

## Propulsione Aerospaziale

T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

Versione del 20.5.2024

### Accoppiamento dei componenti

Si deve ora analizzare come **l'interazione** fra i vari **componenti**.

Prima di iniziare l'analisi è necessario introdurre i parametri "**corretti**" del motore. Supponendo di fissare delle condizioni termodinamiche di riferimento ( $p_{ref} = 1atm$  e  $T_{ref} = 15C$ ) si introducono i rapporti per la generica stazione  $i$ :

$$\delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}}$$

Inoltre:

$$\dot{m} = \frac{p_t A \Psi}{\sqrt{\gamma R T_t}}$$

$$\Psi(\gamma, M) = \frac{A^*}{A} \Psi^* = \gamma M \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}} = \gamma M \psi^{-K}$$

$$\psi(\gamma, M) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad K(\gamma) = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}$$



# Accoppiamento dei componenti

La **portata corretta** è:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \frac{\frac{p_{ti} A_i \Psi_i}{\sqrt{\gamma_i R_i T_{ti}} \sqrt{\frac{T_{ti}}{T_{ref}}}}}{\frac{p_{ti}}{p_{ref}}} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i} \propto \Psi_i$$

La **velocità angolare** e la **portata di combustibile** corrette:

$$N_{ci} = N_i / \sqrt{\theta_i} \quad \dot{m}_{cf} = \dot{m}_f \sqrt{\theta_2} / \delta_2$$

La **spinta** ed il **consumo specifico** corretti:

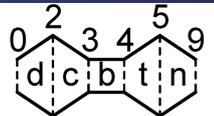
$$F_c = F / \delta_0 \quad TSFC_c = TSFC / \sqrt{\theta_0}$$

Ricombinando le equazioni precedenti si ha anche:

$$TSFC_c = \pi_d \frac{\dot{m}_{cf}}{F_c}$$



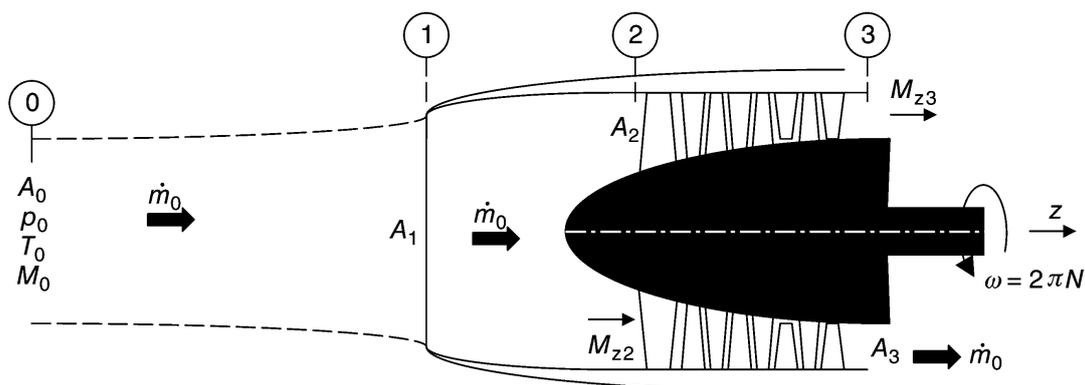
# Accoppiamento dei componenti



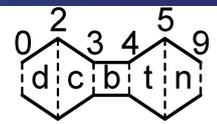
In figura è mostrato l'**accoppiamento** fra la **presa d'aria** ed il **compressore**. I parametri fissati sono le aree  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  mentre  $A_0$  dipende dalle condizioni di volo. Gli altri parametri indipendenti sono le condizioni di volo (i.e.  $p_0$ ,  $T_0$  e  $M_0$ ).

Uguagliando le portate si ha:

$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} = \frac{p_{t2} A_2 \Psi_2}{a_{t2}} = \dot{m}_2 \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K}$$



## Accoppiamento dei componenti



$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} = \frac{p_{t2} A_2 \Psi_2}{a_{t2}} = \dot{m}_2 \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K}$$

Supponendo che la **temperatura** di **ristagno** ed il gas rimangano **invariati**:

$$\frac{p_{t2} A_2}{p_{t0} A_0} M_{z2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{z2}^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = M_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

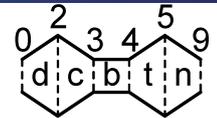
$$\frac{p_{t2} A_2}{p_{t0} A_0} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = M_0 \psi_0^{-K_0}$$

In questa equazione le incognite sono  $\pi_d = p_{t2}/p_{t0}$ ,  $A_0$  e  $M_{z2}$ . Tipicamente dalle caratteristiche della presa d'aria si può risalire ad un **legame** fra il **rapporto di pressioni** e il **numero di Mach** di volo.

Quindi **le incognite** sono  $A_0$  e  $M_{z2}$ . Inoltre si deve fare attenzione alle eventuali distorsioni del flusso all'ingresso del compressore.



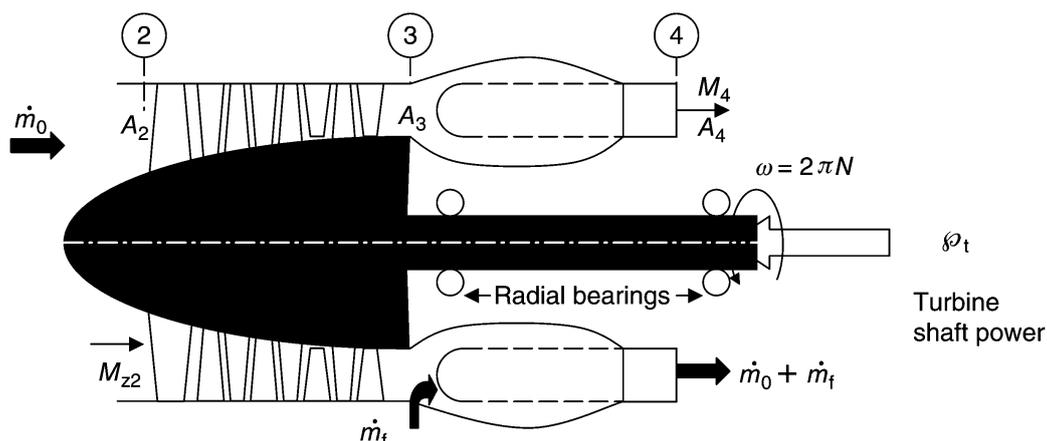
## Accoppiamento dei componenti



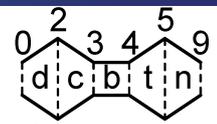
Anche nell'accoppiamento con la **camera di combustione** si parte dal bilancio di massa:

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_3 + \dot{m}_f = (1 + f)\dot{m}_3 = (1 + f)\dot{m}_2 = (1 + f)\dot{m}_0$$

dove  $f$  è fissato dalla posizione della **manetta** ( $\Theta = T_{t4}/T_{t2}$  impostata dal pilota). Viceversa, come già detto, la portata  $\dot{m}_2$  è funzione di  $M_{z2}$ .



# Accoppiamento dei componenti



Chiaramente la **portata** all'uscita della camera di combustione è:

$$\dot{m}_4 = \frac{p_{t4} A_4}{a_{t4}} \gamma_4 M_4 \psi_4^{-K_4} = \sqrt{\frac{\gamma_4 p_{t4} A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}}}} M_4 \left( 1 + \frac{\gamma_4 - 1}{2} M_4^2 \right)^{-\frac{(\gamma_4 + 1)}{2(\gamma_4 - 1)}}$$

Se si suppone che la sezione 4 sia all'uscita dell'ugello della turbina, nella maggioranza dei casi si può supporre che il flusso sia **strozzato**:

$$\dot{m}_4 = \sqrt{\frac{\gamma_4 p_{t4} A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}}}} \left( \frac{\gamma_4 + 1}{2} \right)^{-K_4} \quad \dot{m}_2 = \sqrt{\frac{\gamma_2 p_{t2} A_2}{R_2 \sqrt{T_{t2}}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}$$

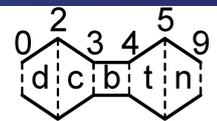
ricordando che  $p_{t4} = \pi_b \pi_c p_{t2}$ , la **conservazione della massa** diventa:

$$\sqrt{\frac{\gamma_4 \pi_b \pi_c A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}} \left( \frac{\gamma_4 + 1}{2} \right)^{-K_4} = (1 + f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2}} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} \propto (1 + f) \dot{m}_{c2}$$

In **condizioni di progetto**, questa equazione permette di determinare  $A_4$ .

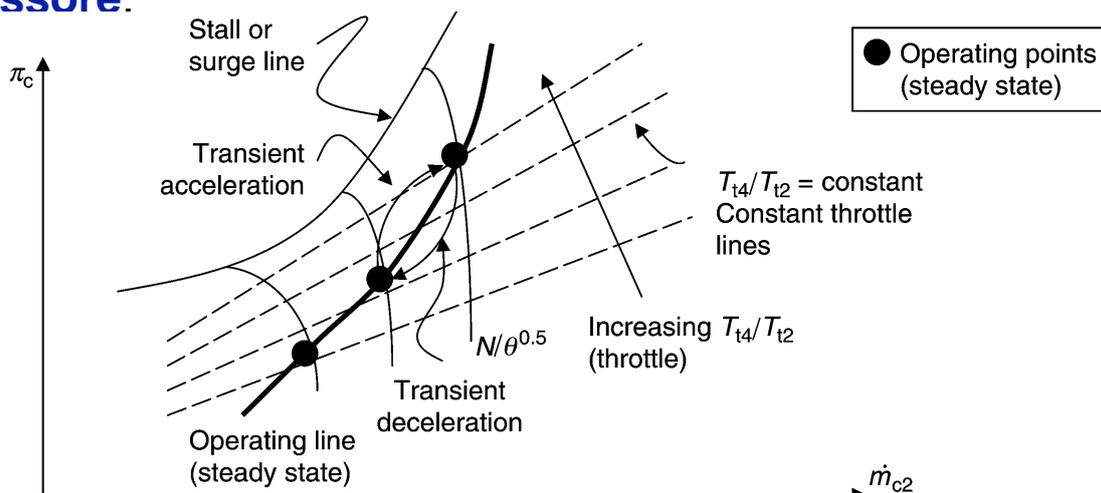


# Accoppiamento dei componenti

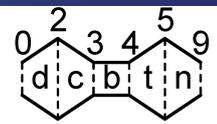


$$\sqrt{\frac{\gamma_4 \pi_b \pi_c A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}} \left( \frac{\gamma_4 + 1}{2} \right)^{-K_4} = (1 + f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2}} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} \propto (1 + f) \dot{m}_{c2}$$

In questa equazione  $f$  e  $T_{t4}$  sono funzione della posizione della manetta. Supponendo che  $\pi_b$  sia ricavabile dalle caratteristiche della camera di combustione,  $\pi_c$  può essere ricavato nota la portata corretta (funzione di  $M_{z2}$ ) e la posizione della manetta dalla **mappa del compressore**.



## Accoppiamento dei componenti



Riprendendo l'equazione ricavata dal **bilancio di energia** nella camera di combustione:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{\frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} - \tau_c}{\frac{Q_R \eta_b}{c_{p2} T_{t2}} - \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}}} = \frac{\frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta - \tau_c}{\frac{Q_R \eta_b}{c_{p2} T_{t2}} - \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta}$$

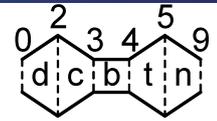
In questa equazione le incognite sono  $h_{t3}$  (o  $\tau_c$ ) e  $\eta_b$ :

- $h_{t3}$  (o  $\tau_c$ ) si ricava dal rapporto di pressione nel compressore;
- $\eta_b$  si ricava da opportune correlazioni.

Si trova quindi il **legame** fra la **temperatura all'ingresso** della turbina la **posizione** della **manetta** ed  $f$ .



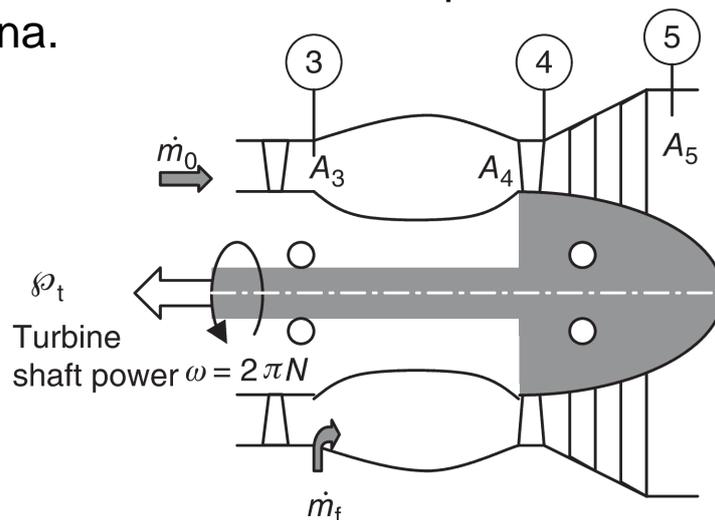
## Accoppiamento dei componenti



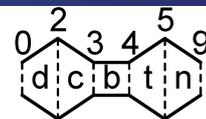
Nell'accoppiamento fra la **turbina** e la **camera di combustione** si cerca di valutare  $\tau_t$ . Se la turbina non è raffreddata le portate all'ingresso e all'uscita sono uguali quindi:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \sqrt{\frac{T_{t4} p_{t5}}{T_{t5} p_{t4}}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}}$$

Il parametro alla destra controlla la portata ed il numero di Mach assiale nella turbina.



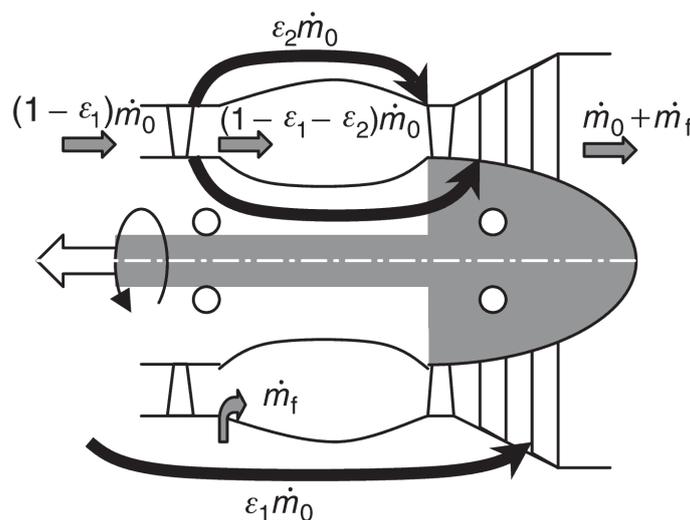
## Accoppiamento dei componenti



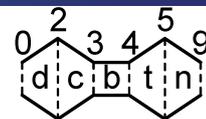
Nel caso di **turbina raffreddata** si suppone che l'aria venga spillata sia all'uscita del compressore che in una sezione intermedia. L'effetto del fluido refrigerante viene spesso **modellato** come una turbina con un **rendimento inferiore** (0.75-0.85).

Il bilancio di massa diventa:

$$\dot{m}_4 = (1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2)\dot{m}_0 \neq (1 + f)\dot{m}_0 = \dot{m}_5$$



## Accoppiamento dei componenti



Nel caso di **turbina raffreddata** si suppone che l'aria venga spillata sia all'uscita del compressore che in una sezione intermedia. L'effetto del fluido refrigerante viene spesso **modellato** come una turbina con un **rendimento inferiore** (0.75-0.85).

Il bilancio di massa diventa:

$$\dot{m}_4 = (1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2)\dot{m}_0 \neq (1 + f)\dot{m}_0 = \dot{m}_5$$

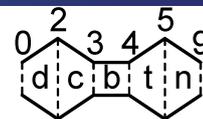
Le **portate corrette** sono quindi:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \frac{1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2}{1 + f} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left( 1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1 + f} \right)$$

Chiaramente  $\tau_t$  è inferiore nel caso di una **turbina raffreddata** e di conseguenza anche il rapporto fra le pressioni.



## Accoppiamento dei componenti



$$\frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left( 1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1 + f} \right)$$

Ricordando che:

$$\dot{m}_{ci} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i}$$

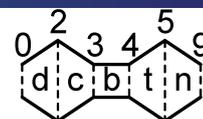
Supponendo:

- che il moto sia **strozzato** sia all'ingresso della **turbina** che nell'**ugello**;
- che  $\tau_t = \pi_t^{k_t e_t}$ ;
- che il secondo termine in parentesi sia costante;

Dalla prima ipotesi il **rapporto** fra le **portate** corrette è **costante** mentre le altre due implicano che i rapporti di temperatura e pressione anch'essi siano costanti.



## Accoppiamento dei componenti



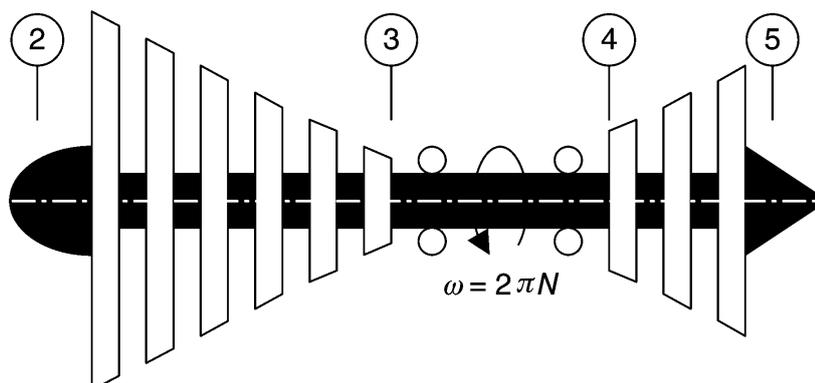
Come già visto il bilancio d'energia sull'albero è:

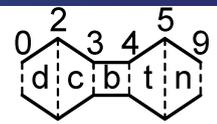
$$\mathcal{P}_c = \dot{m}_0 (h_{t3} - h_{t2}) = \eta_m \dot{m}_0 (1 + f) (h_{t4} - h_{t5}) = \eta_m \mathcal{P}_t$$

da cui:

$$\tau_c - 1 = \eta_m (1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m (1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta (1 - \tau_t)$$

visto che nelle ipotesi appena fatte  $\tau_t$  è costante  $\tau_c$  è una funzione lineare della **posizione della manetta**.





Come già visto il bilancio d'energia sull'albero è:

$$\mathcal{P}_c = \dot{m}_0(h_{t3} - h_{t2}) = \eta_m \dot{m}_0(1 + f)(h_{t4} - h_{t5}) = \eta_m \mathcal{P}_t$$

da cui:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta(1 - \tau_t)$$

visto che nelle ipotesi appena fatte  $\tau_t$  è costante  $\tau_c$  è una funzione lineare della **posizione della manetta**.

Supponendo che le variazioni fra le condizioni di **progetto** e **fuori progetto** di  $\eta_m$  ed  $f$  siano trascurabili:

$$\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1} = \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \rightarrow \tau_{c,OD} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}$$

che può essere espressa anche in termini del rapporto di pressione:

$$\pi_{c,OD} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \right]^{\frac{1}{k}} \quad \pi_c = [1 + \eta_c (\tau_c - 1)]^{\frac{1}{k}}$$



## Condizioni di fuori progetto

$$\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1} = \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}$$

Le **velocità** angolari **corrette** all'albero sono:

$$N_{ci} = \frac{N_i}{\sqrt{\theta_i}} \rightarrow \frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}}$$

Dalla relazione:

$$\Psi_c = \frac{\Delta h_t}{U^2} = \frac{w_c}{U^2}$$

si ha ( $U = \omega r$  e supponendo  $\Psi_c \sim \text{cost}$ ) che il lavoro sia proporzionale a:

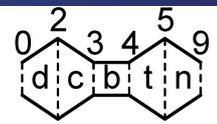
$$w_c \propto T_{t2}(\tau_c - 1) \propto N^2$$

quindi  $N_{c2}^2 \propto \tau_c - 1$ . Lo stesso ragionamento vale per la turbina ed in questo caso la costanza di  $\tau_t$  implica che anche  $N_{c4}$  sia **costante**. Di conseguenza  $N_{c2}$  è **proporzionale** alla posizione della **manetta**:

$$N_{c4,OD} \approx N_{c4,D} \approx \text{cost} \quad \frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}} = \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}}$$



## Condizioni di fuori progetto



Se la **turbina** non è **raffreddata** le portate nella turbina e nel compressore sono:

$$\dot{m}_{c_i} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i} \quad \rightarrow \quad (1+f) \dot{m}_{c_2} \frac{\delta_2}{\sqrt{\theta_2}} = \dot{m}_{c_4} \frac{\delta_4}{\sqrt{\theta_4}}$$

Nell'ipotesi (valida per  $\pi_c > \sim 2$ ) che la turbina sia **strozzata** la portata  $\dot{m}_{c_4}$  è costante quindi:

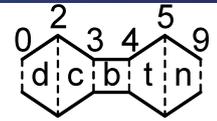
$$\dot{m}_{c_2} = \frac{\dot{m}_{c_4} p_{t4}}{1+f p_{t2}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} = \frac{\dot{m}_{c_4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c_2,OD}}{\dot{m}_{c_2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}}$$

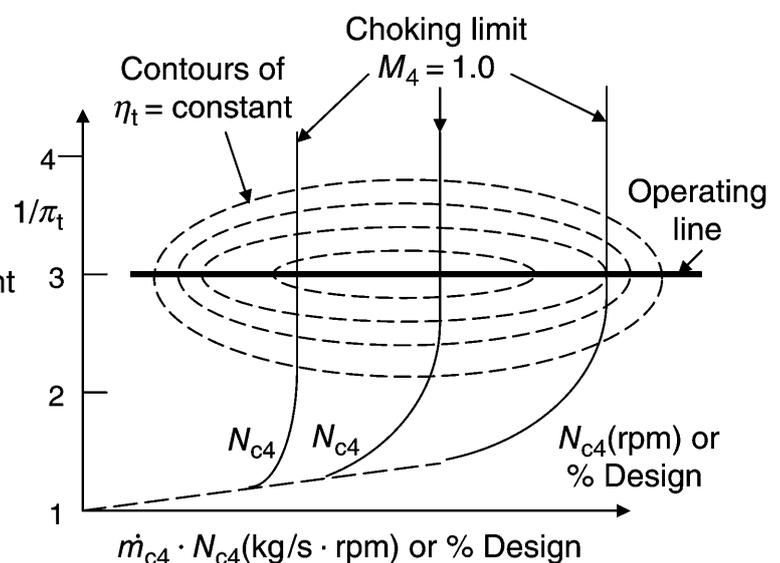
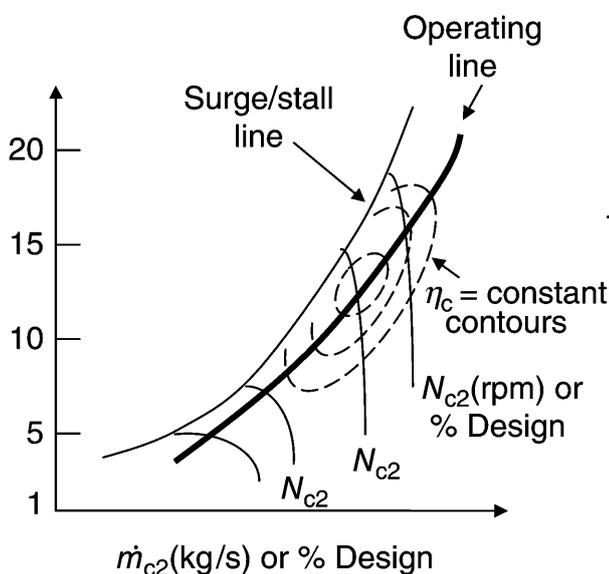
$$\frac{\dot{m}_{c_2,OD}}{\dot{m}_{c_2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{z2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{z2,D}^{-K_2}}$$



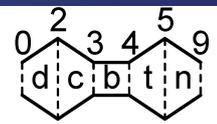
## Condizioni di fuori progetto



Tipiche **mappe** del **compressore** e della **turbina** sono mostrate nelle figure.



# Caratteristiche di pompaggio



Nell'ipotesi che il generatore di gas sia definito e che tutte le **mappe** delle **prestazioni** siano note si possono studiare gli stati di possibile funzionamento e determinate le cosiddette **caratteristiche** di **pompaggio** cioè:

- la portata corretta  $\dot{m}_{c2}$ ;
- Il rapporto di pressione complessivo  $p_{t5}/p_{t2}$ ;
- Il rapporto di temperatura complessivo  $T_{t5}/T_{t2}$ ;
- Un parametro che definisce la percentuale di combustibile  $f Q_R \eta_b / c_p T_{t2}$  oppure  $\dot{m}_{cf}$ .

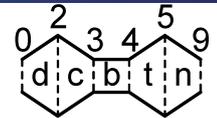
Questi parametri sono spesso espressi in funzione della **velocità** angolare **corretta** e della posizione della **manetta**.

Dall'equazione appena trovata si può ricavare il rapporto di pressioni nel compressore:

$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \quad \rightarrow \quad \pi_c = \frac{1+f}{\pi_b} \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$



# Caratteristiche di pompaggio



$$\pi_c = \frac{1+f}{\pi_b} \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$

Ricordando che:

$$\frac{\dot{m}_{ci}}{A_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} M_i \psi_i^{-K_i}$$

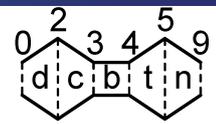
Si ha nell'ipotesi di moto **strozzato** nella **turbina**:

$$\frac{\dot{m}_{c4}}{A_4} = \sqrt{\frac{\gamma_4}{R_4} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} \left( \frac{\gamma_4 + 1}{2} \right)^{-K_4} = f(\gamma_4, R_4)$$

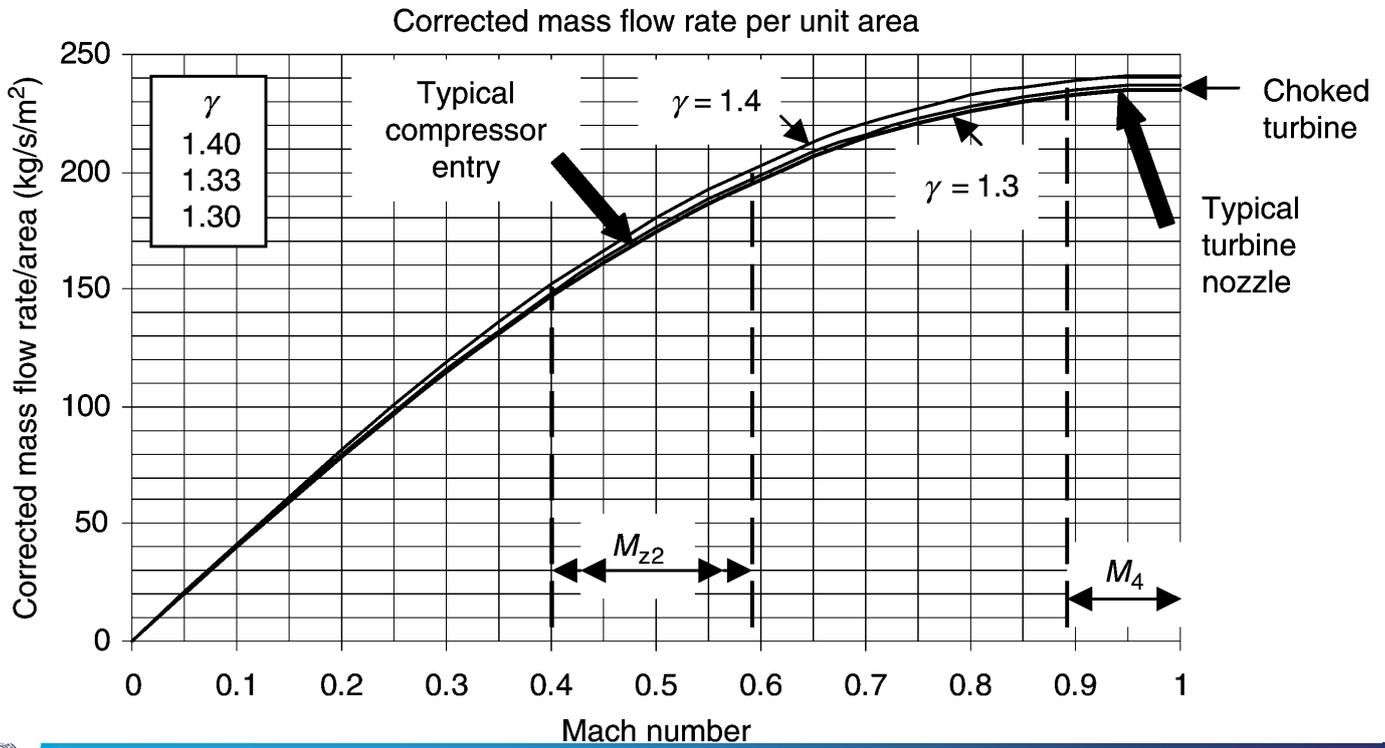
Per  $\gamma_4 = 1.33, R_4 = 286.8 \text{ J/kgK}, p_{ref} = 1 \text{ atm}, T_{ref} = 15 \text{ C}$  la costante vale circa  $237 \text{ kg/(sm}^2\text{)}$ . Nel compressore invece:

$$\frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = f(M_{z2}, \gamma_2, R_2)$$

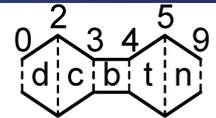




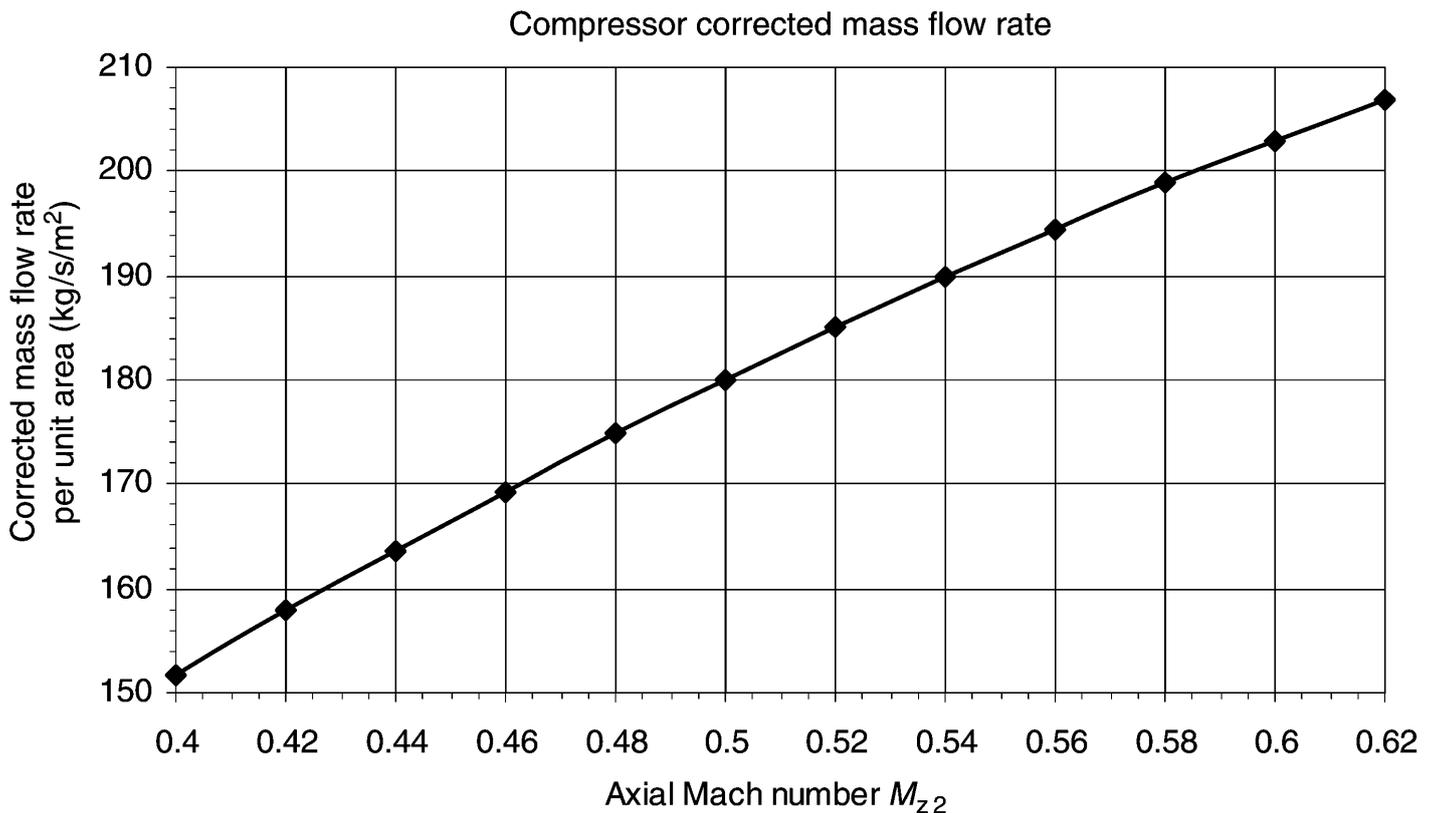
$$\frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = f(M_{z2}, \gamma_2, R_2)$$



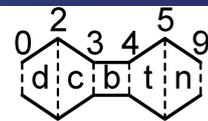
# Caratteristiche di pompaggio



Più in dettaglio nel **compressore**.



# Caratteristiche di pompaggio



Per **esempio** supponendo che i parametri del motore siano:

- $T_{t2} = T_{ref} = 15C$ ,  $M_{z2} = 0.5$ ,  $\pi_c = 25$ ,  $e_c = .9$ ,  $\gamma_2 = 1.4$ ,  $c_{p2} = 1.004kJ/kgK$
- $\Theta = T_{t4}/T_{t2} = 6$ ,  $\pi_b = .97$ ,  $M_4 = 1 \rightarrow \dot{m}_{c4}/A_4 \cong 237kg/(sm^2)$
- $Q_R = 42,000kJ/kg$ ,  $\eta_b = 0.995$ ,  $\gamma_4 = 1.33$ ,  $c_{p4} = 1.156kJ/kgK$

si può ricavare:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{(c_{p4}/c_{p2})T_{t4}/T_{t2} - \tau_c}{Q_R \eta_b / (c_{p2} T_{t2}) - (c_{p4}/c_{p2})T_{t4}/T_{t2}} \approx 0.03$$

e dalla:

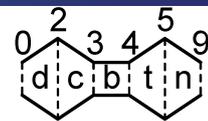
$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}}}{\pi_b} \rightarrow \frac{A_2}{A_4} = \frac{\pi_c \pi_b \dot{m}_{c4}/A_4}{1 + f \dot{m}_{c2}/A_2 \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

il rapporto delle aree  $A_4/A_2 \approx 0.08$ . Utilizzando questo valore nella relazione precedente si ha:

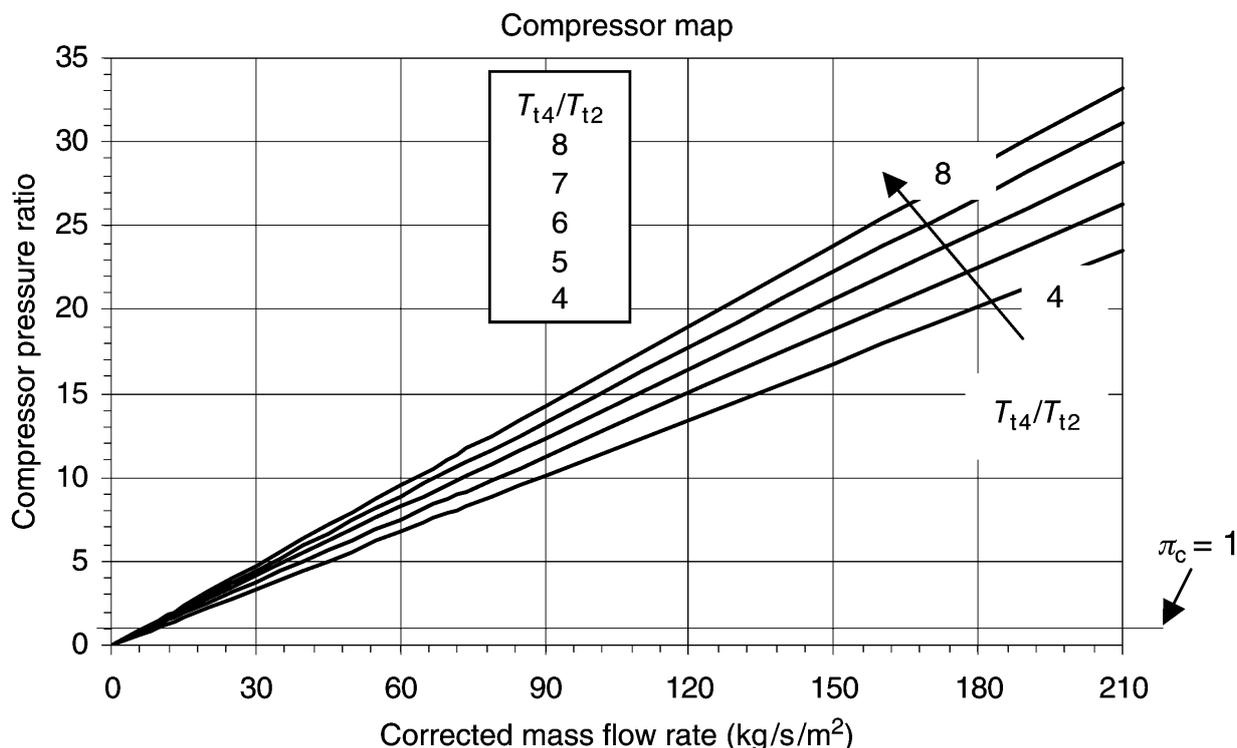
$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}{\pi_b} \approx 0.056 \frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$



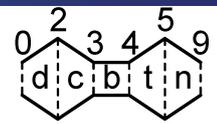
# Caratteristiche di pompaggio



$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}{\pi_b} \approx 0.056 \frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$



## Caratteristiche di pompaggio



Come già visto il bilancio di energia fra il **compressore** e la **turbina** dà:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta (1 - \tau_t)$$

da cui si ricava il rapporto di temperature complessivo (uscita ingresso del generatore di gas):

$$\tau_t = 1 - \frac{c_{p2}}{c_{p4} \eta_m (1 + f)} \frac{\tau_c - 1}{T_{t4}/T_{t2}}$$
$$\frac{T_{t5}}{T_{t2}} = \tau_t \frac{T_{t4}}{T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \frac{c_{p2}}{c_{p4} \eta_m (1 + f)} \frac{\tau_c - 1}{T_{t2}}$$

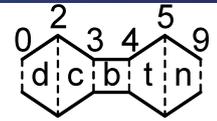
Il rapporto di pressione complessivo invece è:

$$\frac{p_{t5}}{p_{t2}} = \pi_t \pi_b \pi_c$$

con  $\pi_t$  che può essere ricavato dal rendimento della turbina.



## Caratteristiche di pompaggio



Il parametro  $f Q_R \eta_b / \bar{c}_p T_{t2}$  può essere ricavato a partire dalla:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} \approx \frac{c_{p4} T_{t4} - c_{p2} T_{t3}}{Q_R \eta_b} \approx \frac{\bar{c}_p (T_{t4} - T_{t3})}{Q_R \eta_b}$$

$$\frac{f Q_R \eta_b}{\bar{c}_p T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \frac{T_{t3}}{T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \tau_c = \Theta - \tau_c$$

infine per le **velocità corrette** si ha:

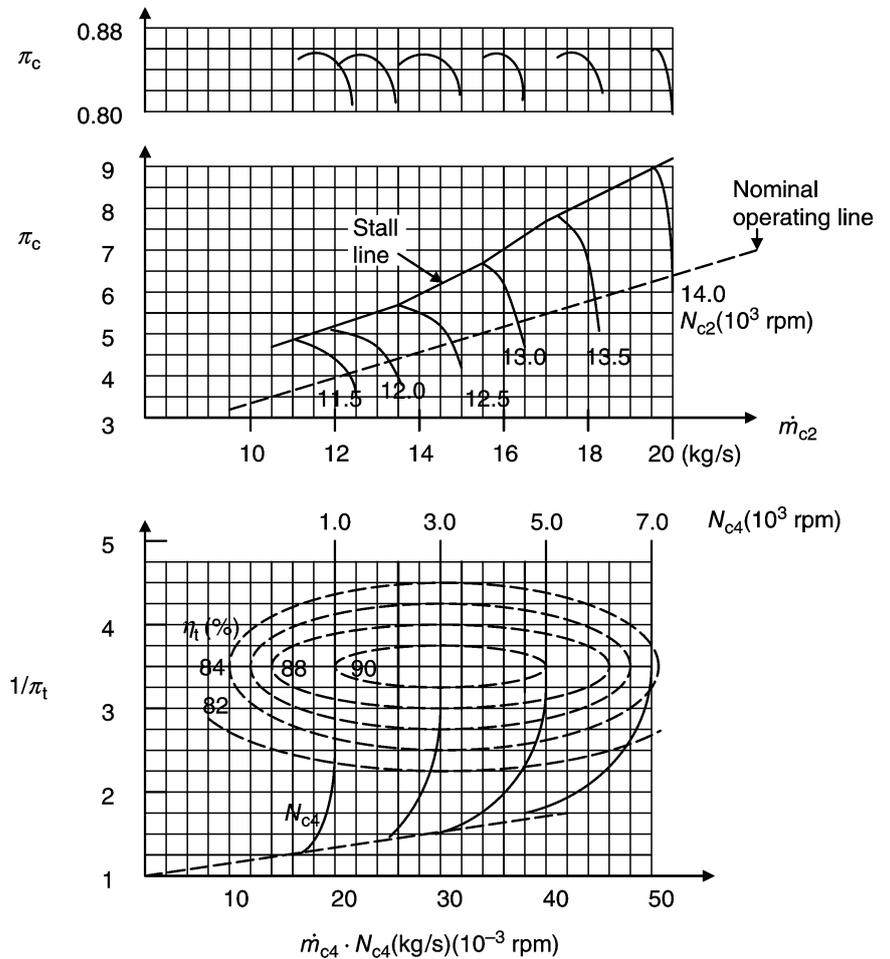
$$\frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}} = \sqrt{\Theta}$$



# Caratteristiche di pompaggio

## Esempio

Partendo dalle mappe di compressore e turbina mostrate in figura valutare le caratteristiche di pompaggio in funzione di  $N_{c2}$  ( $T_{t4}/T_{t2} = 6$ ,  $f = 0.03$ ,  $\eta_m = 0.995$ ,  $c_{pc} = 1004 \frac{J}{kgK}$ ,  $c_{pt} = 1156 \frac{J}{kgK}$ ).



# Caratteristiche di pompaggio

Dal grafico si può costruire la tabella.

Dalle:

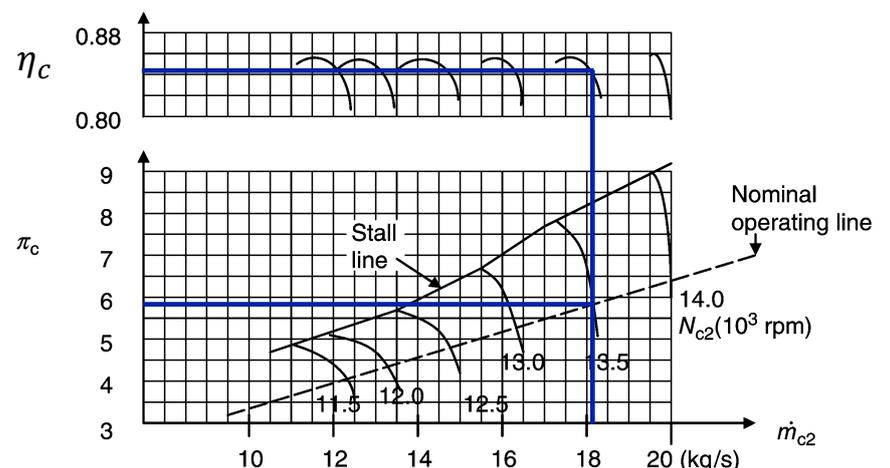
$$\tau_c = 1 + \frac{1}{\eta_c} (\pi_c^k - 1)$$

$$\frac{f Q_R \eta_b}{\bar{c}_p T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \tau_c$$

$$\tau_t = 1 - \frac{c_{p2}}{c_{p4}} \frac{\tau_c - 1}{\eta_m (1 + f) \frac{T_{t4}}{T_{t2}}}$$

Si calcolano  $f$  e i rapporti di temperatura nella turbina e nel compressore. Si calcola quindi il rapporto di temperatura complessivo.

$N_{c2}$ (1,000 rpm)	$p_{t3}/p_{t2}$ (or $\pi_c$ )	$\dot{m}_{c2}$ (kg/s)	$\eta_c$
14.0	6.50	20.0	0.82
13.5	5.88	18.1	0.84
13.0	5.32	16.4	0.83
12.5	4.81	14.8	0.83
12.0	4.36	13.4	0.83
11.5	4.00	12.2	0.84



# Caratteristiche di pompaggio

La portata e velocità angolare corrette nella turbina si ricavano dalle:

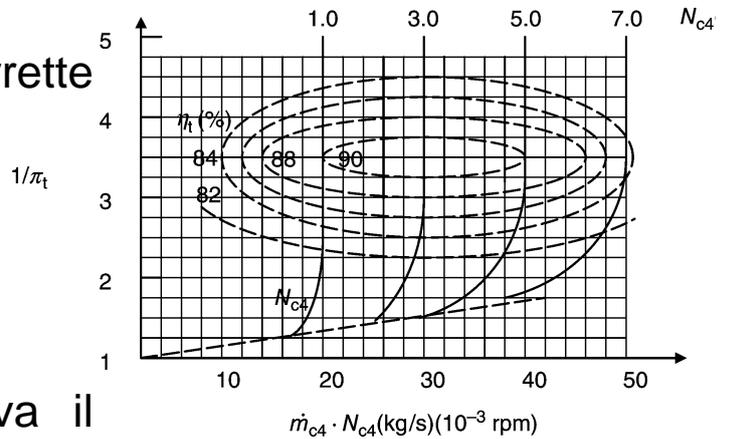
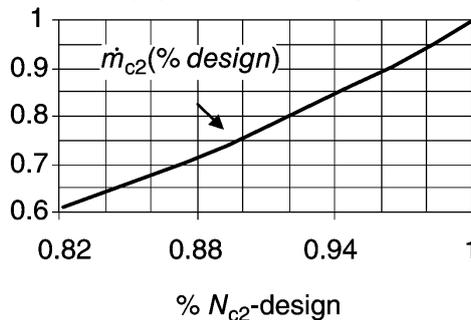
$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

$$N_{c4} = N_{c2} / \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$

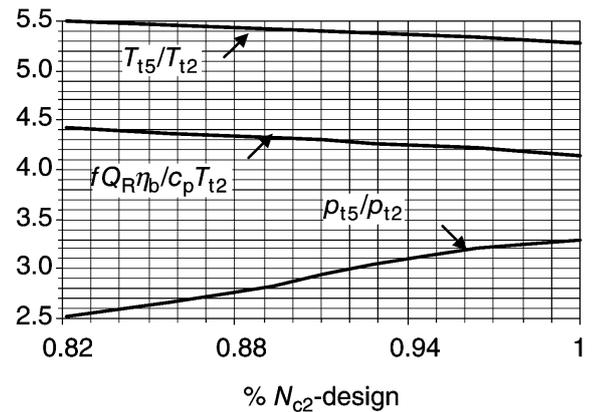
Dalla mappa della turbina si trova il rendimento adiabatico e dalla:

$$\pi_t = [1 + (\tau_t - 1)/\eta_t]^{1/k_t}$$

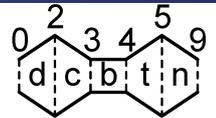
si può risalire al rapporto di pressioni compressivo.



Gas generator pumping characteristics



## Riassumendo (alcune formule)



$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K} \quad \delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}} \quad \Theta = \frac{T_{t4}}{T_{t2}}$$

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i} \quad \frac{p_{t2}}{p_{t0}} \frac{A_2}{A_0} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = \psi_0^{-K_0}$$

$$\dot{m}_4 = (1+f)\dot{m}_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma_4}{R_4} \frac{\pi_b \pi_c A_4}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \left(\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right)^{-K_4}} = (1+f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}}$$

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{(c_{p4}/c_{p2}) T_{t4}/T_{t2} - \tau_c}{Q_R \eta_b / (c_{p2} T_{t2}) - (c_{p4}/c_{p2}) T_{t4}/T_{t2}}$$

$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{p_{t4}}{p_{t2}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{\Theta}} \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left(1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1+f}\right)$$

$$\tau_c - 1 = \eta_m (1+f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \frac{T_{t4}}{T_{t2}} (1 - \tau_t) \quad \frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}} = \sqrt{\Theta}$$



## Riassumendo (alcune formule)

$$\tau_{c,OD} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D}$$

$$\pi_{c,OD} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \right]^{\frac{1}{k}} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D} \right]^{\frac{1}{k}}$$

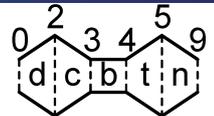
$$N_{c4,OD} \approx N_{c4,D} \approx \text{cost} \quad \frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}} = \sqrt{\frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D}} = \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\Theta_D}{\Theta_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{z2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{z2,D}^{-K_2}}$$



## Condizioni di fuori progetto



Per determinare il funzionamento di un **turbogetto al di fuori** delle **condizioni di progetto** si iniziano a fissare i parametri del motore:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Parametri corretti:  $\dot{m}_{c2}, N_{c2}$ ;
- Parametri del compressore:  $M_{z2}, \pi_c$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  ( $\tau_\lambda$ );
- Potere calorifico del combustibile:  $Q_R$ ;
- Rendimenti dei componenti:  $\pi_d$  ( $\eta_d$ ),  $\pi_b, \pi_n, e_c$  ( $\eta_c$ ),  $e_t$  ( $\eta_t$ ),  $\eta_m, \eta_b$ ;
- Parametri dell'ugello:  $p_9/p_0$  ( $A_9/A_8$ );
- Proprietà del gas:  $\gamma_2, c_{p2}, \gamma_4, c_{p4}$ ;

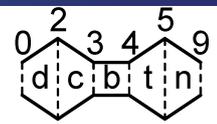
Si studia quindi il funzionamento del motore variando:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  o  $\tau_\lambda$ ;

I **rendimenti** possono essere assunti costanti o **rielaborati dalle mappe** dei componenti.



# Condizioni di fuori progetto

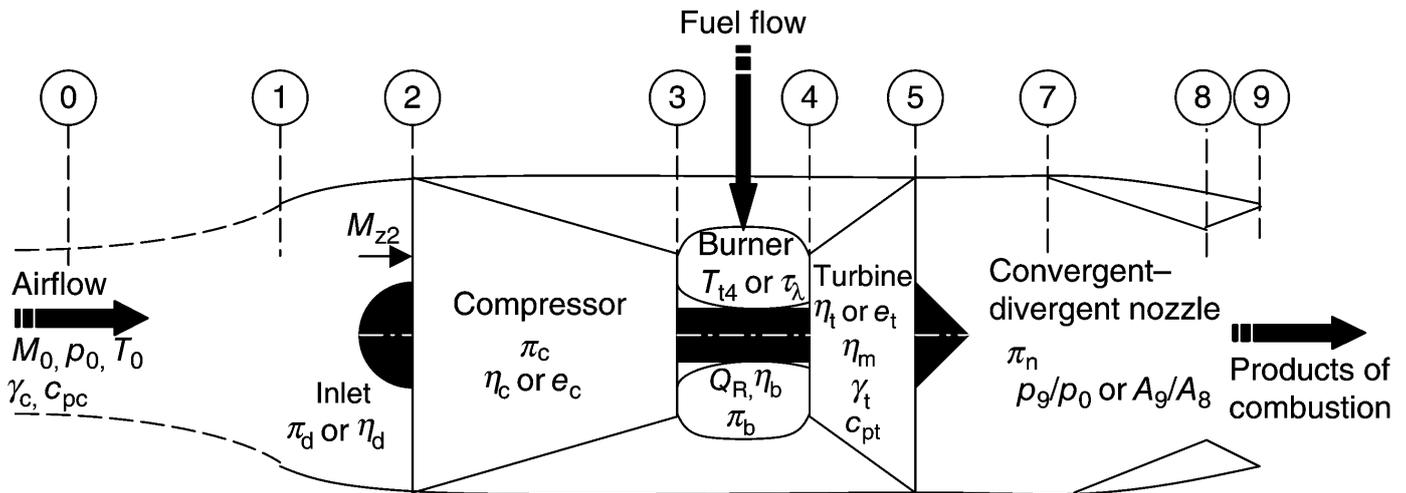


I parametri caratteristici sono anche mostrati nella figura.

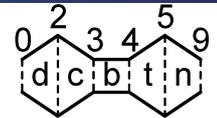
Supporremo che le **sezioni 4 e 8** siano **strozzate**. In queste ipotesi come già visto si ha:

$$\frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} = \text{cost}$$

e come già detto si può supporre che i singoli rapporti siano costanti.



# Condizioni di fuori progetto



Si esamini ora il seguente esercizio

Assume a turbojet engine has the following design-point parameters:

$$M_0 = 0, p_0 = 0.1 \text{ MPa}, T_0 = 15^\circ\text{C}$$

$$\pi_d = 0.98$$

$$\pi_c = 25, e_c = 0.90$$

$$Q_R = 42,800 \text{ kJ/kg}, \pi_b = 0.98, \eta_b = 0.99, T_{t4} = 1500^\circ\text{C}$$

$$e_t = 0.85, \eta_m = 0.995$$

$$\dot{m}_{c2} = 73 \text{ kg/s}$$

$$N_{c2} \text{ (rpm)} = 6000$$

$$M_{z2} = 0.6$$

$$\pi_n = 0.97, p_9/p_0 = 1.0$$

If this engine is operating in the following off-design condition

$$M_0 = 0.8, p_0 = 33 \text{ kPa}, T_0 = -15^\circ\text{C}$$

$$T_{t4} = 1375^\circ\text{C}$$

$$\pi_d = 0.995$$

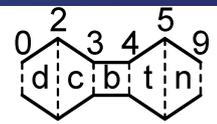
$$p_9/p_0 = 1.0$$

assuming all other component efficiencies (except  $\pi_d$  that is specified) remain the same (as design) at off-design and gas properties are  $\gamma_c = \gamma_t = 1.4$  and  $c_{pc} = c_{pt} = 1104 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , calculate

- $\pi_{c-O-D}$
- $\dot{m}_{c2,O-D}$  (in kg/s)
- $N_{c2,O-D}$  (in rpm)
- $M_{z2,O-D}$



## Condizioni di fuori progetto



Considerando che:

$$\tau_\lambda = h_{t4}/h_0 \quad \tau_r = h_{t0}/h_0 \quad \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} = \frac{\tau_\lambda}{\tau_r}$$

la relazione:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) \quad \tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r} (1 - \tau_t)$$

supponendo che  $\tau_t$  e  $\eta_m(1 + f)$  rimangano costanti implica che :

$$\frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (\tau_c - 1) = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \tau_{c,OD} \approx 1 + \frac{(\tau_r/\tau_\lambda)_D}{(\tau_r/\tau_\lambda)_{OD}} (\tau_c - 1)_D$$

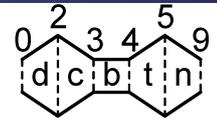
Si ha ( $M_0 = 0$ ,  $k = 0.286$ ):

$$\left(\frac{\tau_r}{\tau_\lambda}\right)_D = \frac{c_{p2} T_{t2}}{c_{p4} T_{t4}} = \frac{1104 \cdot 288}{1104 \cdot 1773} = 0.1624 \quad \tau_{c,D} = \pi_{c,D}^{\frac{k}{e_c}} = 25^{\frac{.286}{0.90}} = 2.778$$

$$\left(\frac{\tau_r}{\tau_\lambda}\right)_{OD} = \left(\frac{c_{p2} T_0 \psi_{0,OD}}{c_{p4} T_{t4}}\right)_{OD} = \frac{1104 (273 - 15) 1.128}{1104 \cdot 273 + 1375} = 0.1766$$



## Condizioni di fuori progetto



$$\tau_{c,OD} \approx 1 + \frac{(\tau_r/\tau_\lambda)_D}{(\tau_r/\tau_\lambda)_{OD}} (\tau_c - 1)_D = 1 + \frac{0.1624}{0.1766} 1.778 = 2.636$$

da cui:

$$\pi_{c,OD} = \tau_{c,OD}^{\frac{e_c}{k}} = 2.636^{\frac{0.9}{.286}} = 21.2$$

Conoscendo il rapporto di pressioni nel compressore si possono valutare gli indici di prestazione. La portata e la velocità angolare corrette sono:

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}} = \frac{21.2}{25} \sqrt{\frac{1.778}{1.636}} = 0.883$$

$$\dot{m}_{c2,OD} = 73 \cdot 0.883 = 64.5 \text{ kg/s}$$

$$\frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}} = \sqrt{\frac{1.636}{1.778}} = .959 \quad \rightarrow \quad N_{c2,OD} = 6000 \cdot 0.959 = 5754 \text{ rpm}$$



La portata in condizioni di fuori progetto si ricava da:

$$\dot{m}_{c2,OD} = \frac{\dot{m}_{2,OD} \sqrt{\theta_{2,OD}}}{\delta_{2,OD}} \quad \delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}} \quad \delta_{2,D} = 0.9871 \quad \theta_{2,D} = 1.000$$

$$T_{t2,OD} = \psi_{0,OD} T_0 = 1.128 \cdot 258 = 291K \quad \theta_{2,OD} = \frac{291}{288} = 1.011$$

$$p_{t0,OD} = \psi_{0,OD}^{\frac{1}{k}} p_0 = 1.128^{\frac{1}{0.286}} \cdot 33 = 50.3kPa$$

$$p_{t2,OD} = \pi_d p_{t0,OD} = 0.995 \cdot 50.3 = 50.05kPa \quad \delta_{2,OD} = \frac{50.05}{101.3} = 0.494$$

$$\dot{m}_{2,OD} = \frac{\dot{m}_{c2,OD} \delta_{2,OD}}{\sqrt{\theta_{2,OD}}} = \frac{64.5 \cdot 0.494}{\sqrt{1.011}} = 31.7kg/s$$

Risolviendo la seguente equazione **iterativamente**:

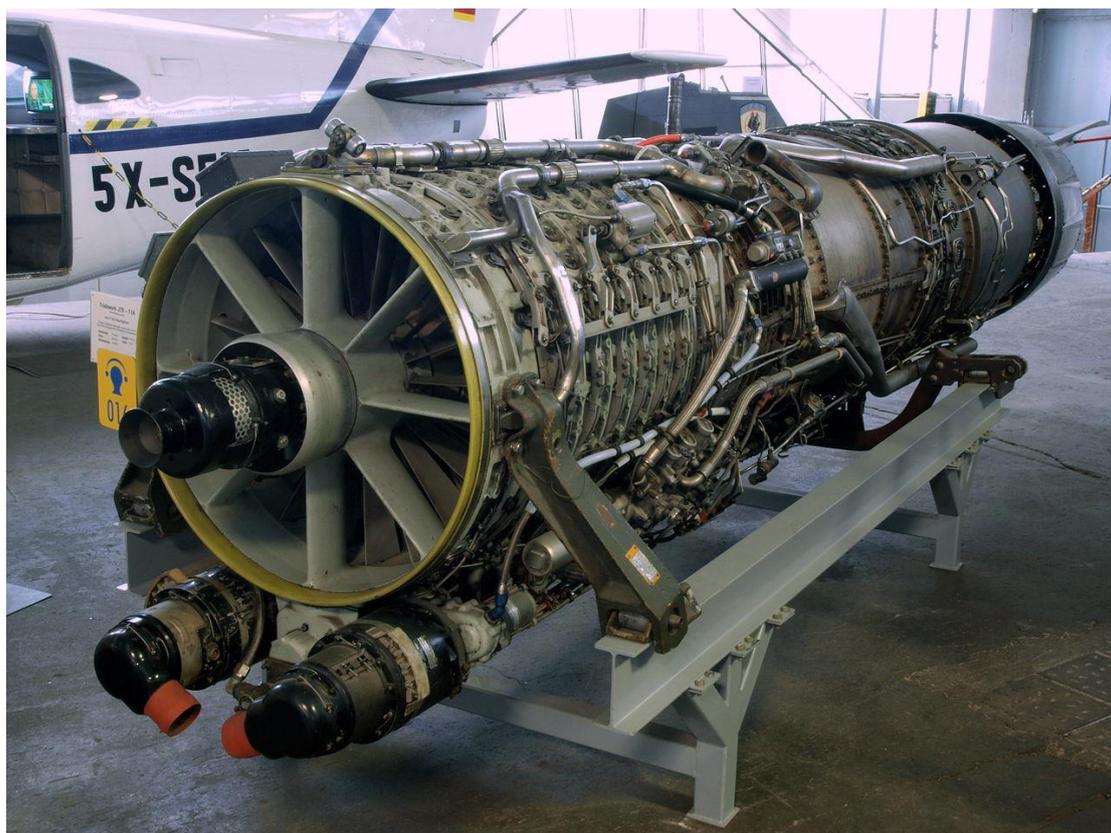
$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{2,D}^{-K_2}} \rightarrow M_{z2,OD} = \frac{64.5}{73} 0.6 \left( \frac{1 + 0.2 M_{z2,OD}^2}{1 + 0.2 \cdot 0.6^2} \right)^3 = 0.497$$

La portata è quasi dimezzata  $\dot{m}_{c2} \approx \dot{m}_2$  mentre  $M_{z2}$  diminuisce di poco.

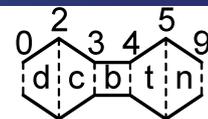


## J79 – Off Design

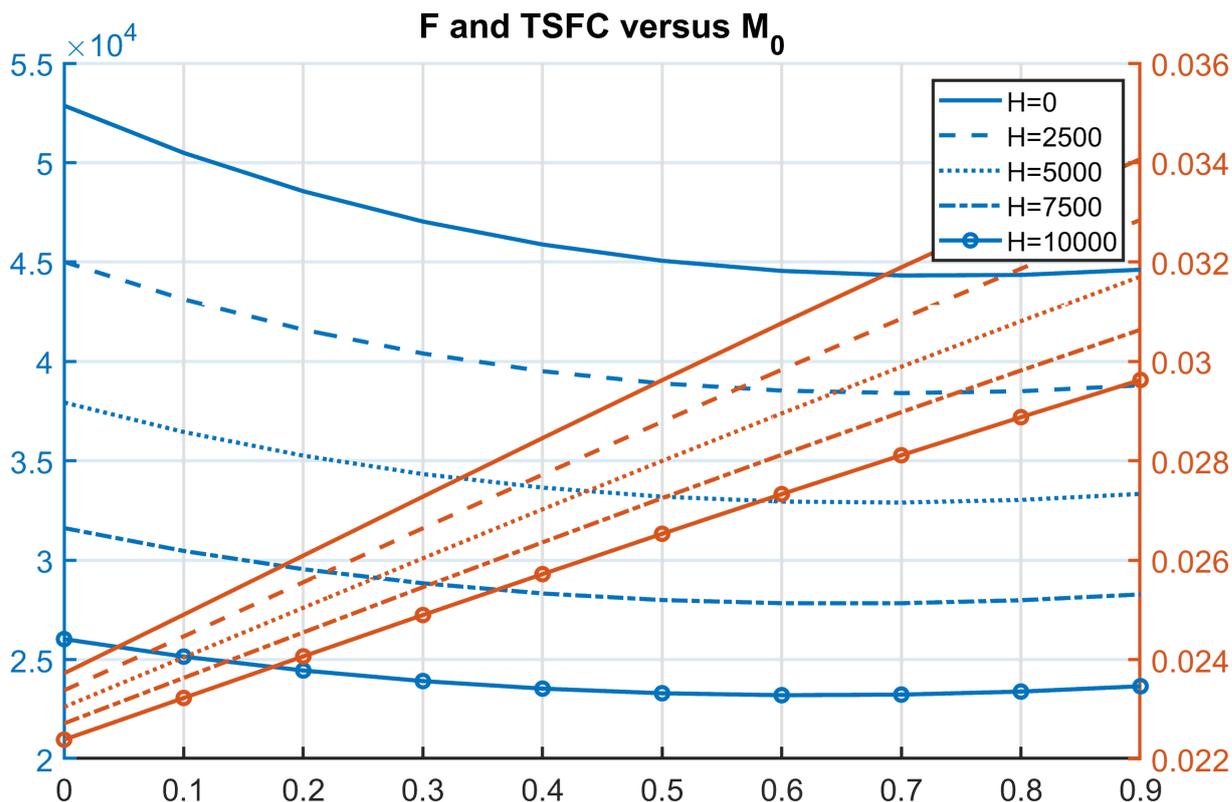
JT9 è stato usato su: Lockheed F-104 Starfighter, MD F-4 Phantom II



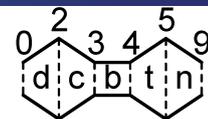
# J79 – Off Design



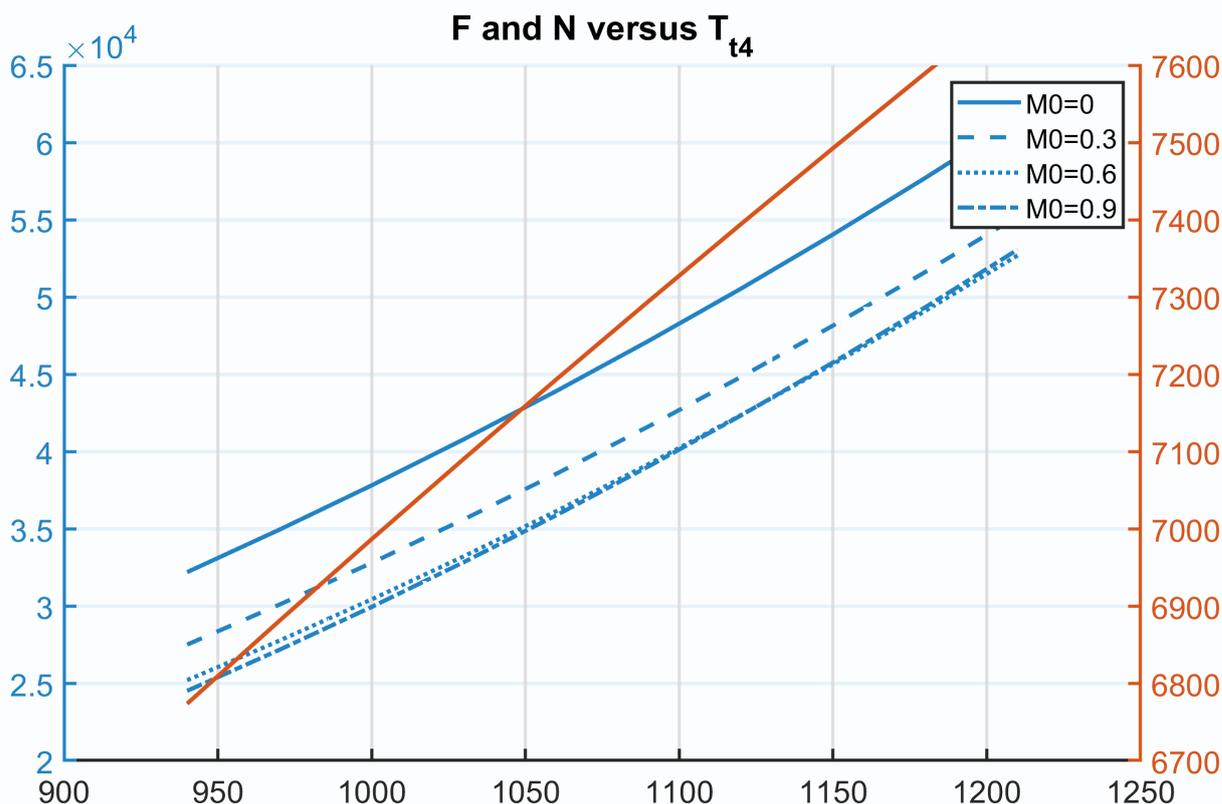
$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



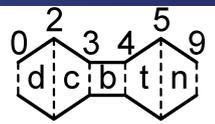
# J79 – Off Design



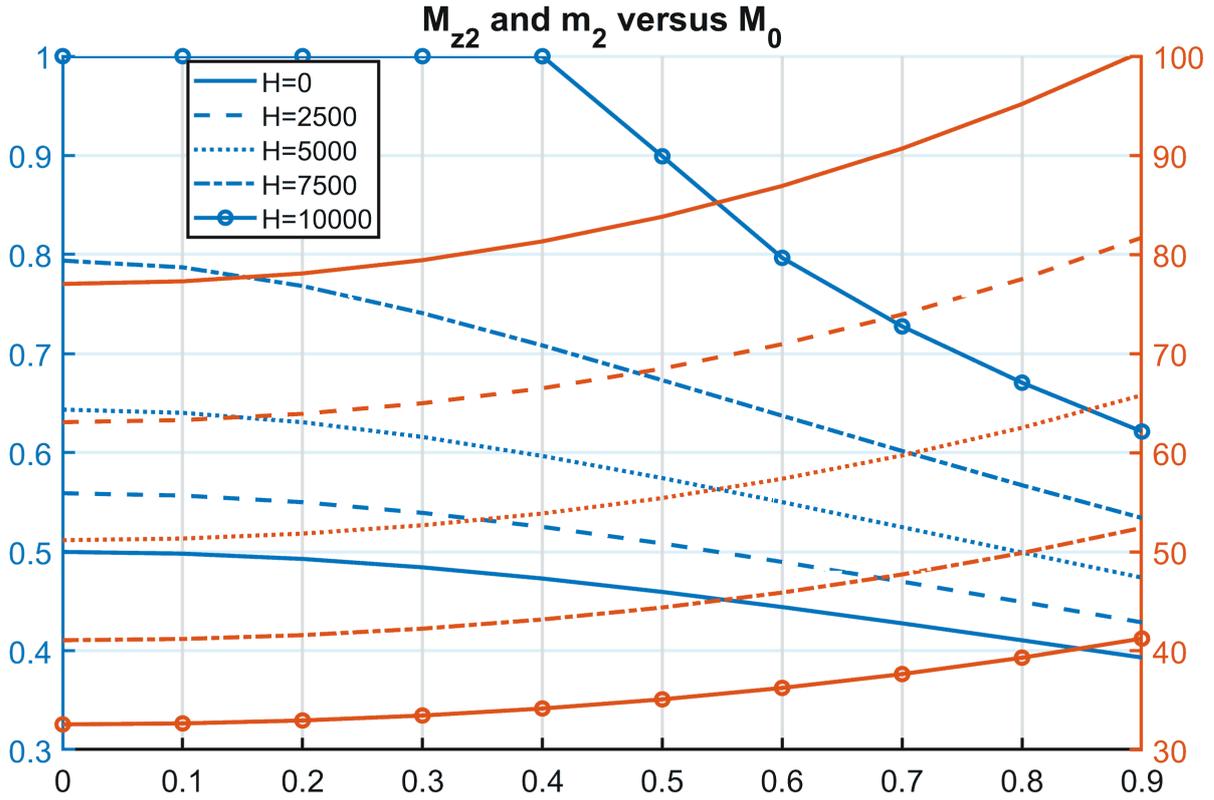
$$H = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



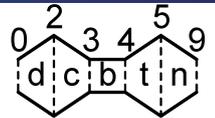
# J79 – Off Design



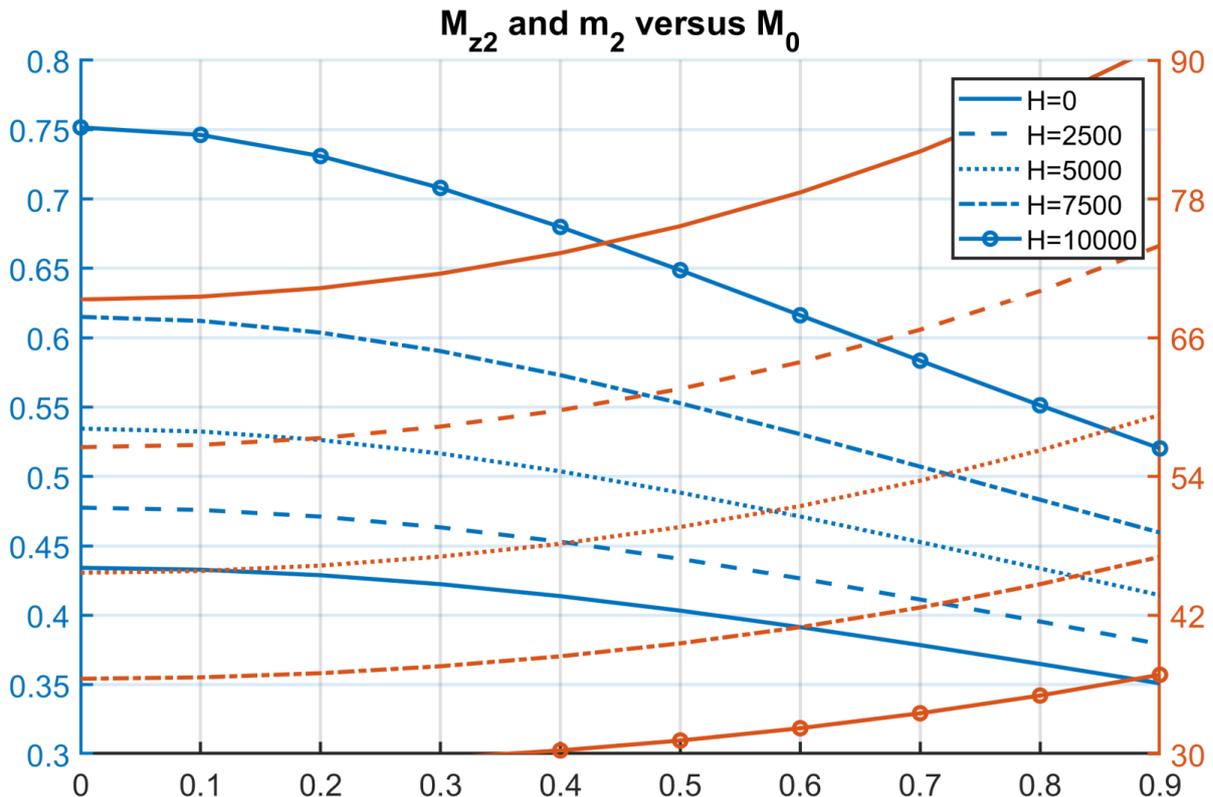
$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$



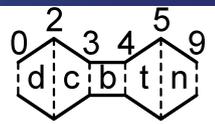
# J79 – Off Design



$T_{t4} = 1050K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$

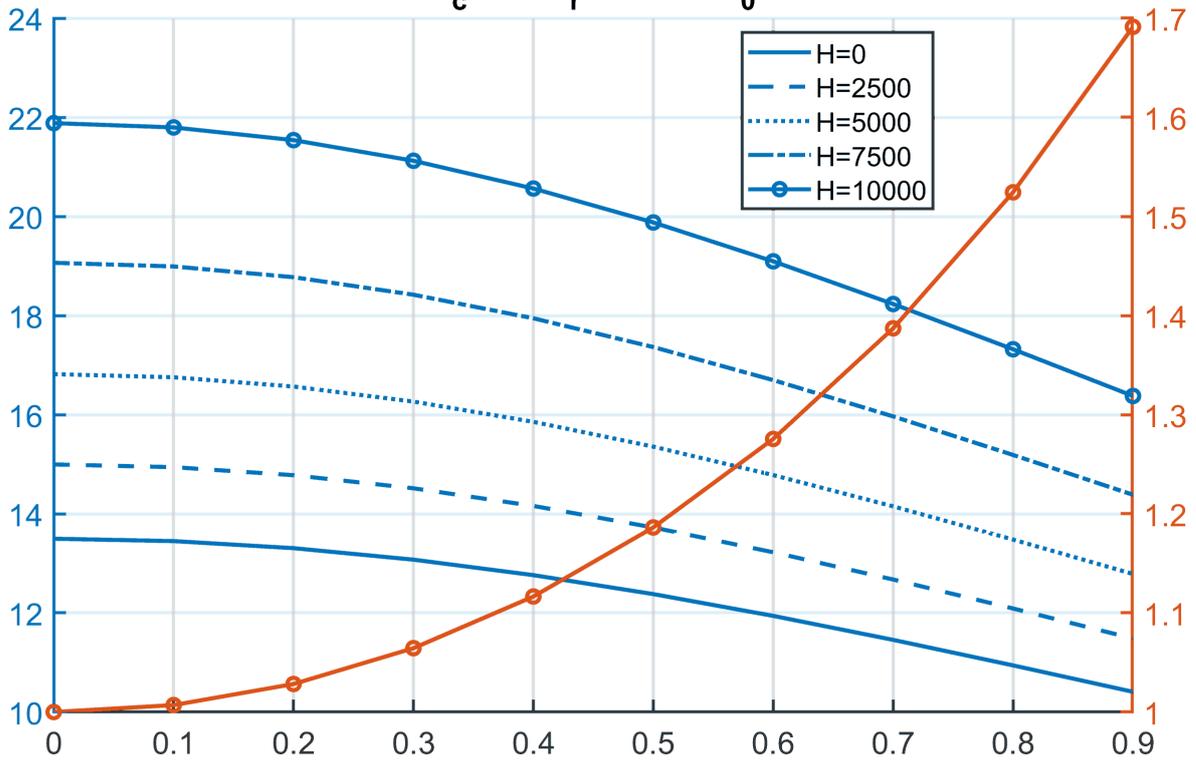


# J79 – Off Design

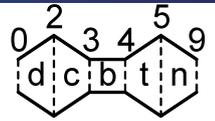


$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$

$\pi_c$  and  $\pi_r$  versus  $M_0$

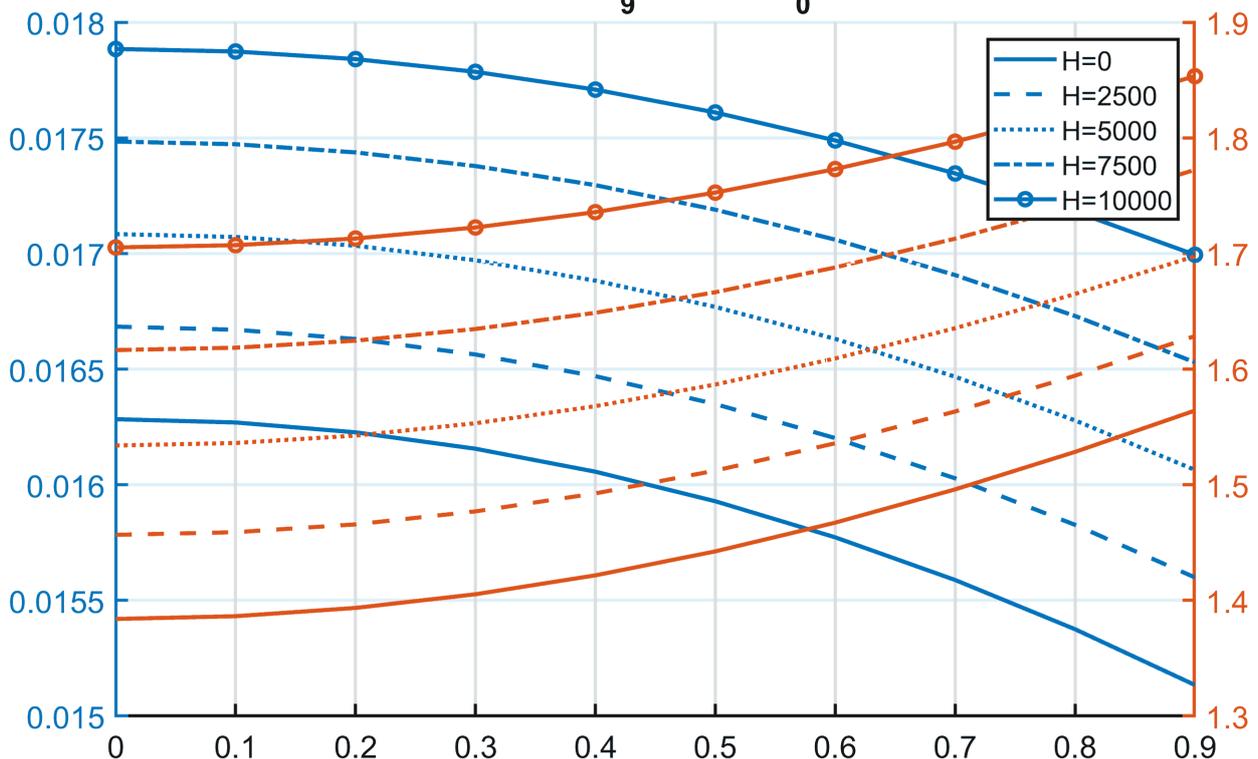


# J79 – Off Design

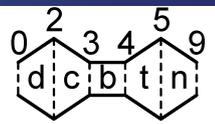


$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$

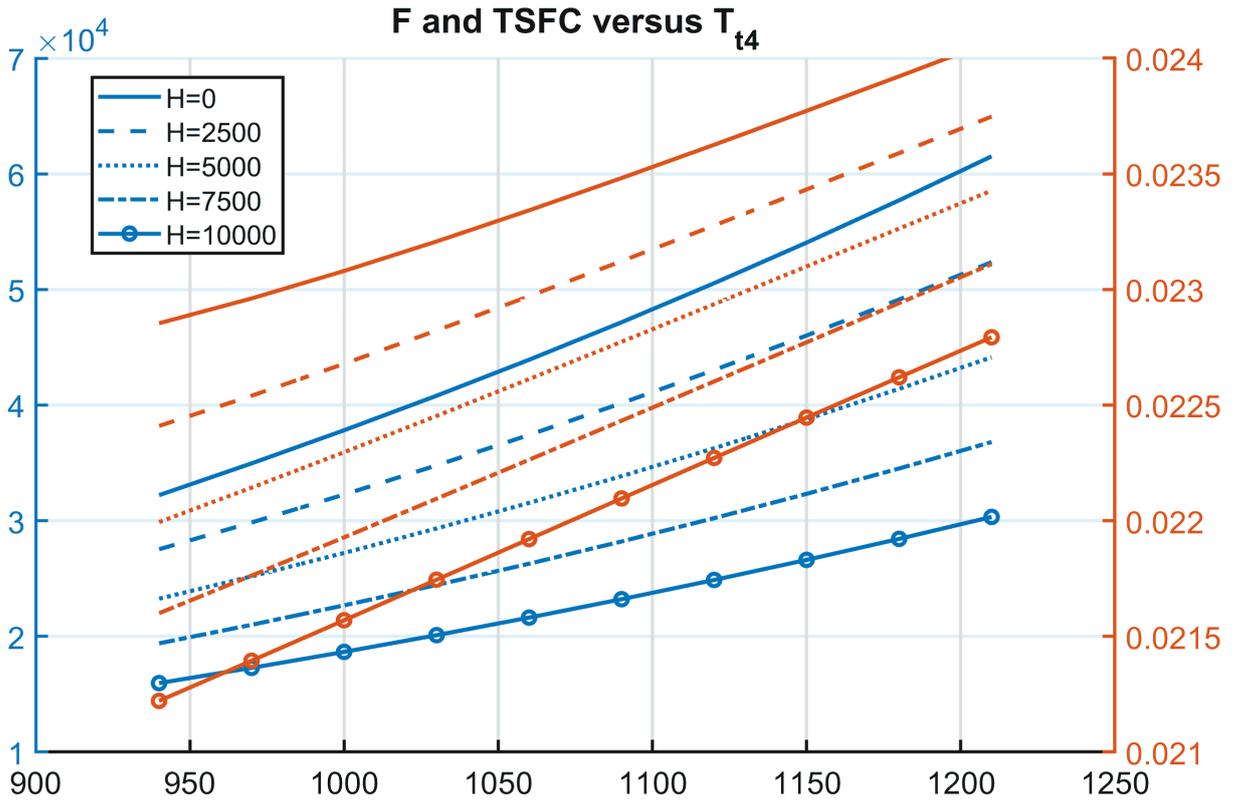
f and  $M_9$  versus  $M_0$



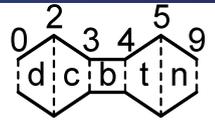
# J79 – Off Design



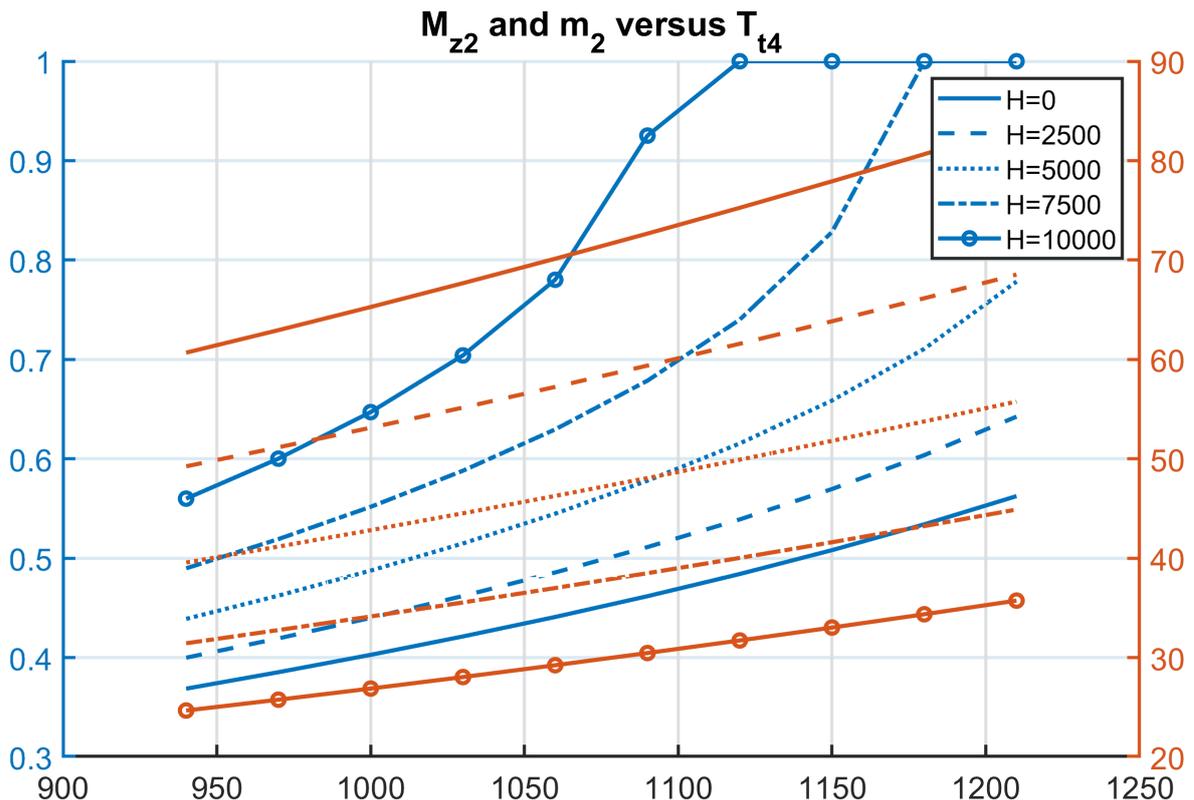
$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



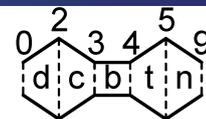
# J79 – Off Design



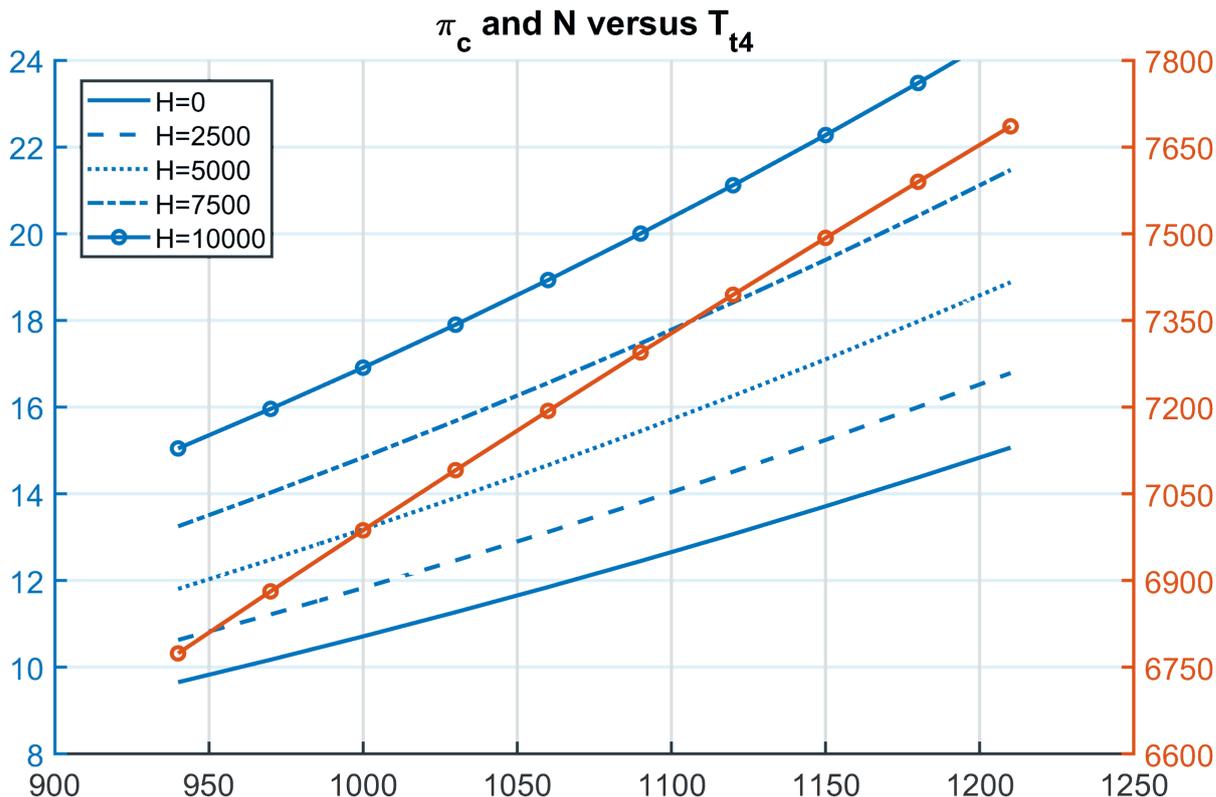
$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



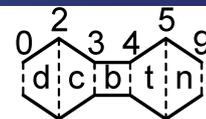
# J79 – Off Design



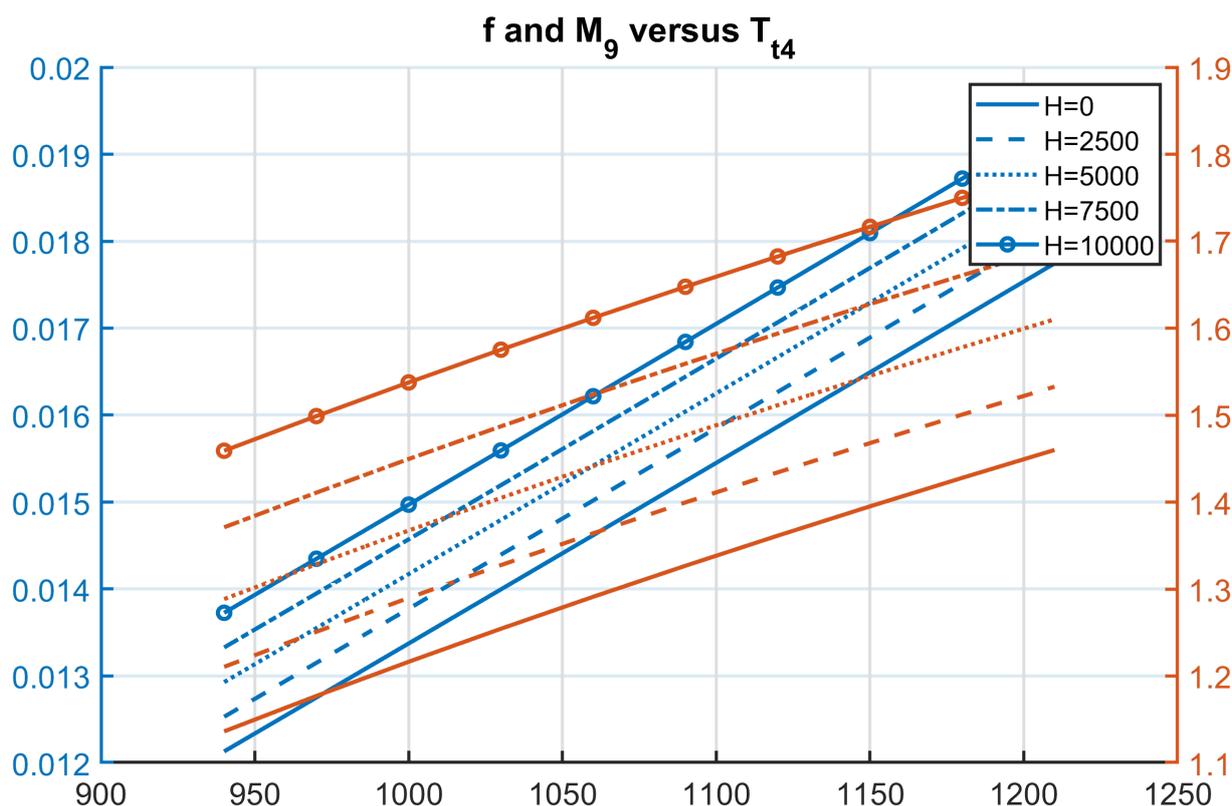
$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



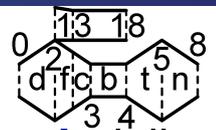
# J79 – Off Design



$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



Per determinare il funzionamento di un **turbofan al di fuori delle condizioni di progetto** si procede in modo analogo al turbogetto, fissando:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Parametri del compressore e del **fan**:  $\pi_{cH}, \pi_f = \pi_{cL}$ ;
- **Bypass ratio**:  $\alpha$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  ( $\tau_\lambda$ );
- Potere calorifico del combustibile:  $Q_R$ ;
- Rendimenti dei componenti:  $\pi_d$  ( $\eta_d$ ),  $\pi_b, \pi_n, \pi_{nf}, e_c$  ( $\eta_c$ ),  $e_f, e_t$  ( $\eta_t$ ),  $\eta_m, \eta_b$ ;
- Parametri dell'ugello:  $p_9/p_0$  ( $A_9/A_8$ ),  $p_{19}/p_0$  ( $A_{19}/A_{13}$ );
- Proprietà del gas:  $\gamma_2, c_{p2}, \gamma_4, c_{p4}$ ;

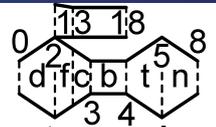
Si studia quindi il funzionamento del motore variando:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  o  $\tau_\lambda$ ;

I **rendimenti** possono essere assunti costanti o **rielaborati dalle mappe** dei componenti.



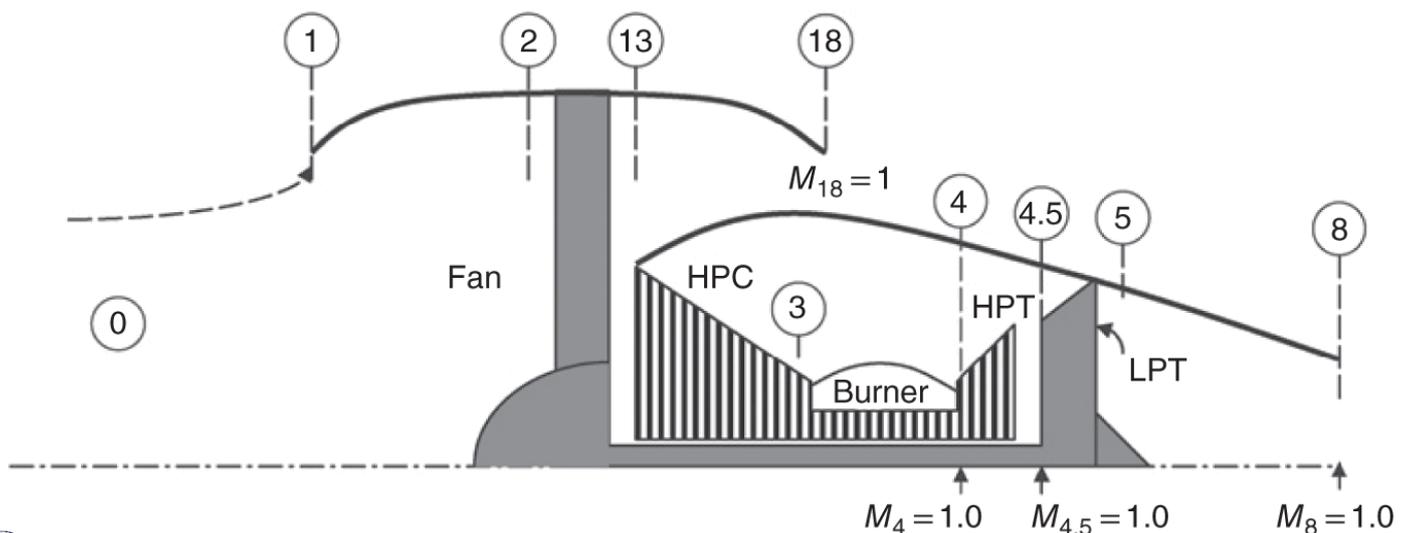
## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



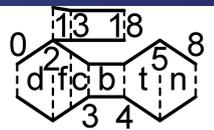
Si supponrà che le **sezioni 4, 8 e 18** siano **strozzate** e che il motore sia doppio albero. In queste ipotesi come già visto si ha:

$$\frac{\dot{m}_{c4.5}}{\dot{m}_{c8}} = \frac{\pi_{tL}}{\sqrt{\tau_{tL}}} = \text{cost} \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c4.5}} = \frac{\pi_{tH}}{\sqrt{\tau_{tH}}} = \text{cost}$$

e come già detto si può supporre che i singoli rapporti siano costanti.



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



I bilanci di **massa** nel **fan** e nel **cuore** sono:

$$\dot{m}_{18} = \sqrt{\frac{\gamma_{18} p_{t18} A_{18}}{R_{18}}} \left( \frac{\gamma_{18} + 1}{2} \right)^{-K_{18}} = \alpha \dot{m}_0$$

$$\dot{m}_8 = \sqrt{\frac{\gamma_8 p_{t8} A_8}{R_8}} \left( \frac{\gamma_8 + 1}{2} \right)^{-K_8} = (1 + f) \dot{m}_0$$

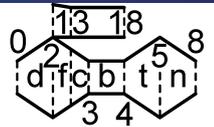
Dal rapporto fra le queste due equazioni, supponendo che in condizioni di **fuori progetto**  $\tau_t, \pi_t, \pi_b, \pi_n, \pi_{nf}$  ed  $f$  siano **costanti**, si ha:

$$\alpha = \text{cost} \frac{p_{t18}/\sqrt{T_{t18}}}{p_{t8}/\sqrt{T_{t8}}} \approx \text{cost} \frac{p_{t13}/\sqrt{T_{t13}}}{p_{t5}/\sqrt{T_{t5}}} = \text{cost} \frac{\sqrt{\frac{T_{t5} T_{t4} T_0 T_{t2}}{T_{t4} T_0 T_{t2} T_{t13}}}}{\frac{p_{t5} p_{t4} p_{t3}}{p_{t4} p_{t3} p_{t13}}}$$

$$= \text{cost} \frac{\sqrt{\frac{\tau_t \tau_\lambda}{\tau_r \tau_f}}}{\pi_t \pi_b \pi_{cH}} = \text{cost} \frac{\sqrt{\frac{\tau_\lambda}{\tau_r \tau_f}}}{\pi_{cH}} \rightarrow \alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda}} = C_3$$



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



$$\alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda}} = C_3$$

In questa equazione  $\tau_\lambda$  è **noto** mentre  $\tau_r$  si ricava dal numero di Mach. Le **incognite** sono  $\alpha, \pi_{cH}$  e  $\tau_f$ .

Il bilancio **d'energia** sull'albero di **alta pressione** è:

$$\dot{m}_0 (h_{t3} - h_{t13}) = \eta_{mH} \dot{m}_0 (1 + f) (h_{t4} - h_{t4.5})$$

da cui dividendo per  $h_{t2} \dot{m}_0$  e ricordando che  $\tau_{tH}$  è costante:

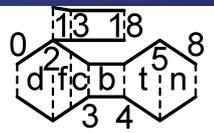
$$\tau_f (\tau_{cH} - 1) = \eta_{mH} (1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4} T_0}{c_{p2} T_0 T_{t2}} (1 - \tau_{tH}) = \eta_{mH} (1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r} (1 - \tau_{tH})$$

Che può essere messa nella forma:

$$\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda} (\tau_{cH} - 1) = C_1$$

Che è una seconda equazione nelle **incognite**  $\tau_{cH}$  e  $\tau_f$ .





Il bilancio **d'energia** sull'albero di **bassa pressione** è:

$$(1 + \alpha)(\dot{m}_0)(h_{t13} - h_{t2}) = \eta_{mL} \dot{m}_0 (1 + f)(h_{t4.5} - h_{t5})$$

da cui dividendo per  $h_{t2} \dot{m}_0$ :

$$(1 + \alpha)(\tau_f - 1) = \eta_{mL}(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4.5} T_{t4} T_0}{c_{p2} T_{t4} T_0 T_{t2}} (1 - \tau_{tL})$$

$$= \eta_{mL}(1 + f) \frac{\tau_{tH} \tau_\lambda}{\tau_r} (1 - \tau_{tL})$$

Che può essere messa nella forma:

$$\frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (1 + \alpha)(\tau_f - 1) = C_2$$

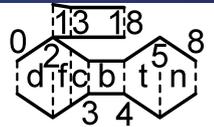
Che è la terza ed ultima equazione nelle **incognite**  $\alpha$  e  $\tau_f$ .

Le precedenti equazioni possono essere risolte per  $\tau_{tH}$  e  $\tau_{tL}$ :

$$\tau_{tH} = 1 - \frac{\tau_f(\tau_{cH} - 1)}{\eta_{mH}(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r}} \quad \tau_{tL} = 1 - \frac{(1 + \alpha)(\tau_f - 1)}{\eta_{mL}(1 + f) \frac{\tau_{tH} \tau_\lambda}{\tau_r}}$$



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



Le precedenti equazioni possono essere risolte per  $\tau_{tH}$  e  $\tau_{tL}$ :

$$\tau_{tH} = 1 - \frac{\tau_f(\tau_{cH} - 1)}{\eta_{mH}(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r}} \quad \tau_{tL} = 1 - \frac{(1 + \alpha)(\tau_f - 1)}{\eta_{mL}(1 + f) \frac{\tau_{tH} \tau_\lambda}{\tau_r}}$$

Supponendo che  $\eta_{mH} = \eta_{mL} = \eta_m$  e sommando si ha:

$$\eta_m(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r} [\tau_{tH} - 1 + \tau_{tL} \tau_{tH} - \tau_{tH}] = -\tau_f(\tau_{cH} - 1) - (1 + \alpha)(\tau_f - 1)$$

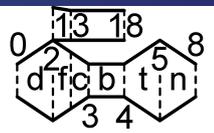
$$\eta_m(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r} [\tau_t - 1] = -[\tau_c - \tau_f + (1 + \alpha)(\tau_f - 1)]$$

$$= -[\tau_c - 1 + \alpha(\tau_f - 1)]$$

Che è equivalente a quella trovata in precedenza:

$$\tau_t = 1 - \frac{\tau_c - 1 + \alpha(\tau_f - 1)}{\eta_m(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r}}$$





Ricordando che:

$$\pi_{cH} = \tau_{cH}^{\frac{e_{cH}}{k}}$$

si hanno 3 equazioni **non lineari** nelle **incognite**  $\tau_{cH}$ ,  $\tau_f$  e  $\alpha$ :

$$\alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda}} = C_3 \quad \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (1 + \alpha)(\tau_f - 1) = C_2 \quad \frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda} (\tau_{cH} - 1) = C_1$$

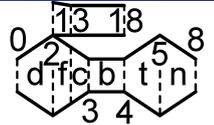
che possono essere **combinare**, dalla terza e dalle prime due:

$$\tau_f = \frac{\tau_\lambda C_1}{(\tau_{cH} - 1) \tau_r}$$

$$\frac{\tau_r}{\tau_\lambda} \left( 1 + \frac{C_3}{\pi_{cH}} \sqrt{\frac{\tau_\lambda}{\tau_r \tau_f}} \right) (\tau_f - 1) = \left( \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} + \frac{C_3}{\pi_{cH}} \sqrt{\frac{\tau_r}{\tau_\lambda \tau_f}} \right) (\tau_f - 1) = C_2$$



# Condizioni di fuori progetto - Turbofan



$$\tau_f = \frac{\tau_\lambda C_1}{(\tau_{cH} - 1) \tau_r} \quad \left( \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} + \frac{C_3}{\pi_{cH}} \sqrt{\frac{\tau_r}{\tau_\lambda \tau_f}} \right) (\tau_f - 1) = C_2$$

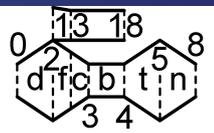
sostituendo la prima equazione nella seconda ed esprimendo il rapporto di pressione in termini di quello di temperature si ha:

$$\left( \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} + \frac{C_3}{\tau_{cH}} \sqrt{\frac{\tau_r}{\tau_\lambda \frac{\tau_\lambda C_1}{(\tau_{cH} - 1) \tau_r}}} \right) \left( \frac{\tau_\lambda C_1}{(\tau_{cH} - 1) \tau_r} - 1 \right) = C_2$$

$$\left( 1 + \frac{C_3}{\tau_{cH}} \sqrt{\frac{\tau_{cH} - 1}{C_1}} \right) \left( \frac{C_1}{(\tau_{cH} - 1)} - \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} \right) = C_2$$

che deve essere risolta **nell'unica** incognita  $\tau_{cH}$ . successivamente si ricavano  $\tau_f$  e  $\alpha$ .





Come nel turbogetto la portata corretta è:

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{1 + \alpha_{OD} \pi_{c,OD}}{1 + \alpha_D \pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{1 + \alpha_{OD} \pi_{c,OD}}{1 + \alpha_D \pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\Theta_D}{\Theta_{OD}}}$$

$$\frac{N_{c2}}{N_{c4.5}} = \sqrt{\frac{T_{t4.5}}{T_{t2}}} \quad \frac{N_{c2.5}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2.5}}}$$

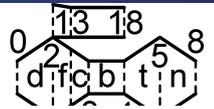
La costanza di  $\tau_{tL}$  e  $\tau_{tH}$  implica che anche  $N_{c4.5}$  e  $N_{c4}$  siano **costanti**.  
Di conseguenza:

$$N_{c4,OD} \approx N_{c4,D} \approx \text{cost} \quad N_{c4.5,OD} \approx N_{c4.5,D} \approx \text{cost}$$

$$\frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4.5}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4.5}/T_{t2})_D}} \quad \frac{N_{c2.5,OD}}{N_{c2.5,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2.5})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2.5})_D}}$$



# Condizioni di fuori progetto - Turbofan



Consider a separate-flow turbofan engine (as in Figure 11.12) with the following design-point parameters:

1.  $M_0 = 0, p_0 = 0.1 \text{ MPa}, T_0 = 15^\circ\text{C}$
2.  $\pi_d = 0.98$
3.  $\pi_f = 2.0, e_f = 0.90$
4.  $\alpha = 6.0$
5.  $\pi_{cH} = 15, e_{cH} = 0.90$
6.  $T_{t4} = 1700^\circ\text{C}, Q_R = 42,800 \text{ kJ/kg}, \eta_b = 0.99, \pi_b = 0.95$
7.  $e_{tH} = 0.85, \eta_{mH} = 0.995$
8.  $e_{tL} = 0.89, \eta_{mL} = 0.995$
9.  $\pi_n = \pi_{nf} = 0.98, p_8 = p_{18} = p_0$
10.  $\gamma_c = 1.4, c_{pc} = 1004 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

11.  $\gamma_t = 1.33, c_{pt} = 1146 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

12.  $M_4 = M_{4.5} = M_8 = M_{18} = 1.0$

The off-design operation of this engine is represented by a cruise altitude flight such as

$$M_0 = 0.85, p_0 = 11 \text{ kPa}, T_0 = -15^\circ\text{C}$$

$$T_{t4} = 1500^\circ\text{C}$$

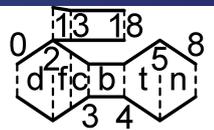
$$\pi_d = 0.995$$

All other efficiencies and gas properties remain constant.  
Calculate the following parameters at off-design condition:

- (a) Fan pressure ratio  $\pi_f$
- (b) High-pressure compressor pressure ratio  $\pi_{cH}$
- (c) Bypass ratio  $\alpha$



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



Si inizia valutando le tre costanti in condizioni di progetto:

$$\alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda}} = C_3 \quad \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (1 + \alpha)(\tau_f - 1) = C_2 \quad \frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda} (\tau_{cH} - 1) = C_1$$

$$\tau_r = \psi_0 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 = 1 \quad \tau_f = \pi_f^{\frac{k}{e_f}} = 2^{\frac{.286}{0.90}} = 1.246$$

$$\tau_{cH} = \pi_{cH}^{\frac{k}{e_c}} = 15^{\frac{.286}{0.90}} = 2.36 \quad \tau_\lambda = \frac{c_{pt} T_{t4}}{c_{pc} T_0} = \frac{1146}{1004} \cdot \frac{1973}{288} = 7.816$$

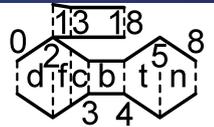
$$C_1 = \frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda} (\tau_{cH} - 1) = \frac{1 \cdot 1.246}{7.816} 1.36 = 0.2172$$

$$C_2 = \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (1 + \alpha)(\tau_f - 1) = \frac{1}{7.816} 7 \cdot 0.246 = 0.2204$$

$$C_3 = \alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_\lambda}} = 6 \cdot 15 \sqrt{\frac{1 \cdot 1.246}{7.816}} = 35.94$$



## Condizioni di fuori progetto - Turbofan



$$C_1 = 0.2172 \quad C_2 = 0.2204 \quad C_3 = 35.94$$

$$\tau_r = 1 \quad \tau_f = 1.246 \quad \tau_{cH} = 2.36 \quad \tau_\lambda = 7.816$$

In condizioni di fuori progetto si ha:

$$\tau_{r,0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} 0.85^2 = 1.145 \quad \tau_{\lambda,0} = \frac{c_{pt} T_{t4}}{c_{pc} T_0} = \frac{1146}{1004} \cdot \frac{1773}{258} = 7.840$$

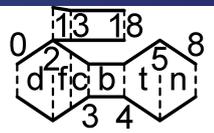
Sostituendo questi valori nella:

$$\left( 1 + \frac{C_3}{\tau_{cH}^{\frac{e_{cH}}{k}}} \sqrt{\frac{\tau_{cH} - 1}{C_1}} \right) \left( \frac{C_1}{(\tau_{cH} - 1)} - \frac{\tau_r}{\tau_\lambda} \right) = C_2$$

Si ha:

$$\left( 1 + \frac{35.94}{\tau_{cH}^{3.15}} \sqrt{\frac{\tau_{cH} - 1}{0.2172}} \right) \left( \frac{0.2172}{(\tau_{cH} - 1)} - 0.1460 \right) = 0.2204$$





$$\left( 1 + \frac{35.94}{\tau_{cH}^{3.15}} \sqrt{\frac{\tau_{cH} - 1}{0.2172}} \right) \left( \frac{0.2172}{(\tau_{cH} - 1)} - 0.1460 \right) = 0.2204$$

Che risolta iterativamente fornisce  $\tau_{cH} = 2.245$ . Da cui:

$$\pi_{cH.0} = \tau_{cH.0}^{\frac{e_{cH}}{k}} = 2.245^{3.15} = 12.77$$

$$C_1 = 0.2172 \quad C_2 = 0.2204 \quad C_3 = 35.94 \quad \tau_{r.0} = 1.145 \quad \tau_{\lambda.0} = 7.840$$

$$\tau_{f.0} = \frac{\tau_{\lambda} C_1}{(\tau_{cH} - 1) \tau_r} = \frac{7.840 \cdot 0.2172}{1.245 \cdot 1.145} = 1.195$$

$$\pi_{f.0} = \tau_{f.0}^{\frac{e_f}{k}} = 1.195^{3.15} = 1.754$$

$$\alpha \pi_{cH} \sqrt{\frac{\tau_r \tau_f}{\tau_{\lambda}}} = C_3 \rightarrow \alpha.0 = \frac{C_3}{\pi_{cH.0}} \sqrt{\frac{\tau_{\lambda.0}}{\tau_{r.0} \tau_{f.0}}} = \frac{35.94}{12.77} \sqrt{\frac{7.840}{1.145 \cdot 1.195}}$$

$$= 6.752$$

