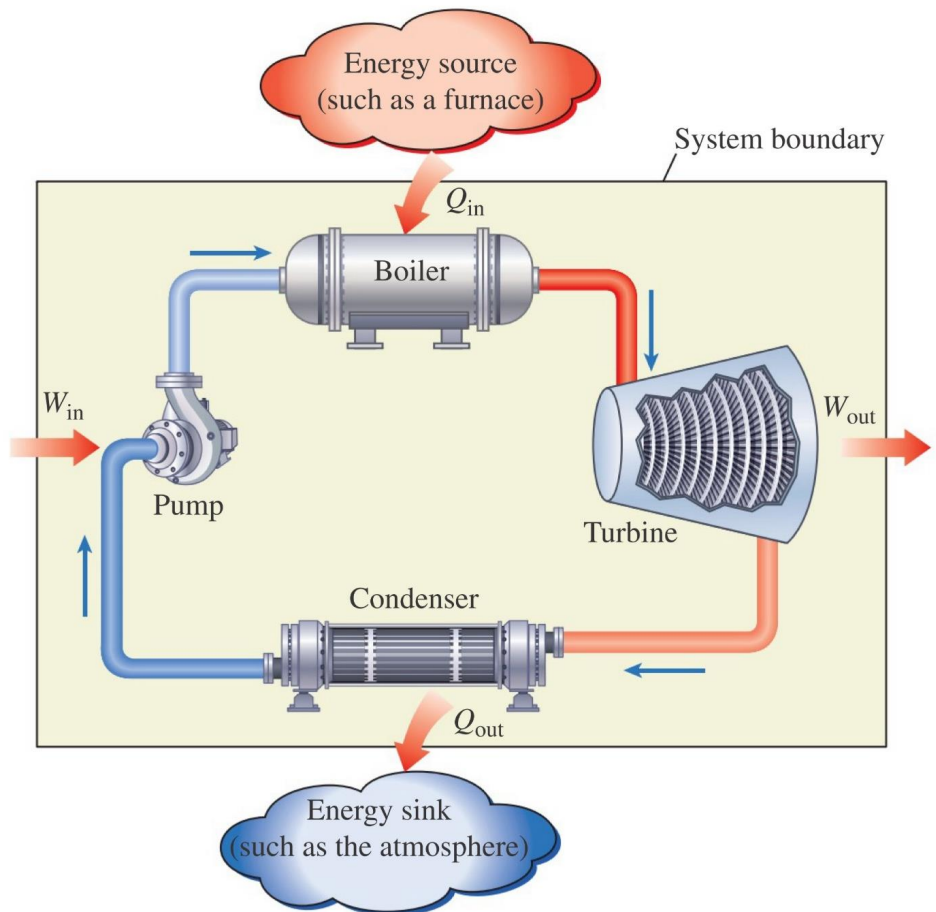
Ad esempio una centrale a vapore è schematizzata in figura.



Termodinamica

L'**evaporatore** trasforma l'acqua in vapore fornendo una certa quantità di **calore** Q_{in} , nella **turbina** viene estratto il **lavoro** W_{out} , nel **condensatore** il vapore **condensa** e nel processo cede il **calore** Q_{out} infine la **pompa** comprime l'acqua fornendo al sistema il **lavoro** W_{in} . Il **lavoro** estratto è dato dalla **differenza** dei due:

$$W_{net} = W_{out} - W_{in}$$

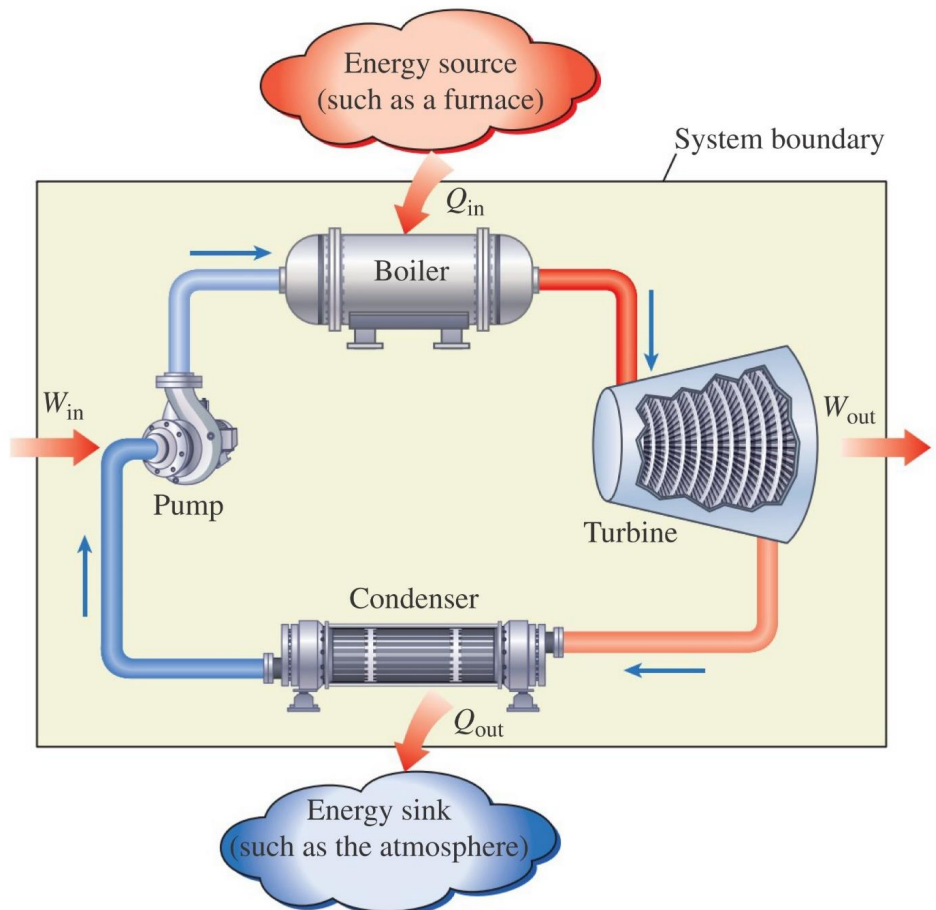


Termodinamica

Nella centrale a vapore l'acqua utilizzata nel **ciclo** è sempre la stessa quindi lo scambio netto di energia, in condizioni **stazionarie**, è nullo.

Pertanto il lavoro può essere calcolato anche come **differenza** della quantità di **calore** scambiato:

$$W_{net} = Q_{in} - Q_{out}$$



Termodinamica

Se una trasformazione è **reversibile**, cioè quando la produzione di entropia è nulla, si ha:

$$dq = Tds \quad dw = pdv$$

L'equazione di **Gibbs** collega le variabili termodinamiche, in termini energetici:

$$de = Tds - pdv$$

Mentre in termini entalpici:

$$dh = Tds + vdp$$

In un processo **isentropico** si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{c_p}{R}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{c_p}{c_v}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

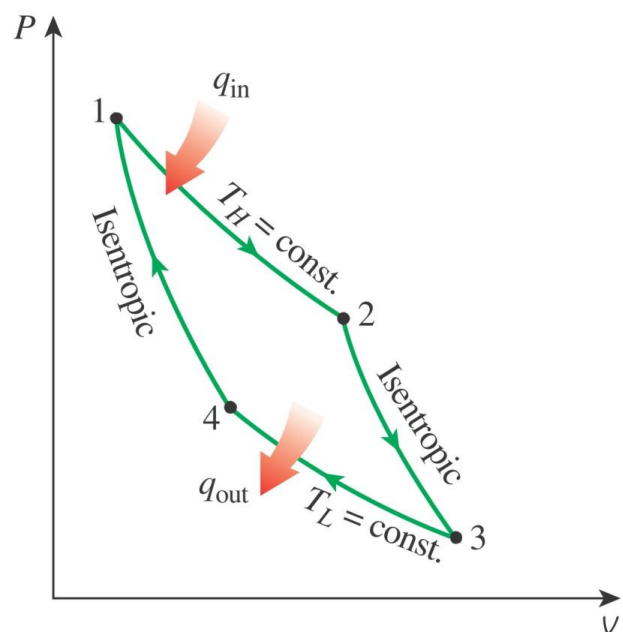
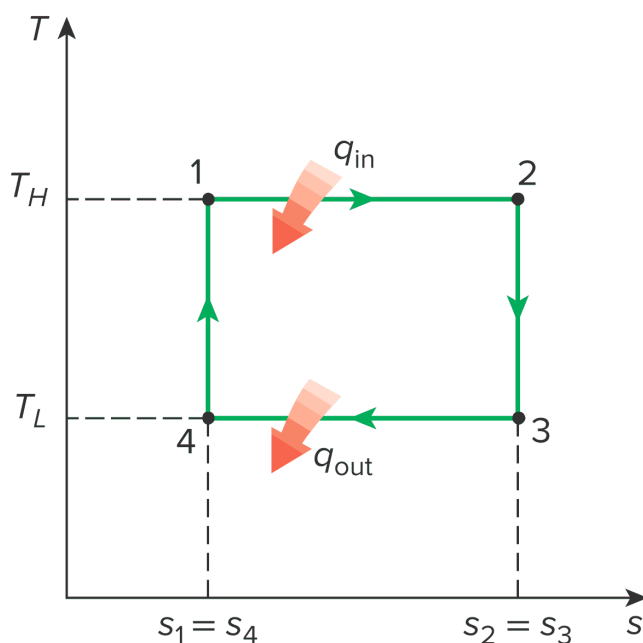
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Termodinamica

EXAMPLE 9–1 Derivation of the Efficiency of the Carnot Cycle

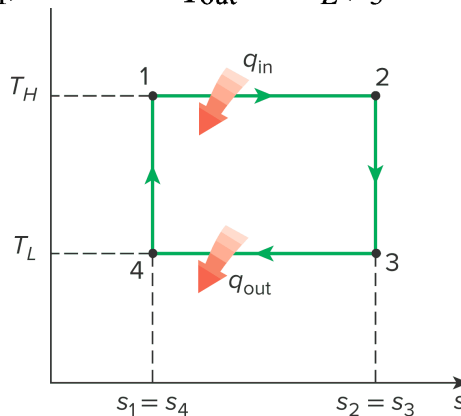
Show that the thermal efficiency of a Carnot cycle operating between the temperature limits of T_H and T_L is solely a function of these two temperatures and is given by Eq. 9–2.



SOLUTION It is to be shown that the efficiency of a Carnot cycle depends on the source and sink temperatures alone.

Analysis The T - s diagram of a Carnot cycle is redrawn in Fig. 9–7. All four processes that comprise the Carnot cycle are reversible, and thus the area under each process curve represents the heat transfer for that process. Heat is transferred to the system during process 1-2 and rejected during process 3-4. Therefore, the amount of heat input and heat output for the cycle can be expressed as

$$q_{\text{in}} = T_H(s_2 - s_1) \quad \text{and} \quad q_{\text{out}} = T_L(s_3 - s_4) = T_L(s_2 - s_1)$$



Termodinamica

SOLUTION It is to be shown that the efficiency of a Carnot cycle depends on the source and sink temperatures alone.

Analysis The T - s diagram of a Carnot cycle is redrawn in Fig. 9–7. All four processes that comprise the Carnot cycle are reversible, and thus the area under each process curve represents the heat transfer for that process. Heat is transferred to the system during process 1-2 and rejected during process 3-4. Therefore, the amount of heat input and heat output for the cycle can be expressed as

$$q_{\text{in}} = T_H(s_2 - s_1) \quad \text{and} \quad q_{\text{out}} = T_L(s_3 - s_4) = T_L(s_2 - s_1)$$

since processes 2-3 and 4-1 are isentropic, and thus $s_2 = s_3$ and $s_4 = s_1$. Substituting these into Eq. 9–1, we see that the thermal efficiency of a Carnot cycle is

$$\eta_{\text{th}} = \frac{w_{\text{net}}}{q_{\text{in}}} = 1 - \frac{q_{\text{out}}}{q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_L(s_2 - s_1)}{T_H(s_2 - s_1)} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$



Equazioni di bilancio

Nel caso di **gas più che perfetto** ricordando la definizione del numero di Mach si ha:

$$h_t = h + \frac{V^2}{2} \quad \rightarrow \quad T_t = T \left(1 + \frac{V^2}{2c_p T} \right) = T \left(1 + \frac{V^2}{2 \frac{c_p}{R} RT} \right)$$

$$= T \left(1 + \frac{V^2}{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} RT} \right) = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{\gamma RT} \right) = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = T\psi$$

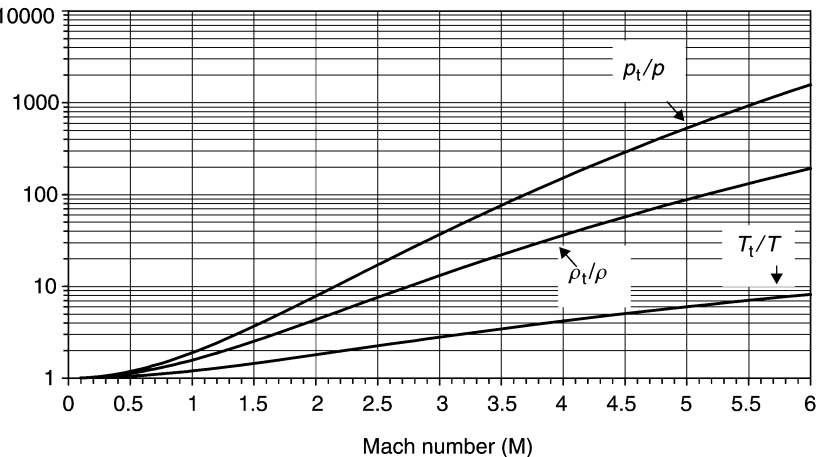
Dove si è introdotta la quantità:

$$\psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Nell'ipotesi di moto isentropico:

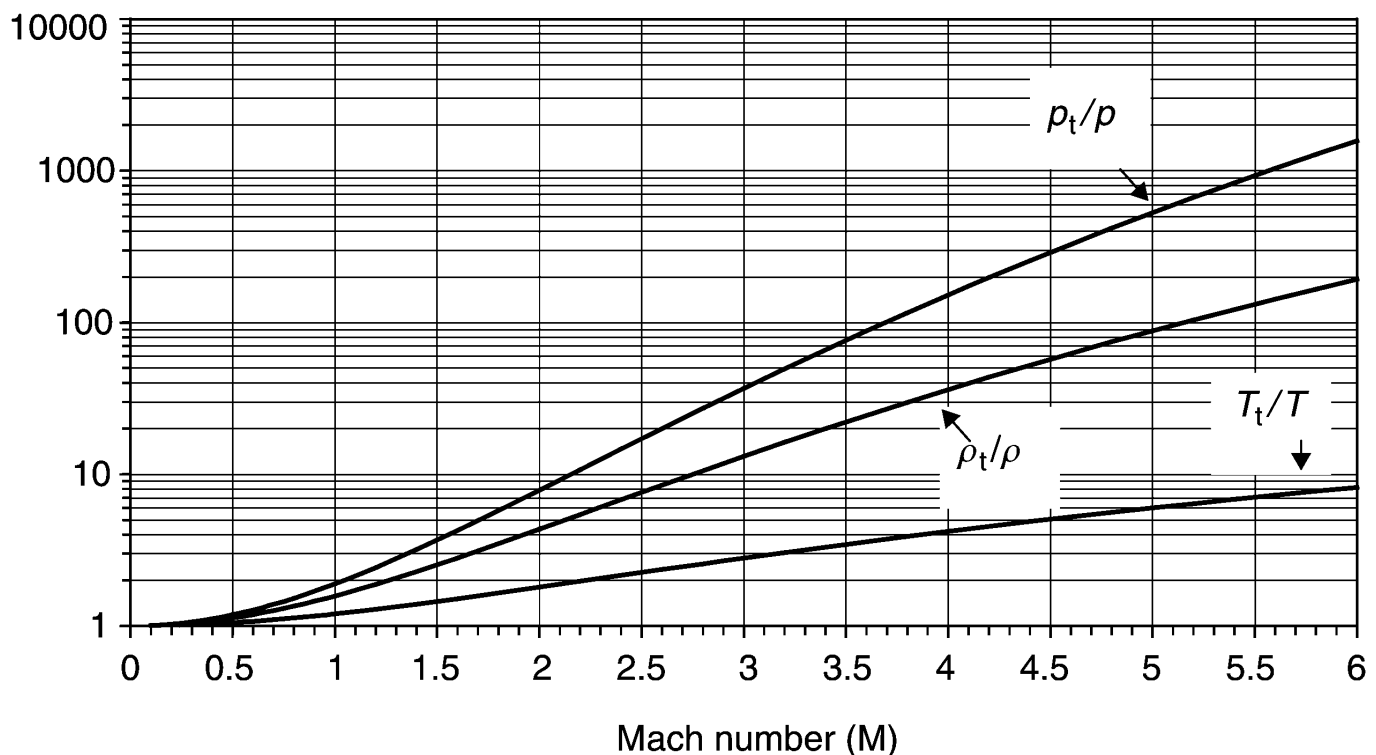
$$\frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Equazioni di bilancio

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \psi \quad \frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}} \quad \frac{\rho_t}{\rho} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Moto quasi unidimensionale

La **portata** in un ugello, nelle ipotesi di moto adiabatico ed isentropico, può essere espressa come:

$$\dot{m} = \rho VA = \frac{p}{RT} MaA = \frac{p}{p_t} p_t M \frac{\sqrt{\gamma RT}}{RT} A = \frac{p}{p_t} p_t M \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma RT_t}} \sqrt{\frac{T_t}{T}} A$$

Ricordando che $\frac{T_t}{T} = \psi$, $\frac{p_t}{p} = \psi^{\frac{1}{k}}$, $k = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ si ha:

$$\dot{m} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{1}{k}} \psi^{\frac{1}{2}} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{2-k}{2k}} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{p_t A}{a_t} \Psi$$

Dove Ψ è il **fattore d'efflusso**. Indicando con $K = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}$ si ha:

$$\Psi(\gamma, M) = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \gamma M \psi^{-K}$$

La **minima area** possibile si ha in condizioni di flusso **critico**, per questo motivo ha senso valutare la portata anche in condizioni critiche.



Moto quasi unidimensionale

Le **condizioni critiche** sono indicate con un **asterisco** si ha quindi :

$$\dot{m} = \frac{p_t A}{a_t} \Psi = \frac{p_t A^*}{a_t} \Psi^* \quad \rightarrow \quad A \Psi = A^* \Psi^* \quad \rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi}$$

Ricordando che $\Psi(\gamma, M) = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$ si ha:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = \frac{\gamma \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-K}}{\gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-K}} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^K$$

A cui si aggiungono le:

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \psi \quad \frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Moto quasi unidimensionior

$$\frac{T}{T_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}$$

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

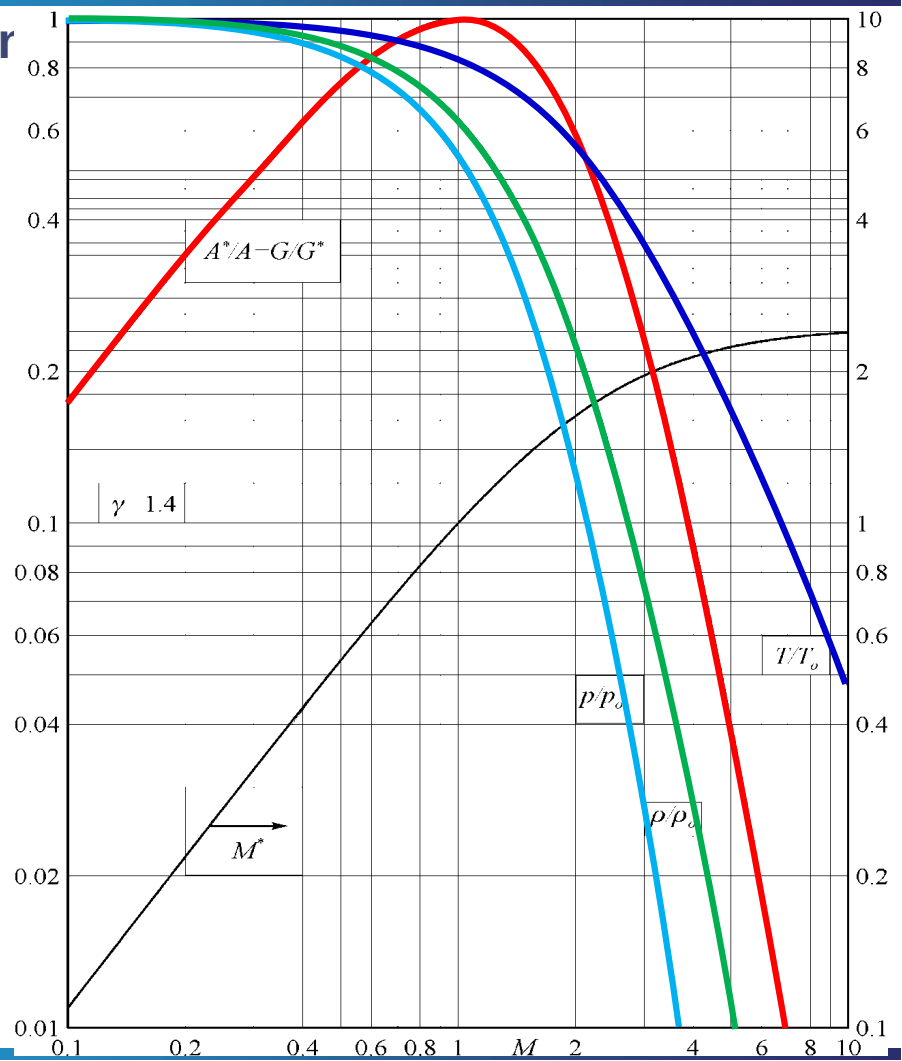
$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \psi \right]^K$$

Tutti i rapporti si leggono sulla scala di **sinistra**,



Propulsione Aerospaziale – PA0_1 Richiami Gas - astarita@unina.it

41



Moto quasi unidimensionale

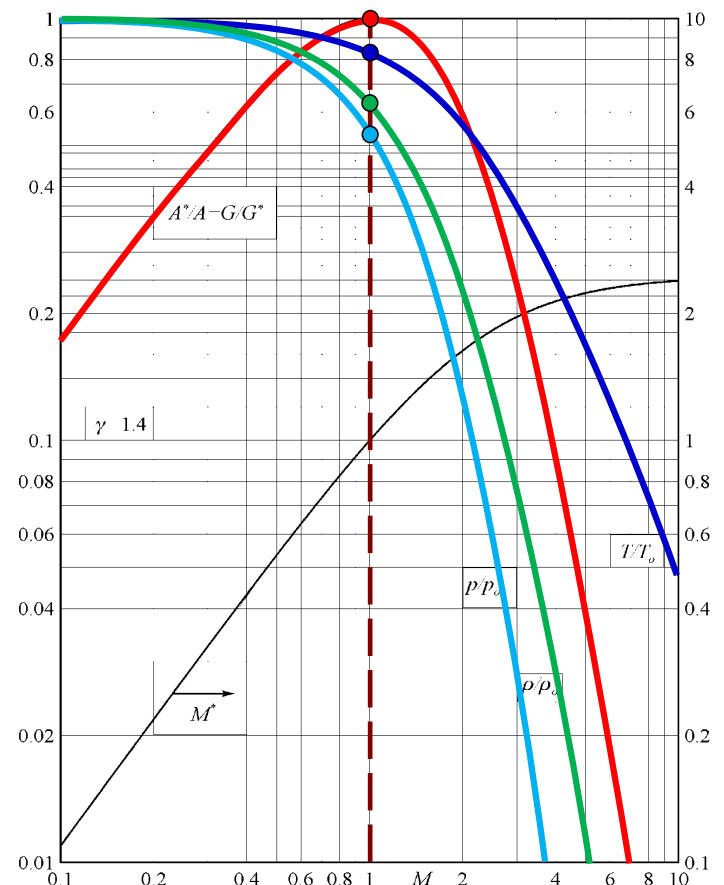
In condizioni critiche si ha:

$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.6339$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = 1$$



Propulsione Aerospaziale – PA0_1 Richiami Gas - astarita@unina.it

42

GasTab (android) - Gas dynamics Tables

gastab $\gamma=1.4$

Iso PM OSW NSW Fanno flow Rayleigh flow

M [0- ∞]
1.400

p/p_t [0-1.000]
0.3142

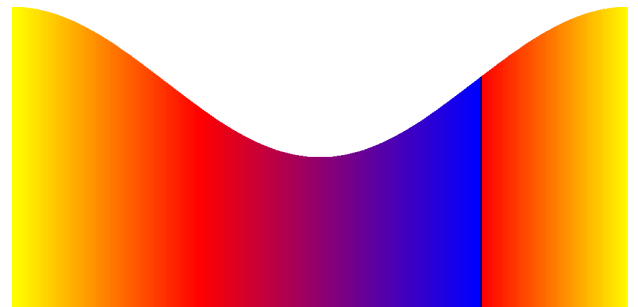
T/T_t [0-1.000]
0.7184

ρ/ρ_t [0-1.000]
0.4374

M* [0-2.449]
1.300

A/A* [1.000- ∞]
1.115

M>1



GasTab (ios-web) - Gas dynamics Tables

<https://pairs.unina.it/astarita/GasTab/>

gastab $\gamma=1.4$

Iso PM OSW NSW Fanno flow Rayleigh flow

M [0- ∞]
1.400

p/p_t [0-1.000]
0.3142

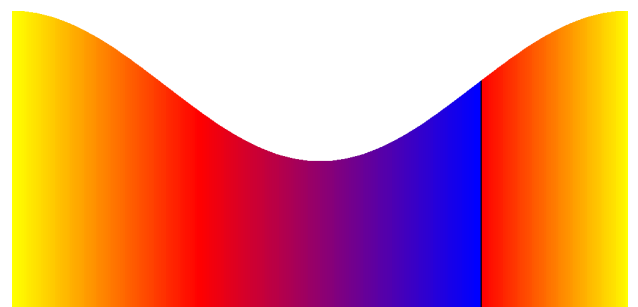
T/T_t [0-1.000]
0.7184

ρ/ρ_t [0-1.000]
0.4374

M* [0-2.449]
1.300

A/A* [1.000- ∞]
1.115

M>1

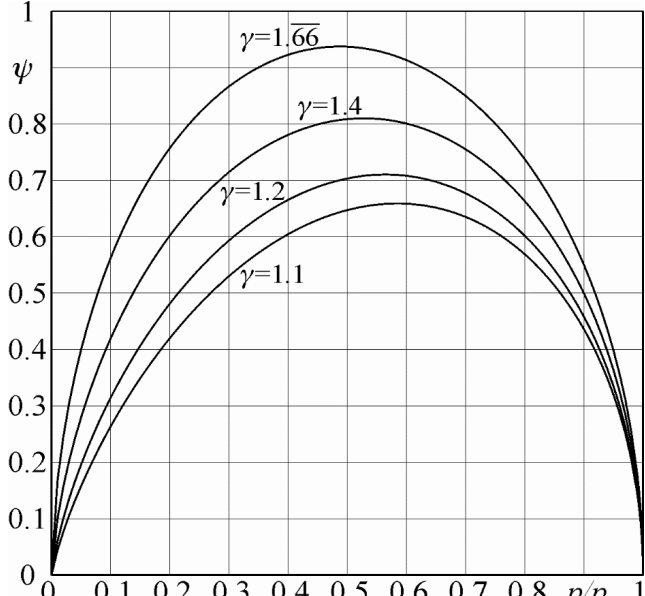


Moto quasi unidimensionale

Utilizzando la:

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \psi^{\frac{1}{\gamma}}$$

Il **fattore d'efflusso** può essere anche espresso come:

$$\psi = \frac{\dot{m} a_t}{p_t A} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{-\gamma}\right]}$$




Moto quasi unidimensionale

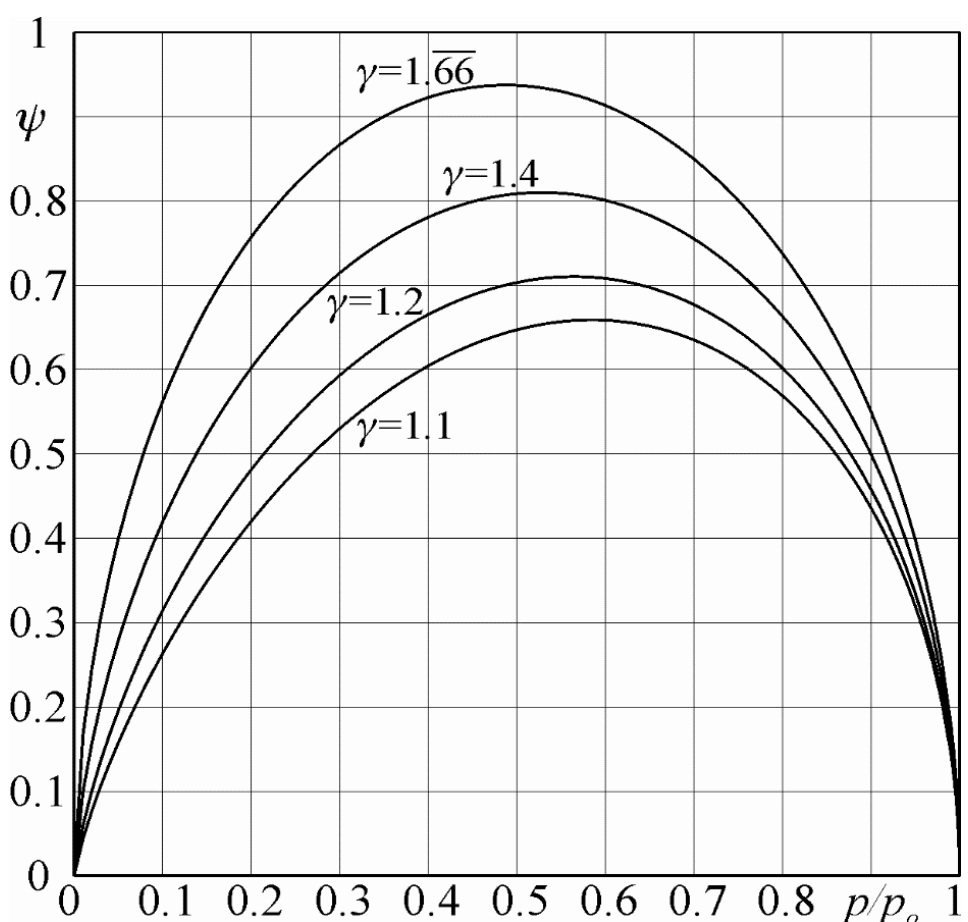
$$\frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Il rapporto fra le pressioni p/p_t è una funzione strettamente decrescente di M .

L'asse x può essere visto anche come un asse **inversamente proporzionale** al **numero di Mach**.

Il massimo di ψ si ha per:

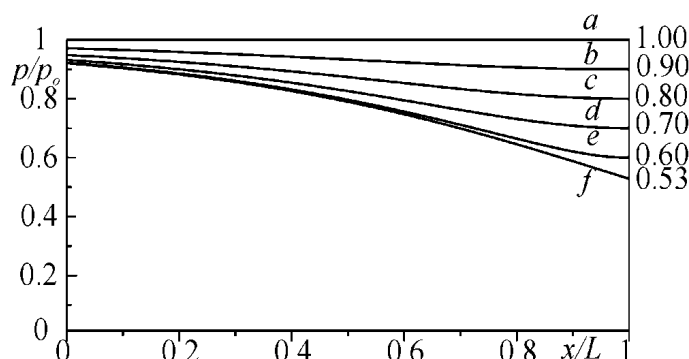
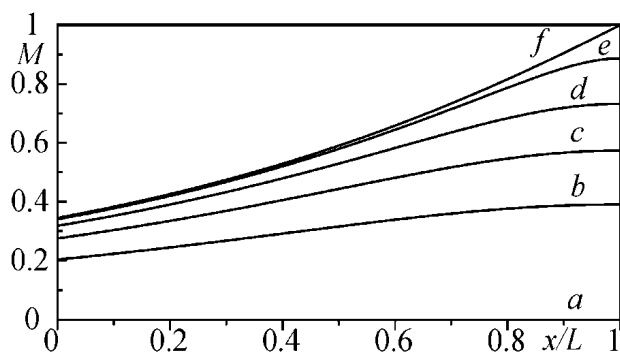
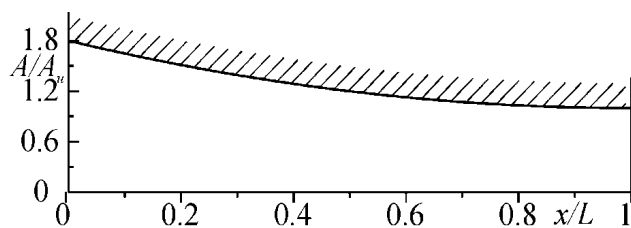
$$\frac{p}{p_t} = \frac{p^*}{p_t}$$



Moto quasi unidimensionale

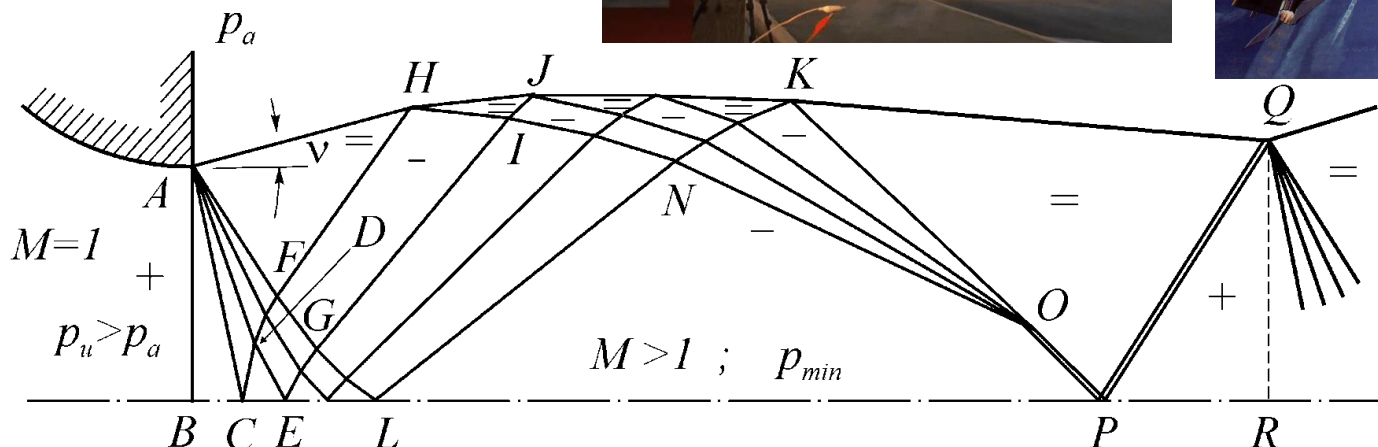
Le **curve di funzionamento** in un ugello convergente sono mostrate in figura. Si hanno **due** tipi di funzionamento:

1. Per rapporti di pressione p_a/p_t compresi tra $p/p_t = p^*/p_t$ e 1 la pressione del fluido all'uscita dell'ugello deve necessariamente essere **uguale** a quella **ambiente**, cioè deve rispettare la cosiddetta **condizione di Kutta** (pressione ambiente = pressione all'uscita).

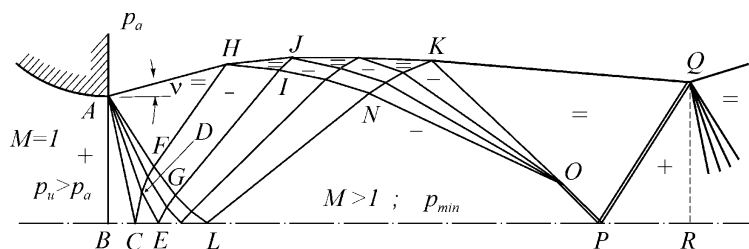


Moto quasi unidimensionale

2. Per rapporti di pressione inferiori a p^*/p_t il moto si dice **strozzato** o **sottoespanso**: la corrente non riesce a **completare** nell'ugello stesso la sua espansione fino alla **pressione ambiente**. Il motivo per cui viene utilizzato l'aggettivo strozzato è dovuto al fatto che se la pressione di ristagno è costante, la **portata di massa** effluente dall'ugello resta **costante** al diminuire della **pressione ambiente** dal valore p^* sino al vuoto più assoluto.

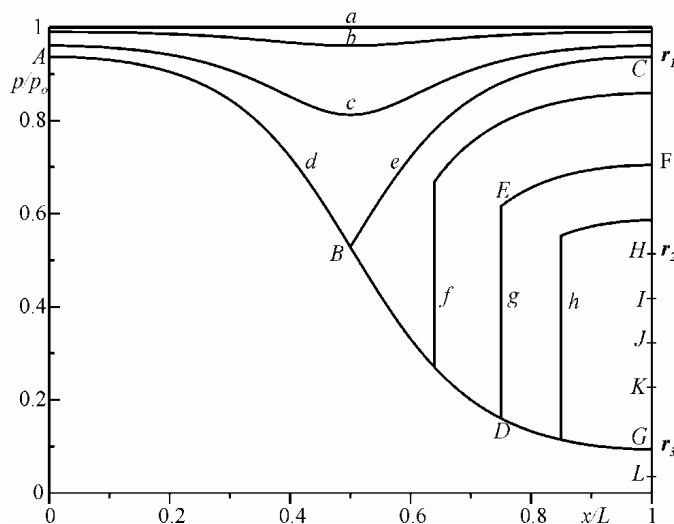
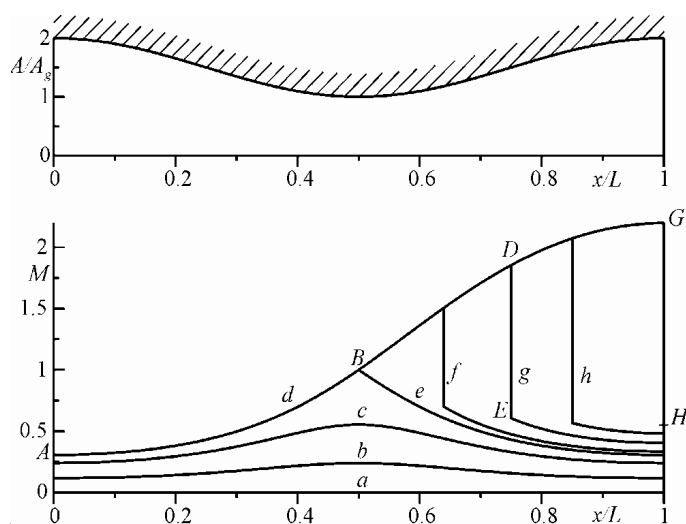


Moto quasi unidimensionale



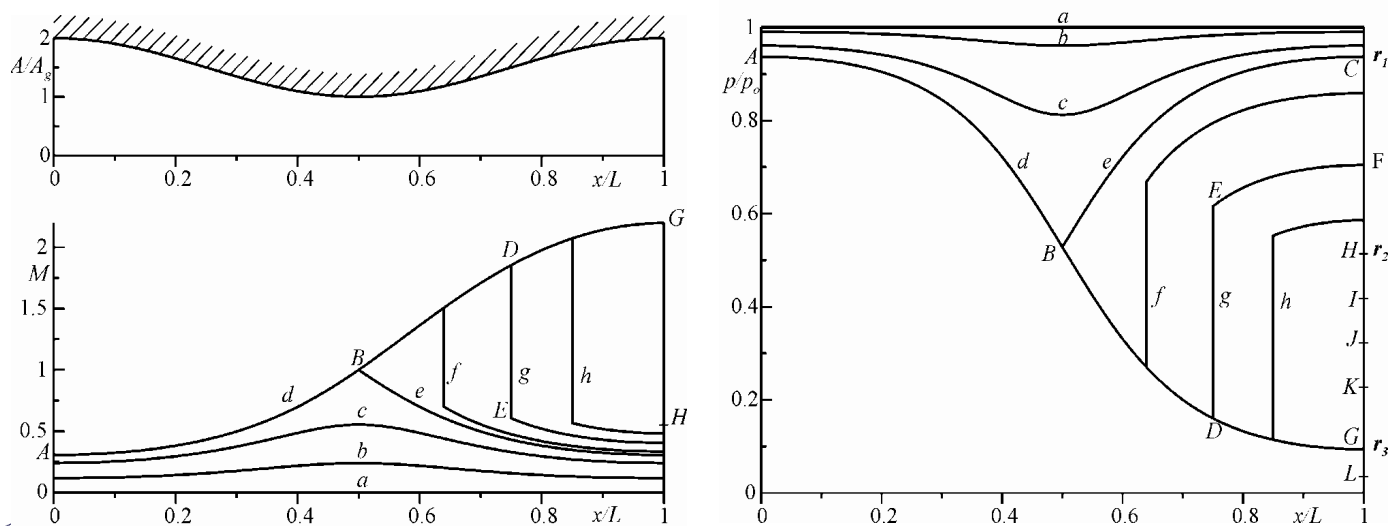
Moto quasi unidimensionale

Le **curve di funzionamento** in un ugello convergente divergente sono mostrate in figura. Si possono definire **tre rapporti di pressione caratteristici** r_1 , r_2 e r_3 e si hanno **quattro** tipi di funzionamento diversi al variare della pressione ambiente.

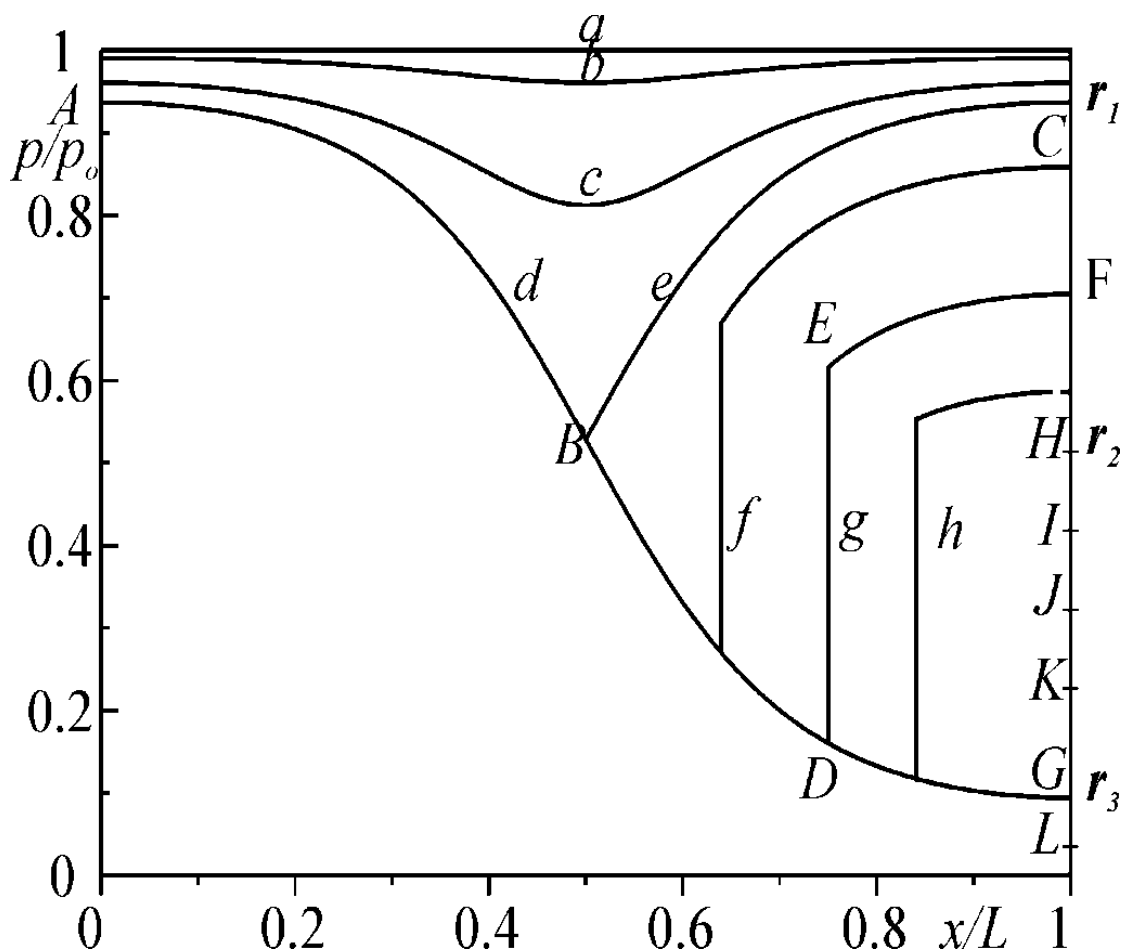


Moto quasi unidimensionale

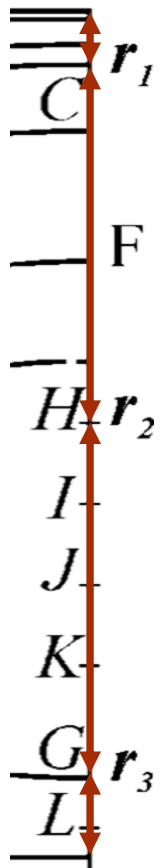
In particolare, il rapporto r_1 è relativo a condizioni di uscita **subsoniche** mentre r_3 a condizioni di uscita **supersoniche**. Il rapporto r_2 si ottiene moltiplicando il rapporto r_3 per il rapporto tra le pressioni statiche a valle e a monte di **un'onda d'urto normale** posta nella sezione di **uscita dell'ugello**. L'onda d'urto avviene ad un numero di Mach corrispondente al punto r_3 (con abuso di simbologia si confonderà il punto con il rapporto caratteristico).



Moto quasi unidimensionale



Moto quasi unidimensionale



Riassumendo:

- $r_1 < p_a/p_t$ - **regime alla Venturi**; la corrente è ovunque **subsonica** nell'ugello con un minimo della pressione (massimo della velocità e del numero di Mach) nella sezione di gola; è **valida** la **condizione di Kutta**.
- $r_2 < p_a/p_t < r_1$ - regime con **onda d'urto** nel **divergente**; la corrente percorre un tratto del divergente in regime **supersonico**, ma, per la presenza dell'onda d'urto, l'efflusso dall'ugello è subsonico; è **valida** la **condizione di Kutta**.
- $r_3 < p_a/p_t < r_2$ - **ugello sovraespanso**; l'efflusso dall'ugello è **supersonico**, la **pressione** nella sezione di **uscita** dell'ugello è **minore** di quella **ambiente**; la corrente si porta alla p_a con un'onda d'urto obliqua esterna; **non** è **valida** la **condizione di Kutta**.
- $p_a/p_t < r_3$ - **ugello sottoespanso**; l'efflusso dall'ugello è **supersonico**, la **pressione** nella sezione di **uscita** dell'ugello è **maggiore** di quella **ambiente**; la corrente continua ad espandere al di fuori dell'ugello fino a p_a con un ventaglio di espansione; **non** è **valida** la **condizione di Kutta**.



Moto quasi unidimensionale

