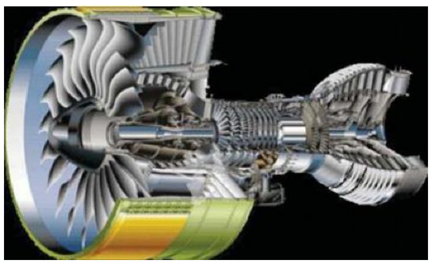
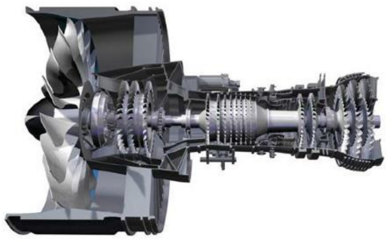



UNIVERSITY OF NAPLES ***FEDERICO II*** *1224 A.D.*

Propulsione Aerospaziale

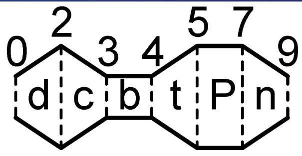
T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

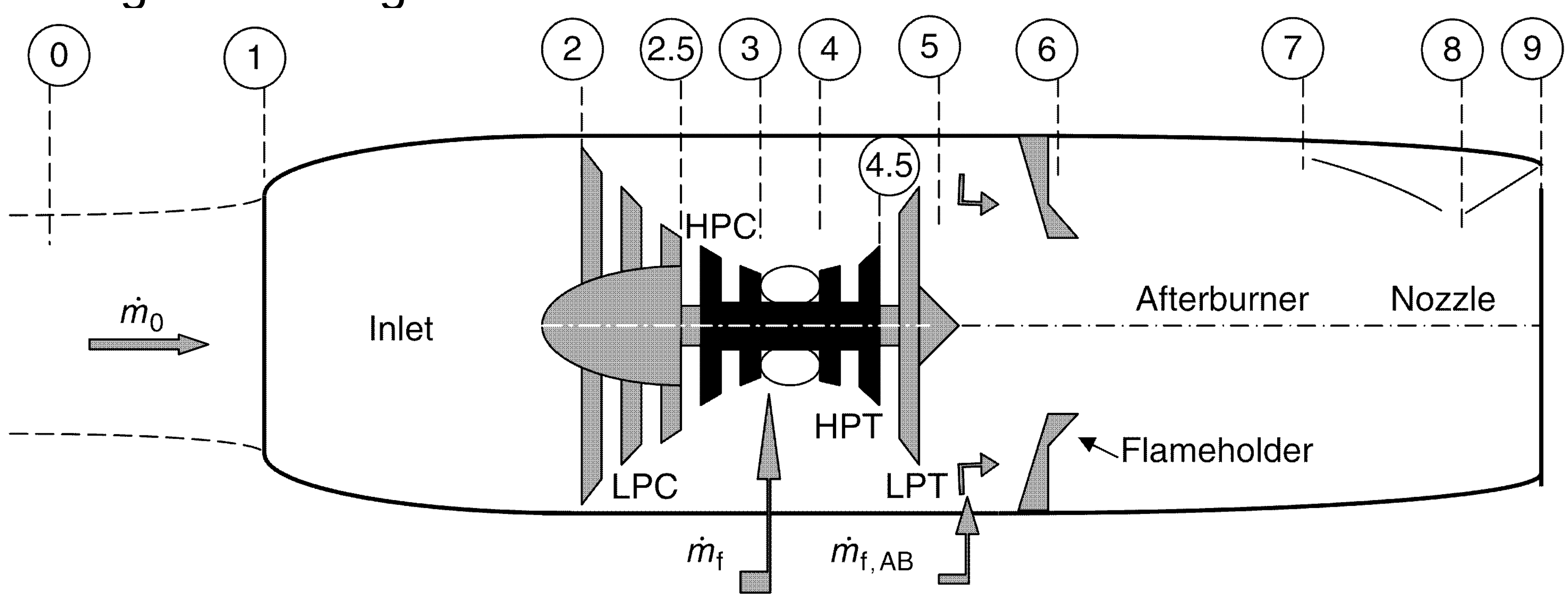
Versione del 5.4.2019

Post Bruciatore

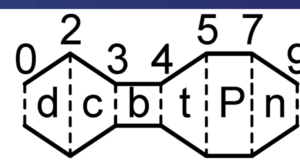


Spesso, in particolare per applicazioni militari, si usa un **postbruciatore** (AfterBurner AB) per **aumentare la spinta** dei motori a turbina. Questa soluzione ha il potenziale di raddoppiare la spinta senza notevoli modifiche del motore. Il prezzo da pagare è un **aumento** significativo **consumo** di carburante.

La geometria dell'ugello in questo caso è normalmente di tipo convergente divergente.



Post Bruciatore



La successiva combustione provoca un aumento della temperatura di ristagno **riducendo la portata critica** rispetto al funzionamento senza post bruciatore:

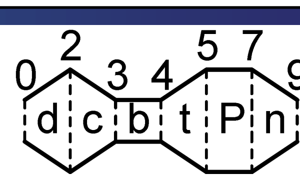
$$\dot{m} = \frac{p_t A^* \Psi^*}{a_t}$$

è necessario quindi utilizzare un ugello a **geometria variabile**. Nella realtà oltre all'aumento di temperatura di ristagno sarà presente anche un leggero aumento della portata ed una diminuzione della pressione di ristagno oltre ad una variazione del gas.

In prima approssimazione si ha:

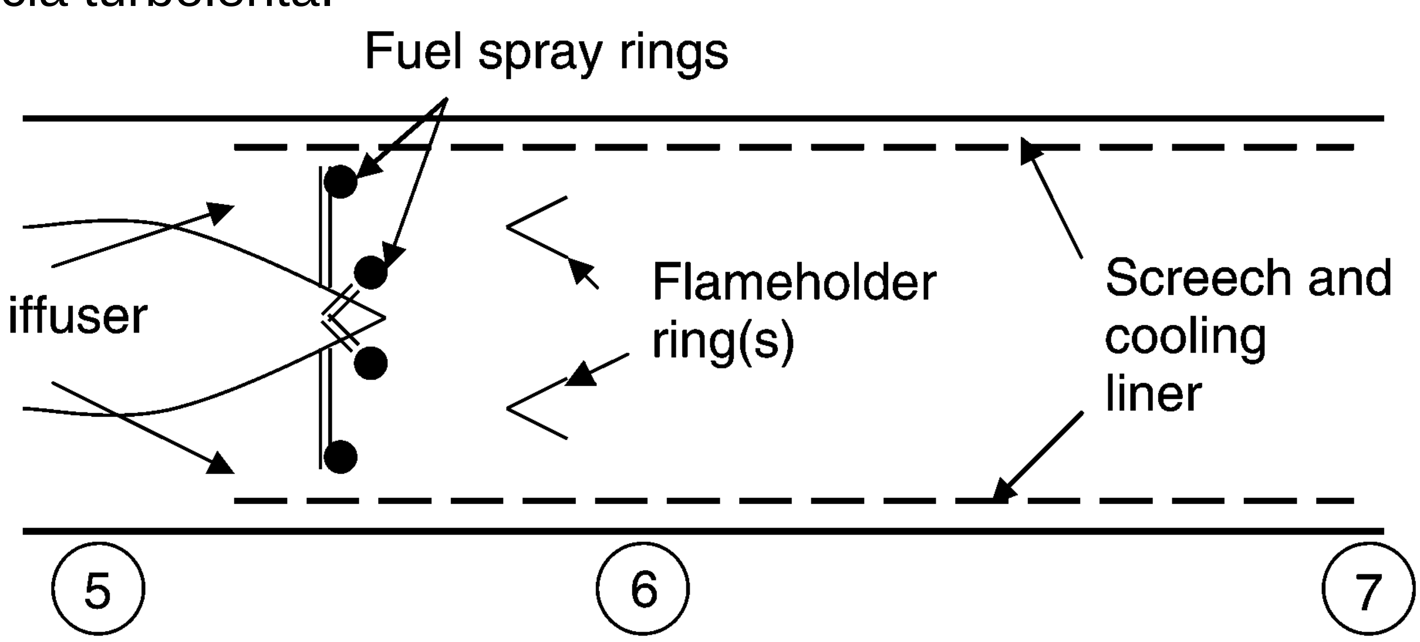
$$\frac{A_{8AB}}{A_8} \approx \sqrt{\frac{T_{t8AB}}{T_{t8}}}$$

Post Bruciatore



Un post bruciatore è composto da un diffusore, un sistema di vaporizzazione ed uno stabilizzatore di fiamma.

- Il **diffusore** serve per rallentare la corrente ed aumentare l'efficienza della combustione;
- Il **sistema di vaporizzazione** è normalmente montato su una serie di anelli con vari ugelli che generano lo **spray**;
- Gli **stabilizzatori** hanno una forma a V e creano una zona di ricircolo nella loro scia turbolenta.



Post Bruciatore

Inoltre è normalmente usato **un cilindro perforato** per ridurre il rumore generato dalle instabilità della combustione e come condotto per il raffreddamento.

Nella schematizzazione del post bruciatore si suppone che gli **scambi termici** siano **trascurabili**. I parametri che influenzano il funzionamento di un post bruciatore sono:

- Il potere calorifico del combustibile $Q_{R.AB}\left[\frac{kJ}{kg}\right]$;
- La portata di combustibile o la temperatura d'uscita ($\dot{m}_{f.AB}$ o f_{AB} o T_{t7} o $\tau_{\lambda.AB}=\frac{h_{t7}}{h_0}$);
- Il rendimento della combustione η_{AB};
- Il rapporto delle pressioni di ristagno $\pi_{AB}=\frac{p_{t7}}{p_{t5}}$.

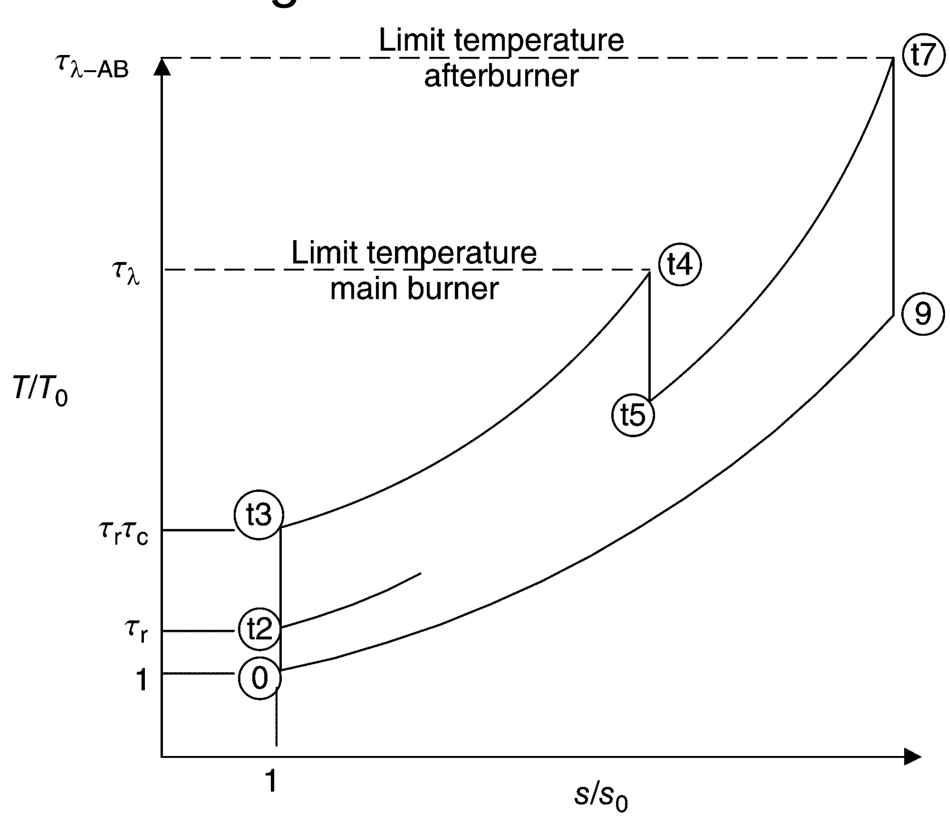
Post Bruciatore

Il **ciclo termodinamico ideale** modificato è mostrato in figura in termini adimensionali (in realtà sarebbe meglio avere l'entalpia sulle ordinate).

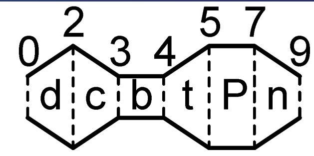
Nell'analisi si suppone che il postbruciatore non influenzi i componenti a monte.

Evidentemente la caduta di pressione di ristagno sarà diversa se il PB è acceso o spento:

$\pi_{AB.OFF} > \pi_{AB.ON}$



Post Bruciatore



Da un **bilancio** di **energia** si ha:

$$(\dot{m}_0 + \dot{m}_f + \dot{m}_{f.AB})h_{t7} - (\dot{m}_0 + \dot{m}_f)h_{t5} = \dot{m}_{f.AB}Q_{R.AB}\eta_{AB}$$

dividendo per la portata d'aria e risolvendo si ha:

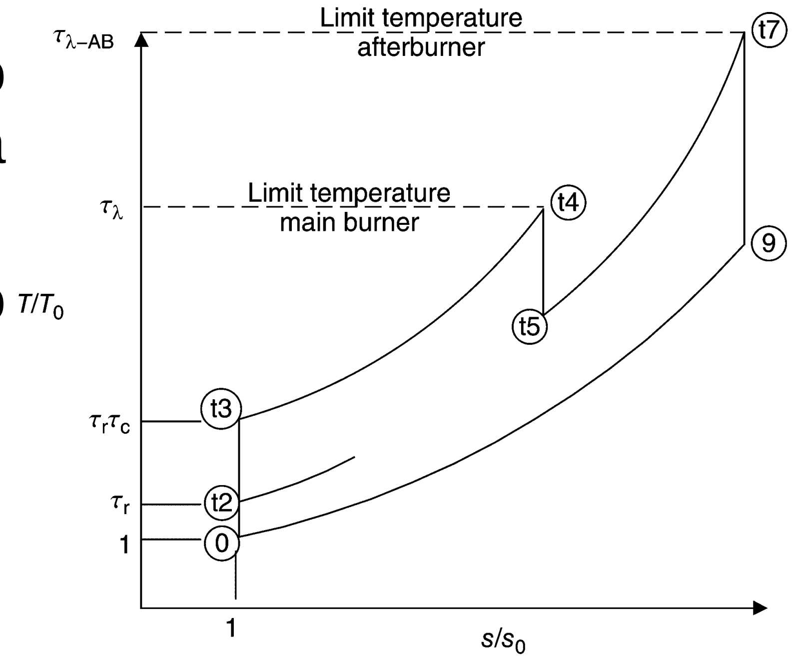
$$(1 + f + f_{AB})h_{t7} - (1 + f)h_{t5} = f_{AB}Q_{R.AB}\eta_{AB}$$

$$f_{AB} = \frac{(1+f)(h_{t7} - h_{t5})}{Q_{R.AB}\eta_{AB} - h_{t7}} = \frac{(1+f)(\tau_{\lambda AB} - \tau_\lambda \tau_t)}{\frac{Q_{R.AB}\eta_{AB}}{c_p T_0} - \tau_{\lambda.AB}} \qquad \tau_{\lambda.AB} = \frac{h_{t7}}{h_0}$$

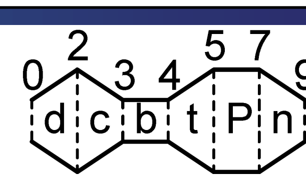
In questa equazione si devono considerare note tutte le grandezze a destra del segno uguale.

La pressione si può ricavare dal rapporto delle **pressioni di ristagno**:

$$p_{t7} = \pi_{AB} p_{t5}$$



Post Bruciatore



L'equazione della spinta $\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1+f)\frac{V_9}{a_0}\left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) - M_0$ diventa:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + f + f_{AB})\frac{V_9}{a_0}\left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) - M_0$$

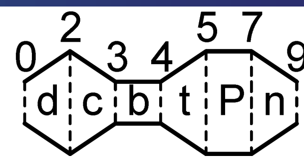
dove:

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{\frac{Q_R \eta_b}{c_p T_0} - \tau_\lambda} \qquad f_{AB} = \frac{(1+f)(\tau_{\lambda.AB} - \tau_\lambda \tau_t)}{\frac{Q_{R.AB}\eta_{AB}}{c_p T_0} - \tau_{\lambda.AB}}$$

$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9\sqrt{\frac{\gamma_9 R_9 T_9}{\gamma R T_0}} \qquad M_9^2 = \frac{2}{\gamma_9 - 1}\left[\left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^{k_9} - 1\right]$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}}\frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\tau_{\lambda.AB} c_p / c_{pAb}}{\left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^{k_9}} \qquad \frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_{AB} \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9}$$

Post Bruciatore



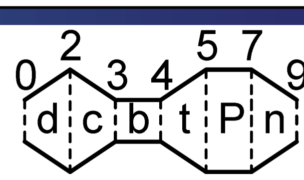
Infine i rendimenti:

$$TSFC = \frac{f + f_{AB}}{F_u/\dot{m}_0}$$

$$\eta_{th} = \frac{\Delta K\dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{(1 + f + f_{AB})V_9^2 - V_0^2}{2(f + f_{AB})Q_R} = \frac{a_0^2[(1 + f + f_{AB})(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}{2(f + f_{AB})Q_R}$$

$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K\dot{E}} \approx \frac{2F_u V_0/\dot{m}_0}{a_0^2[(1 + f + f_{AB})(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}$$

Post Bruciatore



Nel caso ideale:

$$\eta_{AB} = 1 \qquad \tau_t = \pi_t^{k_t} \qquad \tau_c = \pi_c^k \qquad \pi_{AB} = 1$$

$$\dot{m}_0 \approx \dot{m}_9 \qquad \rightarrow \qquad 1 + f + f_{AB} \rightarrow 1 \qquad p_9 = p_0$$

Trascurando $f\tau_\lambda$ e $f\tau_{\lambda.AB}$ e supponendo che $Q_{R.AB} = Q_R$ si ha:

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c\tau_r}{\frac{Q_R\eta_b}{c_pT_0} - \tau_\lambda} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c\tau_r}{\frac{Q_R}{c_pT_0}} \qquad f_{AB} = \frac{(1 + f)(\tau_{\lambda AB} - \tau_\lambda\tau_t)}{\frac{Q_{R.AB}\eta_{AB}}{c_pT_0} - \tau_{\lambda.AB}} = \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_\lambda\tau_t}{\frac{Q_R}{c_pT_0}}$$

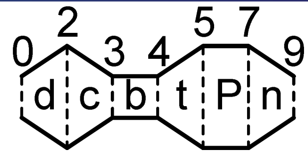
Ricordando che $\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda}$ si trova:

$$f + f_{AB} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c\tau_r + \tau_{\lambda AB} - \tau_\lambda\tau_t}{Q_R/c_pT_0} = \frac{\cancel{\tau_\lambda} - \cancel{\tau_c}\tau_r + \tau_{\lambda AB} - \cancel{\tau_\lambda} + (\cancel{\tau_c} - 1)\tau_r}{Q_R/c_pT_0}$$

$$f + f_{AB} = \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_r}{Q_R/c_pT_0}$$

Che è **funzione** del **numero di Mach** e **non** del **rapporto di compressione.**

Post Bruciatore



Per la spinta si ha:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + \cancel{f} + \cancel{f_{AB}})\frac{V_9}{a_0}\left(1 + \frac{1 - \cancel{\frac{p_0}{p_9}}}{\gamma_9 M_9^2}\right) - M_0 = \frac{V_9}{a_0} - M_0$$

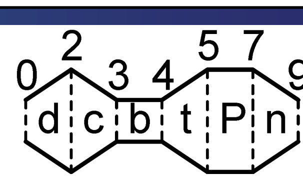
$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9\sqrt{\frac{T_9}{T_0}} \qquad \frac{p_{t9}}{p_9} = \overset{=1}{\cancel{\pi_n}}\overset{=1}{\cancel{\pi_{AB}}}\pi_t\overset{=1}{\cancel{\pi_b}}\pi_c\overset{=1}{\cancel{\pi_d}}\pi_r\overset{=1}{\cancel{\frac{p_0}{p_9}}} = \tau_t^{\frac{1}{k}}\tau_c^{\frac{1}{k}}\tau_r^{\frac{1}{k}}$$

$$M_9^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^k - 1\right] = \frac{2}{\gamma - 1}(\tau_t\tau_c\tau_r - 1) \qquad \tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c\tau_r}$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}}\frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\tau_{\lambda.AB}}{\left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^k} = \frac{\tau_{\lambda.AB}}{\tau_t\tau_c\tau_r} = \frac{\tau_{AB}\tau_t\tau_\lambda}{\tau_t\tau_c\tau_r} = \tau_{AB}\tau_b$$

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\tau_{AB}\tau_b(\tau_t\tau_c\tau_r - 1)} - M_0 \qquad \frac{\tau_{\lambda.AB}}{\tau_t\tau_c\tau_r} = \tau_{AB}\tau_b$$

Post Bruciatore



$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\tau_{AB}\tau_b(\tau_t\tau_c\tau_r - 1)} - M_0 \qquad \frac{\tau_{\lambda.AB}}{\tau_t\tau_c\tau_r} = \tau_{AB}\tau_b$$

che confrontata con quella relativa al caso senza post bruciatore :

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\tau_b(\tau_t\tau_c\tau_r - 1)} - M_0$$

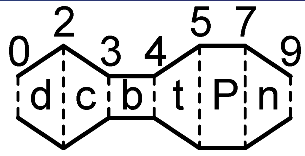
mostra esplicitamente l'influenza del post bruciatore.

Anche in questo caso si può trovare un **rapporto di compressione** ottimo, che massimizza la spinta, in funzione dei rapporti di temperature massime. Riscrivendo la spinta come:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\tau_{\lambda.AB}\left(1 - \frac{1}{\tau_t\tau_c\tau_r}\right)} - M_0$$

si nota che il termine $\tau_t\tau_c\tau_r$ deve essere massimizzato

Post Bruciatore



ricordando che: $\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda}$

$$\tau_t \tau_c \tau_r = \tau_c \tau_r \left(1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda}\right)$$

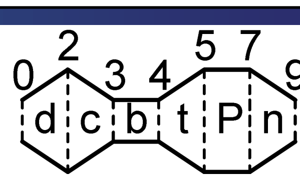
per ottenere il rapporto τ_c che da il massimo si differenzia ed uguaglia a zero:

$$\frac{d}{d\tau_c} \tau_c \tau_r \left(1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda}\right) = \tau_r - (\tau_c - 1)\frac{\tau_r^2}{\tau_\lambda} - \tau_c \frac{\tau_r^2}{\tau_\lambda} = \tau_r - \frac{2\tau_c \tau_r^2}{\tau_\lambda} + \frac{\tau_r^2}{\tau_\lambda}$$

$$\tau_\lambda - 2\tau_{c_{max}} \tau_r + \tau_r = 0$$

$$\tau_{c_{max}} = \frac{\tau_\lambda + \tau_r}{2\tau_r} \rightarrow \pi_{c_{max}} = \left(\frac{\tau_\lambda + \tau_r}{2\tau_r}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Post Bruciatore



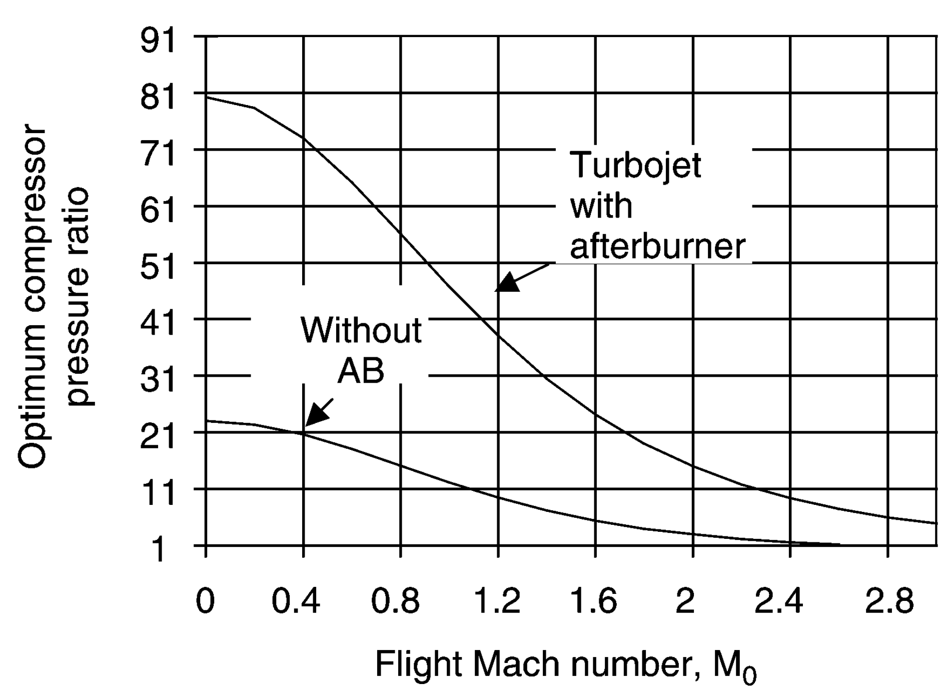
$$\tau_{c_{max}} = \frac{\tau_\lambda + \tau_r}{2\tau_r} \rightarrow \pi_{c_{max}} = \left(\frac{\tau_\lambda + \tau_r}{2\tau_r}\right)^{\frac{1}{k}} \qquad \pi_{c_{max}.TJET} = \left(\frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\tau_r}\right)^{k}$$

Come si vede il rapporto di compressione ottimo è **indipendente** dal **limite** di **temperatura** nel post bruciatore (PB).

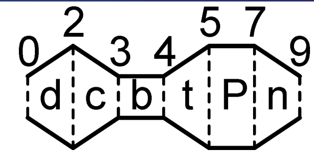
Dalla figura si nota:

- in regime subsonico $\pi_{c_{max}}$ è molto grande;
- $\pi_{c_{max}}$ senza PB è sempre minore di quello con PB;

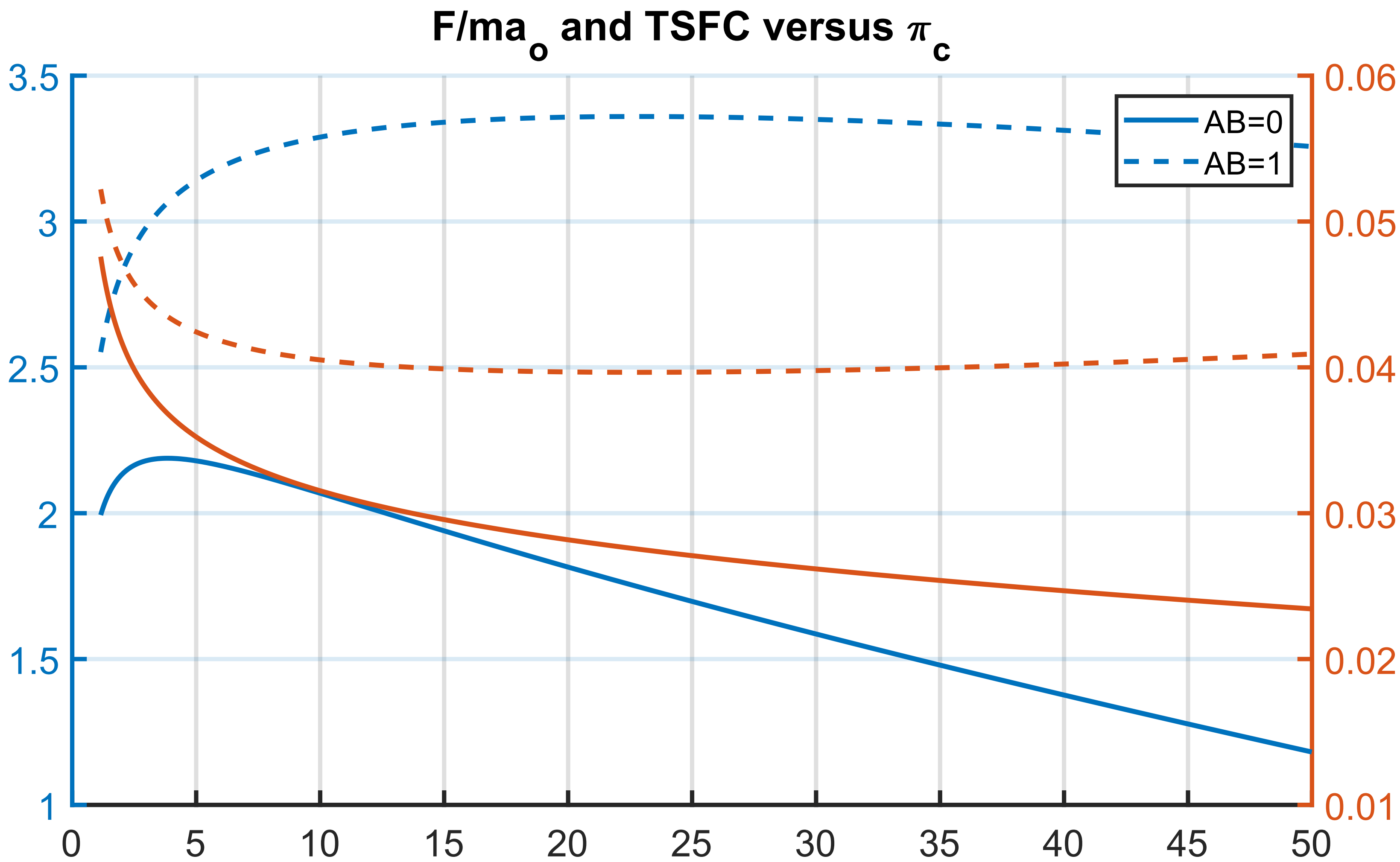
Il che permette di avere un **motore** che può **funzionare** in condizioni quasi **ottimali** sia in regime **subsonico** con PB spento che **supersonico** con PB acceso.



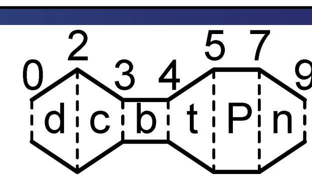
Post Bruciatore



$M_0 = 2, T_{t4} = 1750K, T_{t7} = 2250K, T_0 = 250K, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$

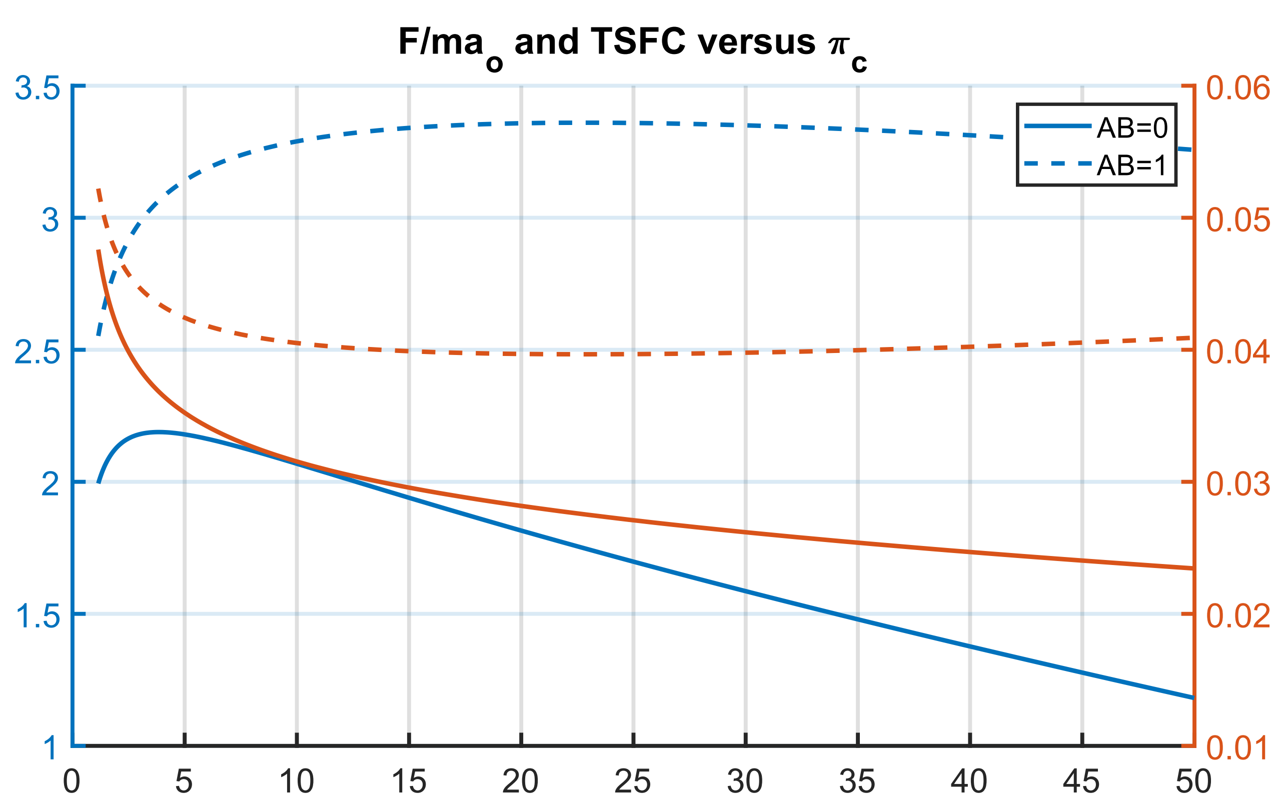


Post Bruciatore

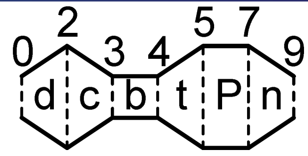


Accendendo il post bruciatore si nota

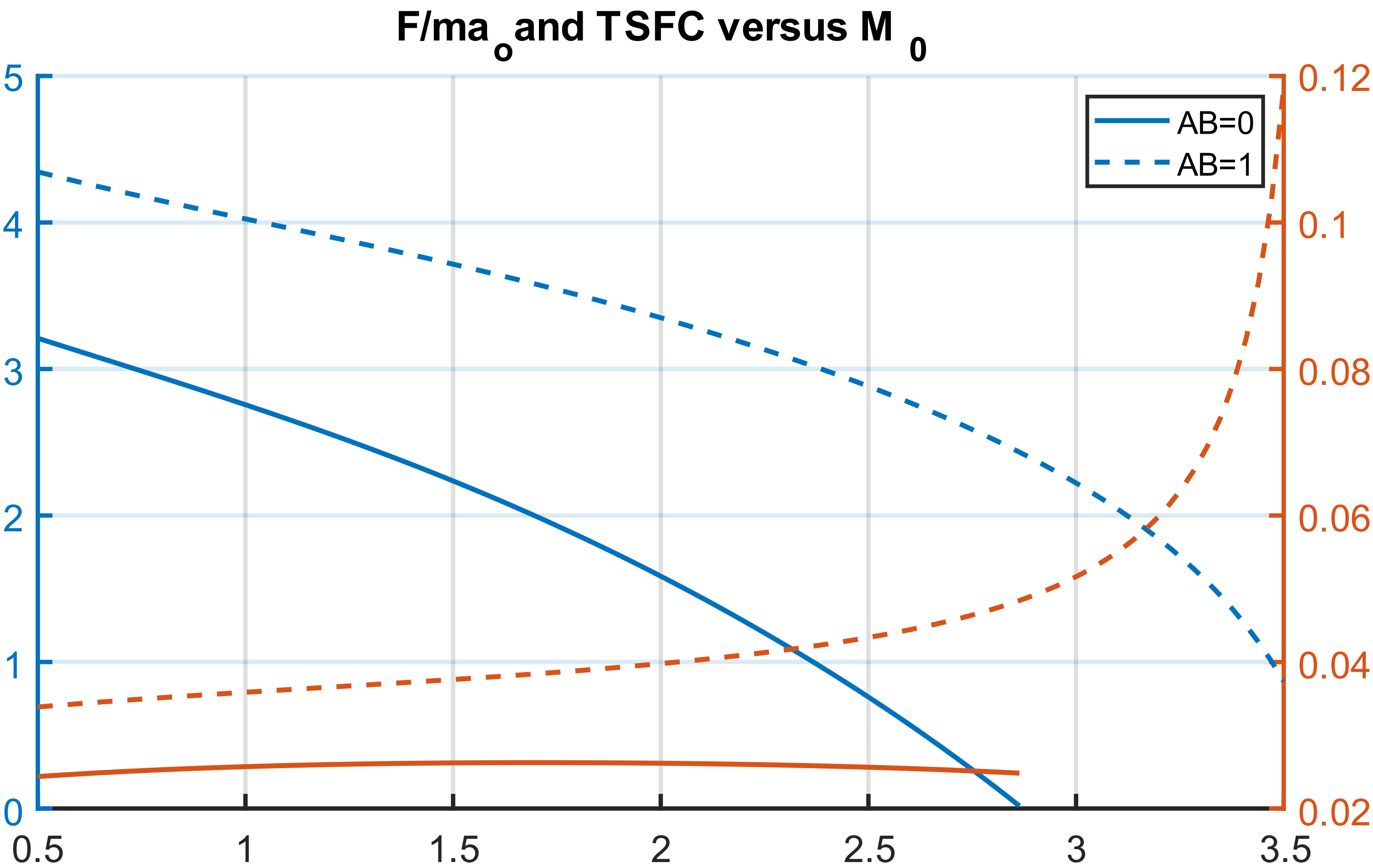
- Un aumento della spinta e del consumo specifico;
- Uno spostamento del rapporto di compressione ottimo verso destra.



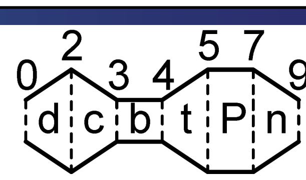
Post Bruciatore



$\pi_c = 30, T_{t4} = 1750K, T_{t7} = 2250K, T_0 = 250K, Q_R = 42{,}800kJ/kg$

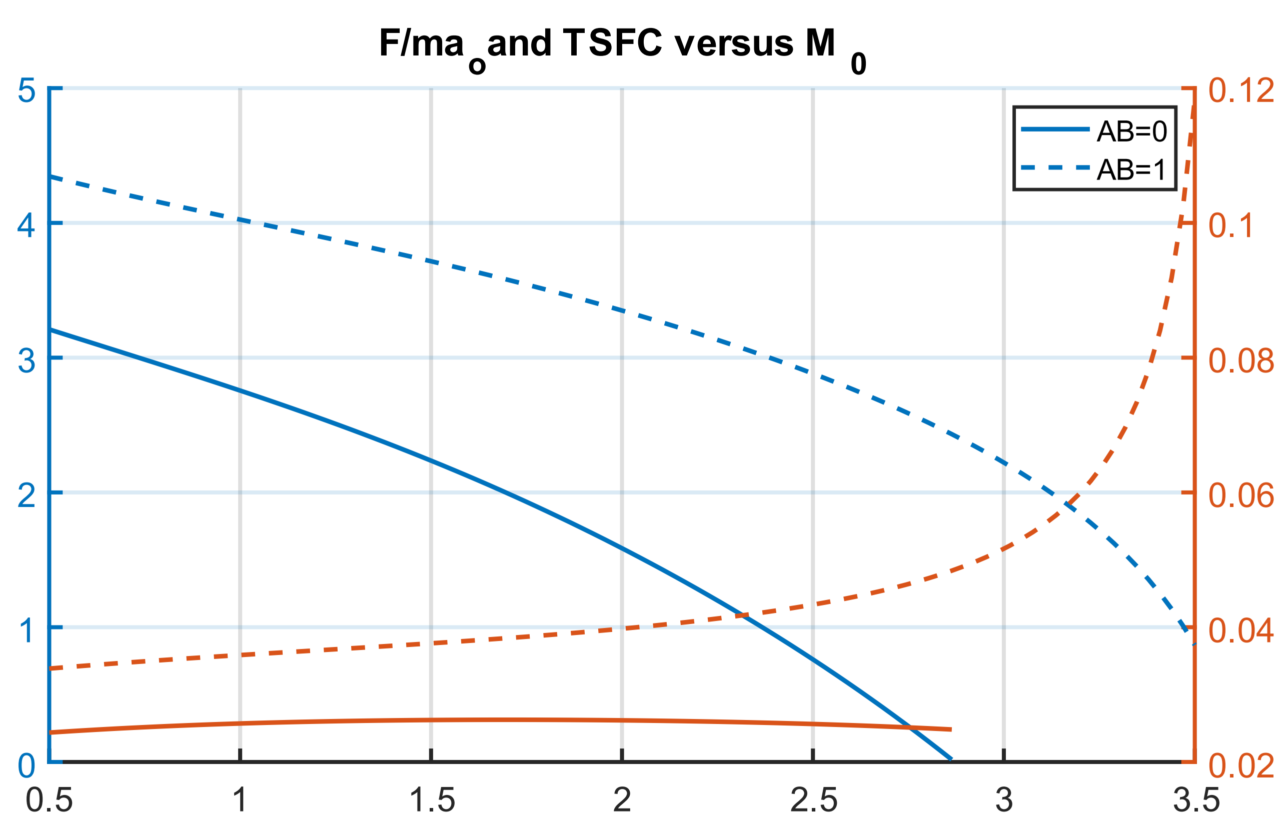


Post Bruciatore



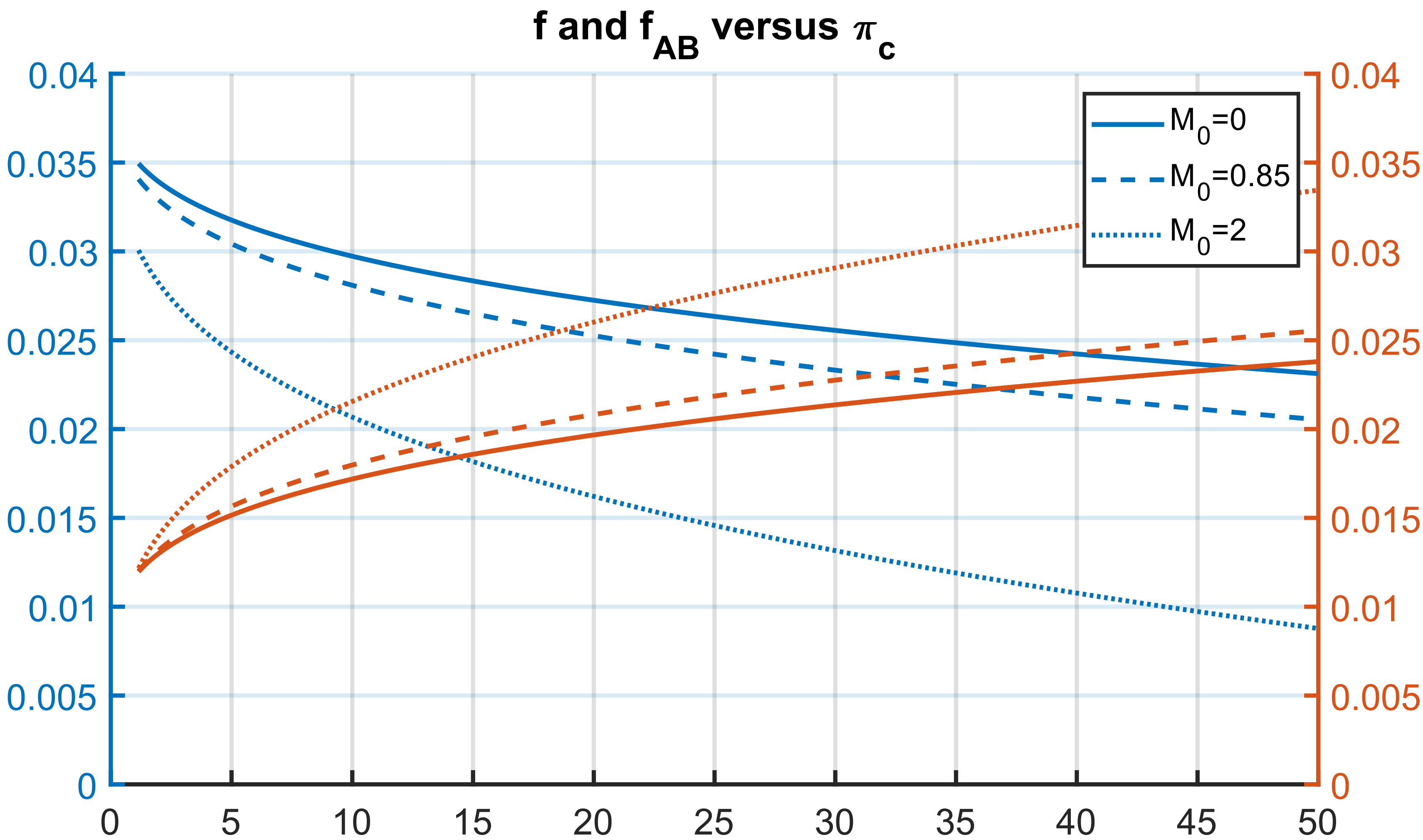
Aumentando il numero di Mach:

- La spinta tende a zero a valori maggiori del numero di Mach;
- Si estende il range di utilizzo del motore.



Post Bruciatore

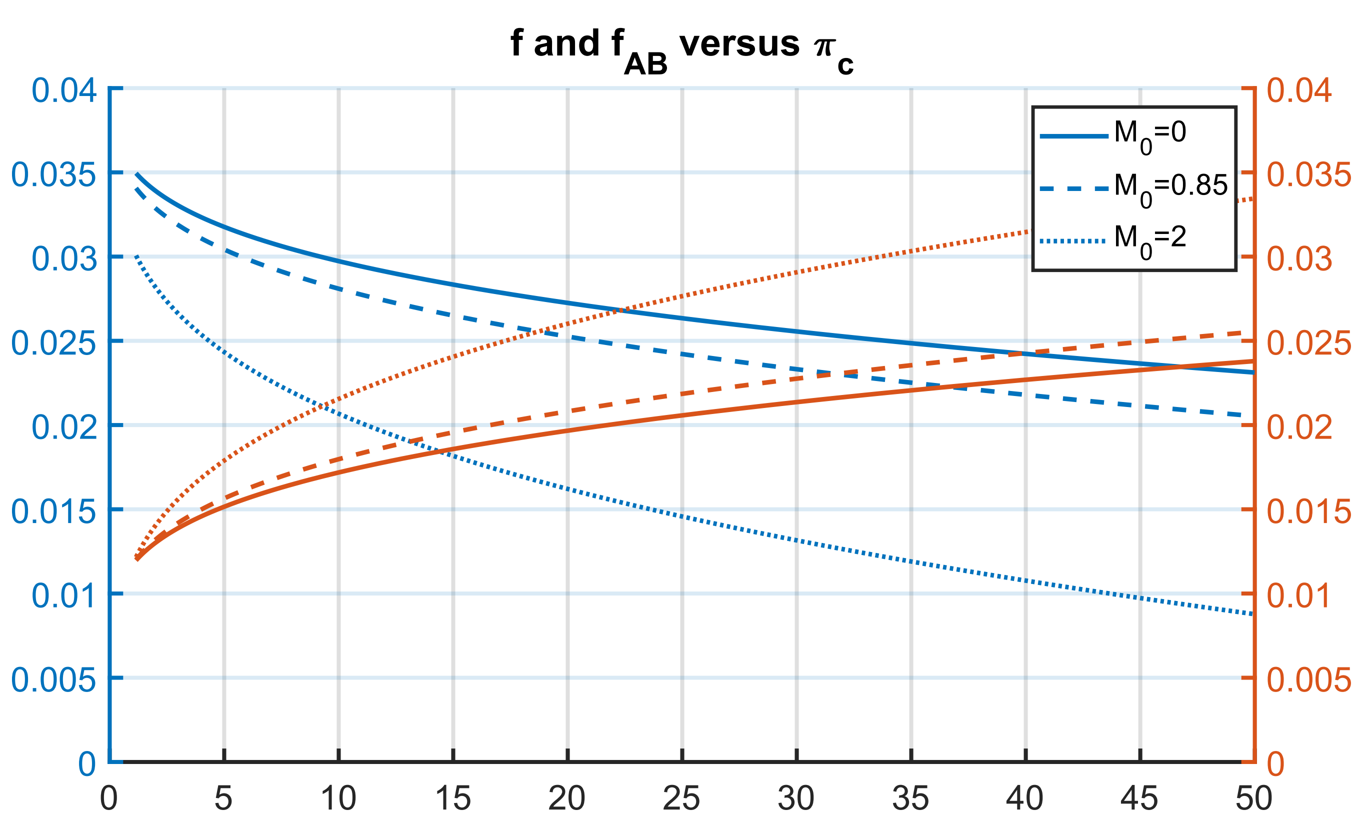
$$T_{t4} = 1750K, T_{t7} = 2250K, T_0 = 250K, Q_R = 42{,}800kJ/kg$$



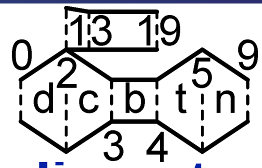
Post Bruciatore

Aumentando il rapporto di compressione:

- *f* diminuisce mentre f_{AB} aumenta mantenendo, come già detto, la somma costante;

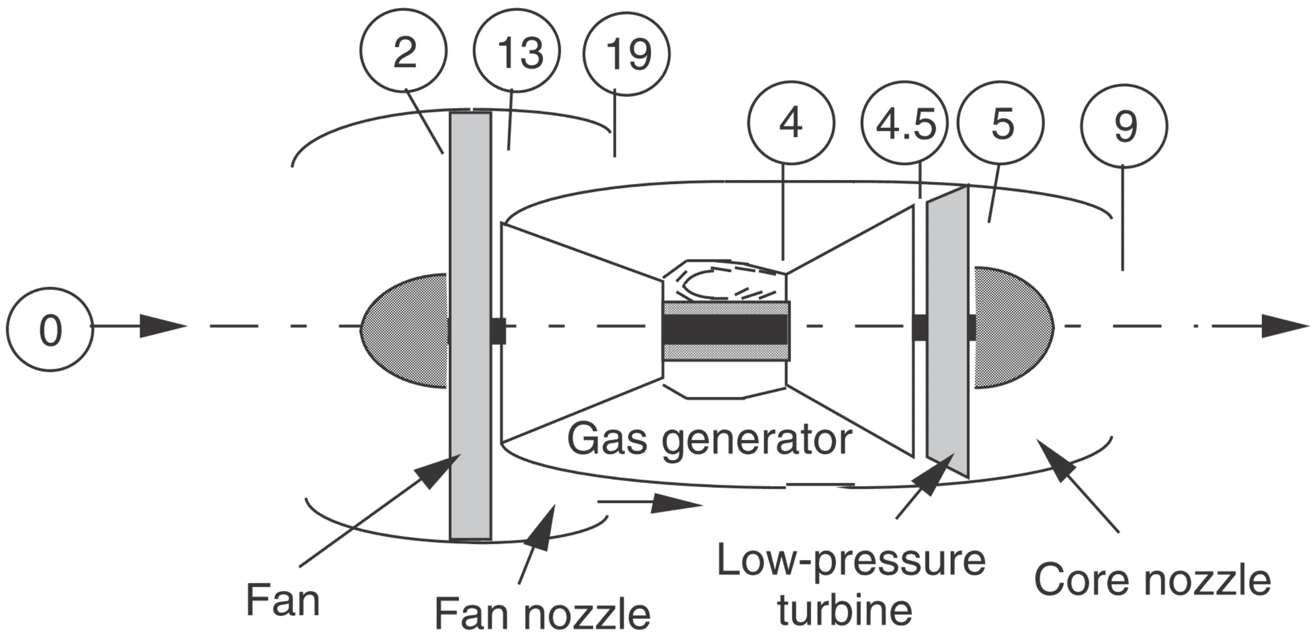


Turbofan

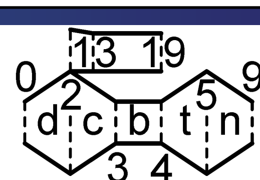


Il principio del **turbofan** e quello di **aumentare** il **rendimento** propulsivo utilizzando una maggiore portata d'aria ed una minore differenza di velocità.

L'aumento del rendimento propulsivo è in principio indipendente dal numero di Mach ma le **resistenze** associate alla maggiore **area frontale crescono** troppo ed i turbofan a grande bypass non sono normalmente utilizzati in **regime supersonico**.



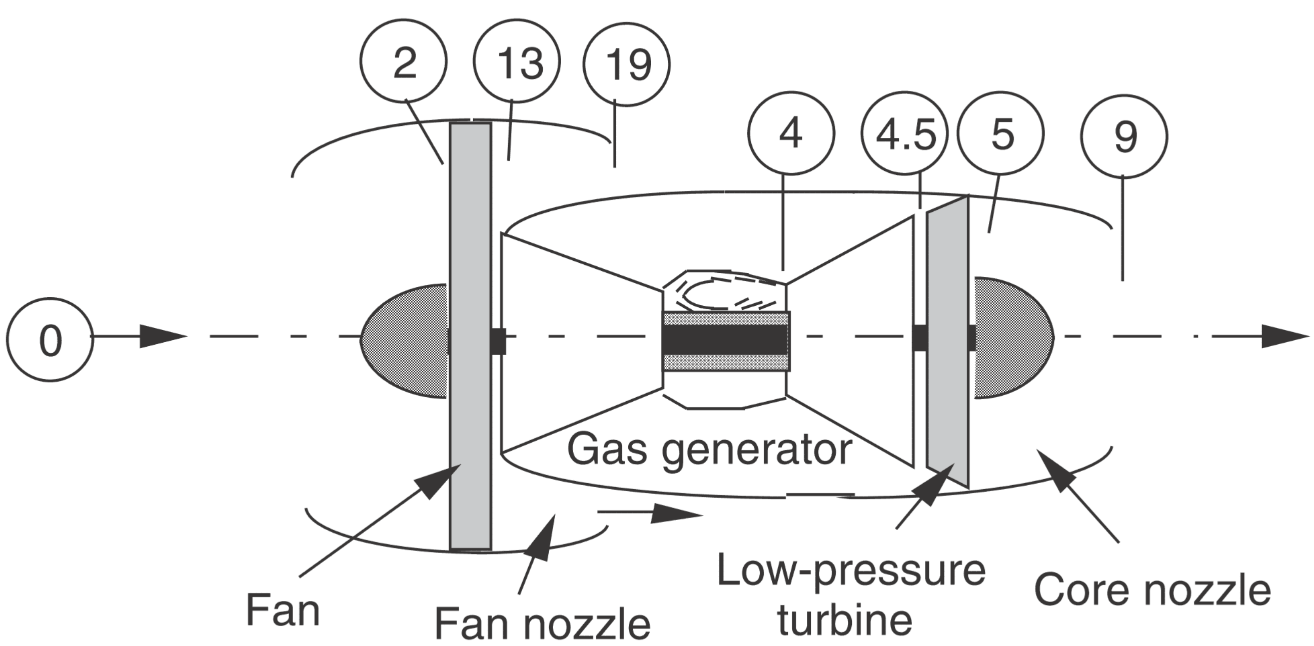
Turbofan



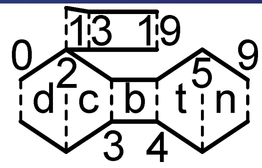
Normalmente il fan è collegato ad una seconda turbina di bassa pressione con un **sistema a doppio albero** (double spool). Le velocità angolari dei due alberi sono diverse e le indicheremo con: N_1 ed N_2.

Due nuovi parametri caratterizzano il turbofan:

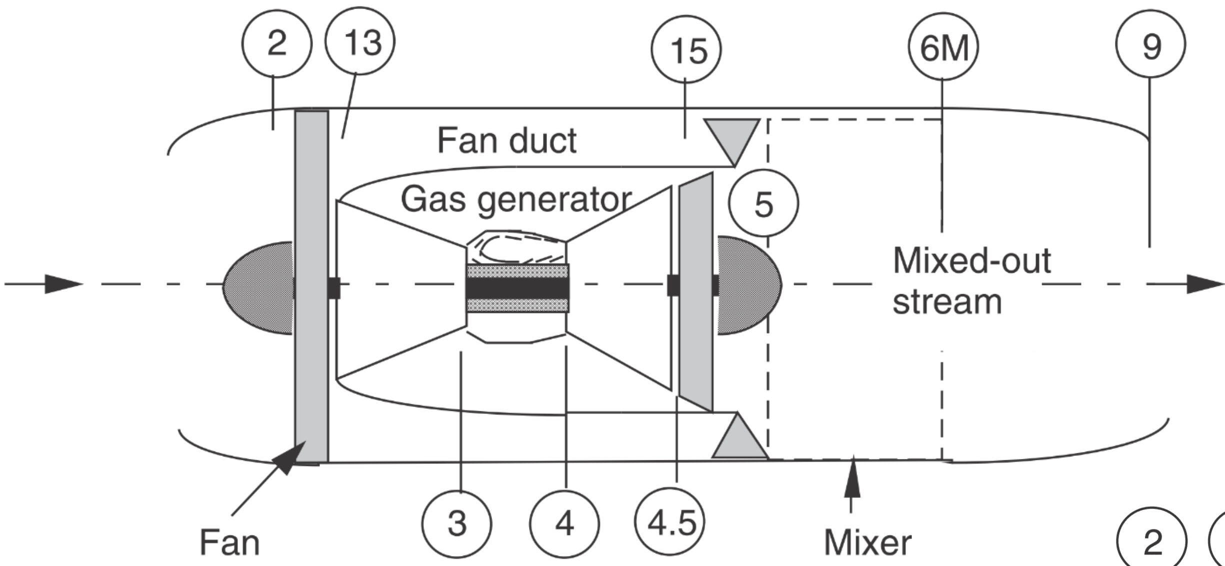
- il rapporto di bypass $\alpha = \frac{\dot{m}_{19}}{\dot{m}_3}$
- il rapporto di pressione nel fan $\pi_f = \frac{p_{t13}}{p_{t2}}$

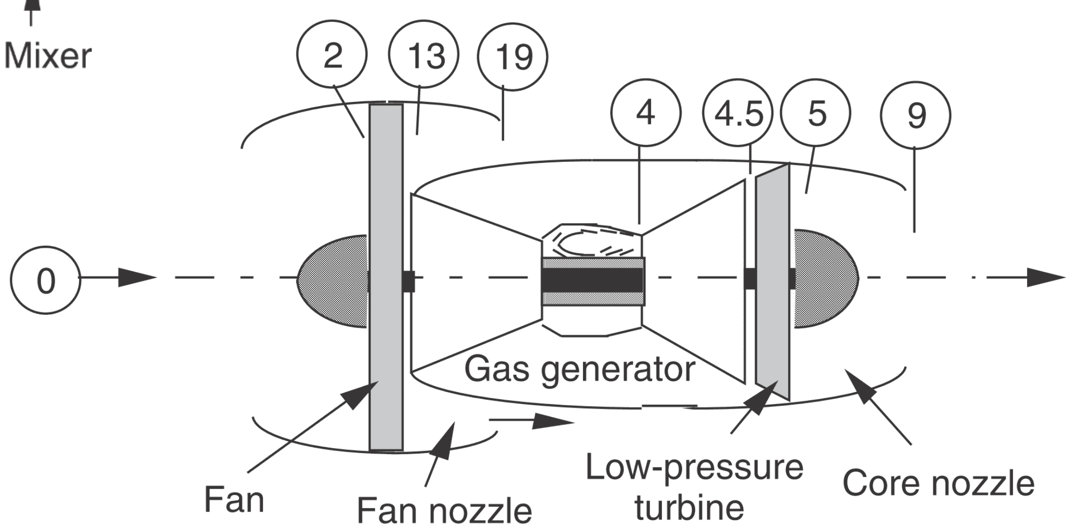


Turbofan

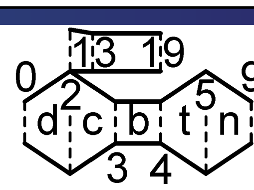


Il flusso secondario può essere **miscelato** a valle in un mixer oppure si può avere anche un motore a **flussi separati**.





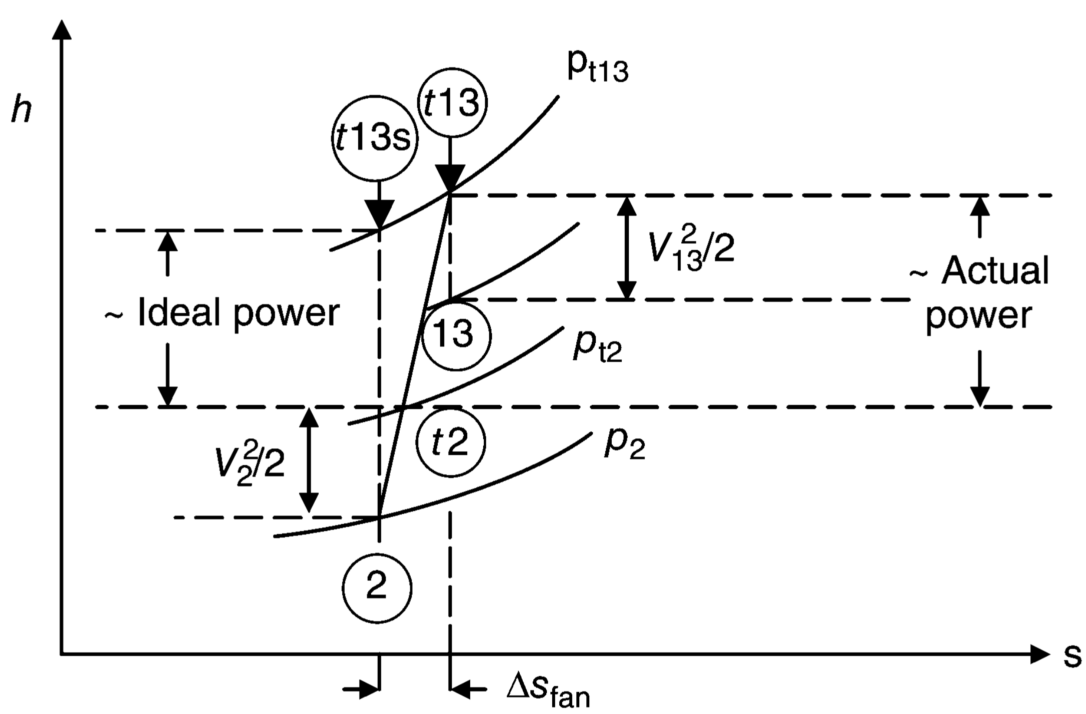
Turbofan a flussi separati



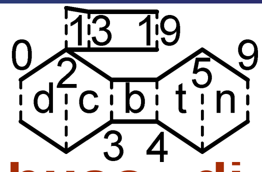
Il **fan** in prima approssimazione può essere **schematizzato** come un **compressore**:

$$\eta_f = \frac{h_{t13s} - h_{t2}}{h_{t13} - h_{t2}} = \frac{T_{t3s}/T_{t2} - 1}{T_{t3}/T_{t2} - 1} = \frac{\pi_f^k - 1}{\tau_f - 1} = \frac{\pi_f^k - 1}{\pi_f^{\frac{k}{e_f}} - 1}$$

$$\tau_f = \pi_f^{\frac{\gamma-1}{\gamma e_f}}$$



Turbofan a flussi separati



Il **bilancio di energia** nella turbina diventa (con un **abuso di simbologia** mostrato in figura):

$$\eta_m \dot{m}_0 (1+f)(h_{t4}-h_{t5}) = \dot{m}_0 (h_{t3}-h_{t2}) + \alpha \dot{m}_0 (h_{t13}-h_{t2})$$

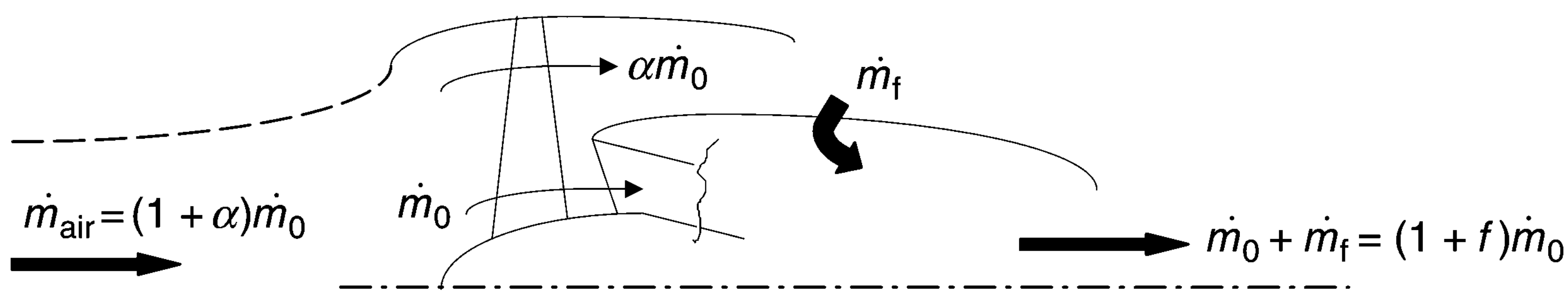
Ovvero in forma adimensionale:

$$\eta_m (1+f)(h_{t4}-h_{t5})/h_0 = (h_{t3}-h_{t2})/h_0 + \alpha (h_{t13}-h_{t2})/h_0$$

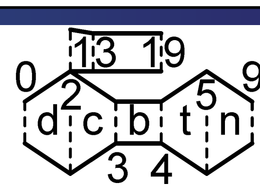
$$\eta_m (1+f)(1-\tau_t)\tau_\lambda = \tau_r\left[(\tau_c-1)+\alpha\left(\tau_f-1\right)\right]$$

quindi:

$$\tau_t = 1 - \frac{\tau_r\left[(\tau_c-1)+\alpha\left(\tau_f-1\right)\right]}{\eta_m (1+f)\tau_\lambda}$$



Turbofan a flussi separati



$$\tau_t = 1 - \frac{\tau_r\left[(\tau_c-1)+\alpha\left(\tau_f-1\right)\right]}{\eta_m (1+f)\tau_\lambda}$$

Evidentemente questa equazione non ha senso se τ_t diventasse **negativo**. Da un esame del ciclo Brayton è chiaro che in un turbogetto questa evenienza non è possibile, però in un turbofan si potrebbero scegliere valori di α o π_f che comportano un funzionamento impossibile.

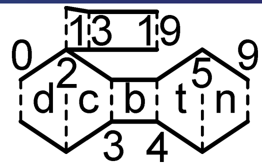
L'equazione della spinta diventa:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \frac{(1+f)}{1+\alpha}\frac{V_9}{a_0}\left(1+\frac{1-\frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{V_{19}}{a_0}\left(1+\frac{1-\frac{p_0}{p_{19}}}{\gamma M_{19}^2}\right) - M_0$$

con:

$$\dot{m}_{air} = (1+\alpha)\dot{m}_0$$

Turbofan a flussi separati



Dove, in modo analogo al turbogetto si ha:

$$\frac{V_{19}}{a_0} = \frac{M_{19} a_{19}}{a_0} = M_{19}\sqrt{\frac{T_{19}}{T_0}} \qquad M_{19}^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_{t19}}{p_{19}}\right)^k - 1\right]$$

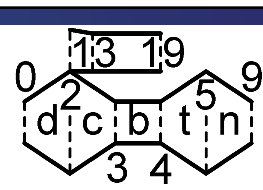
$$\frac{p_{t19}}{p_9} = \pi_{fn}\pi_f\pi_d\pi_r\frac{p_0}{p_9} \qquad \frac{T_{19}}{T_0} = \frac{T_{19}}{T_{t19}}\frac{T_{t19}}{T_0} = \frac{\tau_f\tau_r}{\left(\frac{p_{t19}}{p_{19}}\right)^k} \qquad \tau_f = \pi_f^{\frac{\gamma-1}{\gamma e_f}}$$

Chiaramente nel calcolo del ciclo principale si deve usare:

$$\tau_t = 1 - \frac{\tau_r\left[(\tau_c - 1) + \alpha(\tau_f - 1)\right]}{\eta_m(1+f)\tau_\lambda}$$

$$TSFC = \frac{f}{F_u/\dot{m}_0} = \frac{f}{(1+f)V_9\left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) + \alpha V_{19}\left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_{19}}}{\gamma M_{19}^2}\right) - V_0}$$

Turbofan a flussi separati



Il rendimento termico diventa:

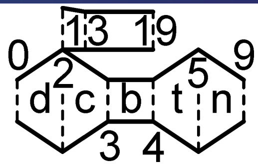
$$\eta_{th} = \frac{\Delta \dot{KE}}{\mathcal{P}_t} = \frac{(1+f)V_{9.e}^2 + \alpha V_{19.e}^2 - (1+\alpha)V_0^2}{2fQ_R}$$

$$\eta_{th} = \frac{(1+f)V_{9.e}^2 - V_0^2}{2fQ_R} + \alpha\frac{V_{19.e}^2 - V_0^2}{2fQ_R}$$

dove si sono esplicitamente utilizzate le velocità effettive:

$$V_{9.e} = V_9\left[1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right] \qquad V_{19.e} = V_{19}\left[1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_{19}}}{\gamma M_{19}^2}\right]$$

Turbofan a flussi separati



Il rendimento propulsivo:

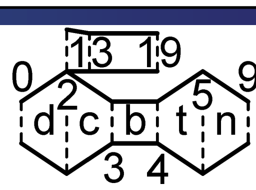
$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K\dot{E}} \approx \frac{2F_u V_0/\dot{m}_0}{(1+f)V_{9.e}^2 + \alpha V_{19.e}^2 - (1+\alpha)V_0^2}$$

Ricordando che: $\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \frac{(1+f)}{1+\alpha}\frac{V_9}{a_0}\left(1 + \frac{1-\frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{V_{19}}{a_0}\left(1 + \frac{1-\frac{p_0}{p_{19}}}{\gamma M_{19}^2}\right) - M_0$

$$\eta_p = \frac{2V_0\left[(1+f)V_9\left(1 + \frac{1-\frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) + \alpha V_{19}\left(1 + \frac{1-\frac{p_0}{p_{19}}}{\gamma M_{19}^2}\right) - (1+\alpha)V_0\right]}{(1+f)V_9^2 + \alpha V_{19}^2 - (1+\alpha)V_0^2}$$

$$= \frac{2V_0\{[(1+f)V_{9.e}] + \alpha V_{19.e} - (1+\alpha)V_0\}}{(1+f)V_{9.e}^2 + \alpha V_{19.e}^2 - (1+\alpha)V_0^2}$$

Turbofan a flussi separati



Nell'ipotesi di espansione corretta:

$$\eta_p \approx \frac{2V_0[(1+f)V_9 + \alpha V_{19} - (1+\alpha)V_0]}{(1+f)V_9^2 + \alpha V_{19}^2 - (1+\alpha)V_0^2}$$

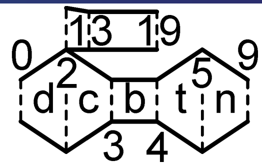
Trascurando *f*:

$$\eta_p \approx \frac{2V_0[V_9 + \alpha V_{19} - (1+\alpha)V_0]}{V_9^2 + \alpha V_{19}^2 - (1+\alpha)V_0^2}$$

Nell'ipotesi che $V_{19} = V_9$ si ritrova il risultato ottenuto per il turbogetto:

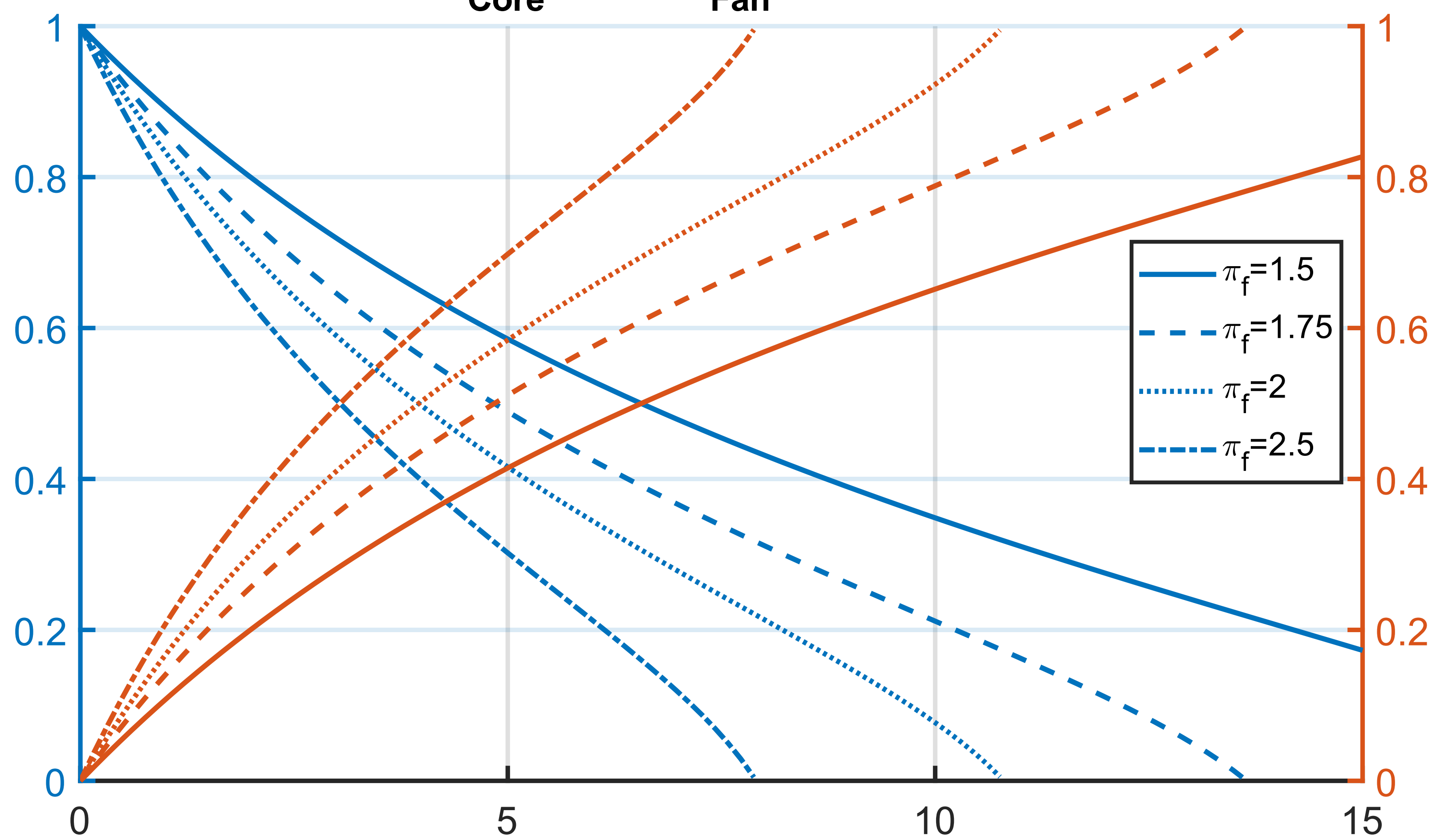
$$\eta_p \approx \frac{2V_0[V_9 - V_0]}{V_9^2 - V_0^2} = \frac{2}{1 + \frac{V_9}{V_0}}$$

Turbofan a flussi separati

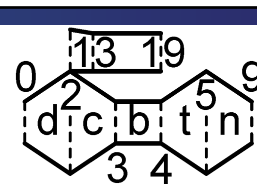


$M_0 = 0.85, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42{,}800kJ/kg$

F_{Core}/F and F_{Fan}/F versus α

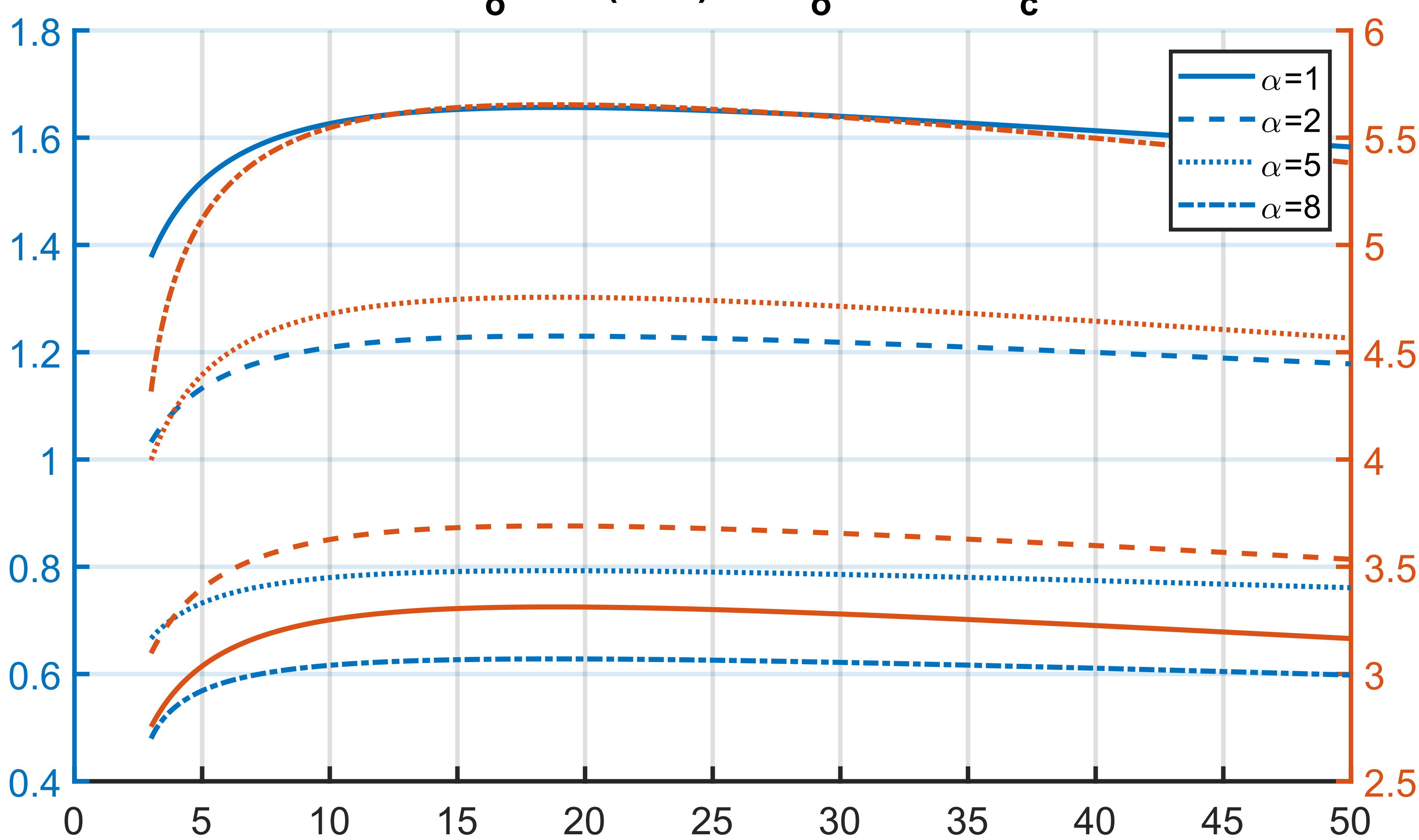


Turbofan a flussi separati

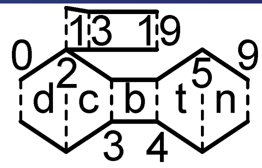


$M_0 = 0.85, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, \pi_f = 2, Q_R = 42{,}800kJ/kg$

F/ma_o and $(1+\alpha)F/ma_o$ versus π_c

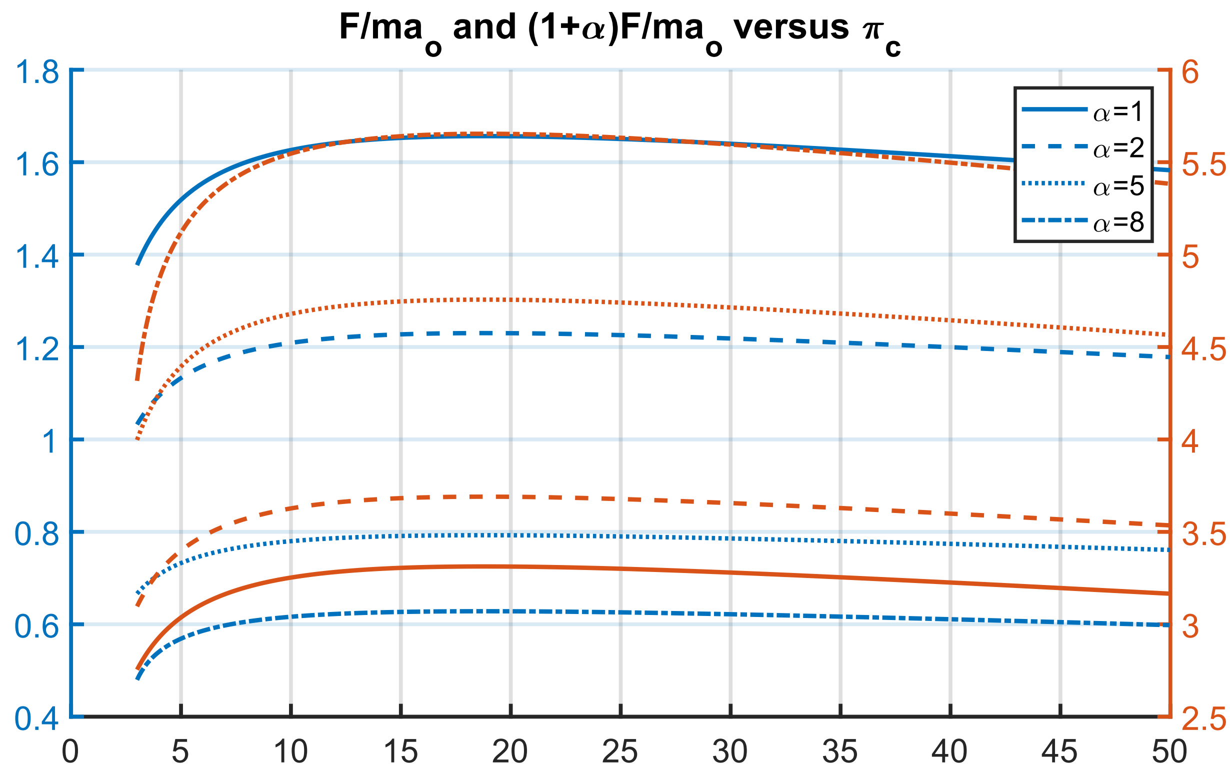


Turbofan a flussi separati

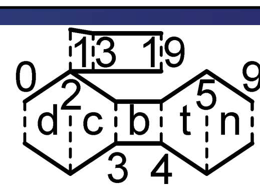


Dalla figura si nota:

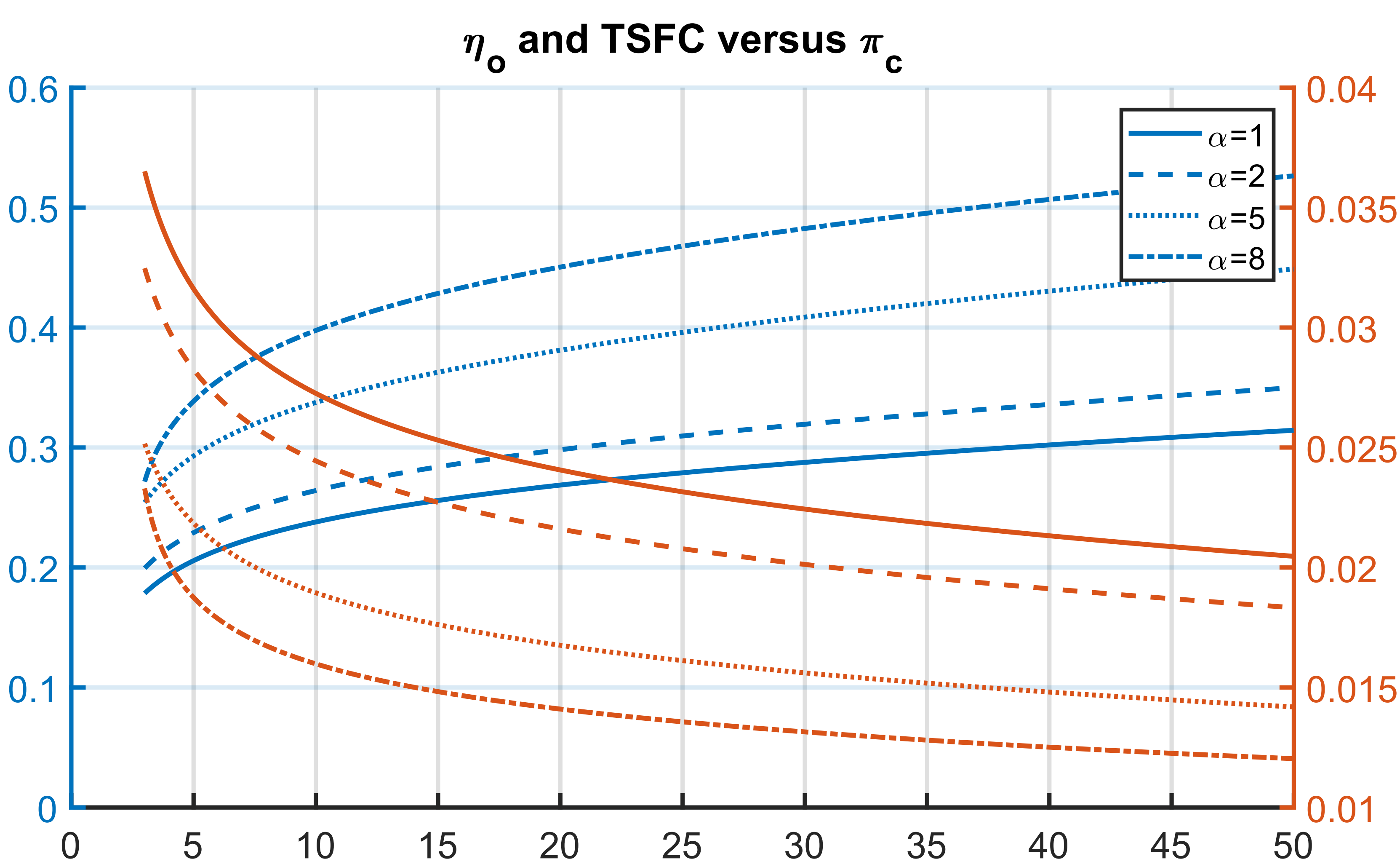
- Per $\pi_c > 10$ la spinta è quasi costante, in particolare, all'aumentare del rapporto di bypass;
- La spinta specifica diminuisce all'aumentare di α. Come mostrato in figura la normalizzazione penalizza il turbofan;



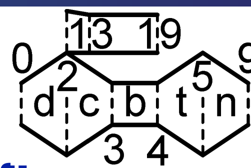
Turbofan a flussi separati



$M_0 = 0.85, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, \pi_f = 2, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$

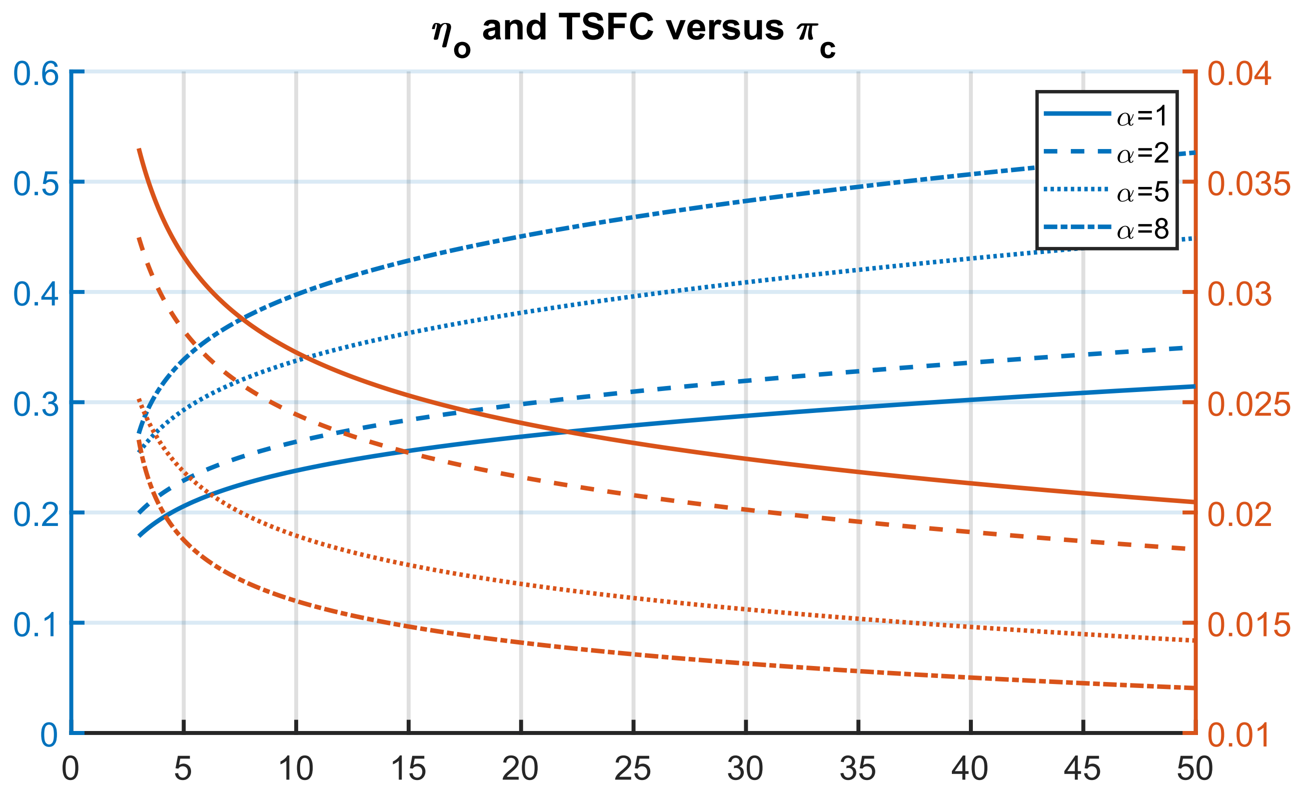


Turbofan a flussi separati

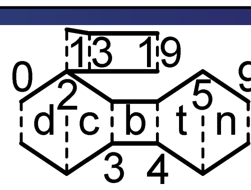


Dalla figura si nota che per i rapporti di pressione **mostrati in figura**:

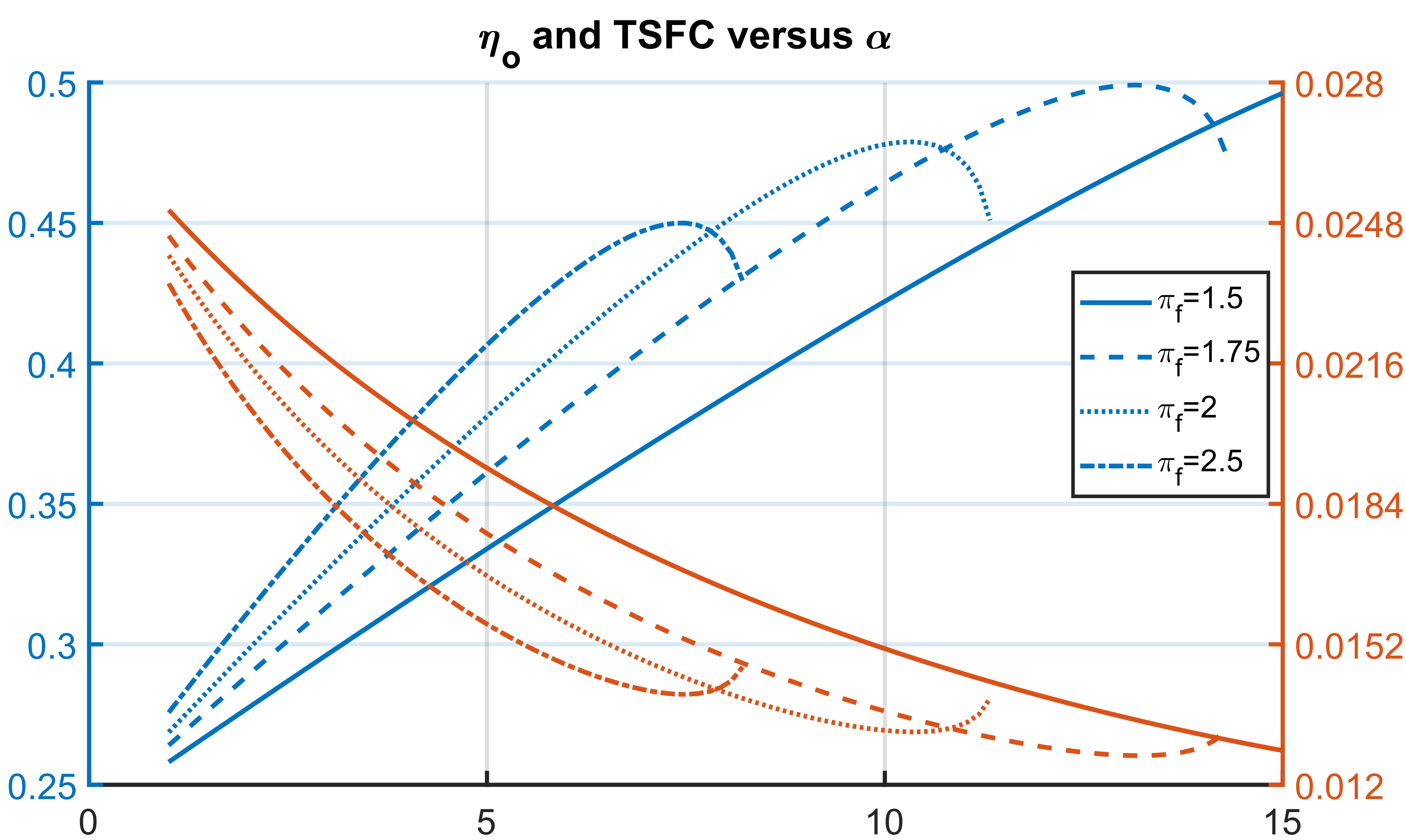
- Il consumo diminuisce con π_c e, coerentemente, il rendimento aumenta (per un aumento del rendimento termico);
- Un comportamento simile si ha anche all'aumentare di α (per un aumento del rendimento propulsivo).



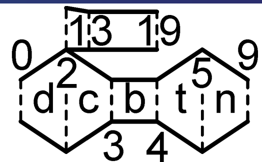
Turbofan a flussi separati



$$\pi_c = 20, M_0 = 0.85, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$$

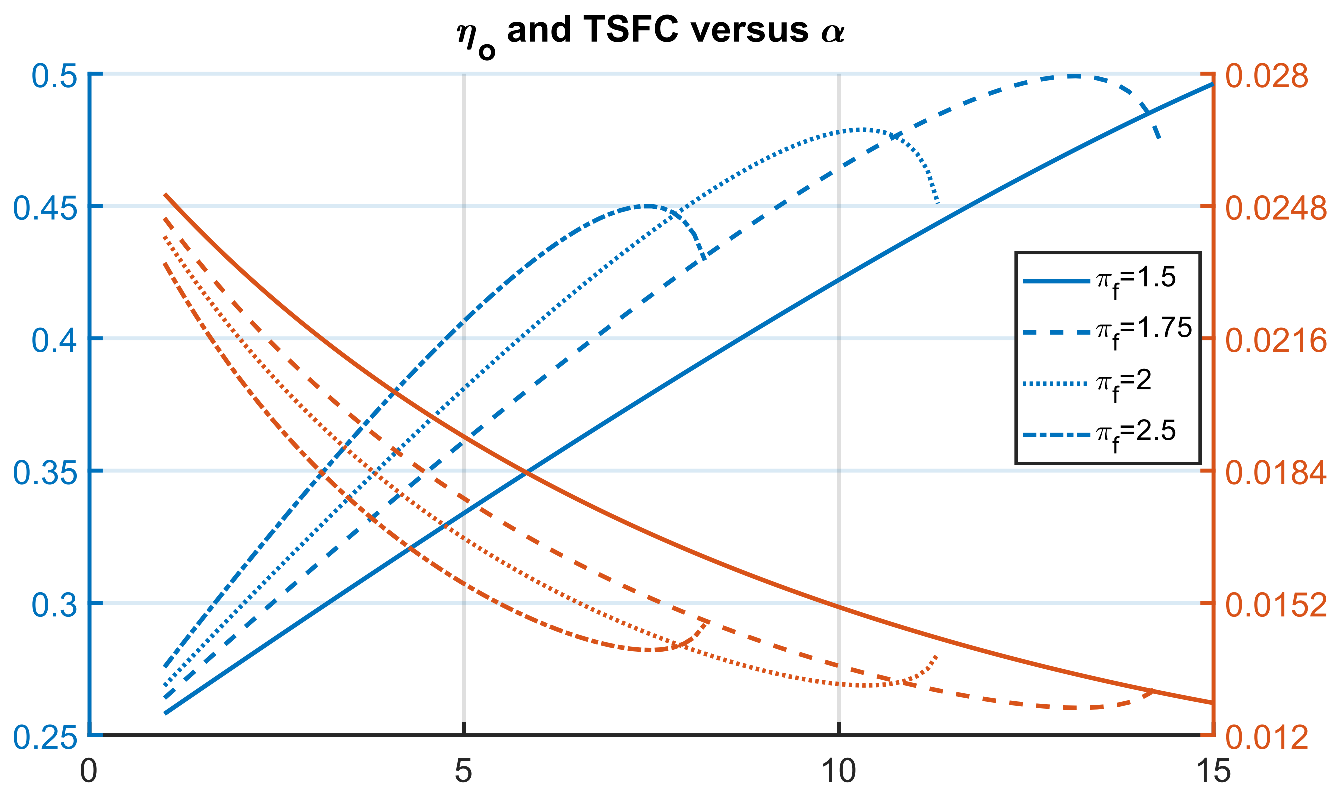


Turbofan a flussi separati

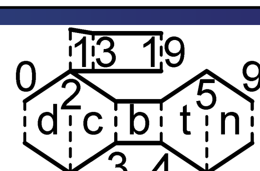


Dalla figura si nota che esiste un **rapporto di bypass ottimo** α^*. Si può dimostrare che:

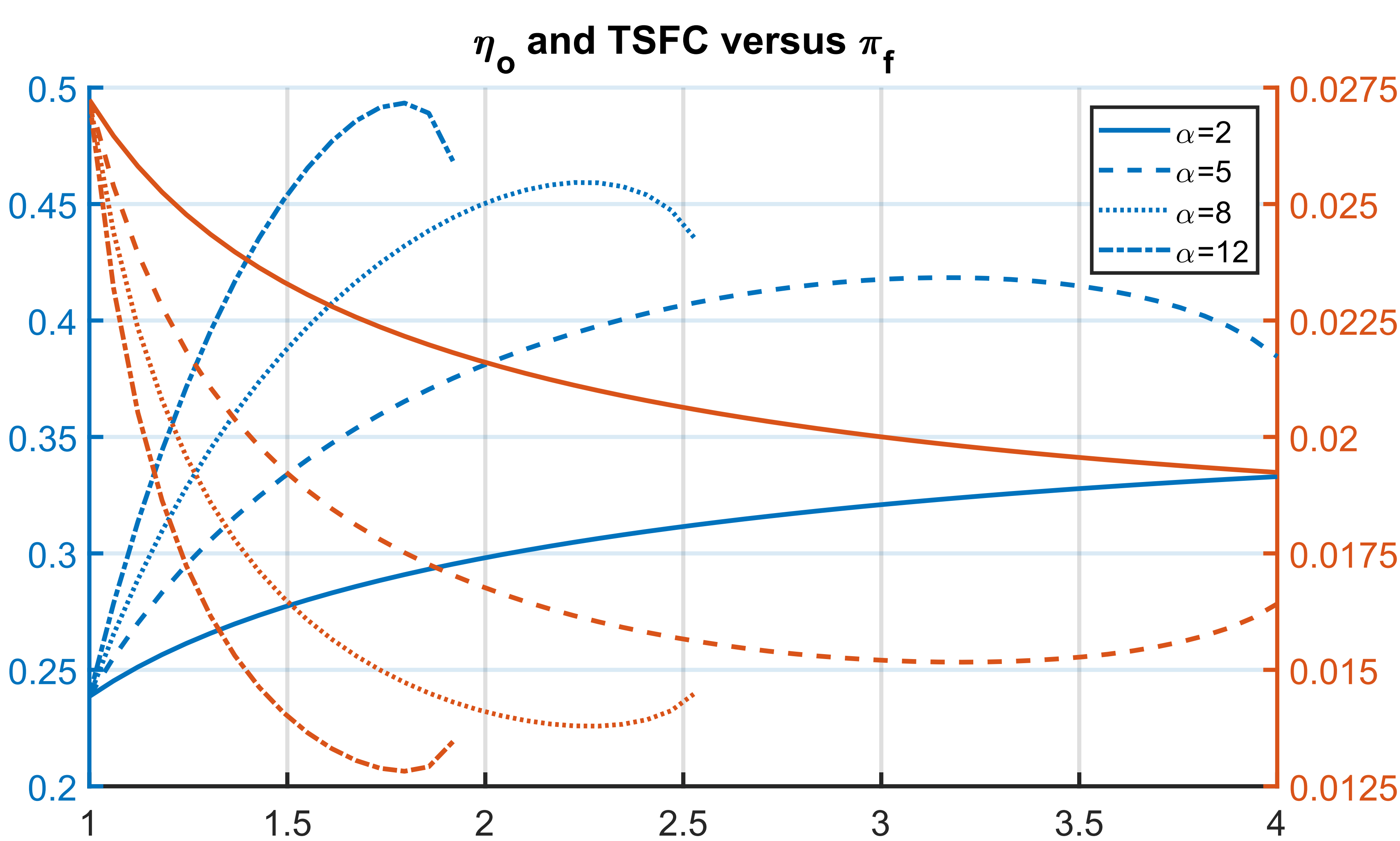
$$\alpha^* = \frac{1}{\tau_r(\tau_f - 1)}\left[\tau_\lambda - \tau_r(\tau_c - 1) - \frac{\tau_\lambda}{\tau_r \tau_c} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{\tau_r \tau_f - 1} + \sqrt{\tau_r - 1}\right)^2\right]$$



Turbofan a flussi separati



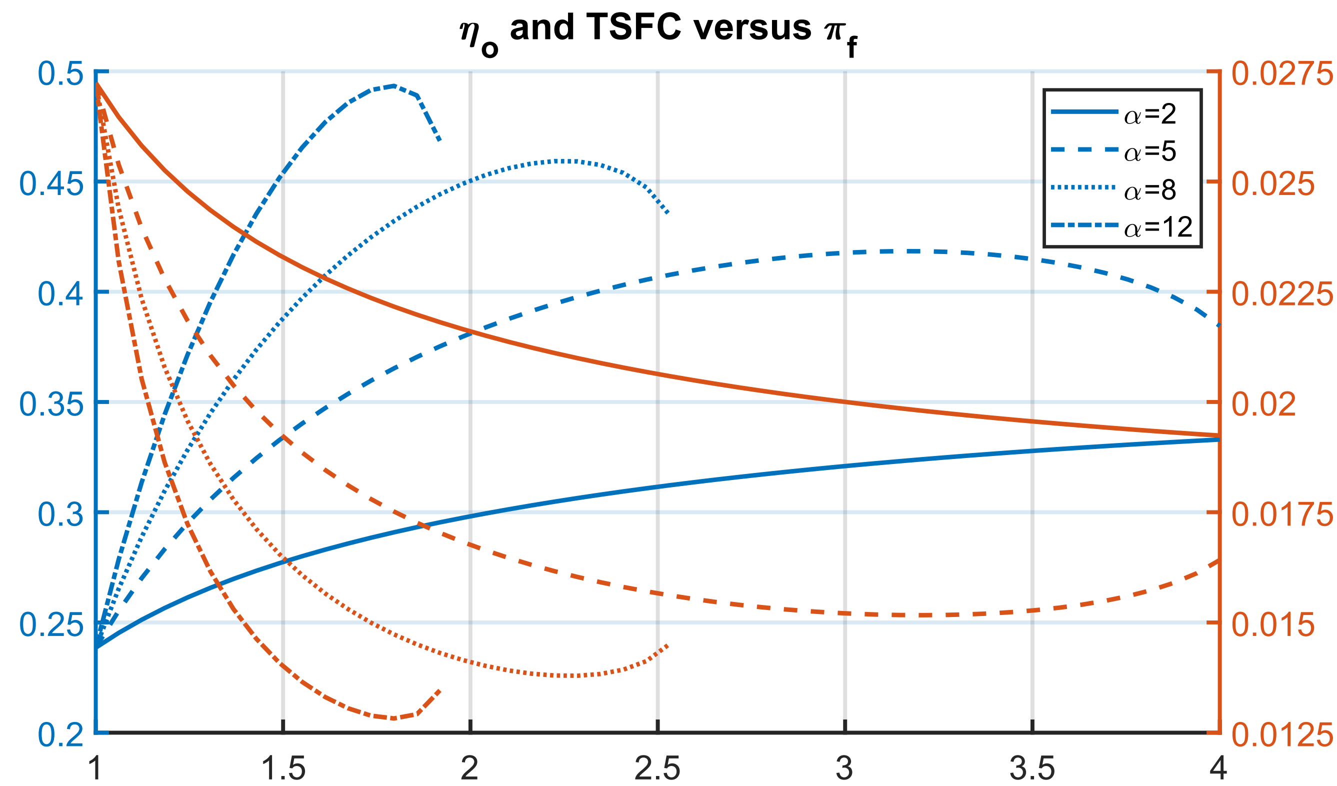
$$\pi_c = 20, M_0 = 0.85, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, \pi_f = 2, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$$



Turbofan a flussi separati

Dalla figura si nota che esiste un **rapporto di pressione nel fan ottimo** π_f^*. Si può dimostrare che:

$$\tau_f^* = \frac{\tau_\lambda - \tau_r(\tau_c - 1) - \dfrac{\tau_\lambda}{\tau_r \tau_c} + \alpha\tau_r - 1}{\tau_r(1+\alpha)}$$



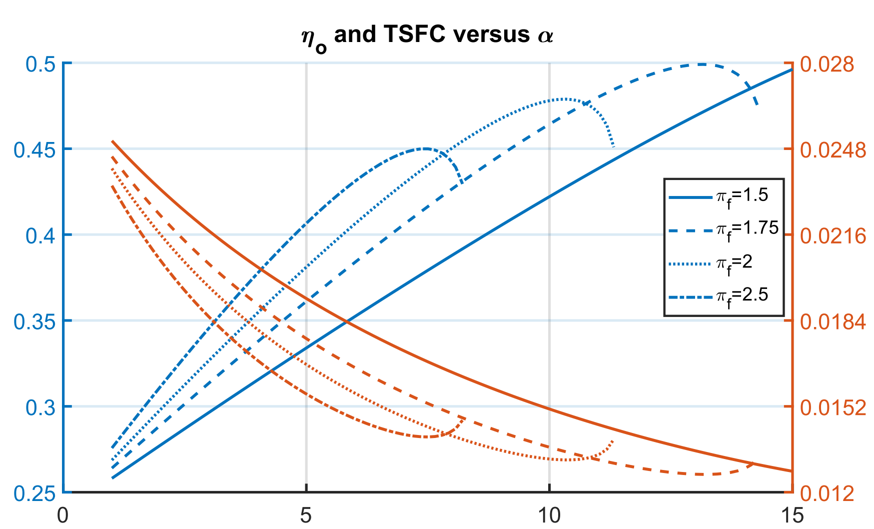
Turbofan a flussi separati

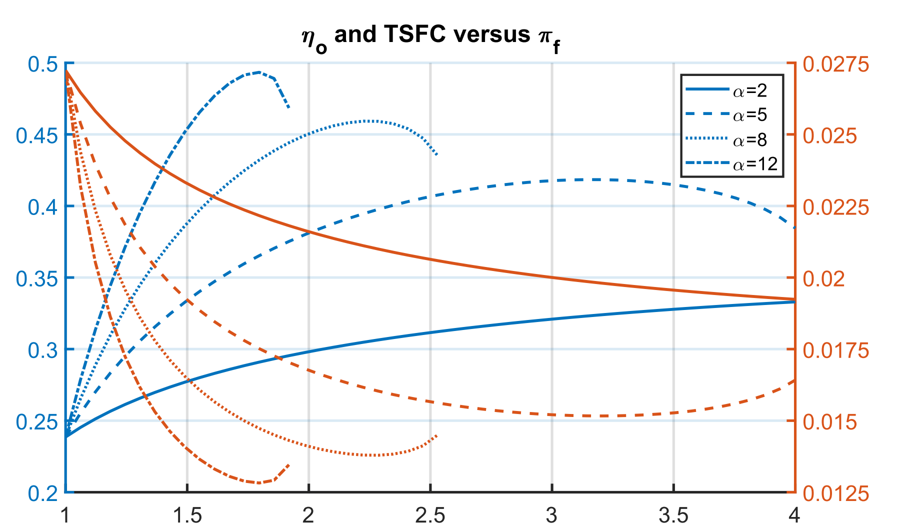
Non si riesce a lavorare con entrambi i valori ottimali. Infatti per $\alpha = \alpha^*$ si ha:

$$\frac{V_9 - V_0}{V_{19} - V_0} = \frac{1}{2}$$

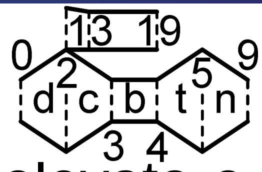
mentre per $\pi_f = \pi_f^*$:

$$V_9 = V_{19}$$

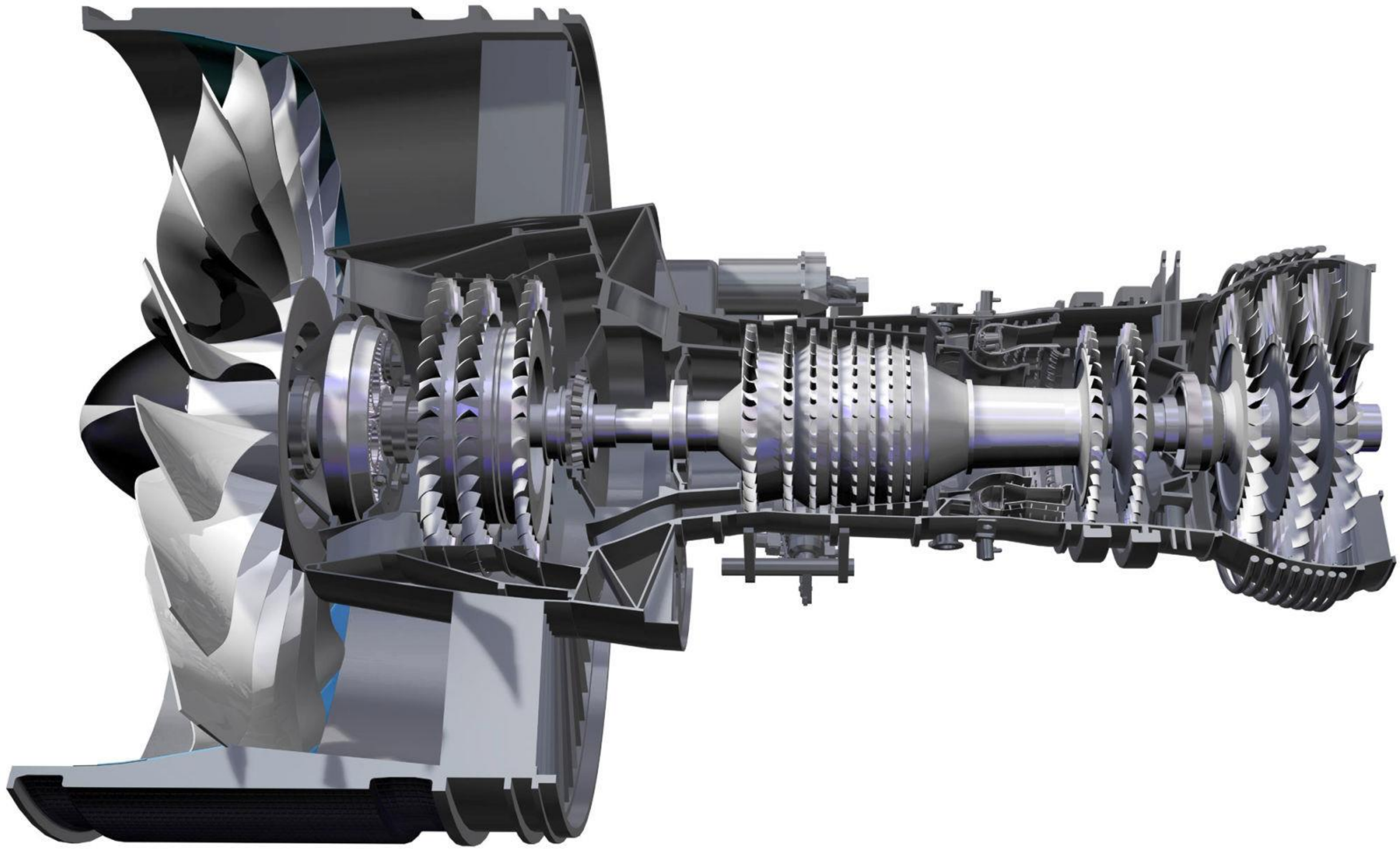




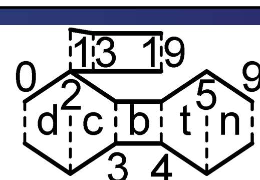
Turbofan a flussi separati



I turbofan che hanno un rapporto di by pass particolarmente elevato e vengono chiamati **Ultra-High-Bypass** Turbofan (UHB).

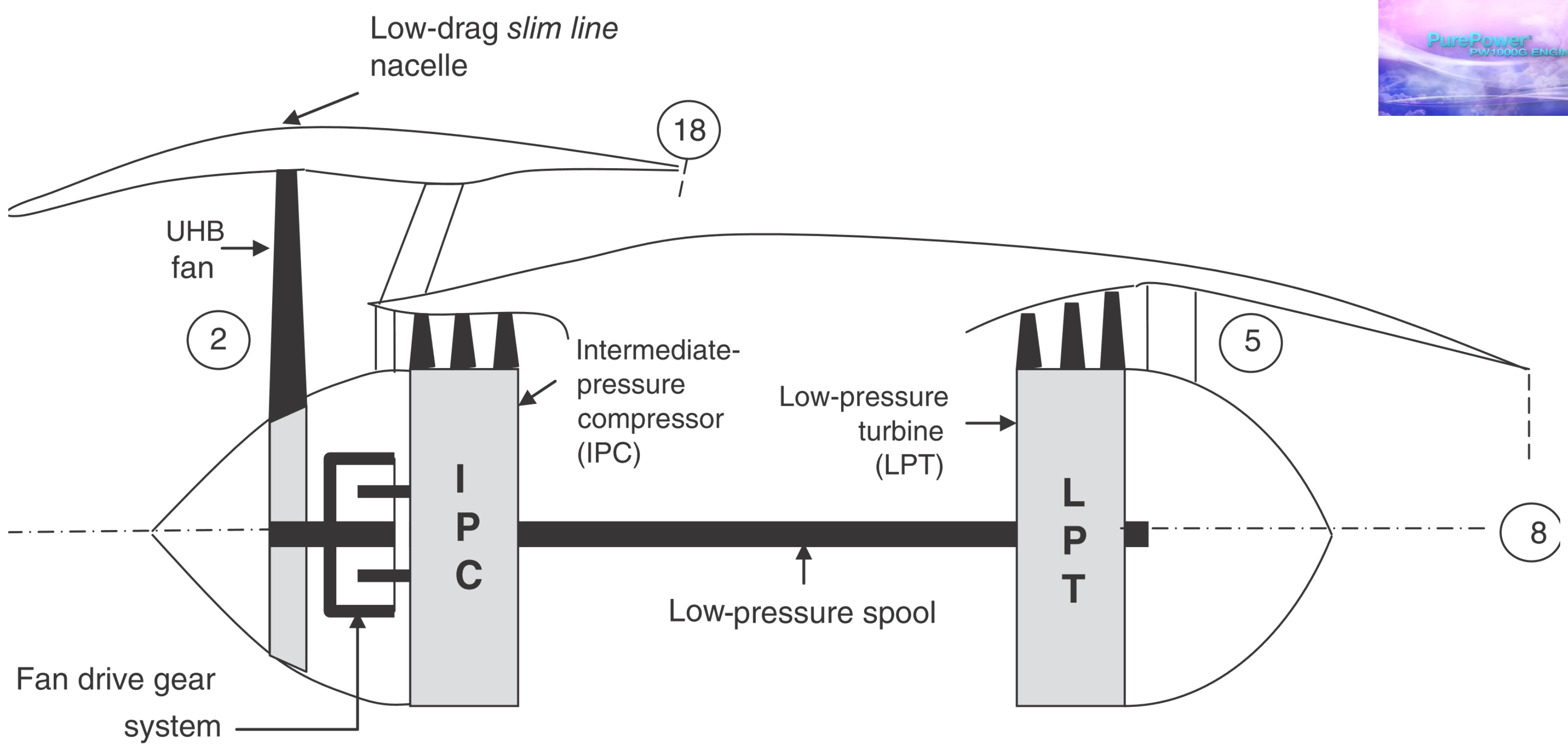


Turbofan a flussi separati



I turbofan che hanno un rapporto di by pass particolarmente elevato e vengono chiamati **Ultra-High-Bypass** Turbofan (UHB).

- La dimensione del fan può diventare significativamente maggiore di quella della turbina e del compressore. Quindi le velocità di rotazione ottimali sono diverse. Un riduttore ad ingranaggi è utilizzato dalla famiglia di motori PW1000G.



Turbofan a flussi separati

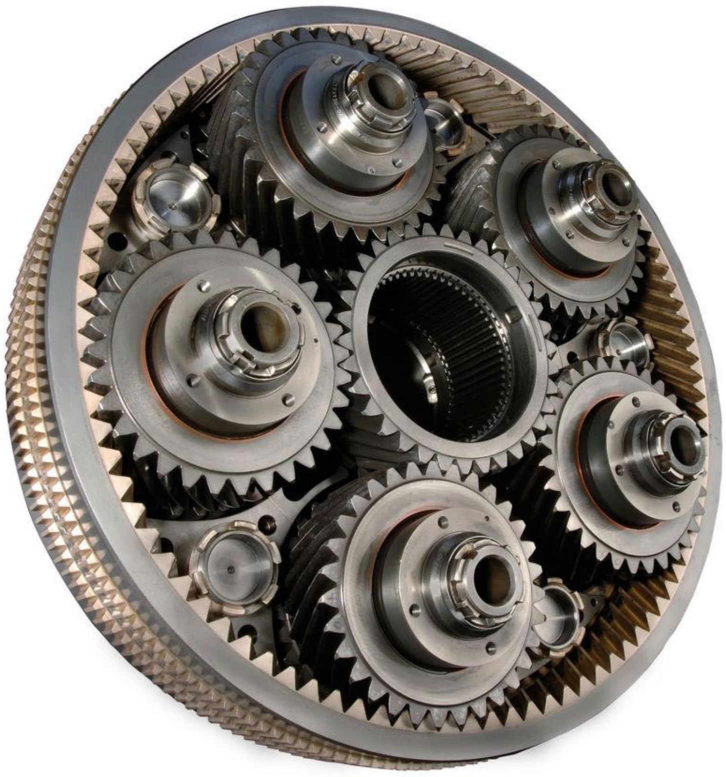
I turbofan che hanno un rapporto di by pass particolarmente elevato e vengono chiamati **Ultra-High-Bypass** Turbofan (UHB).

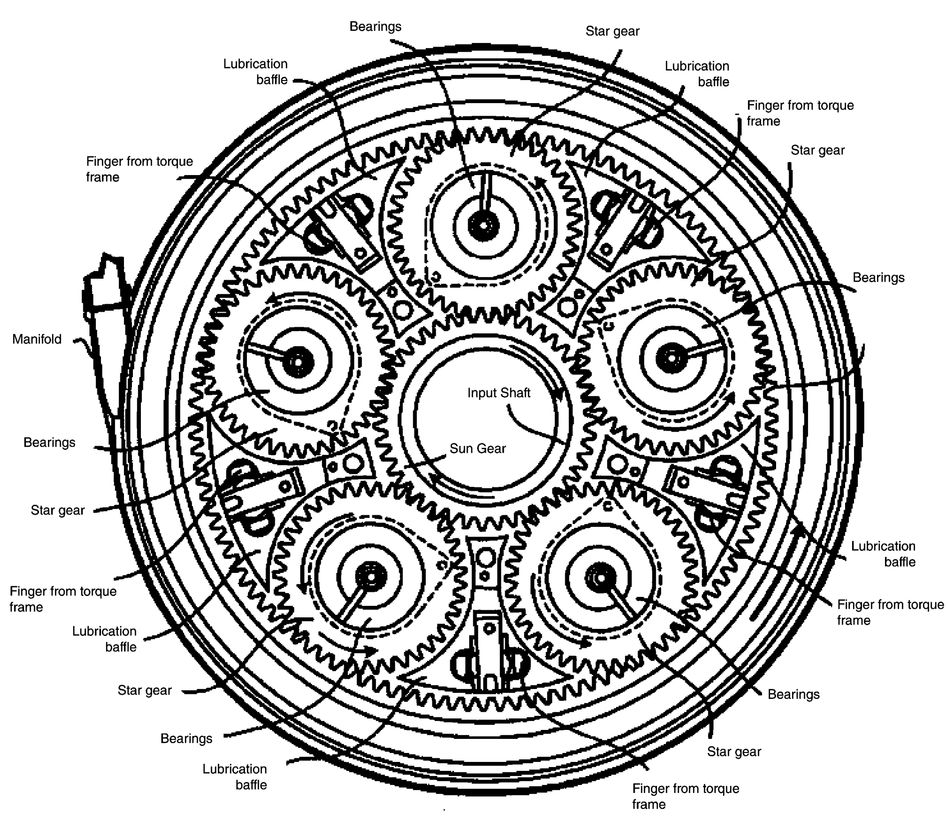
- La dimensione del fan può diventare significativamente maggiore di quella della turbina e del compressore. Quindi le **velocità di rotazione ottimali** sono diverse. Un ri**duttore ad ingranaggi** è utilizzato dalla famiglia di motori PW1000G.

Turbofan a flussi separati

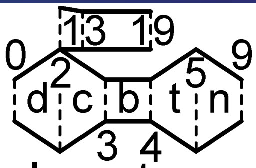
I turbofan che hanno un rapporto di by pass particolarmente elevato e vengono chiamati **Ultra-High-Bypass** Turbofan (UHB).

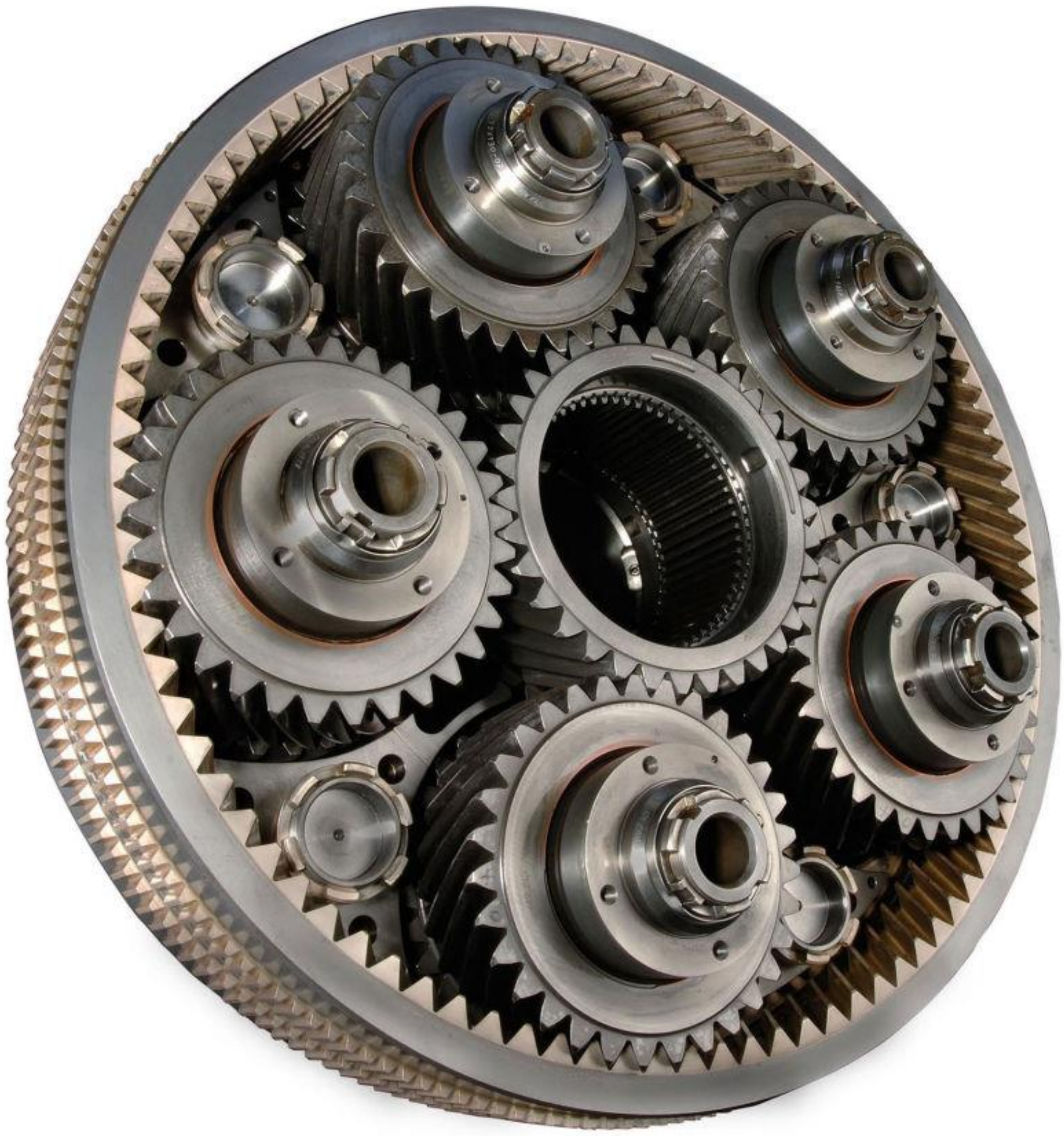
- La dimensione del fan può diventare significativamente maggiore di quella della turbina e del compressore. Quindi le **velocità di rotazione ottimali** sono diverse. Un ri**duttore ad ingranaggi** è utilizzato dalla famiglia di motori PW1000G.





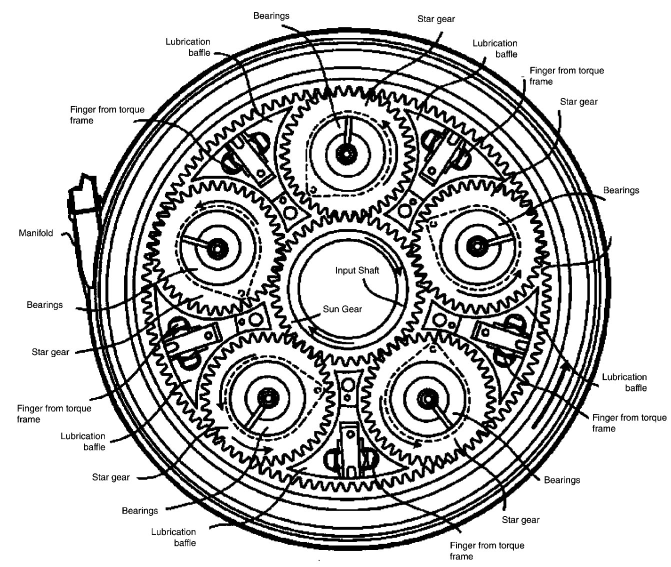
Turbofan a flussi separati



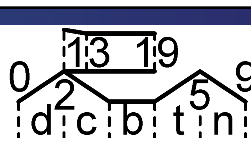


ss particolarmente elevato e
ofan (UHB).

ativamente maggiore di quella
velocità di rotazione ottimali
i è utilizzato dalla famiglia di

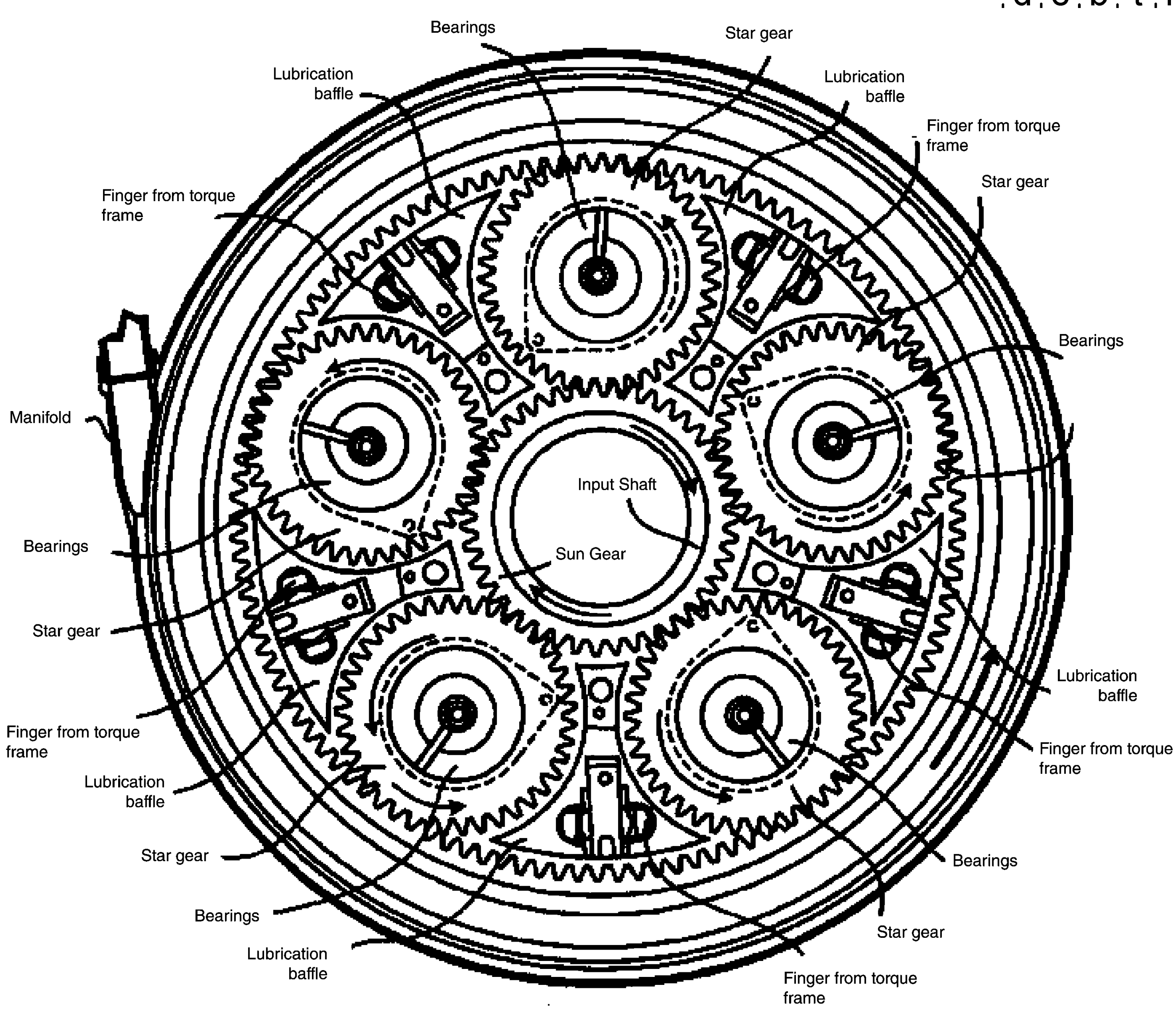


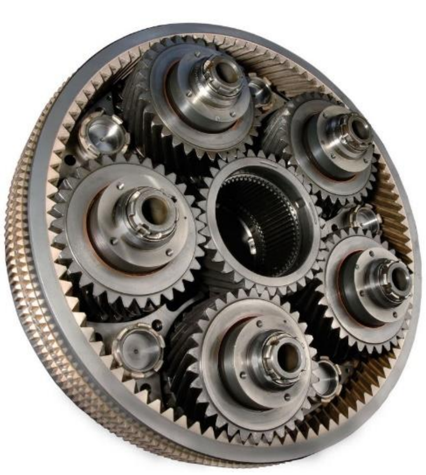
Turbofan a flussi separati



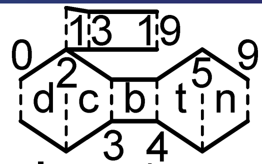
I turbofan che ha
vengono chiamat

- La dimensione
  della turbina e
  sono diverse.
  motori PW1000



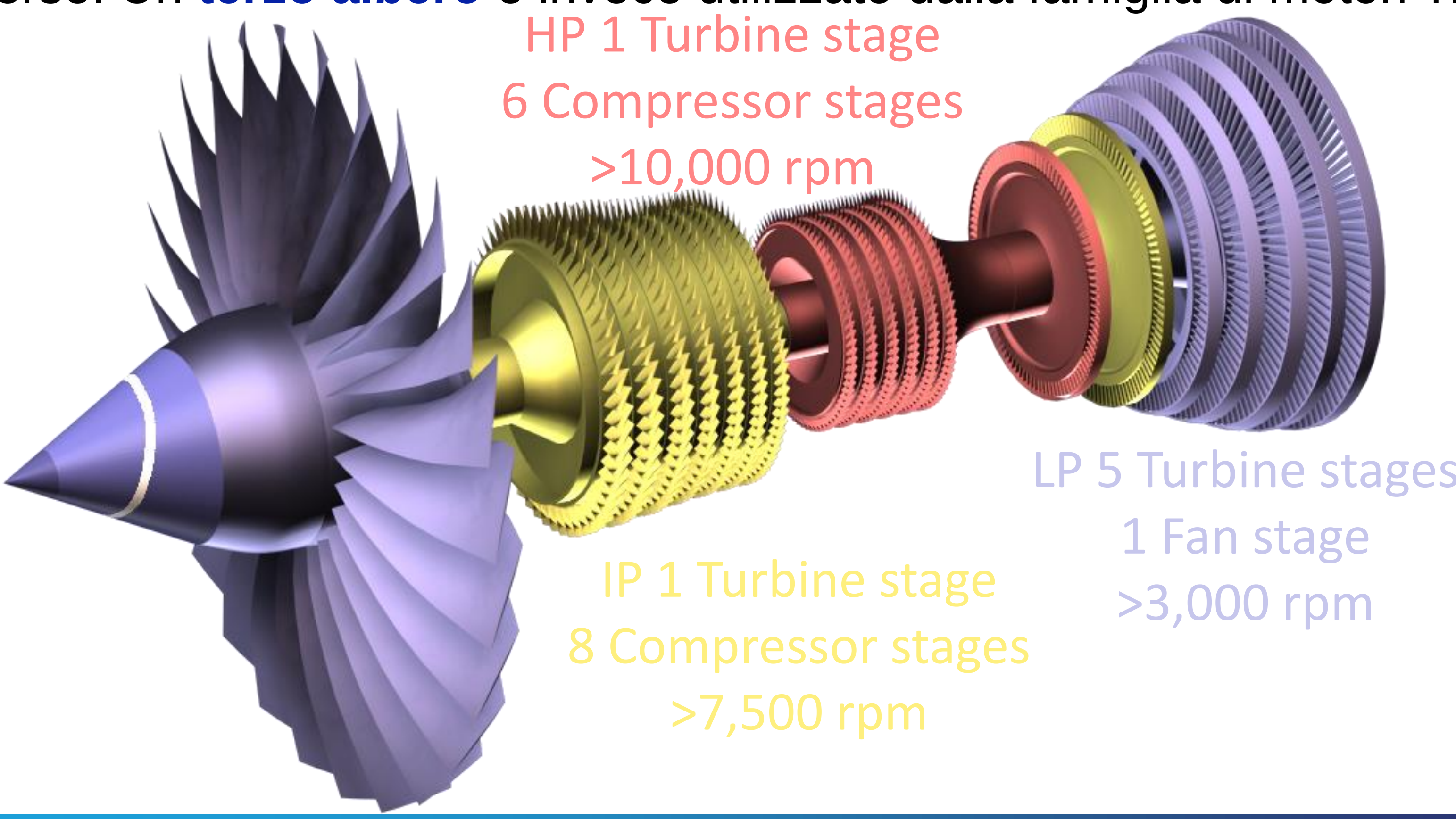


Turbofan a flussi separati



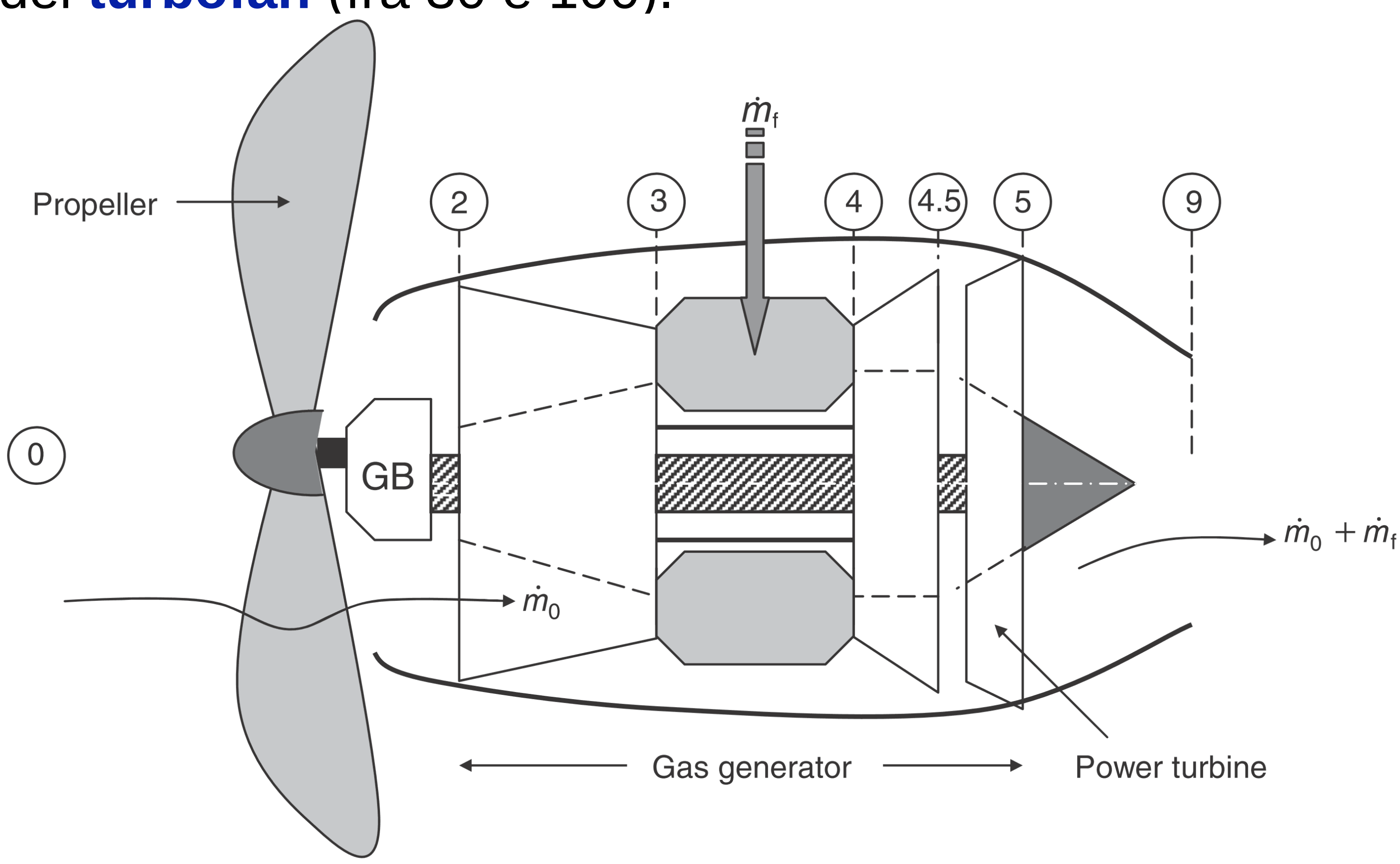
I turbofan che hanno un rapporto di by pass particolarmente elevato e vengono chiamati **Ultra-High-Bypass** Turbofan (UHB).

- La dimensione del fan può diventare significativamente maggiore di quella della turbina e del compressore. Quindi le velocità di rotazione ottimali sono diverse. Un **terzo albero** è invece utilizzato dalla famiglia di motori Trent.



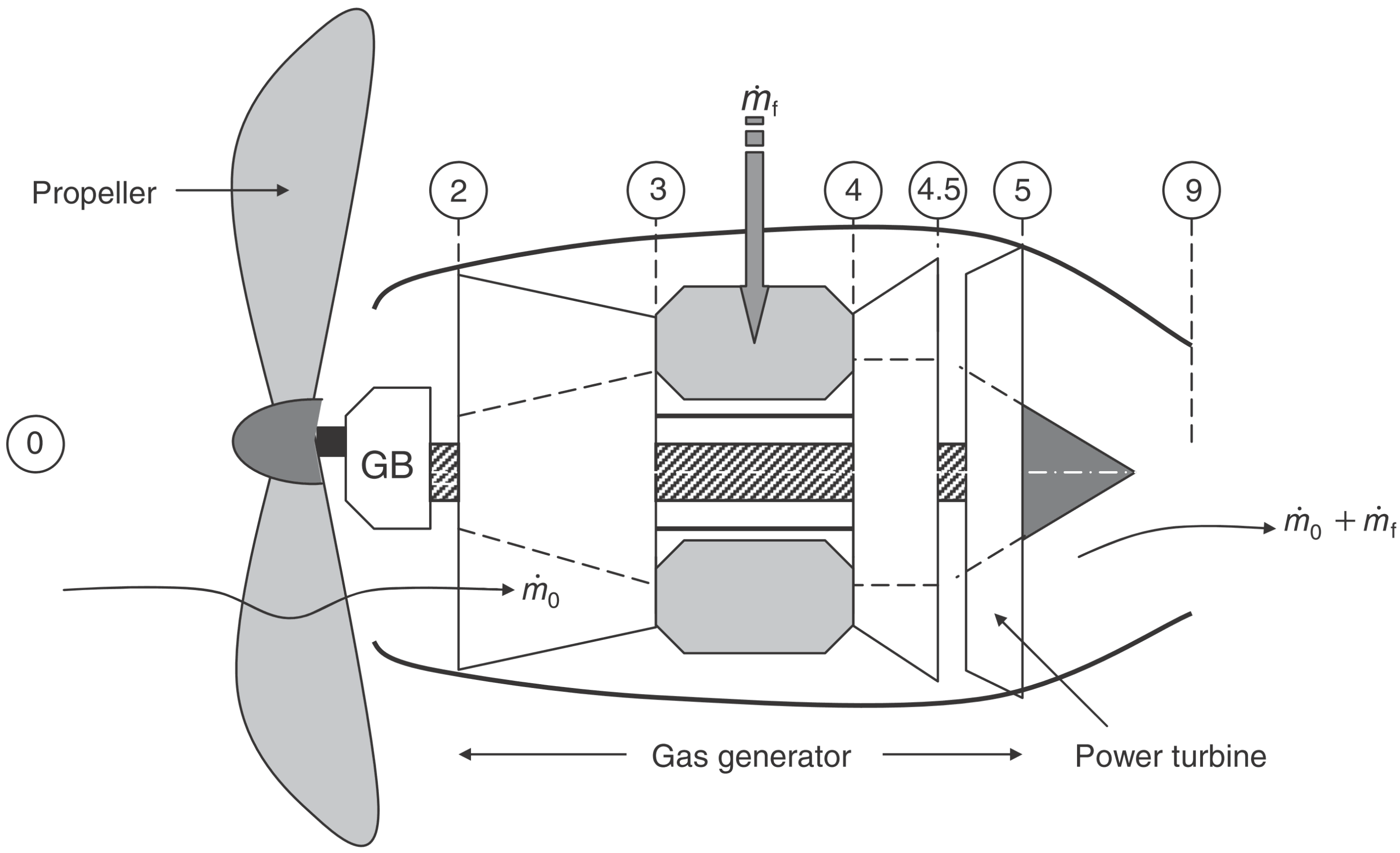
Turboprop

Anche nel caso dei **turboprop** l'elica, avendo un diametro significativamente maggiore, è collegata all'albero tramite un riduttore meccanico. Il **rapporto di bypass** è significativamente maggiore di quello dei **turbofan** (fra 30 e 100).



Turboprop

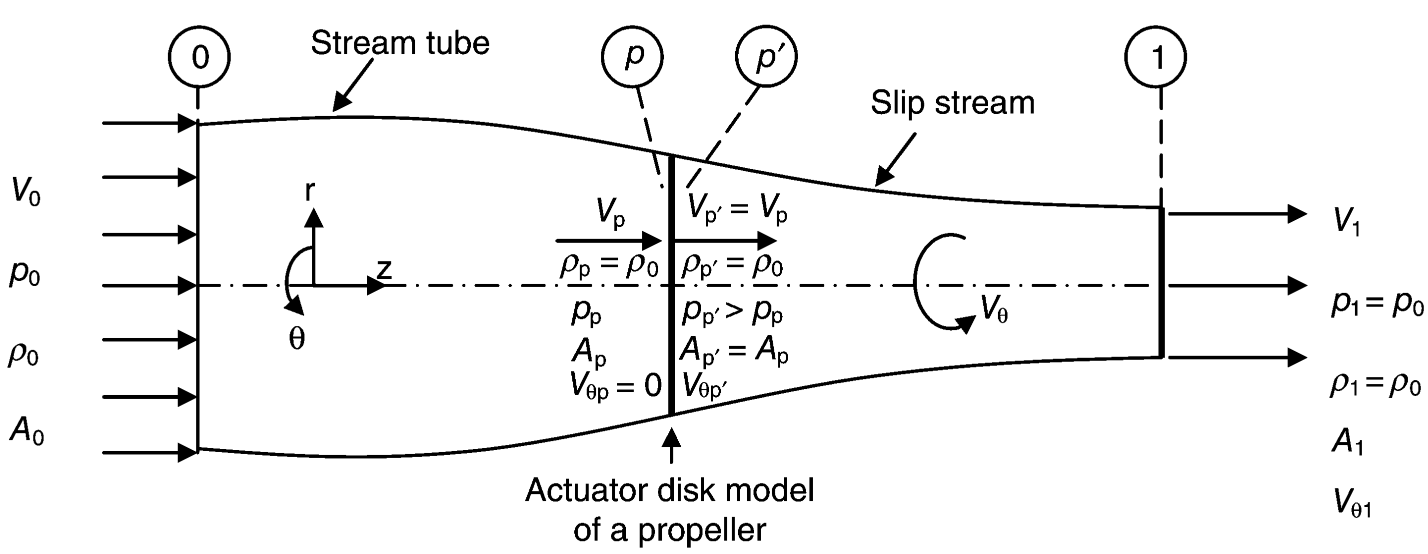
Si deve notare che però per limitare il numero di Mach all'estremità dell'elica i turboprop possono essere utilizzati per **Mach** di crociera **relativamente bassi**.



Elementi di teoria dell'elica

Le eliche (propeller) vengono utilizzate per convertire energia meccanica in spinta propulsiva. Esistono **due** approcci alla **teoria dell'eliche**:

- La **teoria impulsiva** o del **disco attuatore** è stata introdotta da Rankine e Froude alla fine del 900. Si rimpiazza l'elica con un disco attuatore che impone un **salto** di **quantità di moto** (aumento della **pressione**) e del **momento** della quantità di moto (aumento dello **swirl**). Si considera inoltre il flusso **incompressibile** e si **trascurano** gli effetti **viscosi**.
- La **teoria dell'elemento di pala** si basa sulla teoria dell'ala e dei profili alari.

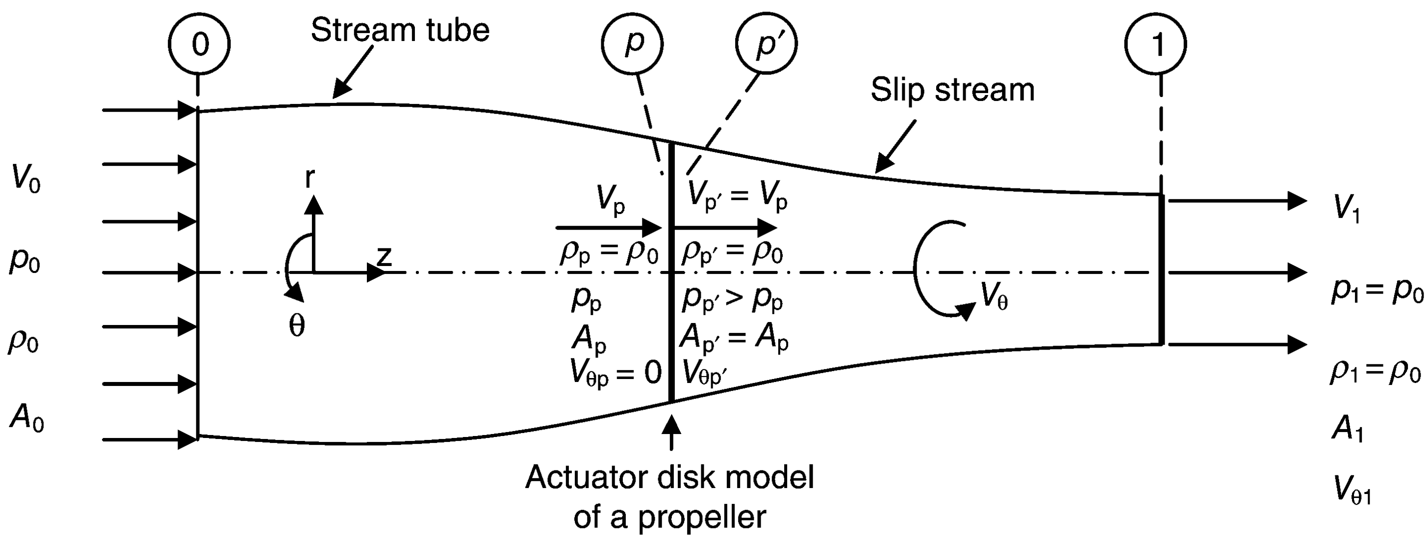


Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Lo schema della **teoria impulsiva** è mostrata in figura. Il tubo di flusso mostra che l'aria catturata dall'elica viene convogliata nel disco attuatore che ne aumenta la pressione e la **componente azimutale** (di swirl) della velocità.

Le condizioni a monte, del disco attuatore e a valle sono individuate dai pedici 0, *p* e 1.

Come già detto la densità rimane costante attraverso il disco attuatore mentre le due componenti della velocità aumentano discontinuamente.

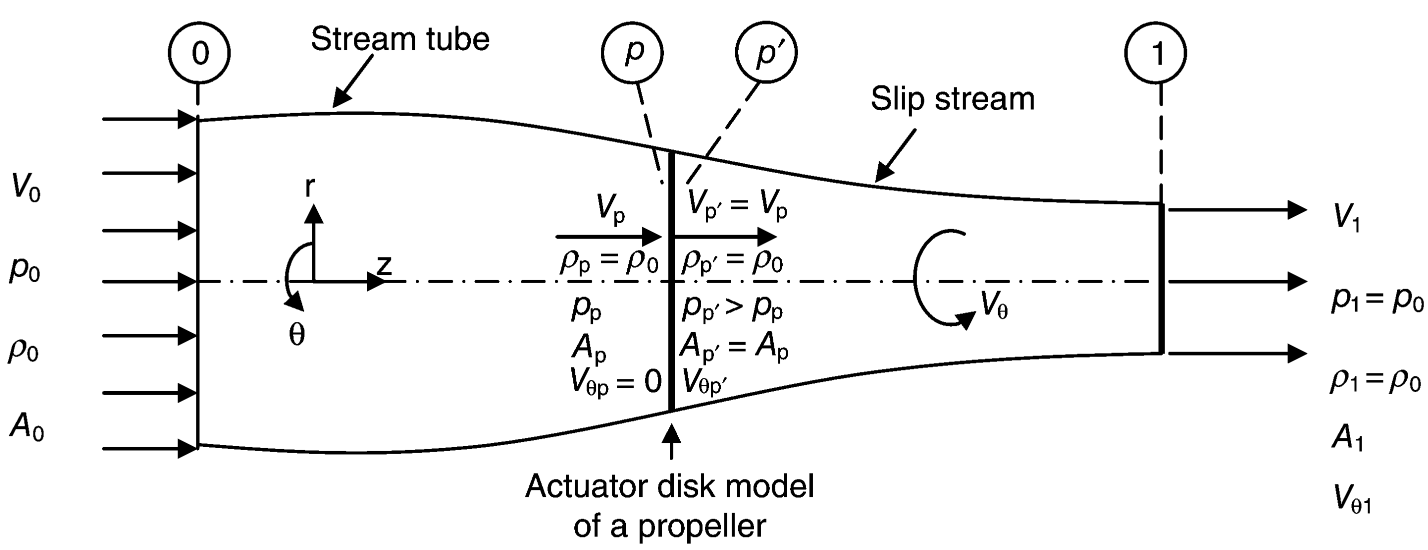


Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

A valle si recupera il valore di pressione a monte mentre le componenti delle velocità aumentano. Le grandezze note sono:

- Le condizioni di volo: $V_0, p_0\ e\ \rho_0$;
- Il diametro dell'elica e di conseguenza l'area del disco attuatore: A_p;
- La potenza all'albero: $\mathcal{P}_s$;
- La velocità angolare dell'albero: ω.

Mentre le incognite sono: $A_0,\ A_1,\ V_p, V_{\theta p'}, V_1, V_{\theta 1}, p_p, p_{p'}$.



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

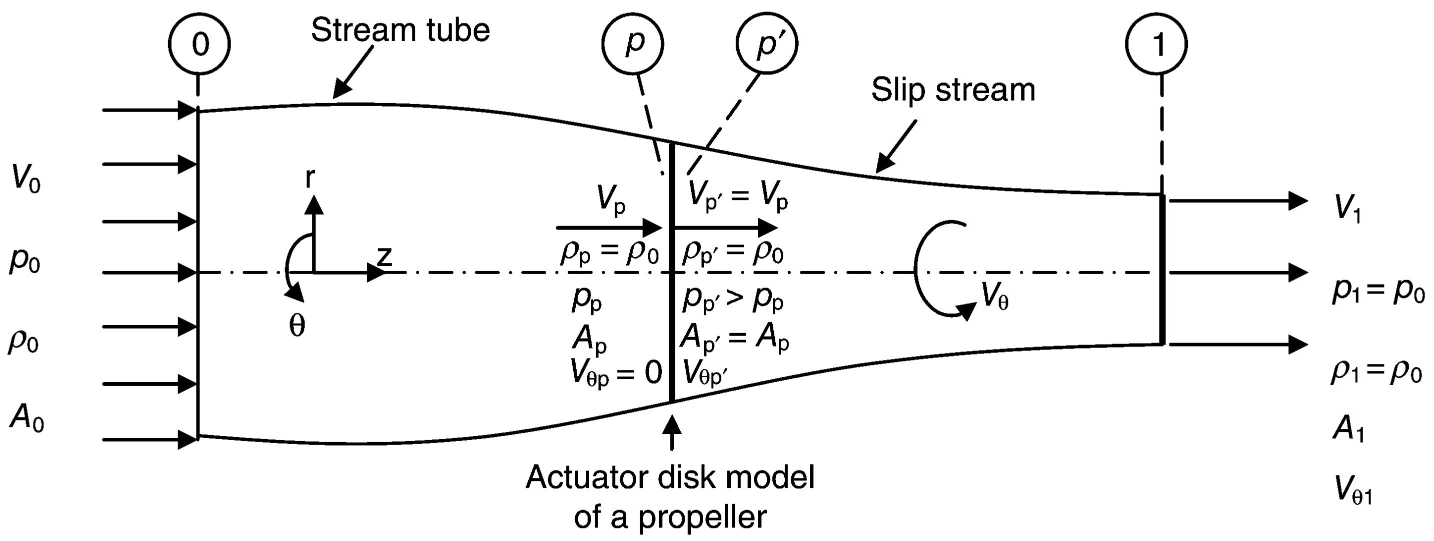
Dalla **conservazione della massa** e dall'equazione di **Bernoulli**, trascurando la componente radiale della velocità:

$$V_0 A_0 = V_p A_p = V_1 A_1$$

$$p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = p_p + \rho \frac{V_p^2}{2} \qquad\qquad p_{p'} + \rho \frac{V_p^2 + V_{\theta p'}^2}{2} = p_0 + \rho \frac{V_1^2 + V_{\theta 1}^2}{2}$$

sommando le ultime due si ha:

$$p_{p'} + \rho \left(V_0^2 + V_{\theta p'}^2\right) / 2 = p_p + \rho\left(V_1^2 + V_{\theta 1}^2\right) / 2$$



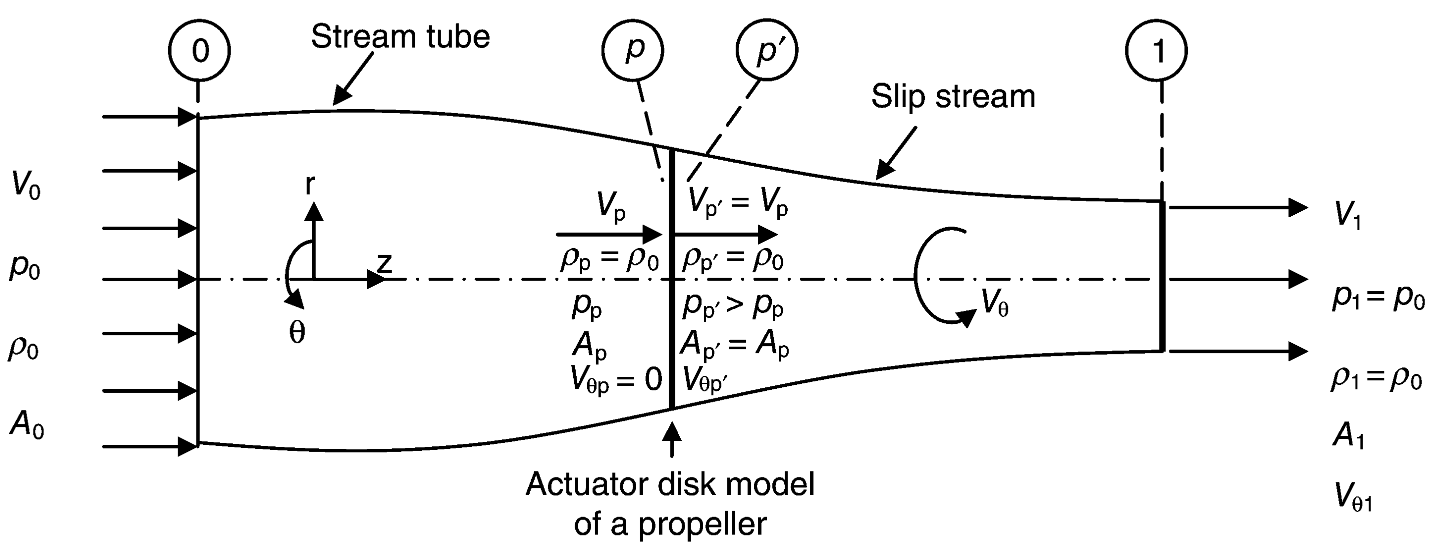
Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Dal **bilancio della QM** in direzione **assiale**, trascurando i contributi di pressione, si può determinare la spinta:

$$F_p = A_p(p_{p'} - p_p) \approx \dot{m}_p(V_1 - V_0) = \rho V_p A_p (V_1 - V_0)$$

La potenza all'albero bilancia l'aumento di energia cinetica e le ulteriori perdite:

$$\mathcal{P}_s \approx \dot{m}_p\left(V_1^2 + V_{\theta 1}^2 - V_0^2\right)/2$$



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Le **equazioni** si **semplificano** in modo significativo **trascurando** le componenti **azimutali** della velocità. In particolare **sommando** le **due** equazioni di **Bernoulli** e considerando l'equazione per la spinta:

$$p_{p'} - p_p = \frac{\rho}{2}\left(V_1^2 - V_0^2\right) = \frac{F_p}{A_p} \approx \rho V_p (V_1 - V_0) \qquad \rightarrow \qquad V_p \approx \frac{V_1 + V_0}{2}$$

Dal bilancio della massa si ottiene anche:

$$A_p = \frac{V_0}{V_p} A_0 = \frac{2V_0}{V_1 + V_0} A_0 = \frac{2}{1 + \frac{V_1}{V_0}} A_0$$

Dall'equazione per la spinta e per la potenza trascurando le componenti azimutali della velocità:

$$\mathcal{P}_s \approx \dot{m}_p \left(V_1^2 + V_{\theta 1}^2 - V_0^2\right)/2$$

$$\mathcal{P}_s \approx \rho A_p V_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) = \rho A_p V_p (V_1 - V_0) \frac{V_1 + V_0}{2} = F_p V_p$$

Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

$$\mathcal{P}_s \approx \rho A_p V_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)$$

sostituendo $V_p \approx \frac{V_1 + V_0}{2}$

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^3 A_p} = C_{\mathcal{P}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_0} + 1\right)\left(\frac{V_1^2}{V_0^2} - 1\right)$$

Supponendo che il termine a sinistra (il **coefficiente di potenza**) sia noto la precedente equazione può essere risolta in $\frac{V_1}{V_0}$.

Il **coefficiente di spinta** è definito come

$$C_T = \frac{F_p}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 A_p} = \frac{\rho V_p A_p (V_1 - V_0)}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 A_p} = \frac{V_1^2}{V_0^2} - 1$$

Il **rendimento dell'elica** è:

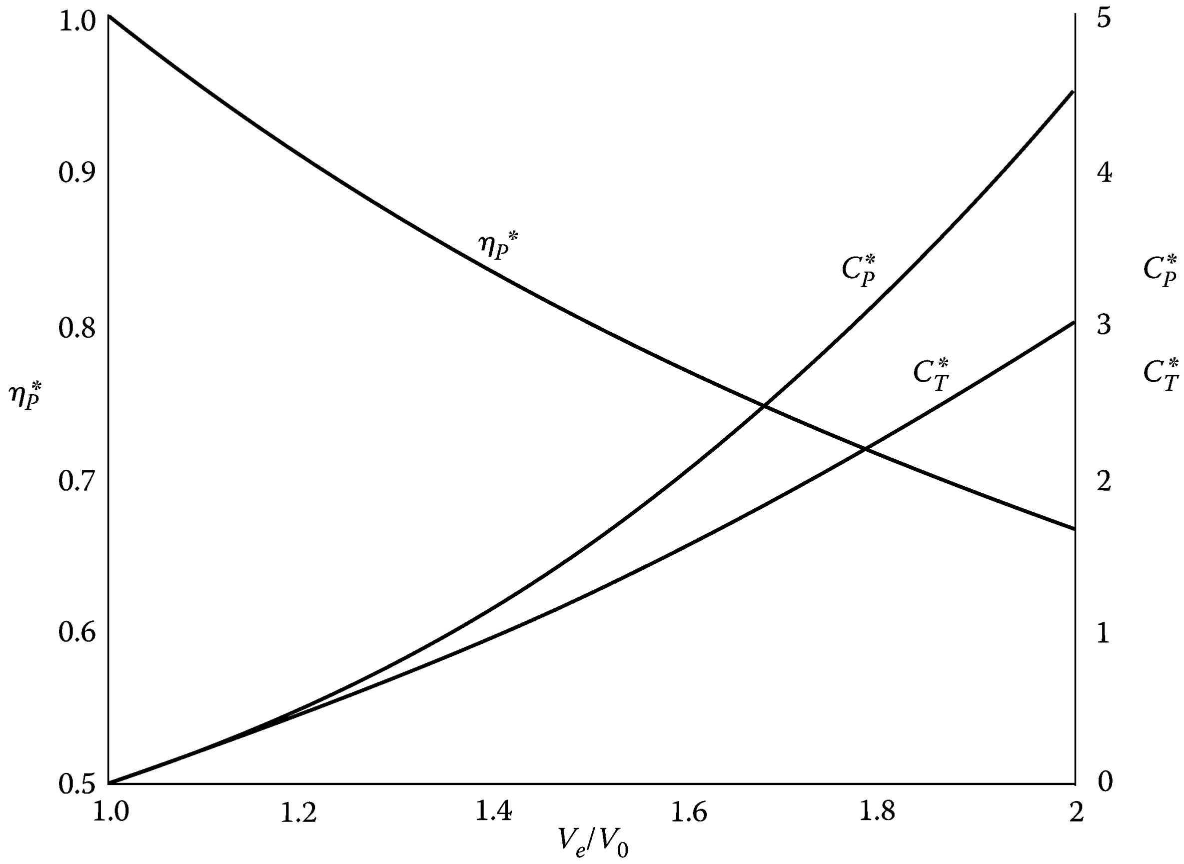
$$\eta_{prop} = \frac{F_p V_0}{\mathcal{P}_s} = \frac{F_p V_0}{\dot{m}_p\left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)} \frac{\dot{m}_p\left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)}{\mathcal{P}_s} = \eta_p \eta_L$$

Chiaramente il **rendimento propulsivo** η_p , già introdotto in precedenza, è un **limite superiore** che potrebbe essere raggiunto solo se l'elica fosse capace di **convertire tutta la potenza all'albero** in potenza propulsiva. In particolare il rendimento propulsivo nelle ipotesi fatte diventa:

$$\eta_p = \frac{F_p V_0}{\dot{m}_p\left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)} = \frac{\rho V_p A_p (V_1 - V_0) V_0}{\dot{m}_p\left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)} = \frac{2V_0}{V_1 + V_0} = \frac{A_p}{A_0}$$

Si ha anche:

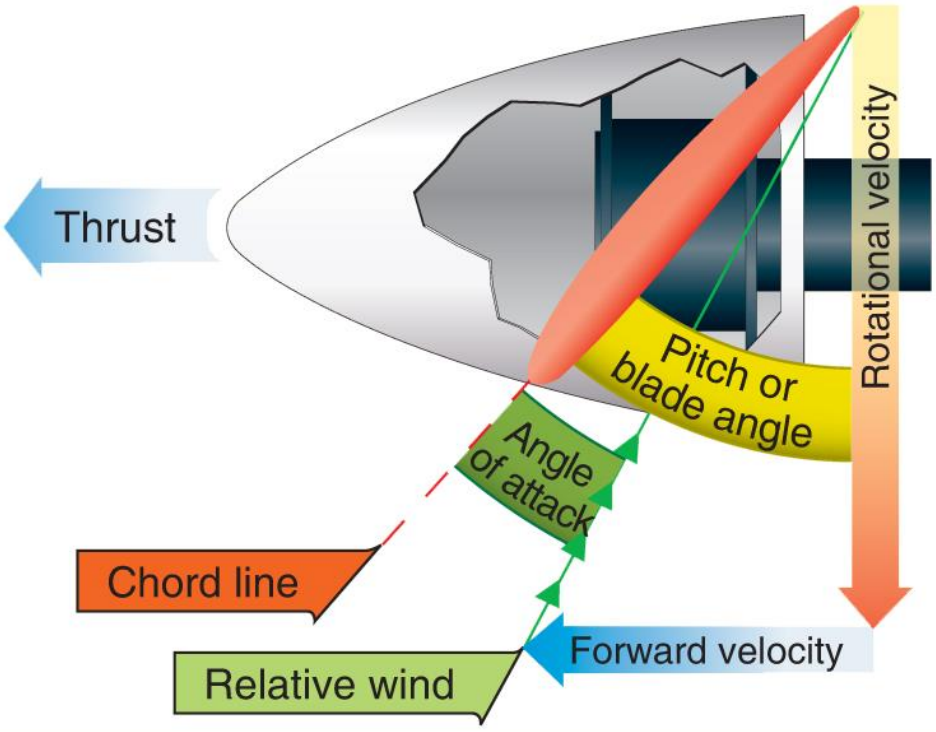
$$\eta_p = \frac{2}{\frac{V_1}{V_0} + 1} \rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \frac{2 - \eta_p}{\eta_p} \quad \rightarrow \quad C_T = \frac{4(1 - \eta_p)}{\eta_p^2} \quad \rightarrow \quad C_{\mathcal{P}} = \frac{C_T}{\eta_p^2}$$

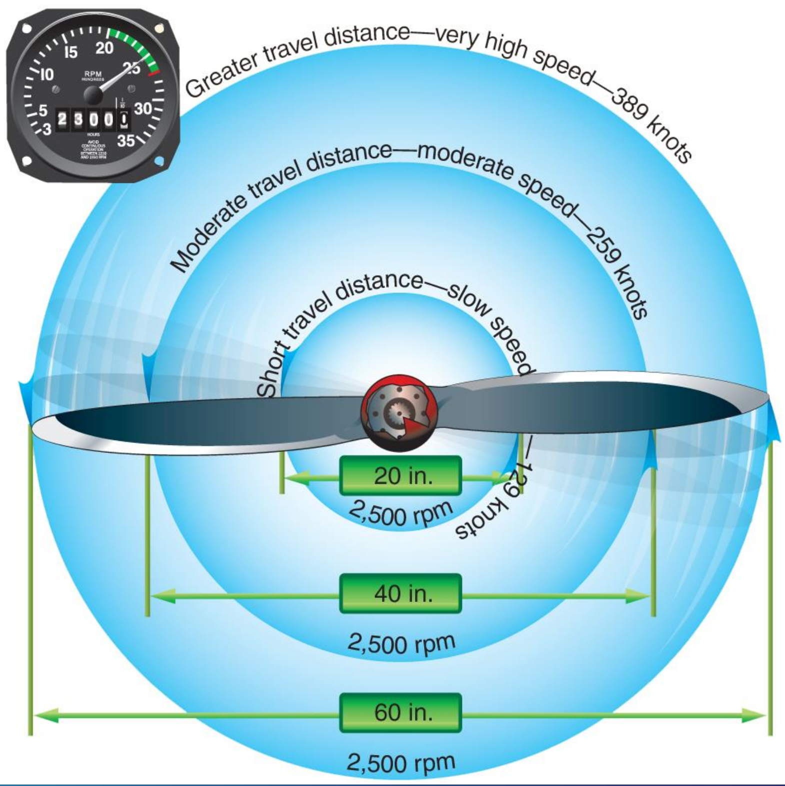


Elementi di teoria dell'elica – teoria dell’elemento di pala

L’elica è un ala che ruota rispetto ad un asse. Evidentemente la **velocità** periferica rotazionale ωr **aumenta all’aumentare del raggio** mentre V_0 rimane costante; per mantenere l’angolo d’attacco costante è necessario che **l’elica sia svergolata**.

Ad ogni stazione **varia** anche il modulo della velocità relativa e con esso il numero di **Reynolds**.

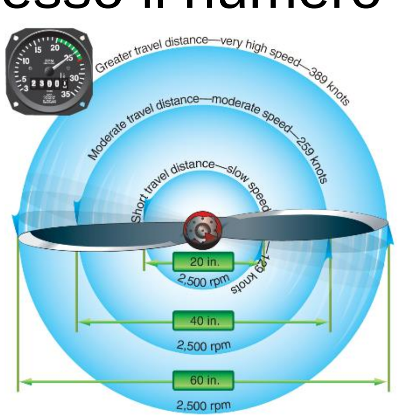


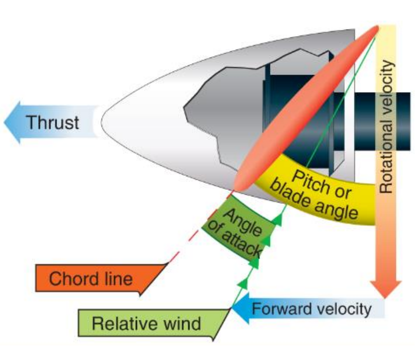


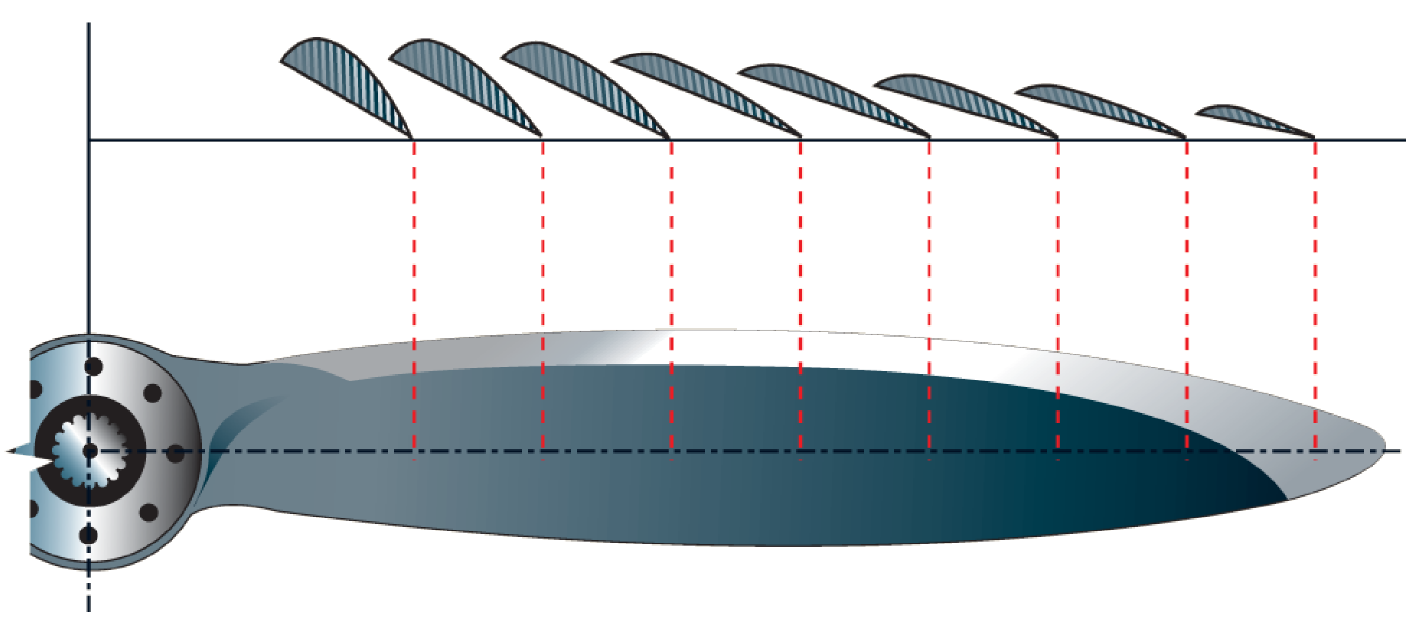
Elementi di teoria dell'elica – teoria dell’elemento di pala

L’elica è un ala che ruota rispetto ad un asse. Evidentemente la **velocità** periferica rotazionale ωr **aumenta all’aumentare del raggio** mentre V_0 rimane costante; per mantenere l’angolo d’attacco costante è necessario che **l’elica sia svergolata**.

Ad ogni stazione **varia** anche il modulo della velocità relativa e con esso il numero di **Reynolds**.







Elementi di teoria dell'elica – teoria dell'elemento di pala

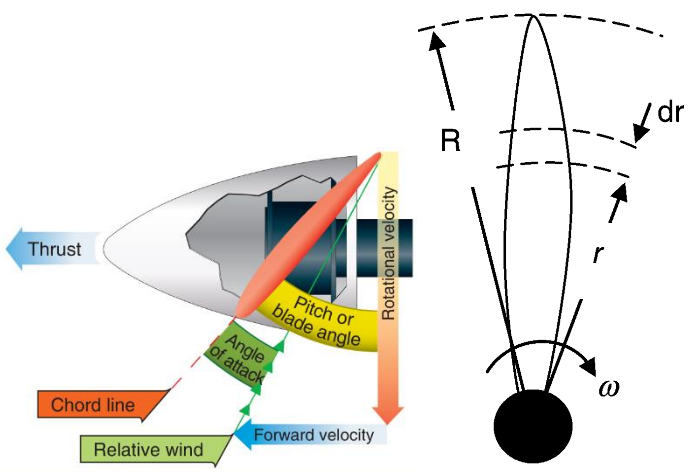
La velocità relativa è data dalla composizione dei due moti:

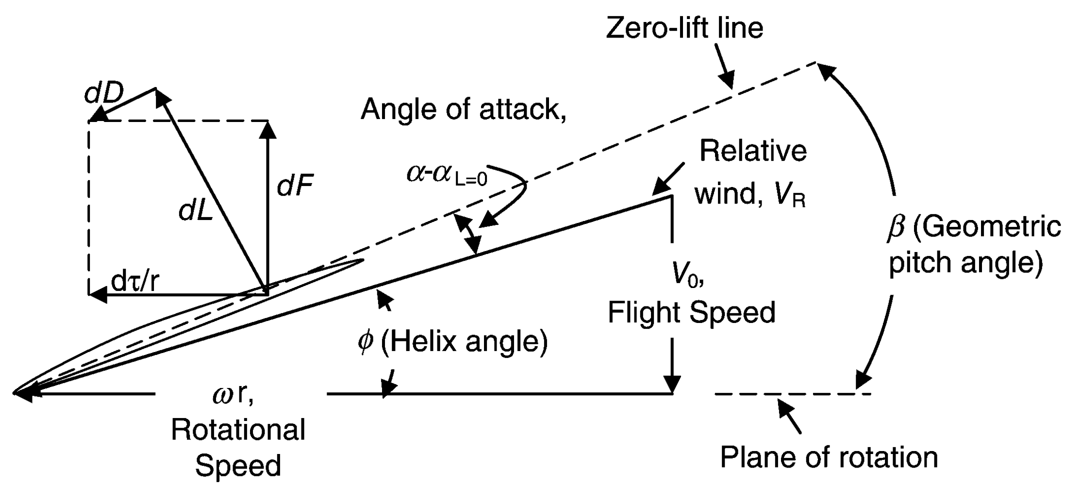
$$V_R = V_0 - \omega r$$

L'angolo formato con il piano di rotazione viene chiamato **angolo d'elica** ϕ. Trascurando l'induzione vorticosa L'angolo d'attacco α è dato dalla differenza fra **l'angolo di calettatura** β (pitch) e quello d'elica. Portanza e resistenza vengono proiettati negli assi del velivolo per ottenere il contributo alla spinta *dF* ed al momento resistente $d\tau$:

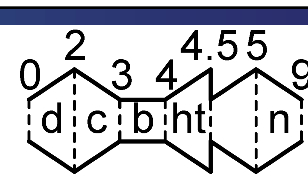
$$dF = dL cos\phi - dD sin\phi$$

$$d\tau = r(dL sin\phi + dF cos\phi)$$

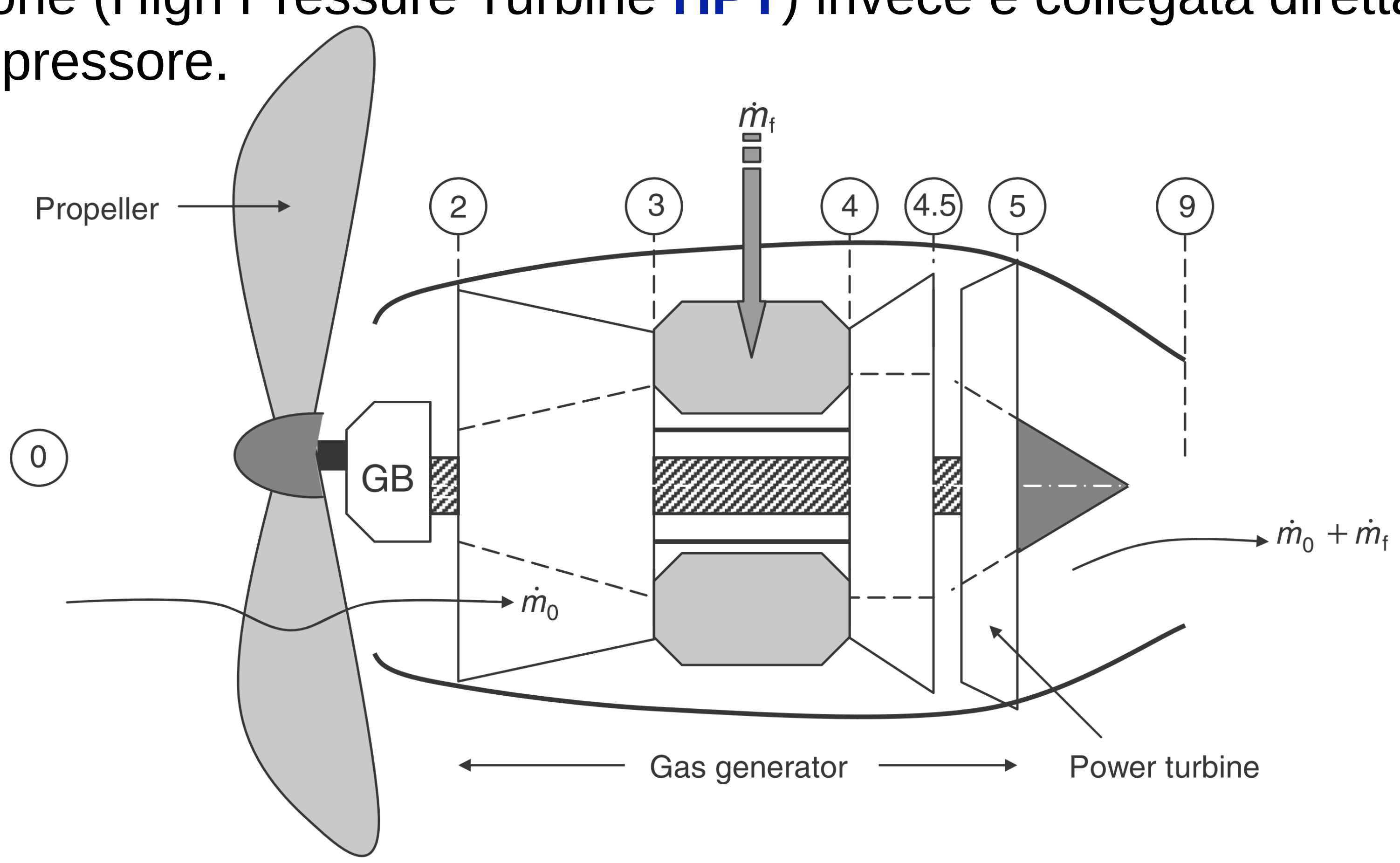




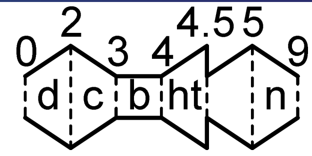
Turboprop



In figura è mostrato un turboprop a due alberi. In questo caso La turbina di bassa pressione (Low Pressure Turbine **LPT**) è collegata attraverso un **riduttore**, meccanico (gearbox) all'elica. La turbina di alta pressione (High Pressure Turbine **HPT**) invece è collegata direttamente al compressore.



Turboprop

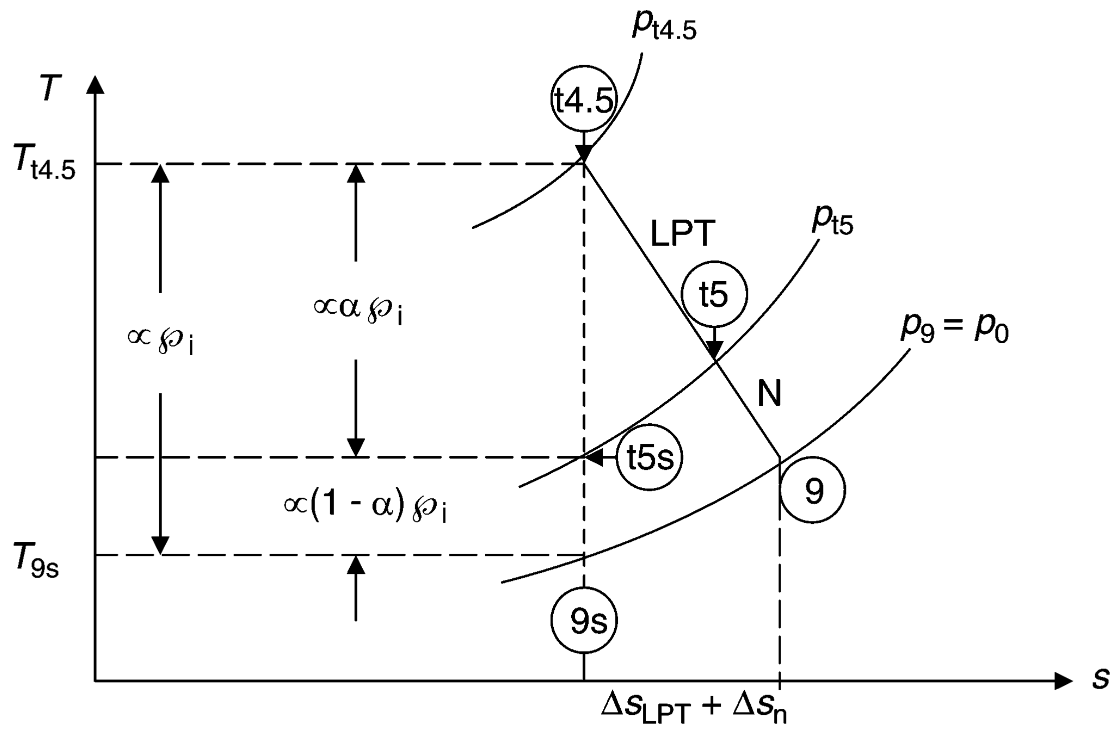


I nuovi parametri che **caratterizzano il turboprop** sono:

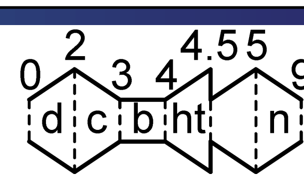
- il **rendimento** del riduttore meccanico (gearbox) e quello meccanico $\eta_{m_{tL}}\eta_{gb} = \mathcal{P}_s/\mathcal{P}_{LPT}$ dove $\mathcal{P}_{LPT}$ è la potenza fornita dalla turbina di bassa pressione;
- il rendimento complessivo d'elica: η_{prop};
- il rapporto di pressione o di temperatura della LPT ed il suo rendimento politropico: τ_{tL}, e_{tL}.

Quest'ultimo parametro influenza il **rapporto** fra la spinta prodotta dal **getto** e quella **dell'elica**.

In alternativa si può fornire **il rapporto fra le due potenze** ideali utilizzata e disponibile alla turbina di bassa pressione α_p:



Turboprop



Dalla figura si nota che il rapporto di divisione delle potenze è dato da:

$$\alpha_p = \frac{\mathcal{P}_{i.LPT}}{\mathcal{P}_{i.tot}} = \frac{\frac{\mathcal{P}_{LPT}}{\eta_{tL}}}{\mathcal{P}_{i.tot}} = \frac{h_{t45} - h_{t5s}}{h_{t45} - h_{9s}}$$

questa equazione può essere risolta per trovare il rapporto di entalpie totali nella turbina:

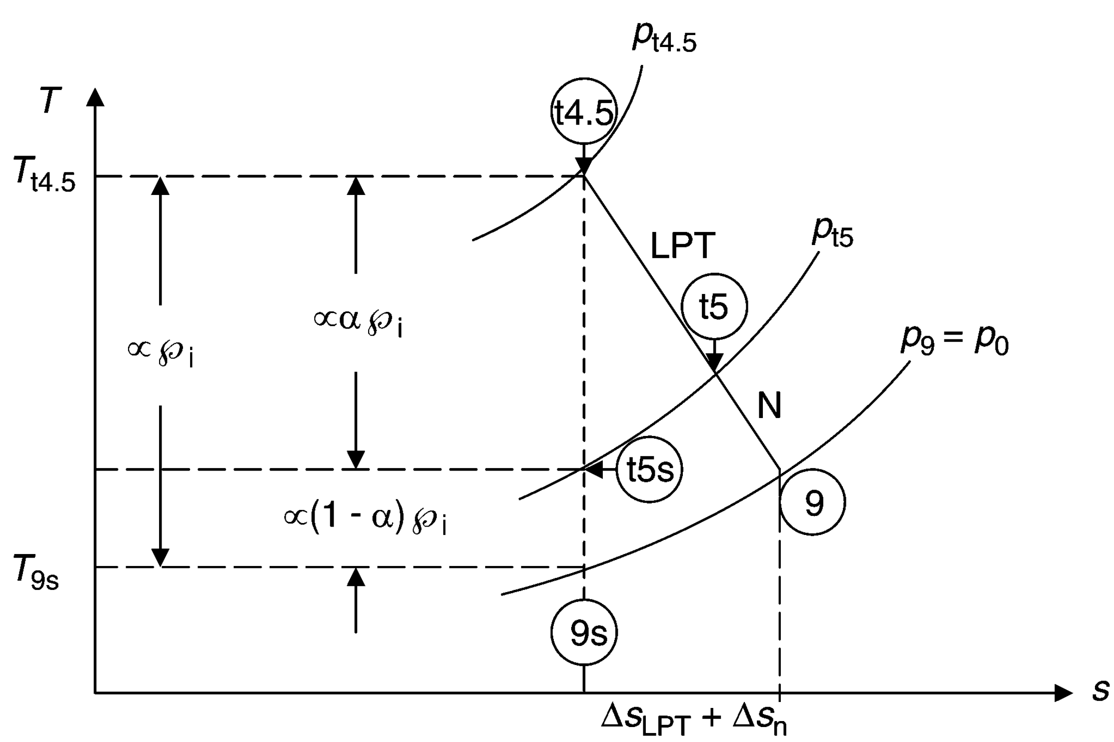
$$\tau_{tL} = \frac{h_{t5}}{h_{t45}}$$

ricordando che:

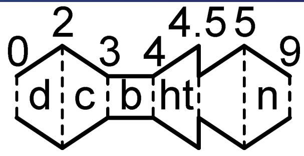
$$\eta_{tL} = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{t5s}}$$

si ha:

$$\eta_{tL}\alpha_p = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{9s}}$$



Turboprop



Esplicitando i vari termini della relazione precedente si ha:

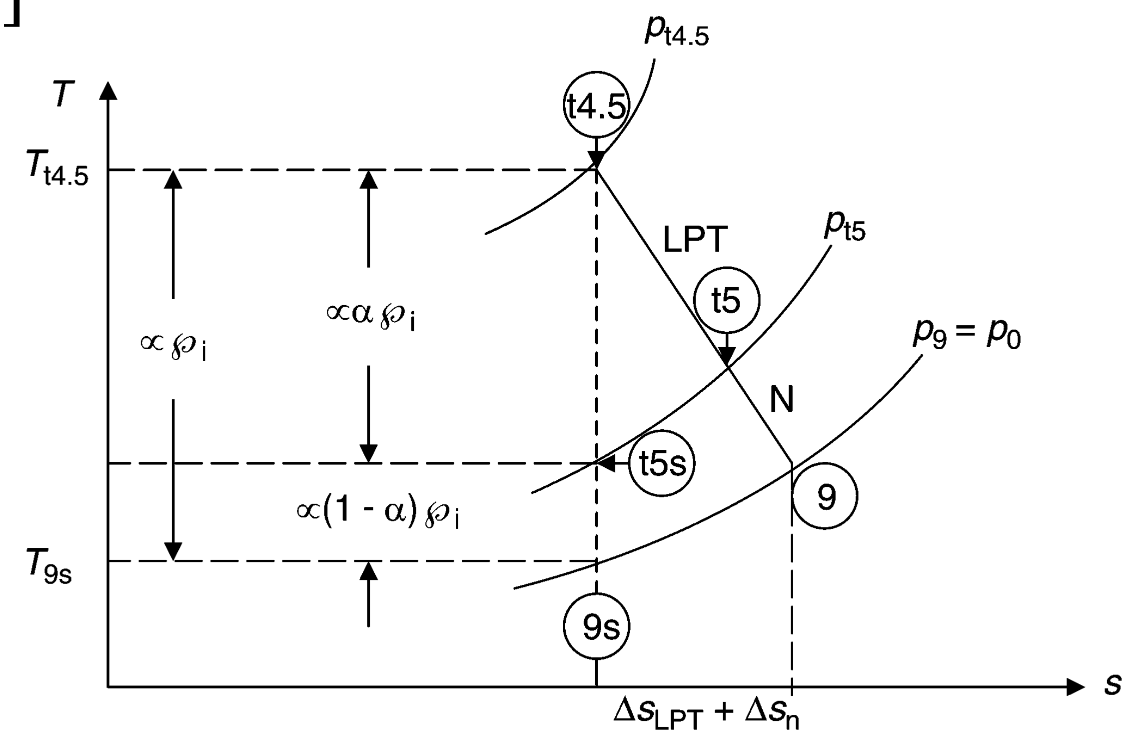
$$\eta_{tL}\alpha_p = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{9s}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1 - \tau_{tL}}{\eta_{tL}\alpha_p} = 1 - \frac{h_{9s}}{h_{t45}} = 1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^{k_9}$$

$$\tau_{tL} = 1 - \eta_{tL}\alpha_p \left[1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^{k_9}\right]$$

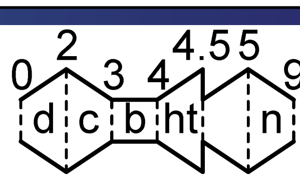
dove, in generale, essendo:

$$\eta_{tL} = \frac{1 - \tau_{tL}}{1 - \pi_{\tau L}^{k_9}} = \frac{1 - \tau_{tL}}{1 - \tau_{\tau L}^{\frac{1}{e_{tL}}}}$$

è necessario un approccio iterativo.



Turboprop



Il rapporto $\frac{p_{9s}}{p_{t45}}$ può essere calcolato come:

$$\frac{p_{9s}}{p_{t45}} = \frac{p_9}{p_{t45}} = \frac{p_9}{p_0}\frac{1}{\pi_{tH}\pi_b\pi_c\pi_d\pi_r}$$

La potenza all'albero può essere calcolata come:

$$\frac{\mathcal{P}_S}{\dot{m}_0} = \eta_{gb}\eta_{m_{tL}}\frac{\mathcal{P}_{LPT}}{\dot{m}_0} = \eta_{gb}\eta_{m_{tL}}\frac{\dot{m}_9}{\dot{m}_0}(h_{t45} - h_{t5})$$

$$\frac{\mathcal{P}_S}{\dot{m}_0} = (1 + f)\eta_{gb}\eta_{m_{tL}}(1 - \tau_{tL})\frac{h_{t45}}{h_{t4}}\frac{h_{t4}}{h_0}h_0$$

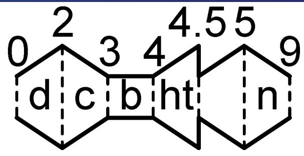
Chiaramente $h_{t45} = c_{p45}T_{t45}$ oppure con $\tau_{tH} = \frac{h_{t45}}{h_{t4}}$, $\tau_\lambda = \frac{h_{t4}}{h_0}$ si ha:

$$\frac{\mathcal{P}_S}{\dot{m}_0} = (1 + f)\eta_{gb}\eta_{m_{tL}}(1 - \tau_{tL})\tau_{tH}\tau_\lambda c_p T_0$$

Infine ricordando la definizione del rendimento d'elica:

$$\eta_{prop} = \frac{F_p V_0}{\mathcal{P}_s} \qquad \rightarrow \qquad \frac{F_p}{\dot{m}_0} = \frac{\eta_{prop}\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0}$$

Turboprop



Evidentemente la spinta è data dalla **somma delle spinte** prodotte dal getto e dall'elica (*core*):

$$F = F_p + F_{core}$$

Come già detto:

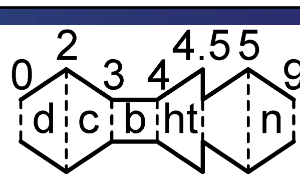
$$\frac{F_{core}}{\dot{m}_0 a_0} = (1+f)\frac{V_9}{a_0}\left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) - M_0 \qquad \frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop}\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0 a_0}$$

Normalmente per un turboprop, l'ugello segue un funzionamento corretto. Le varie grandezze sono calcolate nello stesso modo di un normale turbogetto. Chiaramente nel calcolo dei rapporti si deve considerare anche sia il contributo della turbina di alta che di bassa pressione. Per esempio nella:

$$\frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9}$$

Si deve considerare $\pi_t = \pi_{tH}\pi_{tL}$

Turboprop



La spinta generata dall'elica è:

$$\frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop}\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0 a_0} = \frac{\eta_{prop}(1+f)\eta_{gb}\eta_{m_{tL}}(1-\tau_{tL})\tau_{tH}\tau_\lambda c_p T_0}{V_0 a_0}$$

I rendimenti diventano:

$$\eta_{th} = \frac{\Delta K\dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{a_0^2\left[(1+f)(V_{9.e}/a_0)^2 - M_0^2\right] + 2\mathcal{P}_S/\dot{m}_0}{2fQ_R}$$

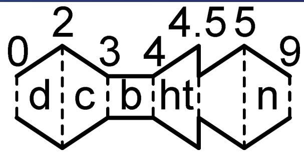
$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K\dot{E}} \approx \frac{2\left(F_p + F_{core}\right)V_0/\dot{m}_0}{a_0^2\left[(1+f)(V_{9.e}/a_0)^2 - M_0^2\right] + 2\mathcal{P}_S}$$

$$TSFC = \frac{f}{\left(F_p + F_{core}\right)/\dot{m}_0}$$

Oppure si può introdurre il **rapporto tra la portata di combustibile** è la **potenza propulsiva**:

$$PSFC = \frac{\dot{m}_0 f}{\Delta K\dot{E}} = \frac{Q_R}{\eta_{th}}$$

Turboprop



Ha senso interrogarsi sulla possibilità di avere un α_p **ottimale** (che massimizza la spinta), mantenendo costanti gli altri parametri. Nell'ipotesi di funzionamento ideale si ha:

$$\frac{F_{core}}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{V_9}{a_0} - M_0 \qquad \frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop}\left(1-\tau_{t_L}\right)\tau_{tH}\tau_\lambda c_p T_0}{V_0 a_0}$$

Definendo il coefficiente di potenza come:

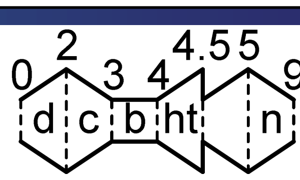
$$C_{tot} = \frac{F_p + F_{core}}{\dot{m}_0 c_p T_0} V_0 = \left(\frac{V_9}{a_0} - M_0\right)\frac{V_0 a_0}{kRT_0} + \eta_{prop}(1-\tau_{tL})\tau_{tH}\tau_\lambda$$

ricordando che: $\frac{V_9}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\frac{\tau_\lambda}{\tau_c\tau_r}(\tau_t\tau_c\tau_r - 1)} = \sqrt{A\tau_{tL} - B}$

$$C_{tot} = \left(\sqrt{A\tau_{tL} - B} - M_0\right)(\gamma-1)M_0 + C(1-\tau_{tL})$$

dove $A = \frac{2}{\gamma-1}\tau_{\mathrm{tH}}\tau_\lambda$, $B = \frac{2}{\gamma-1}\frac{\tau_\lambda}{\tau_c\tau_r} = \frac{2}{\gamma-1}\tau_b$, $C = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_\lambda$.

Turboprop



$$C_{tot} = \left(\sqrt{A\tau_{tL} - B} - M_0\right)(\gamma-1)M_0 + C(1-\tau_{tL})$$

dove $A = \frac{2}{\gamma-1}\tau_{\mathrm{tH}}\tau_\lambda$, $B = \frac{2}{\gamma-1}\frac{\tau_\lambda}{\tau_c\tau_r} = \frac{2}{\gamma-1}\tau_b$, $C = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_\lambda$.

Derivando:

$$\frac{\partial C_{tot}}{\partial \tau_{tL}} = (\gamma-1)M_0\frac{1}{2}\frac{A}{\sqrt{A\tau_{tL} - B}} - C$$

Uguagliando a zero per ottenere un massimo:

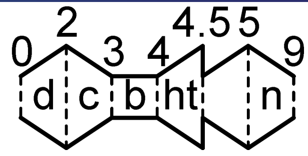
$$(\gamma-1)M_0\frac{1}{2}\frac{2}{\gamma-1}\tau_{\mathrm{tH}}\tau_\lambda = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_\lambda\sqrt{A\tau_{tL} - B} \rightarrow \; M_0 = \eta_{prop}\sqrt{A\tau_{tL} - B}$$

Ricordando che $\frac{V_9}{a_0} = \sqrt{A\tau_{tL} - B}$ la relazione precedente comporta:

$$\frac{M_0}{\eta_{prop}} = \frac{V_9}{a_0} \qquad \tau_{tL}^* = \frac{B}{A} + \frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2} = \frac{\tau_b}{\tau_{\mathrm{tH}}\tau_\lambda} + \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{\mathrm{tH}}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}$$

Per $\eta_{prop} = 1$ la **massima spinta** si ha quando $V_9 = V_0 \rightarrow F_{core} = 0$.

Turboprop



$$\tau_{tL}^{*}=\frac{B}{A}+\frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2}=\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}+\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}$$

Ricordando che:

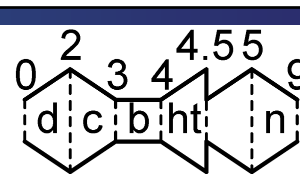
$$\frac{1-\tau_{tL}}{\eta_{tL}\alpha_p}=1-\left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^{k_9}\qquad \alpha_p=\frac{1-\tau_{tL}}{1-\left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^{k}}\qquad \tau_b=\frac{\tau_\lambda}{\tau_r\tau_c}$$

$$\frac{p_9}{p_{t45}}=\cancelto{=1}{\frac{p_9}{p_0}}\frac{1}{\pi_{tH}\cancelto{=1}{\pi_b}\pi_c\cancelto{=1}{\pi_d}\pi_r}=\left(\frac{1}{\tau_{tH}\tau_r\tau_c}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}\right)^{\frac{1}{k}}\qquad \tau_r=1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2$$

da cui:

$$\alpha_p^{*}=\frac{1-\tau_{tL}}{1-\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}}=\frac{1-\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}}{1-\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}}-\frac{\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}}{1-\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}}=1-\frac{(\tau_r-1)/\eta_{prop}^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda-\tau_b}$$

Turboprop



$$\tau_{tL}^{*}=\frac{B}{A}+\frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2}=\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}+\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}$$

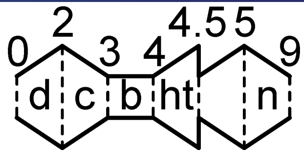
$$\alpha_p^{*}=1-\frac{(\tau_r-1)/\eta_{prop}^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda-\tau_b}$$

Queste due relazioni corrispondono a:

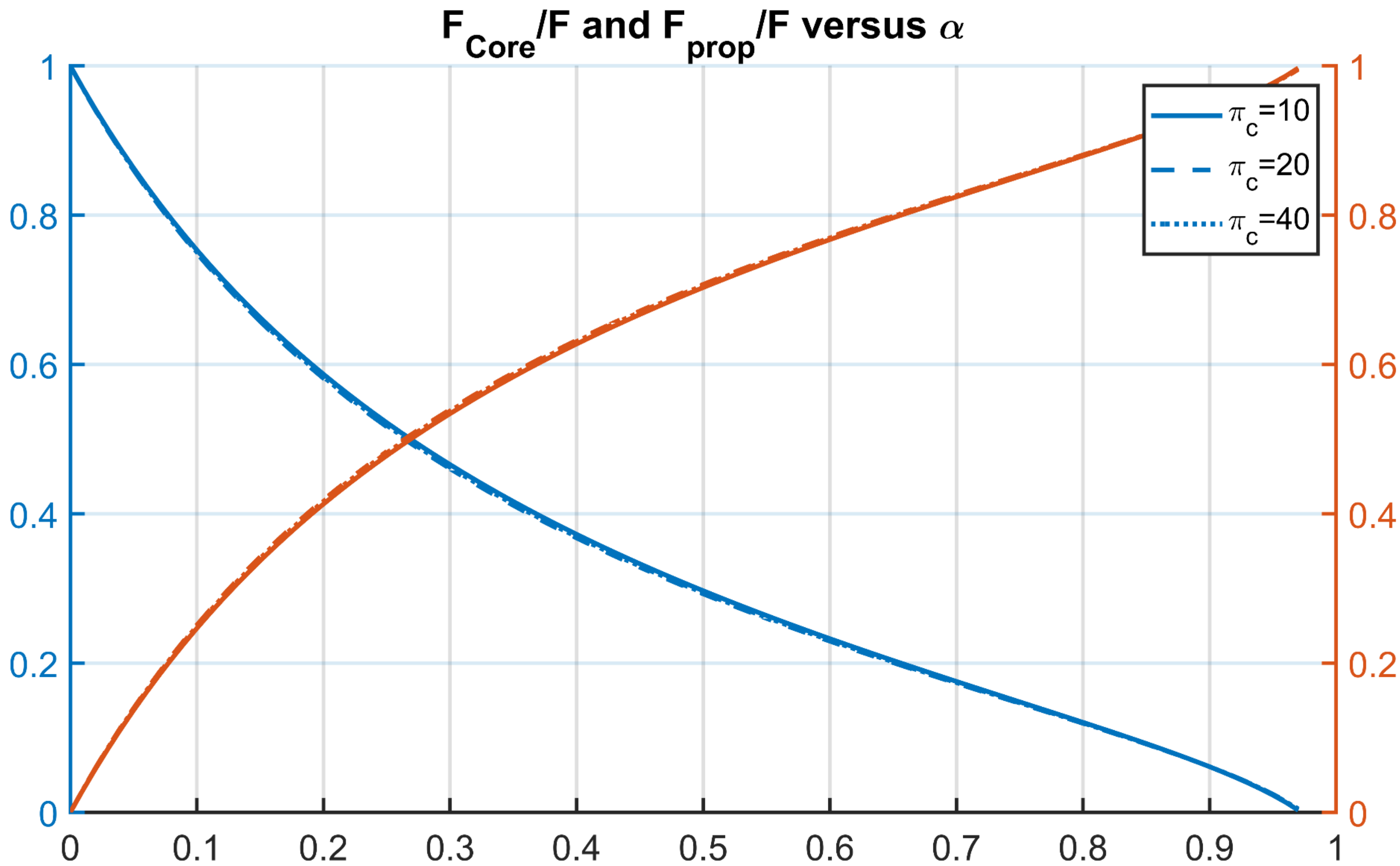
$$\frac{M_0}{\eta_{prop}}=\frac{V_9}{a_0}$$

Per $\eta_{prop}=1$ la **massima spinta** si ha quando $V_9=V_0\rightarrow F_{core}=0$. Questa condizione corrisponde a $\alpha_p^{*}=1$ solo quando $M_0=0$ ovvero a $\tau_r=1$.

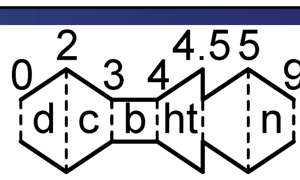
TurboProp



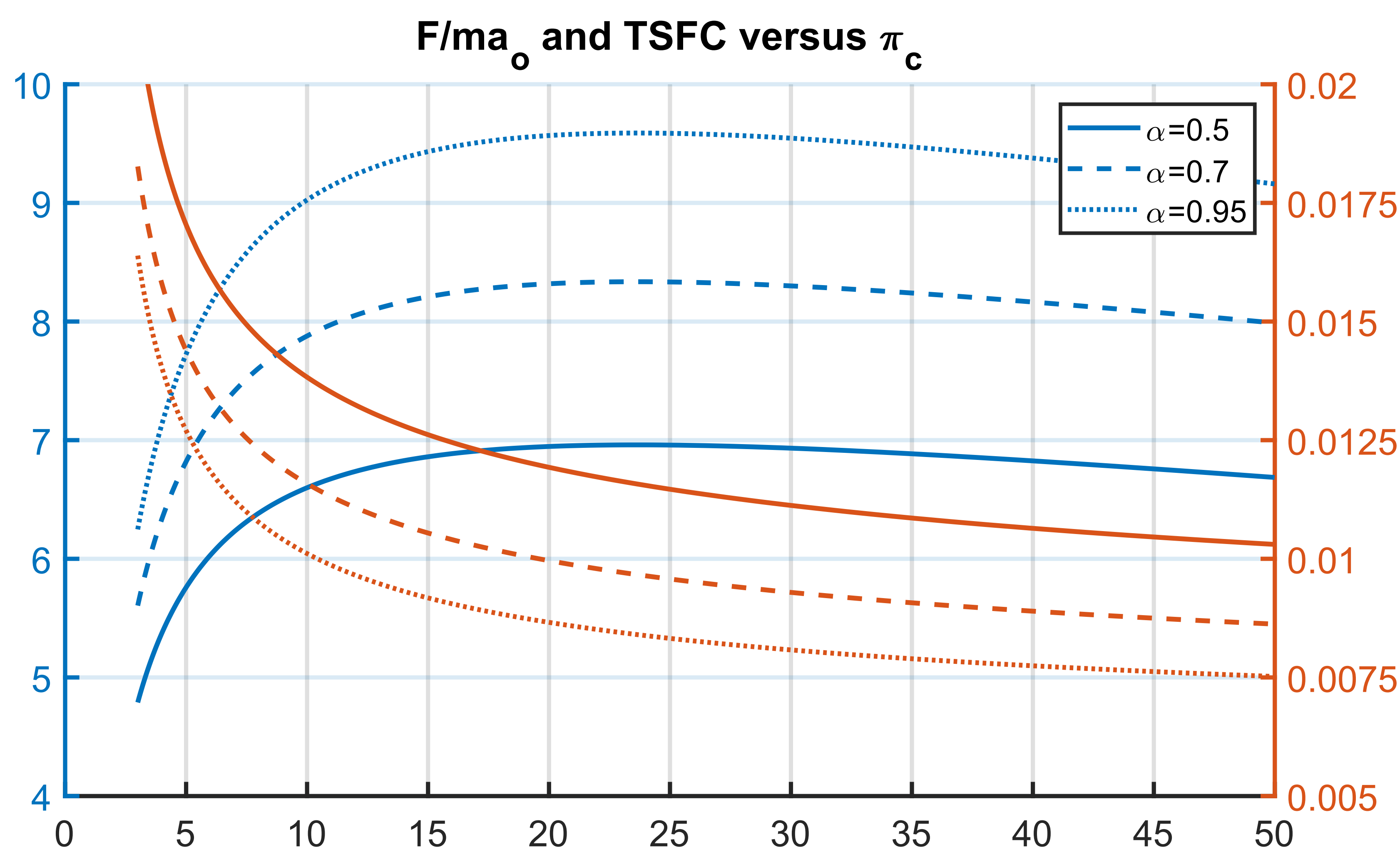
$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$



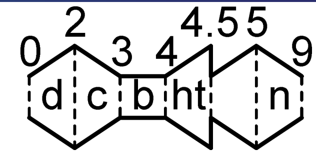
TurboProp



$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$

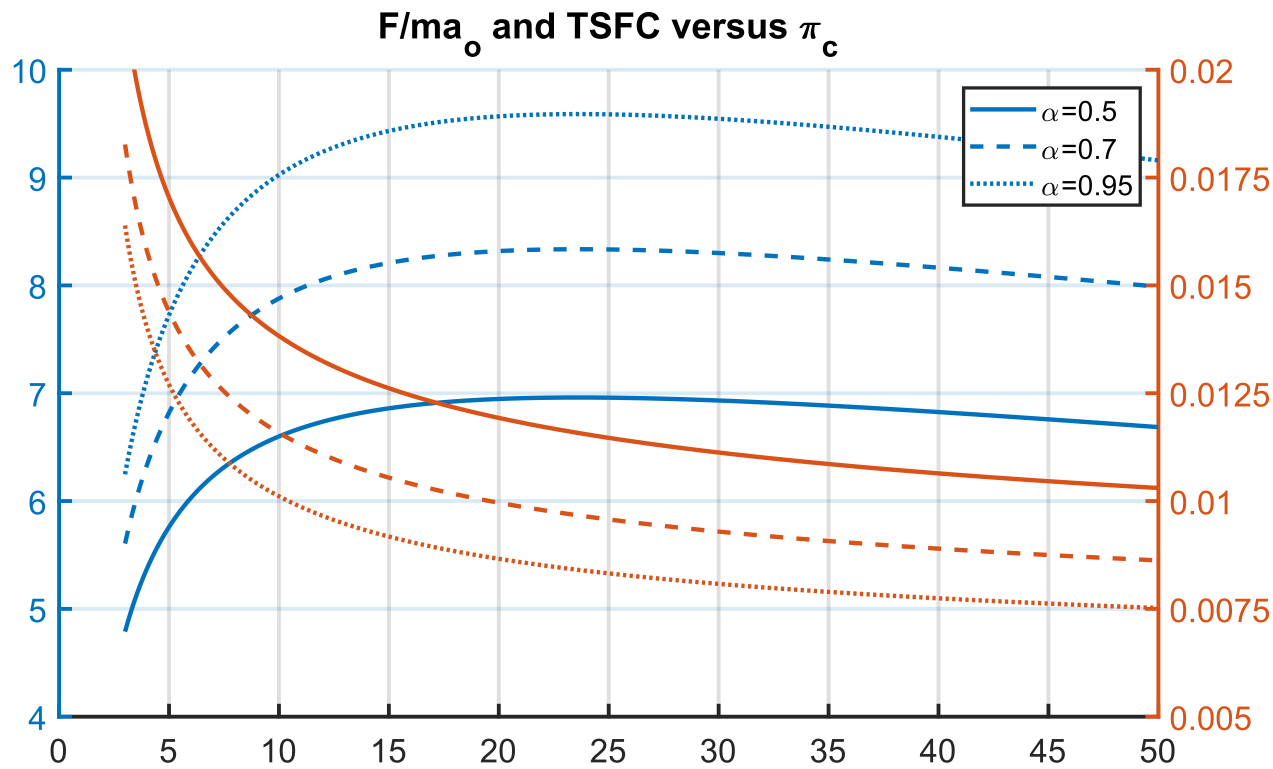


TurboProp

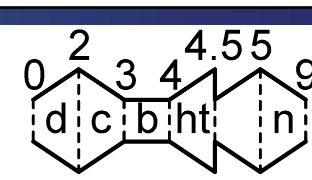


Dalla figura si nota:

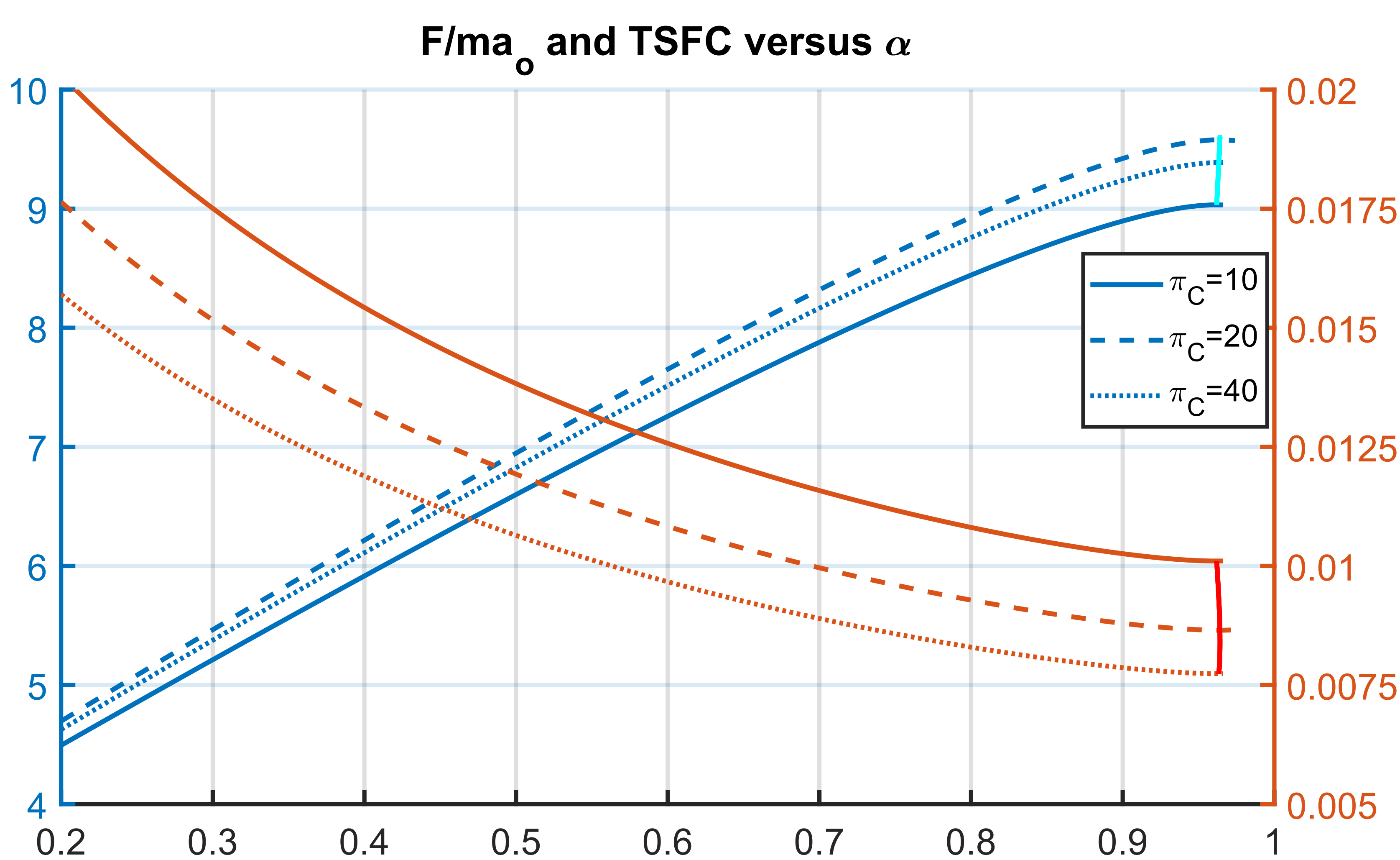
- Anche in questo caso esiste un valore di π_c che massimizza la spinta;
- Il consumo diminuisce con π_c;
- Un comportamento simile si ha anche all'aumentare di α (per un aumento del rendimento propulsivo).



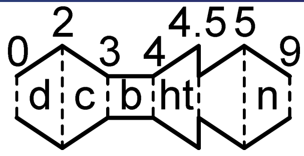
TurboProp



$$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42{,}800 kJ/kg$$



TurboProp



In rosso e ciano sono mostrate le curve relative a α_p^*. Le prestazioni aumentano significativamente per alti valori del rapporto di ripartizione della potenza.