



UNIVERSITY OF NAPLES *FEDERICO II* 1224 A.D.

Propulsione Aerospaziale

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

Versione del 12.10.2020

Termodinamica

Il fluido all'interno di un motore aerospaziale può essere modellato come un **Gas perfetto**. Le ipotesi fondamentali sono:

- Le forze intermolecolari sono piccole;
- Il volume proprio delle molecole può essere trascurato rispetto al volume occupato dal gas.

In queste ipotesi la prima equazione di stato è:

$$p = \rho RT$$

Dove R è la costante dei gas che può essere espressa in termini della costante universale dei gas:

$$R = \frac{\bar{R}}{MW} \quad \bar{R} = 8314.5 \frac{J}{\text{kmol} \cdot K}$$

La seconda equazione di stato è una fra le seguenti:

$$dh = c_p dT \quad de = c_v dT$$

Dove c_p e c_v sono i **calori specifici** a pressione e volume costante, mentre h ed e sono l'**entalpia** e l'**energia** interna ($h = e + pv$).



Termodinamica

In generale:

$$c_p = c_p(T) \quad c_v = c_v(T)$$

Nell'ipotesi di gas **più che perfetto** i calori specifici sono costanti e la seconda equazione di stato può essere espressa come:

$$h = h_0 + c_p T \quad e = e_0 + c_v T$$

Le tre costanti sono legate dalla relazione di Meyer:

$$c_p = c_v + R$$

Il rapporto fra i calori specifici è indicato con:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Si ha anche con $k = \frac{\gamma-1}{\gamma}$:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R = \frac{1}{k} R \quad c_v = \frac{1}{\gamma-1} R$$



Termodinamica

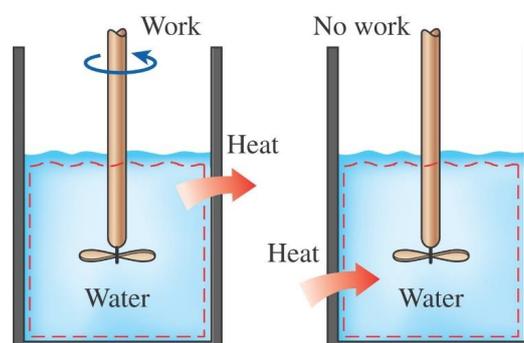
Per un sistema a massa costante, il **primo principio della termodinamica** è:

$$de = \delta q - \delta w$$

Dove per convenzione si considerano positivi il flusso di calore **entrante** δq nel sistema ed il lavoro δw fornito (**uscende**) dal sistema.

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un **verso** nelle trasformazioni termodinamiche.

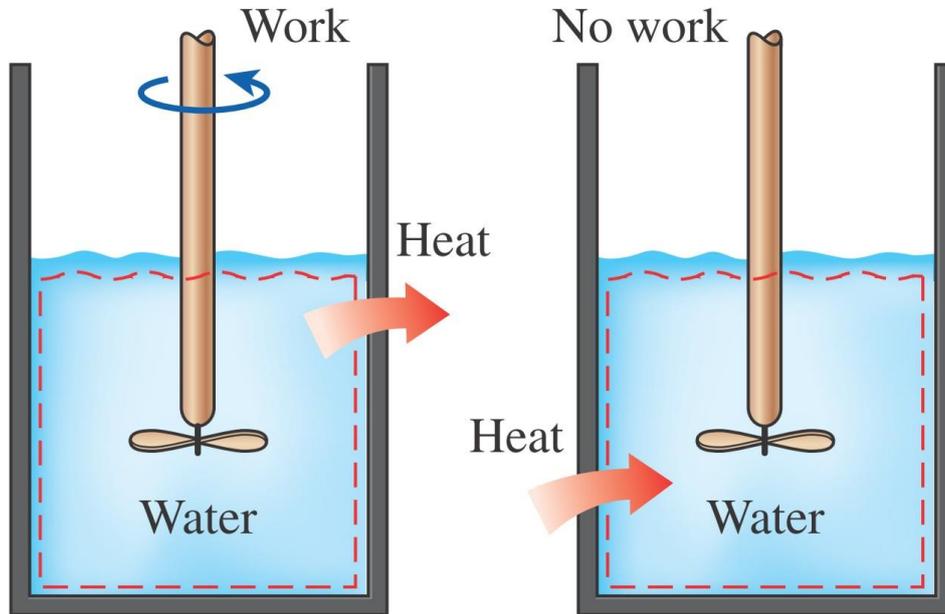
Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.



Termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un verso nelle trasformazioni termodinamiche.

Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.

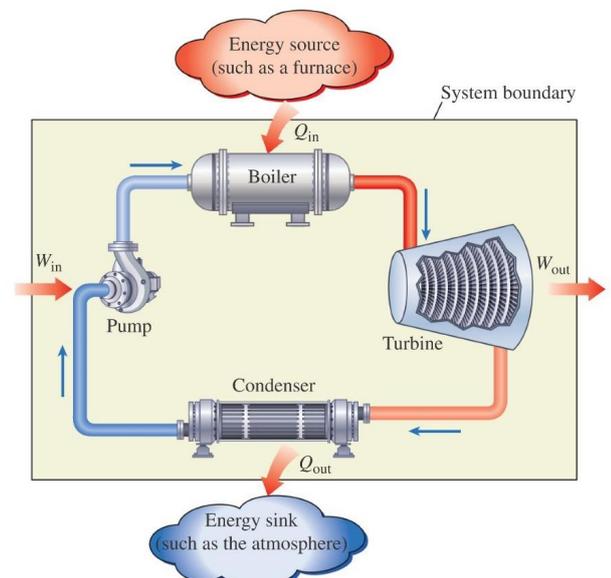
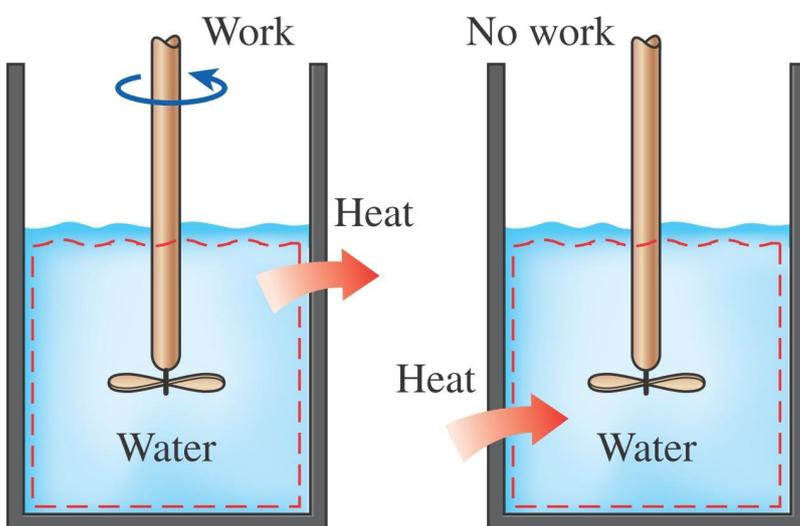


Termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** introduce l'entropia ed un verso nelle trasformazioni termodinamiche.

Il lavoro può essere facilmente trasformato in energia interna mentre il processo inverso è possibile solo utilizzando una macchina termica.

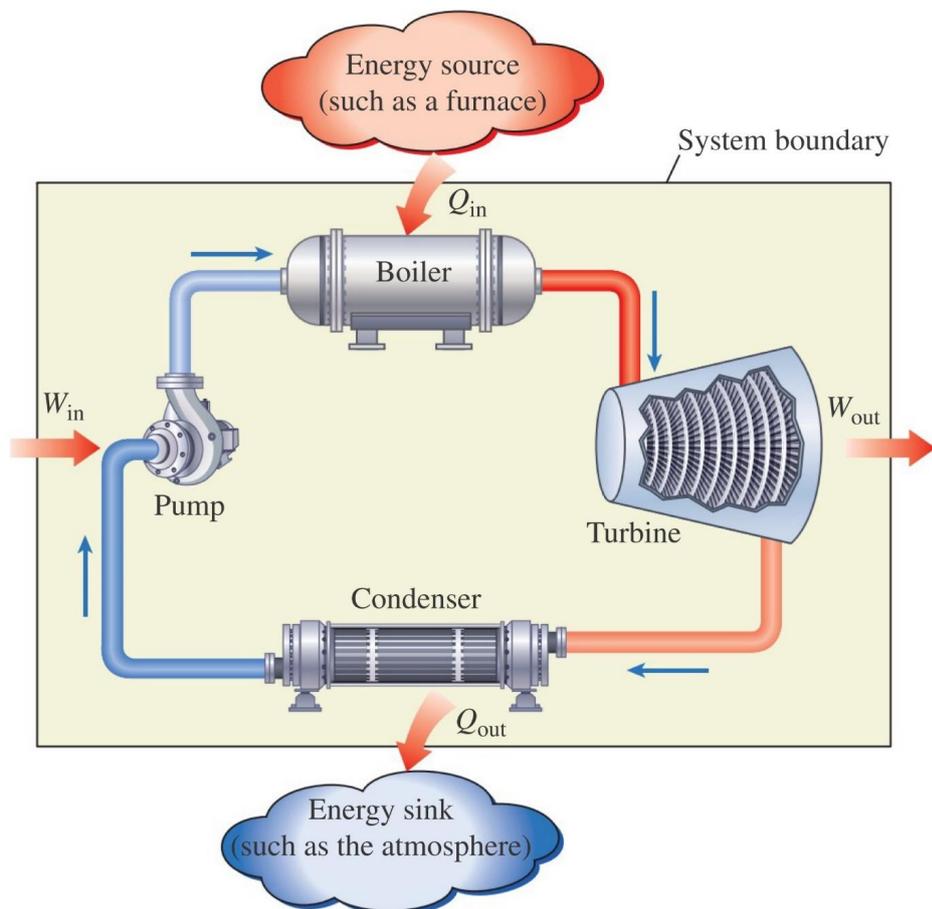
Ad esempio una centrale a vapore è schematizzata in figura.



Termodinamica

L'**evaporatore** trasforma l'acqua in vapore fornendo una certa quantità di **calore** Q_{in} , nella **turbina** viene estratto il **lavoro** W_{out} , nel **condensatore** il vapore **condensa** e nel processo cede il **calore** Q_{out} infine la **pompa** comprime l'acqua fornendo al sistema il **lavoro** W_{in} . Il **lavoro** estratto è dato dalla **differenza** dei due:

$$W_{net} = W_{out} - W_{in}$$

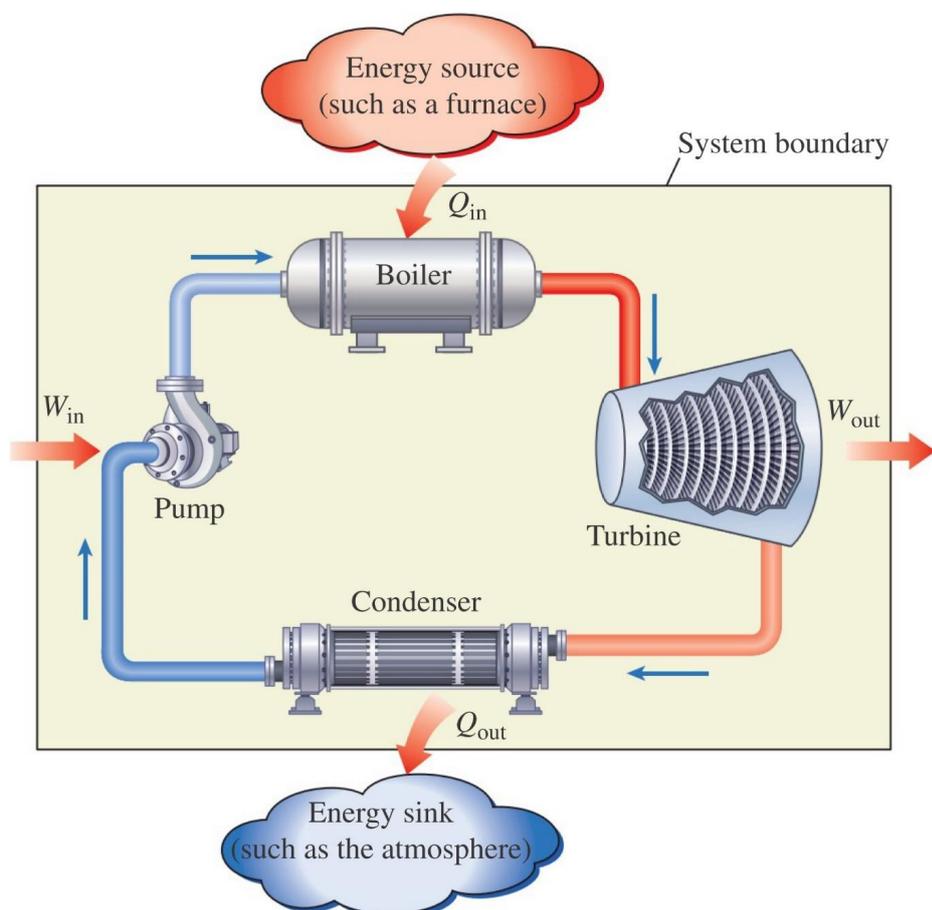


Termodinamica

Nella centrale a vapore l'acqua utilizzata nel **ciclo** è sempre la stessa quindi lo scambio netto di energia, in condizioni **stazionarie**, è nullo.

Pertanto il lavoro può essere calcolato anche come **differenza** della quantità di **calore** scambiato:

$$W_{net} = Q_{in} - Q_{out}$$



Termodinamica

Se una trasformazione è **reversibile**, cioè quando la produzione di entropia è nulla, si ha:

$$dq = Tds \quad dw = pdv$$

L'equazione di **Gibbs** collega le variabili termodinamiche, in termini energetici:

$$de = Tds - pdv$$

Mentre in termini entalpici:

$$dh = Tds + vdp$$

In un processo **isentropico** si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{c_p}{R}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{c_p}{c_v}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

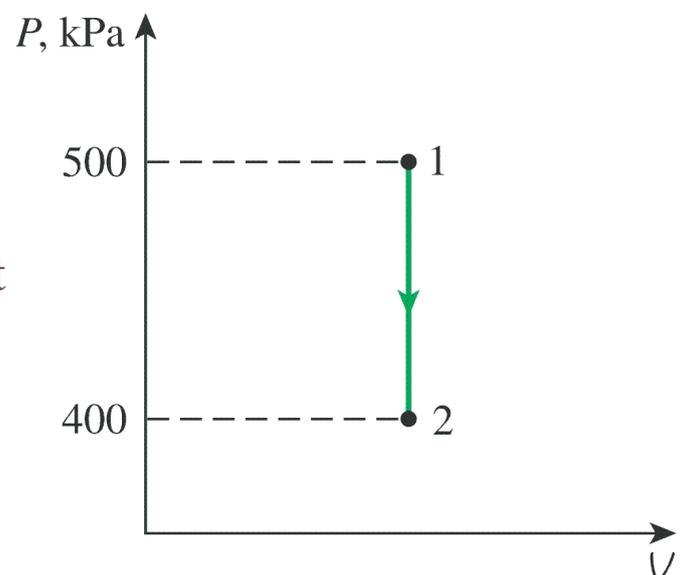
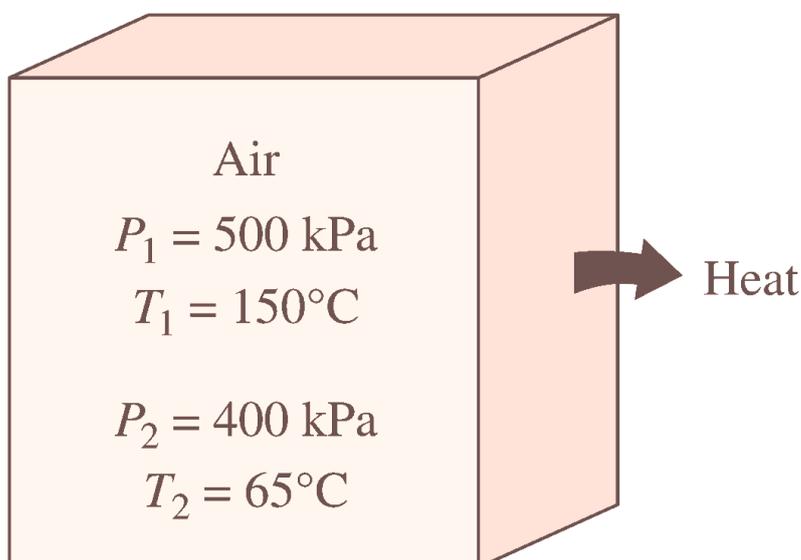
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Termodinamica

EXAMPLE 4–1 Boundary Work for a Constant-Volume Process

A rigid tank contains air at 500 kPa and 150°C. As a result of heat transfer to the surroundings, the temperature and pressure inside the tank drop to 65°C and 400 kPa, respectively. Determine the boundary work done during this process.



Termodinamica

A rigid tank contains air at 500 kPa and 150°C. As a result of heat transfer to the surroundings, the temperature and pressure inside the tank drop to 65°C and 400 kPa, respectively. Determine the boundary work done during this process.

SOLUTION Air in a rigid tank is cooled, and both the pressure and temperature drop. The boundary work done is to be determined.

Analysis A sketch of the system and the P - V diagram of the process are shown in Fig. 4–6. The boundary work can be determined from Eq. 4–2 to be

$$W_b = \int_1^2 P dV = 0$$

Discussion This is expected since a rigid tank has a constant volume and $dV = 0$ in this equation. Therefore, there is no boundary work done during this process. That is, the boundary work done during a constant-volume process is always zero. This is also evident from the P - V diagram of the process (the area under the process curve is zero).

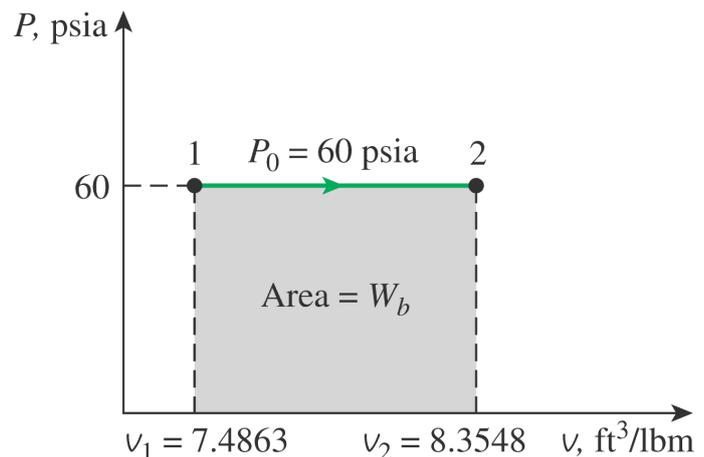
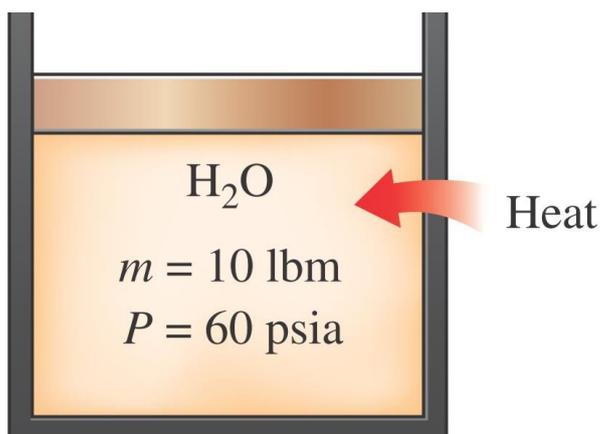


Termodinamica

EXAMPLE 4–2 Boundary Work for a Constant-Pressure Process

A frictionless piston–cylinder device contains 10 lbm of steam at 60 psia and 320°F. Heat is now transferred to the steam until the temperature reaches 400°F. If the piston is not attached to a shaft and its mass is constant, determine the work done by the steam during this process.

SOLUTION Steam in a piston cylinder device is heated and the temperature rises at constant pressure. The boundary work done is to be determined.



Termodinamica

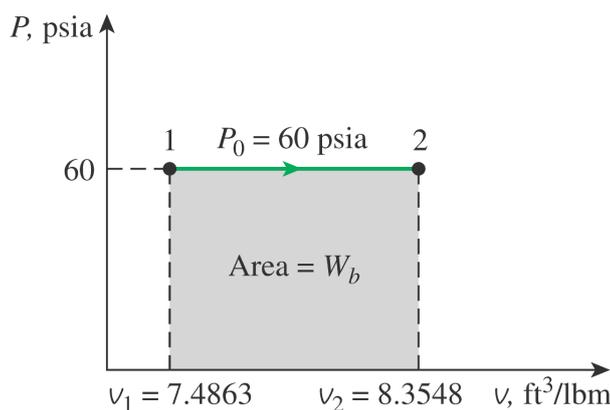
Assumption The expansion process is quasi-equilibrium.

Analysis A sketch of the system and the P - v diagram of the process are shown in Fig. 5–7. Even though it is not explicitly stated, the pressure of the steam within the cylinder remains constant during this process since both the atmospheric pressure and the weight of the piston remain constant. Therefore, this is a constant-pressure process, and, from Eq. 5–2

$$W_b = \int_1^2 P dV = P_0 \int_1^2 dV = P_0(V_2 - V_1) \quad (5-6)$$

or

$$W_b = mP_0(v_2 - v_1)$$



Termodinamica

$$W_b = mP_0(v_2 - v_1)$$

since $V = mv$. From the superheated vapor table (Table A–6E), the specific volumes are determined to be $v_1 = 7.4863 \text{ ft}^3/\text{lbm}$ at state 1 (60 psia, 320°F) and $v_2 = 8.3548 \text{ ft}^3/\text{lbm}$ at state 2 (60 psia, 400°F). Substituting these values yields

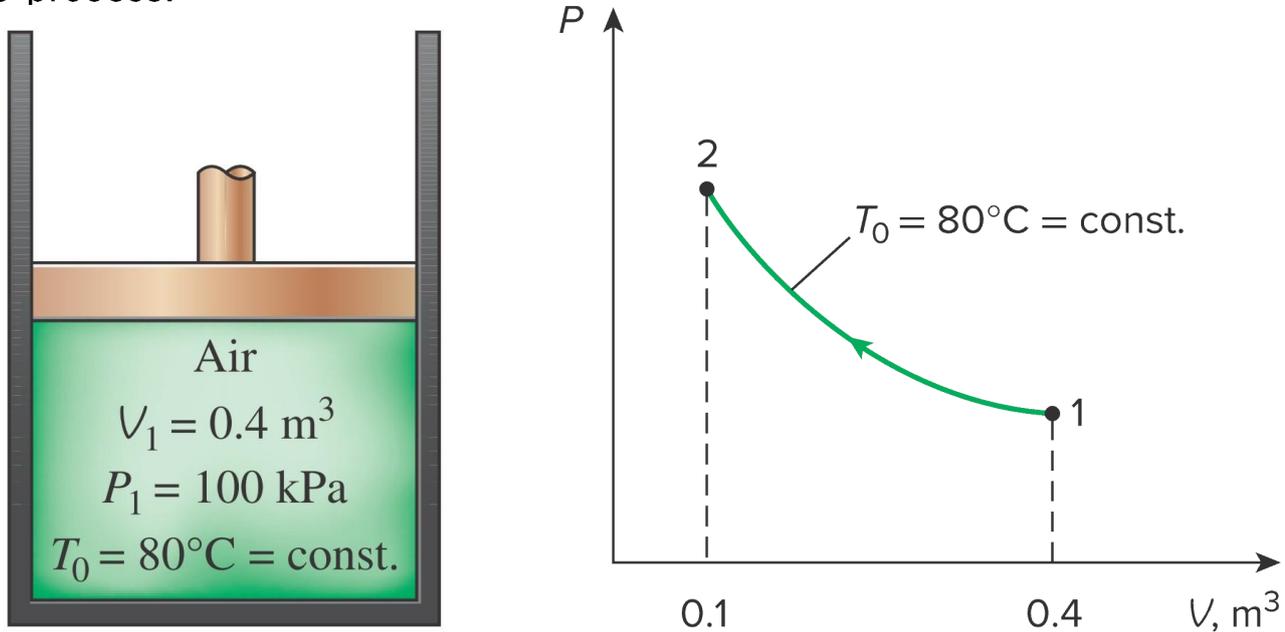
$$\begin{aligned} W_b &= (10 \text{ lbm})(60 \text{ psia})[(8.3548 - 7.4863) \text{ ft}^3/\text{lbm}] \left(\frac{1 \text{ Btu}}{5.404 \text{ psia}\cdot\text{ft}^3} \right) \\ &= \mathbf{96.4 \text{ Btu}} \end{aligned}$$

Discussion The positive sign indicates that the work is done by the system. That is, the steam used 96.4 Btu of its energy to do this work. The magnitude of this work could also be determined by calculating the area under the process curve on the P - V diagram, which is simply $P_0 \Delta V$ for this case.



EXAMPLE 5–3 Isothermal Compression of an Ideal Gas

A piston–cylinder device initially contains 0.4 m^3 of air at 100 kPa and 80°C . The air is now compressed to 0.1 m^3 in such a way that the temperature inside the cylinder remains constant. Determine the work done during this process.



Termodinamica

SOLUTION Air in a piston–cylinder device is compressed isothermally. The boundary work done is to be determined.

Assumptions **1** The compression process is quasi-equilibrium. **2** At specified conditions, air can be considered to be an ideal gas since it is at a high temperature and low pressure relative to its critical-point values.

Analysis A sketch of the system and the P - V diagram of the process are shown in Fig. 5–8. For an ideal gas at constant temperature T_0 ,

$$PV = mRT_0 = C \text{ or } P = \frac{C}{V}$$

where C is a constant. Substituting this into Eq. 4–2, we have

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{C}{V} dV = C \int_1^2 \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5-7)$$

In Eq. 5–7, $P_1 V_1$ can be replaced by $P_2 V_2$ or mRT_0 . Also, V_2/V_1 can be replaced by P_1/P_2 for this case since $P_1 V_1 = P_2 V_2$.



where C is a constant. Substituting this into Eq. 4–2, we have

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{C}{V} dV = C \int_1^2 \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5-7)$$

In Eq. 5–7, $P_1 V_1$ can be replaced by $P_2 V_2$ or mRT_0 . Also, V_2/V_1 can be replaced by P_1/P_2 for this case since $P_1 V_1 = P_2 V_2$.

Substituting the numerical values into Eq. 5–7 yields

$$\begin{aligned} W_b &= (100 \text{ kPa})(0.4 \text{ m}^3) \left(\ln \frac{0.1}{0.4} \right) \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) \\ &= -55.5 \text{ kJ} \end{aligned}$$

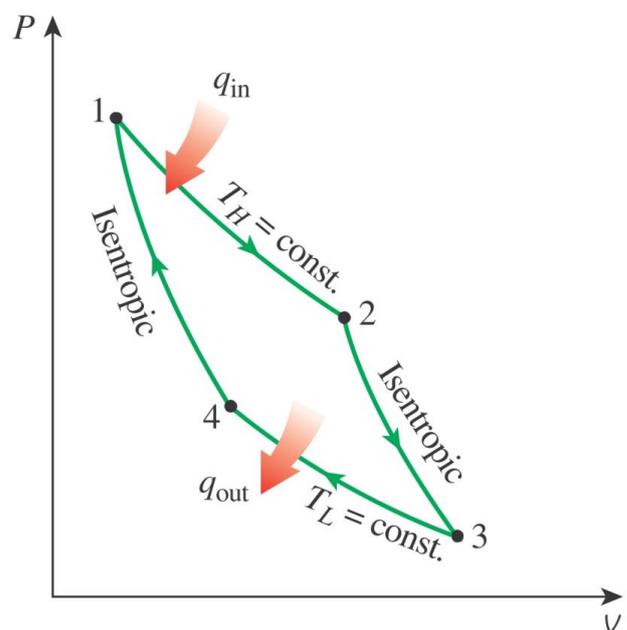
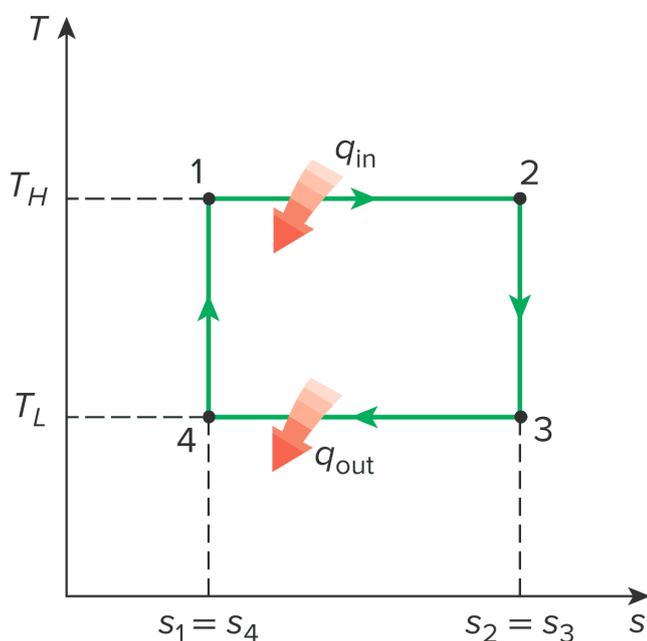
Discussion The negative sign indicates that this work is done on the system (a work input), which is always the case for compression processes.



Termodinamica

EXAMPLE 9–1 Derivation of the Efficiency of the Carnot Cycle

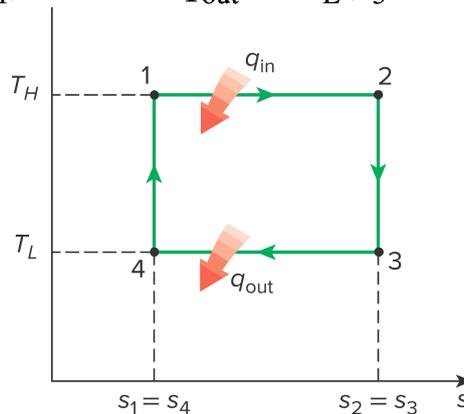
Show that the thermal efficiency of a Carnot cycle operating between the temperature limits of T_H and T_L is solely a function of these two temperatures and is given by Eq. 9–2.



SOLUTION It is to be shown that the efficiency of a Carnot cycle depends on the source and sink temperatures alone.

Analysis The T - s diagram of a Carnot cycle is redrawn in Fig. 9–7. All four processes that comprise the Carnot cycle are reversible, and thus the area under each process curve represents the heat transfer for that process. Heat is transferred to the system during process 1-2 and rejected during process 3-4. Therefore, the amount of heat input and heat output for the cycle can be expressed as

$$q_{in} = T_H(s_2 - s_1) \quad \text{and} \quad q_{out} = T_L(s_3 - s_4) = T_L(s_2 - s_1)$$



SOLUTION It is to be shown that the efficiency of a Carnot cycle depends on the source and sink temperatures alone.

Analysis The T - s diagram of a Carnot cycle is redrawn in Fig. 9–7. All four processes that comprise the Carnot cycle are reversible, and thus the area under each process curve represents the heat transfer for that process. Heat is transferred to the system during process 1-2 and rejected during process 3-4. Therefore, the amount of heat input and heat output for the cycle can be expressed as

$$q_{in} = T_H(s_2 - s_1) \quad \text{and} \quad q_{out} = T_L(s_3 - s_4) = T_L(s_2 - s_1)$$

since processes 2-3 and 4-1 are isentropic, and thus $s_2 = s_3$ and $s_4 = s_1$. Substituting these into Eq. 9–1, we see that the thermal efficiency of a Carnot cycle is

$$\eta_{th} = \frac{w_{net}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} = 1 - \frac{T_L(s_2 - s_1)}{T_H(s_2 - s_1)} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$



Equazioni di bilancio

Le **equazioni di bilancio** possono essere scritte in modo semplificato nelle ipotesi di moto **unidimensionale** e **stazionario**. In dettaglio la conservazione della massa è:

$$\dot{m} = \rho VA = \text{cost}$$

Dove \dot{m} è la **portata** che attraversa la generica sezione di area frontale A , V è la **velocità** media e ρ è la **densità** del fluido.

L'estensione al caso in cui ci possano essere più ingressi e/o uscite è banale. Per esempio nel sistema mostrato in figura si ha:

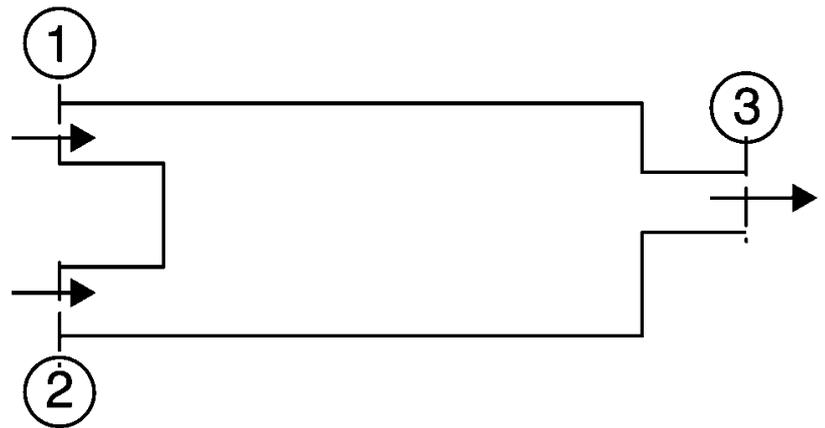
$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

Dove:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 V_1 A_1$$

$$\dot{m}_2 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\dot{m}_3 = \rho_3 V_3 A_3$$

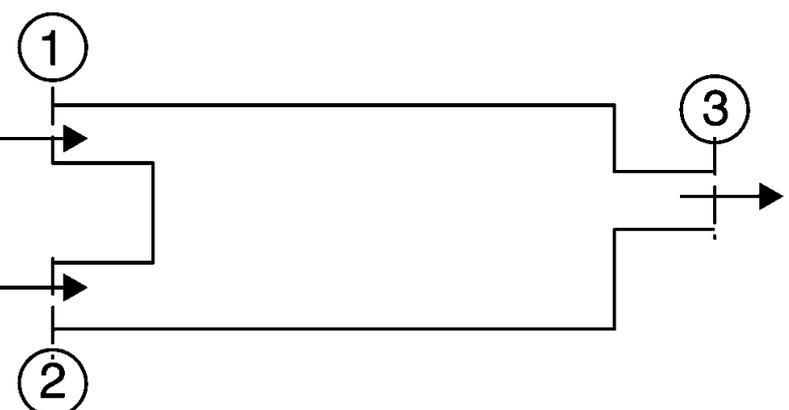


Equazioni di bilancio

Consider the control volume shown. There are two inlet boundaries and one exit boundary where flow crosses the control volume. Assuming the flow is steady and uniform, calculate the exit flow rate from the known inlet conditions.

$$\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3, u_1 = 25 \text{ m/s}$$
$$A_1 = 0.25 \text{ m}^2$$

$$\rho_2 = 0.2 \text{ kg/m}^3, u_2 = 225 \text{ m/s}$$
$$A_2 = 0.10 \text{ m}^2$$



Equazioni di bilancio

The mass flow rate entering boundary 1, is

$$\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 u_1 = (1.2 \text{ kg/m}^3)(0.25 \text{ m}^2)(25 \text{ m/s}) = 7.5 \text{ kg/s}$$

The mass flow rate entering boundary 2, is

$$\dot{m}_2 = \rho_2 A_2 u_2 = (0.2 \text{ kg/m}^3)(0.10 \text{ m}^2)(225 \text{ m/s}) = 4.5 \text{ kg/s}$$

Therefore, the mass flow rate out of boundary 3 is the sum of the mass flow rate into the box, i.e.,

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = (7.5 + 4.5) \text{ kg/s} = 12 \text{ kg/s}$$



Equazioni di bilancio

L'equazione di **bilancio** della **quantità di moto** permette di valutare le forze; trascurando gli effetti gravitazionali e supponendo che il vettore velocità sia allineato con la **normale uscente** si ha:

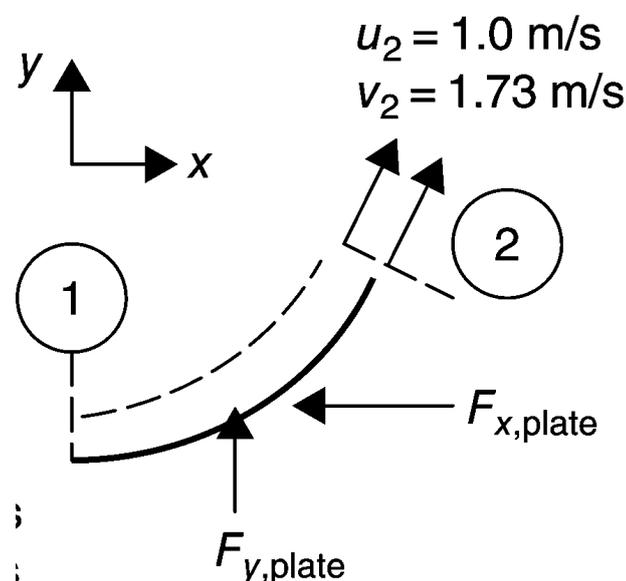
$$\underline{F} = (\dot{m}_2 V_2 + p_2 A_2) \underline{n}_2 - (\dot{m}_1 V_1 + p_1 A_1) \underline{n}_1 = I_2 \underline{n}_2 - I_1 \underline{n}_1$$

Dove si è introdotto l'**impulso totale**:

$$I = \rho V^2 A + p A$$

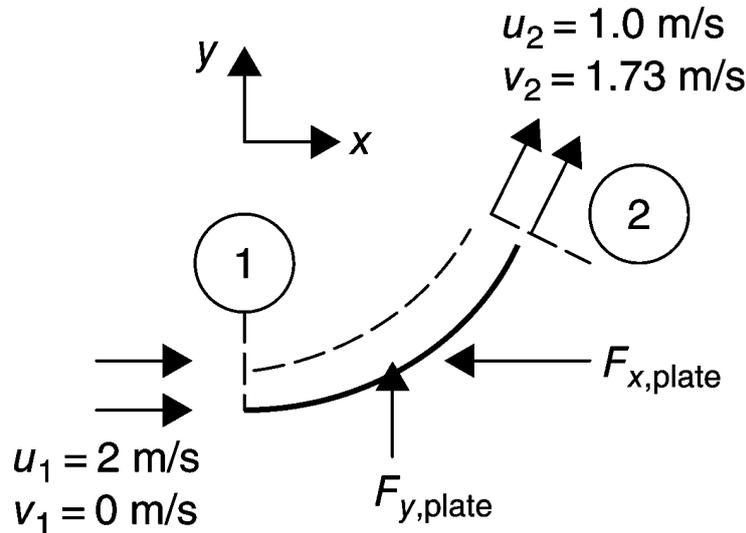
Evidentemente l'equazione di bilancio della QM deve essere **proiettata** sugli assi per valutare le **componenti** del **vettore** forza.

Spesso è utile trascurare l'effetto della **pressione atmosferica**, che agisce ovunque e si bilancia, semplicemente considerando le **pressioni relative** e le cosiddette **forze nette**.



Equazi In placing a curved plate in front of a garden hose with a water flow rate of 0.1 kg/s, we have to exert an axial force on the plate, as shown, to hold it in place. Estimate the axial and lateral forces, F_x and F_y , respectively, that are needed to support the plate.

(Note: u and v are x - and y -component of velocity, respectively.)



Equazioni di bilancio

$$\begin{aligned} F_{x,\text{fluid}} &= \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1 = \dot{m}(u_2 - u_1) \\ &= 0.1 \text{ kg/s}(-1 \text{ m/s}) = -0.1 \text{ N} \end{aligned}$$

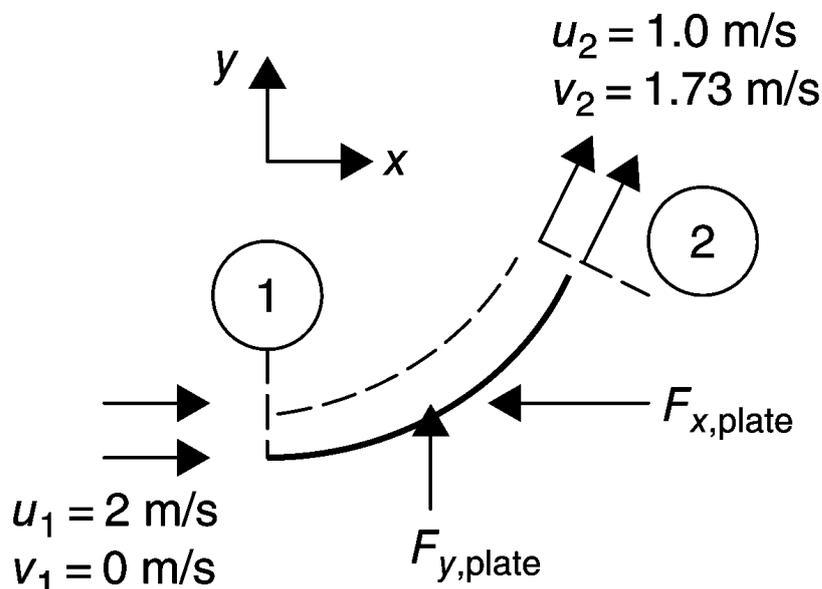
The axial force acting on the curved plate is equal and opposite to $F_{x,\text{fluid}}$. Therefore, the external force needed to hold the plate horizontally is -0.1 N (that is in the negative x -direction, as shown). Also, the lateral force on the fluid is calculated from the lateral momentum balance, i.e.,

$$\begin{aligned} F_{y,\text{fluid}} &= \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_1 v_1 = \dot{m}(v_2 - v_1) \\ &= 0.1 \text{ kg/s}(1.73 \text{ m/s}) = 0.173 \text{ N} \end{aligned}$$



Equazioni di bilancio

The lateral force on the plate is in the opposite direction (i.e., in the $-y$ direction), and thus the external force to hold the plate laterally is $+0.173$ N, as shown.



Equazioni di bilancio

L'equazione di **conservazione** dell'**energia** per sistemi **aperti** può essere scritta come:

$$\dot{m}\Delta h_t = \dot{Q} - \dot{W}$$

Dove \dot{Q} e \dot{W} sono le quantità di energia scambiate nel modo calore e lavoro. È stata inoltre introdotta l'**entalpia totale** o di **ristagno**:

$$h_t = h + \frac{V^2}{2}$$

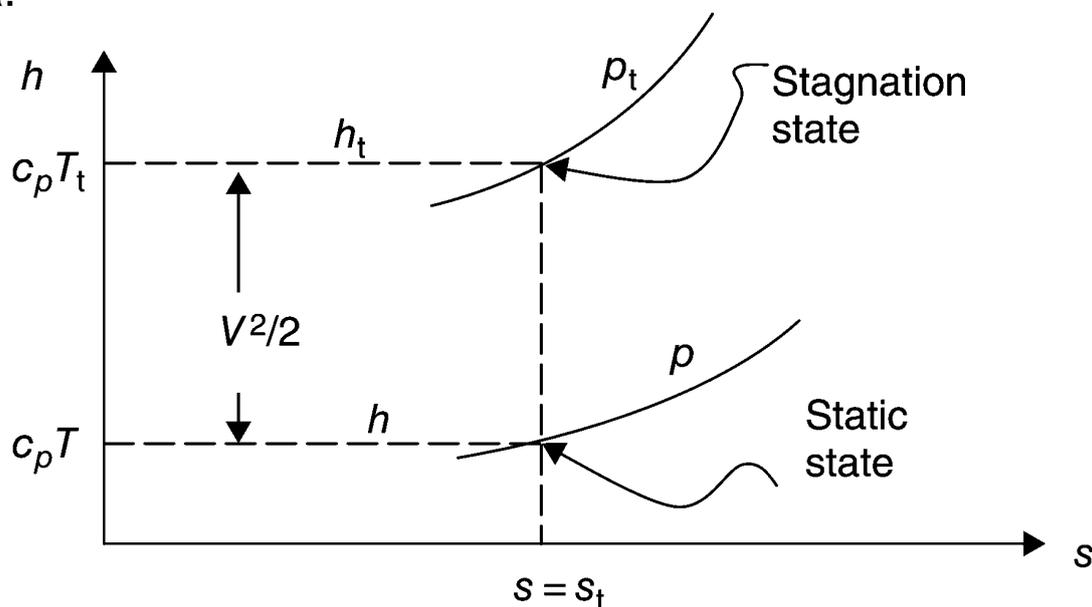
La **condizione di ristagno** (indicate con il pedice t) è quella che una particella di fluido raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione **adiabatica**, **anergodica** e **isoentropica** (omoenergetica e isoentropica).

La condizione **statica** di una corrente è invece quella misurata con uno **strumento** che si **muove alla velocità** del **fluido**, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo.



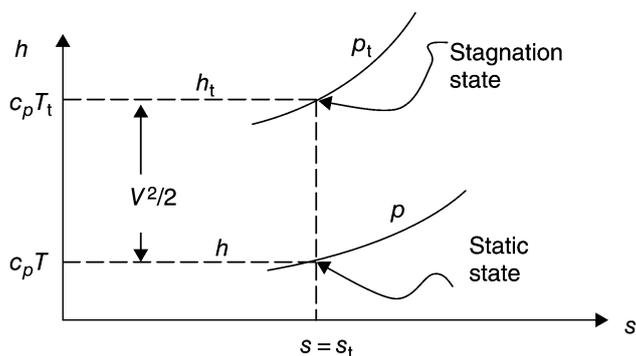
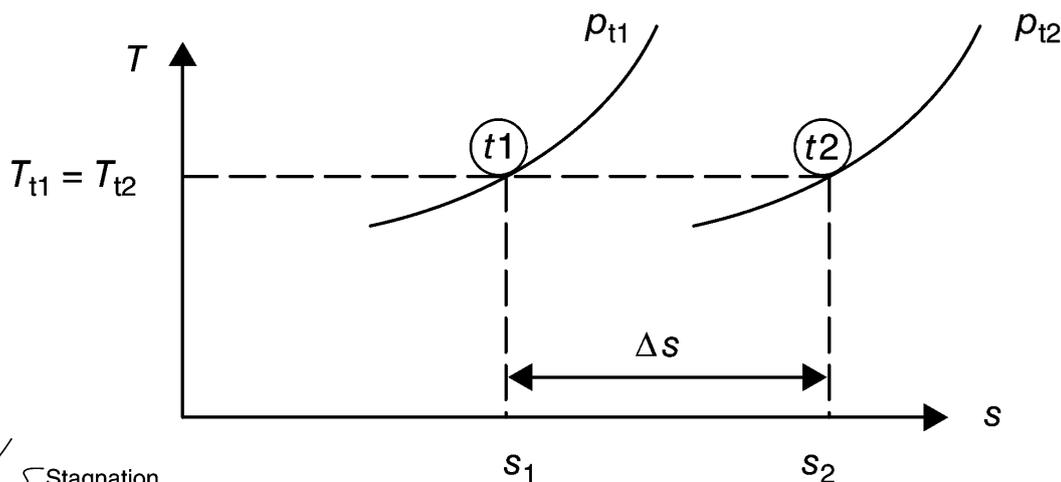
Equazioni di bilancio

Questi concetti sono più chiari in un piano $h-s$ (o $T-s$). Quando una corrente avente un'entalpia specifica h ed una velocità V viene **rallentata** fino a **velocità nulla** mediante una trasformazione **adiabatica** e **anergodica**, l'energia cinetica specifica (per unità di massa $V^2/2$) viene convertita in energia interna aumentando l'entalpia specifica.



Equazioni di bilancio

La condizione di **isentropicità** è necessaria per valutare le altre grandezze di ristagno, e.g. pressione, densità.



Equazioni di bilancio

Nel caso di **gas più che perfetto** ricordando la definizione del numero di Mach si ha:

$$h_t = h + \frac{V^2}{2} \quad \rightarrow \quad T_t = T \left(1 + \frac{V^2}{2c_p T} \right) = T \left(1 + \frac{V^2}{2 \frac{c_p}{R} RT} \right)$$

$$= T \left(1 + \frac{V^2}{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} RT} \right) = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{\gamma RT} \right) = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = T\psi$$

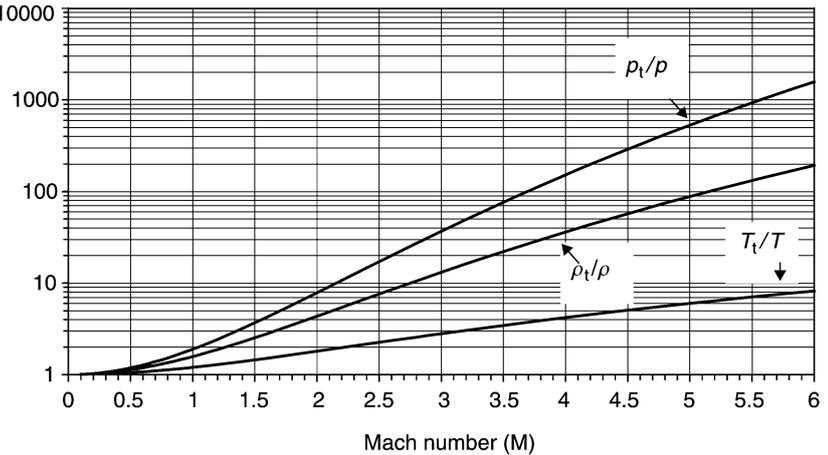
Dove si è introdotta la quantità:

$$\psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Nell'ipotesi di moto isentropico:

$$\frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

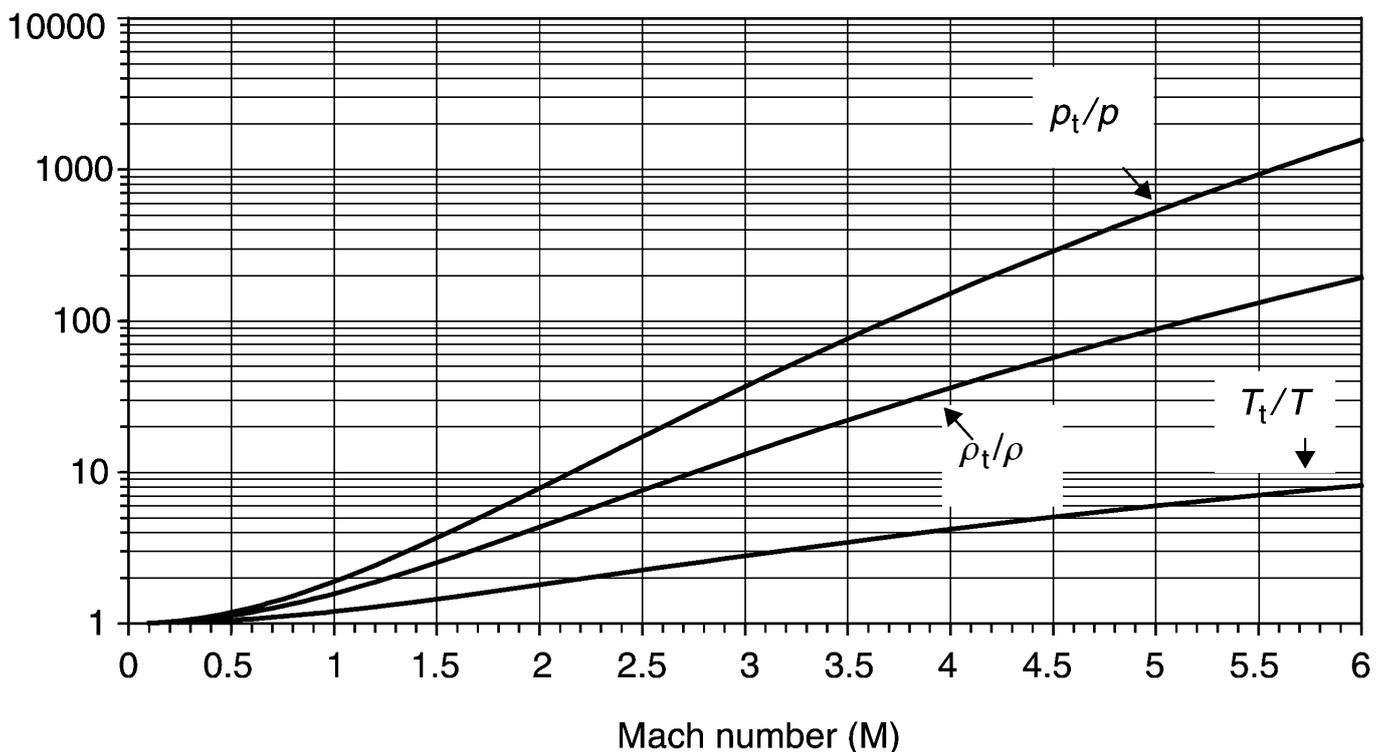


Propulsione Aerospaziale – PA0_1 Richiami Gas - astarita@unina.it

31

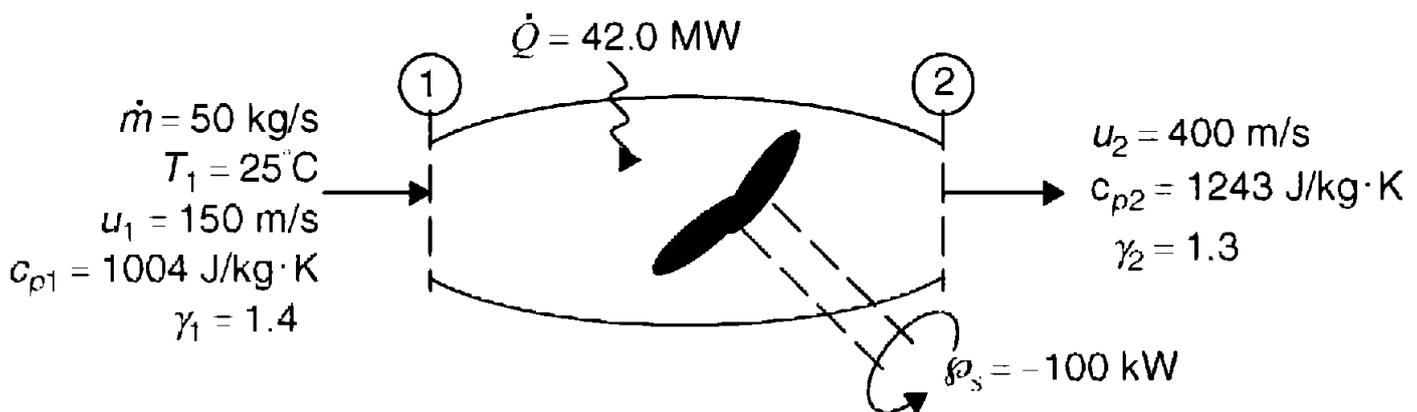
Equazioni di bilancio

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \psi \quad \frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}} \quad \frac{\rho_t}{\rho} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Equazioni di bilancio

Let us consider a control volume with heat transfer rate and mechanical power (i.e., shaft power) exchange specified at its boundaries. There is a single inlet and a single outlet where mass crosses the boundary in a steady and uniform flow, as shown. Calculate the exit total and static temperatures T_{t2} and T_2 , respectively (note that the gas is not calorically perfect).



Equazioni di bilancio

First, we conclude that the exit mass flow rate is 50 kg/s, to satisfy the continuity equation for steady flow. Second, we cast the inlet static temperature in the absolute scale, i.e.,

$$T_1 = 25 + 273 = 298 \text{ K}$$

Third, we apply the conservation of energy equation (2.53) to this problem, which requires the knowledge of total enthalpy at the inlet. We use the definition of total enthalpy:

$$\begin{aligned} h_{t1} &= h_1 + u_1^2/2 = c_{p1} T_1 + u_1^2/2 = (1004 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(298 \text{ K}) \\ &\quad + (150)^2/2 \text{ J/kg} \\ &= 310,442 \text{ J/kg} \end{aligned}$$



Equazioni di bilancio

Now, Equation 2.53 gives the exit total enthalpy as

$$h_{t2} = h_{t1} + \left(\frac{\dot{Q} - \dot{\varphi}_s}{\dot{m}} \right) = 310.442 \text{ kJ/kg}$$
$$+ \left(\frac{(42,000 + 100) \times 1000 \text{ W}}{50 \text{ kg/s}} \right) \cong 1,152.4 \text{ kJ/kg}$$

$$T_{t2} = \frac{h_{t2}}{c_{p2}} = \frac{1,152.4 \text{ kJ/kg}}{1.243 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} \cong 927 \text{ K}$$

$$T_2 = T_{t2} - u_2^2 / 2c_{p2}$$
$$= 927 \text{ K} - (400)^2 / (2 \times 1243 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \cong 863 \text{ K}$$

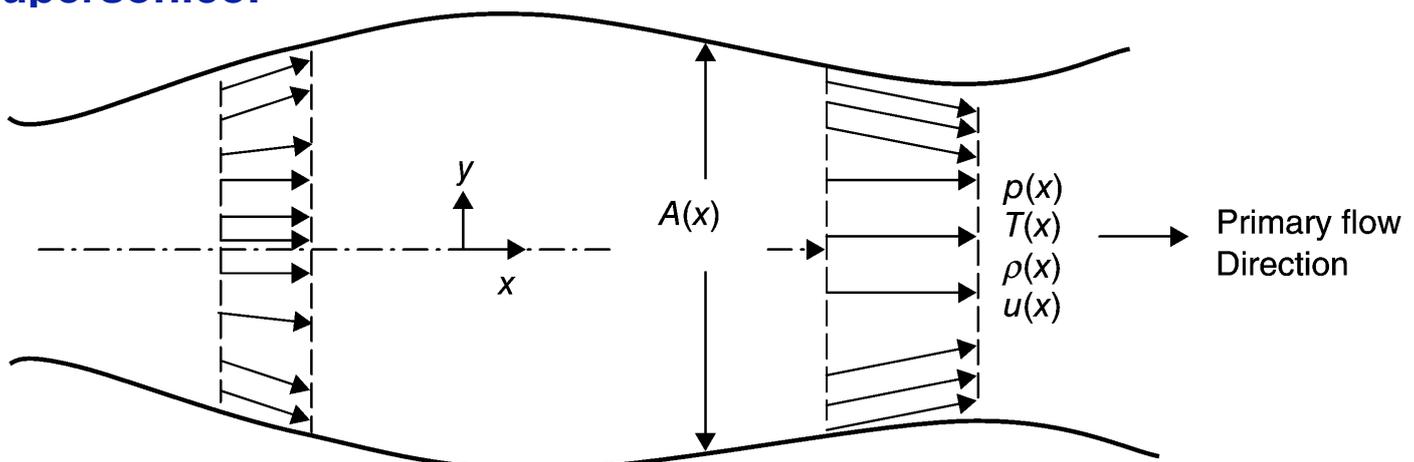


Moto quasi unidimensionale

In aerodinamica si è già visto che nelle ipotesi di moto stazionario e quasi unidimensionale si trova la seguente relazione:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

Per **moto subsonico** ($M < 1$) il fluido **accelera** ($dV > 0$) in un condotto **convergente** ($dA < 0$) mentre **decelera** ($dV < 0$) in un condotto **divergente** ($dA > 0$). Il comportamento è opposto in **regime supersonico**.

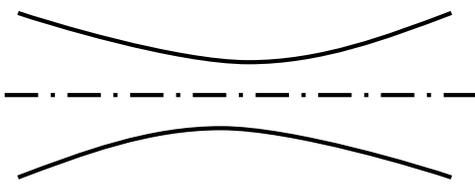


Moto quasi unidimensionale

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

Da un altro punto di vista in un ugello **convergente** il flusso si muove **verso** $M=1$, viceversa in un ugello **divergente** il flusso si **allontana** dal Mach **sonico**.

Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge quando la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ($dA=0$), quindi in un ugello **convergente-divergente**.



Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA=0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico

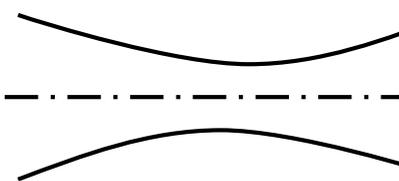


Moto quasi unidimensionale

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

Da un altro punto di v
verso $M=1$, viceversa
Mach **sonico**.

Evidentemente il moto
flusso (pertanto è an
moto subsonico a su
raggiunge quando la s
($dA=0$), quindi in un u



nte il flusso si muove
lusso si **allontana** dal

molto particolare del
rmette di passare da
condizione **sonica** si
a un punto di **minimo**
nte.

Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se $dA=0$ **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico



Moto quasi unidimensionale

La **portata** in un ugello, nelle ipotesi di moto adiabatico ed isentropico, può essere espressa come:

$$\dot{m} = \rho VA = \frac{p}{RT} MaA = \frac{p}{p_t} p_t M \frac{\sqrt{\gamma RT}}{RT} A = \frac{p}{p_t} p_t M \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma RT_t}} \sqrt{\frac{T_t}{T}} A$$

Ricordando che $\frac{T_t}{T} = \psi$, $\frac{p_t}{p} = \psi^{\frac{1}{k}}$, $k = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ si ha:

$$\dot{m} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{1}{k}} \psi^{\frac{1}{2}} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{2-k}{2k}} = \frac{p_t A}{a_t} \gamma M \psi^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{p_t A}{a_t} \Psi$$

Dove Ψ è il **fattore d'efflusso**. Indicando con $K = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}$ si ha:

$$\Psi(\gamma, M) = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \gamma M \psi^{-K}$$

La **minima area** possibile si ha in condizioni di flusso **critico**, per questo motivo ha senso valutare la portata anche in condizioni critiche.



Moto quasi unidimensionale

Le **condizioni critiche** sono indicate con un **asterisco** si ha quindi :

$$\dot{m} = \frac{p_t A}{a_t} \Psi = \frac{p_t A^*}{a_t} \Psi^* \quad \rightarrow \quad A \Psi = A^* \Psi^* \quad \rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi}$$

Ricordando che $\Psi(\gamma, M) = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$ si ha:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = \frac{\gamma \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-K}}{\gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-K}} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^K$$

A cui si aggiungono le:

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \psi \quad \frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Moto quasi unidimensionior

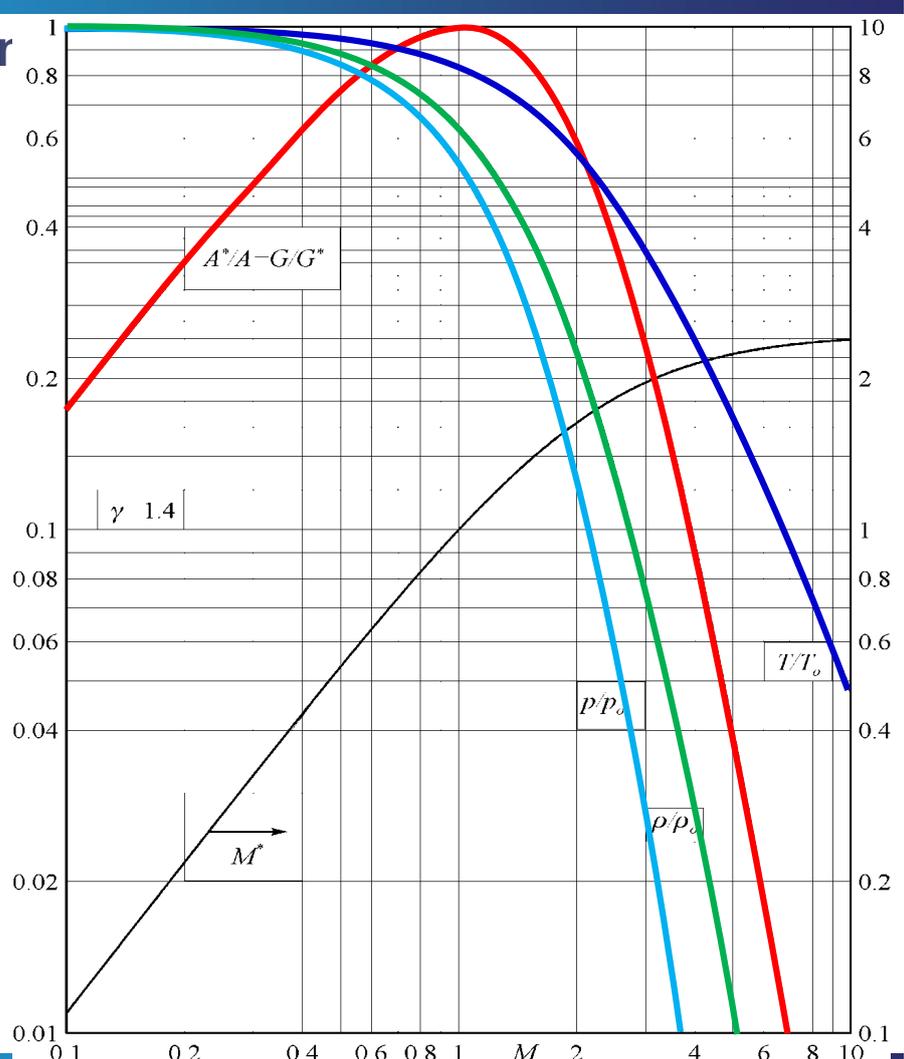
$$\frac{T}{T_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}$$

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \Psi \right]^K$$

Tutti i rapporti si leggono sulla scala di **sinistra**,



Moto quasi unidimensionale

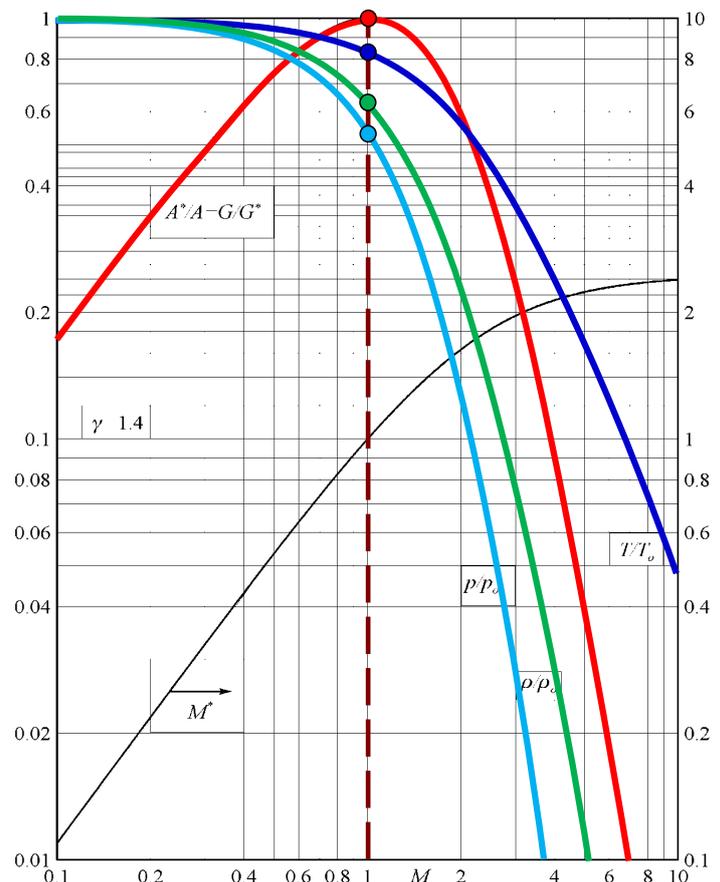
In condizioni critiche si ha:

$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.6339$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi} = 1$$



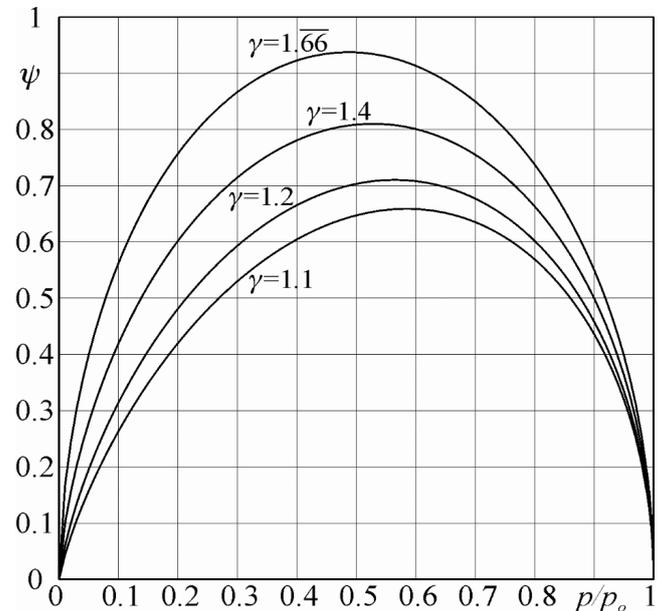
Moto quasi unidimensionale

Utilizzando la:

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k}} = \psi^{\frac{1}{k}}$$

Il **fattore d'efflusso** può essere anche espresso come:

$$\psi = \frac{\dot{m} a_t}{p_t A} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{-k}\right]}$$



Moto quasi unidimensionale

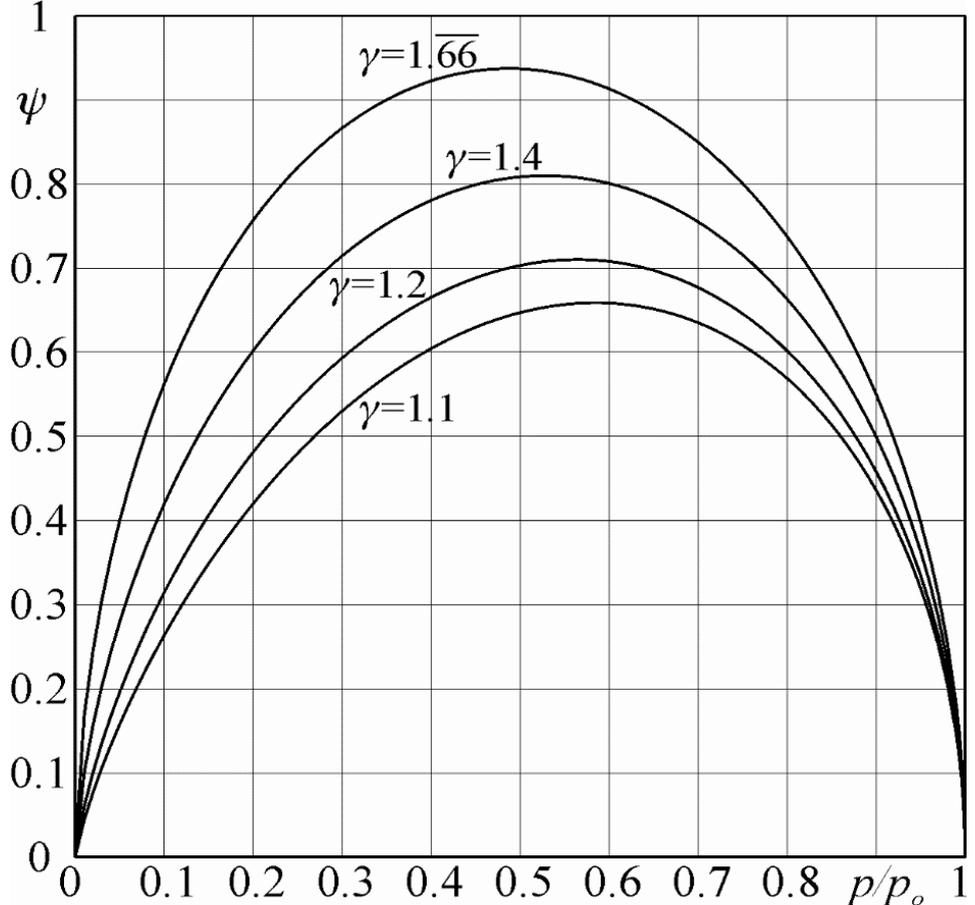
$$\frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{k}}$$

Il rapporto fra le pressioni p/p_t è una funzione strettamente decrescente di M .

L'asse x può essere visto anche come un asse **inversamente proporzionale** al **numero di Mach**.

Il massimo di ψ si ha per:

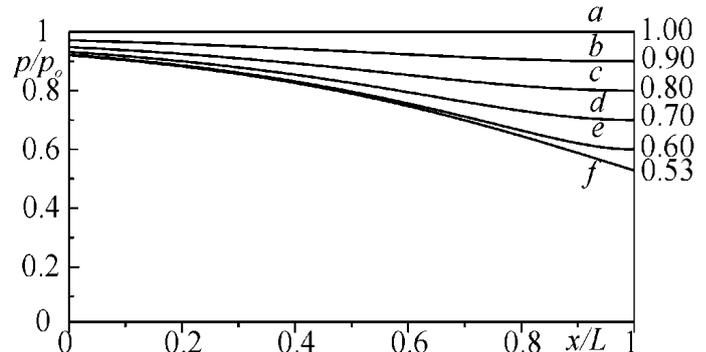
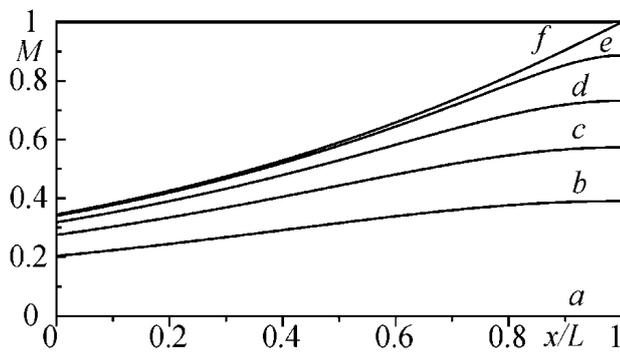
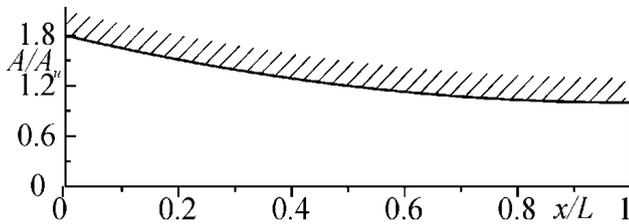
$$\frac{p}{p_t} = \frac{p^*}{p_t}$$



Moto quasi unidimensionale

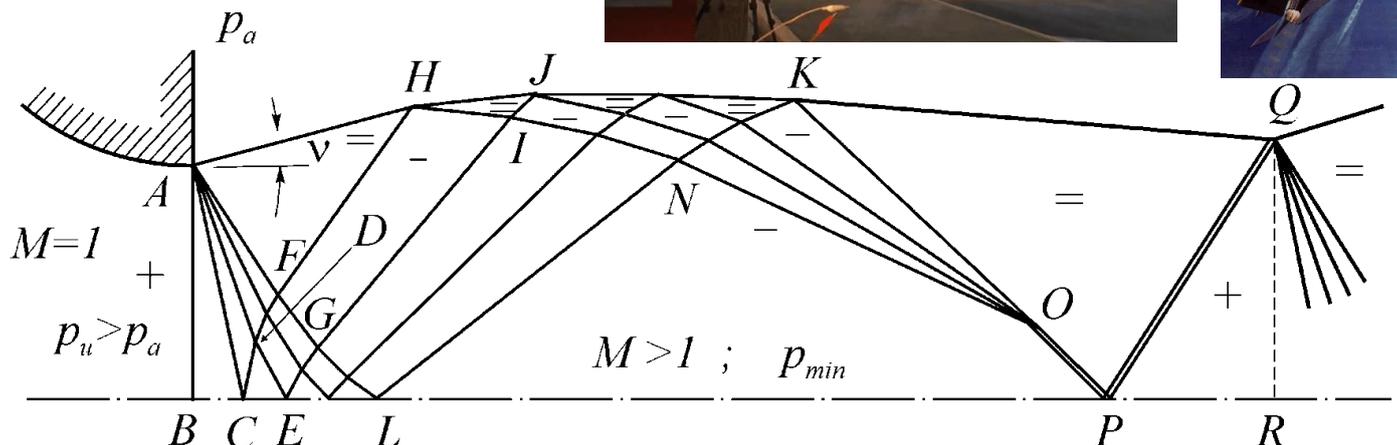
Le **curve di funzionamento** in un ugello convergente sono mostrate in figura. Si hanno **due** tipi di funzionamento:

1. Per rapporti di pressione p_a/p_t compresi tra $p/p_t = p^*/p_t$ e 1 la pressione del fluido all'uscita dell'ugello deve necessariamente essere **uguale** a quella **ambiente**, cioè deve rispettare la cosiddetta **condizione di Kutta** (pressione ambiente = pressione all'uscita).

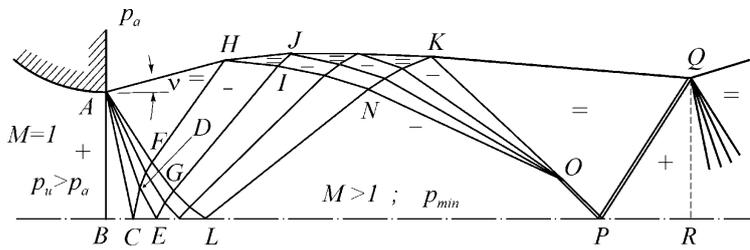


Moto quasi unidimensionale

2. Per rapporti di pressione inferiori a p^*/p_t il moto si dice **strozzato** o **sottoespanso**: la corrente non riesce a **completare** nell'ugello stesso la sua espansione fino alla **pressione ambiente**. Il motivo per cui viene utilizzato l'aggettivo strozzato è dovuto al fatto che se la pressione di ristagno è costante, la **portata di massa** effluente dall'ugello resta **costante** al diminuire della **pressione ambiente** dal valore p^* sino al vuoto più assoluto.

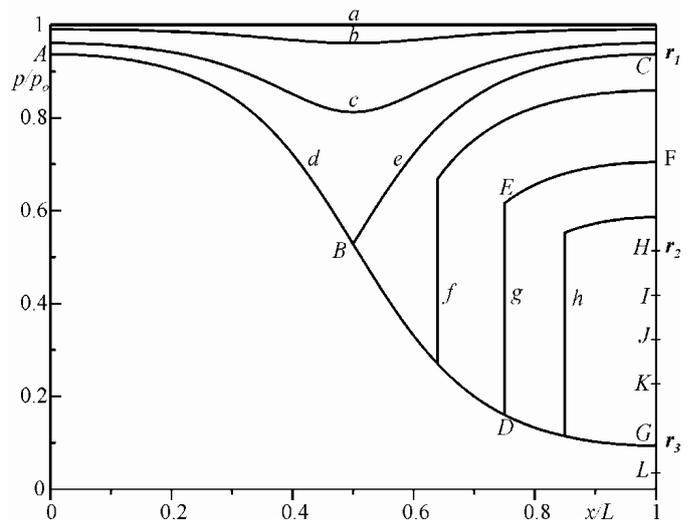
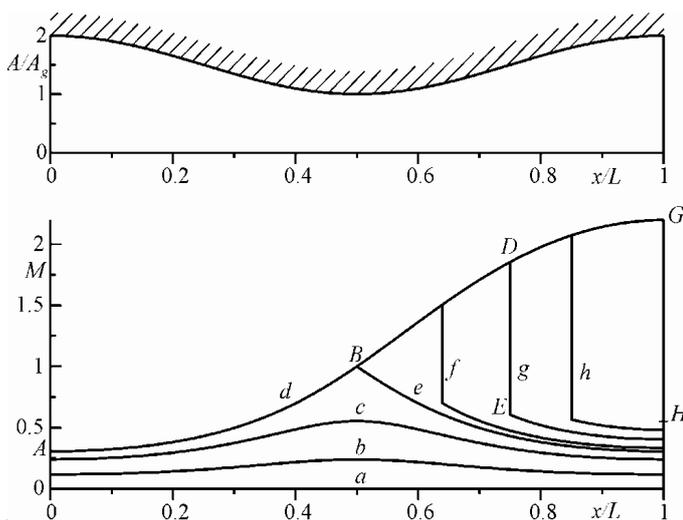


Moto quasi unidimensionale



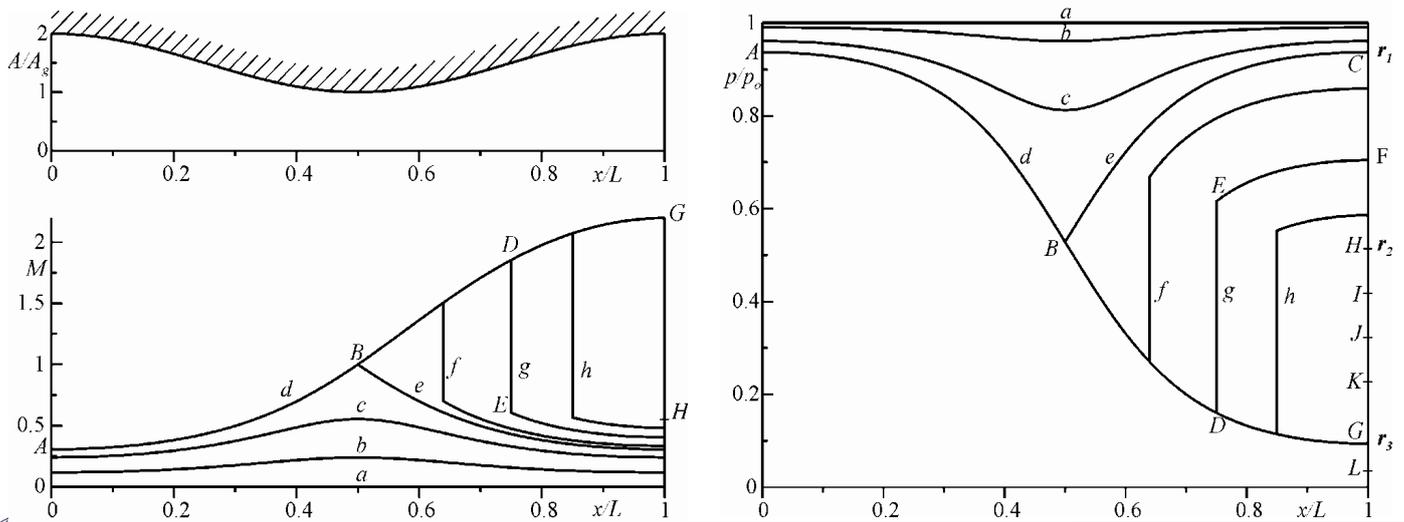
Moto quasi unidimensionale

Le **curve di funzionamento** in un ugello convergente divergente sono mostrate in figura. Si possono definire **tre rapporti di pressione caratteristici** r_1 , r_2 e r_3 e si hanno **quattro** tipi di funzionamento diversi al variare della pressione ambiente.



Moto quasi unidimensionale

In particolare, il rapporto r_1 è relativo a condizioni di uscita **subsoniche** mentre r_3 a condizioni di uscita **supersoniche**. Il rapporto r_2 si ottiene moltiplicando il rapporto r_3 per il rapporto tra le pressioni statiche a valle e a monte di **un'onda d'urto normale** posta nella sezione di **uscita dell'ugello**. L'onda d'urto avviene ad un numero di Mach corrispondente al punto r_3 (con abuso di simbologia si confonderà il punto con il rapporto caratteristico).

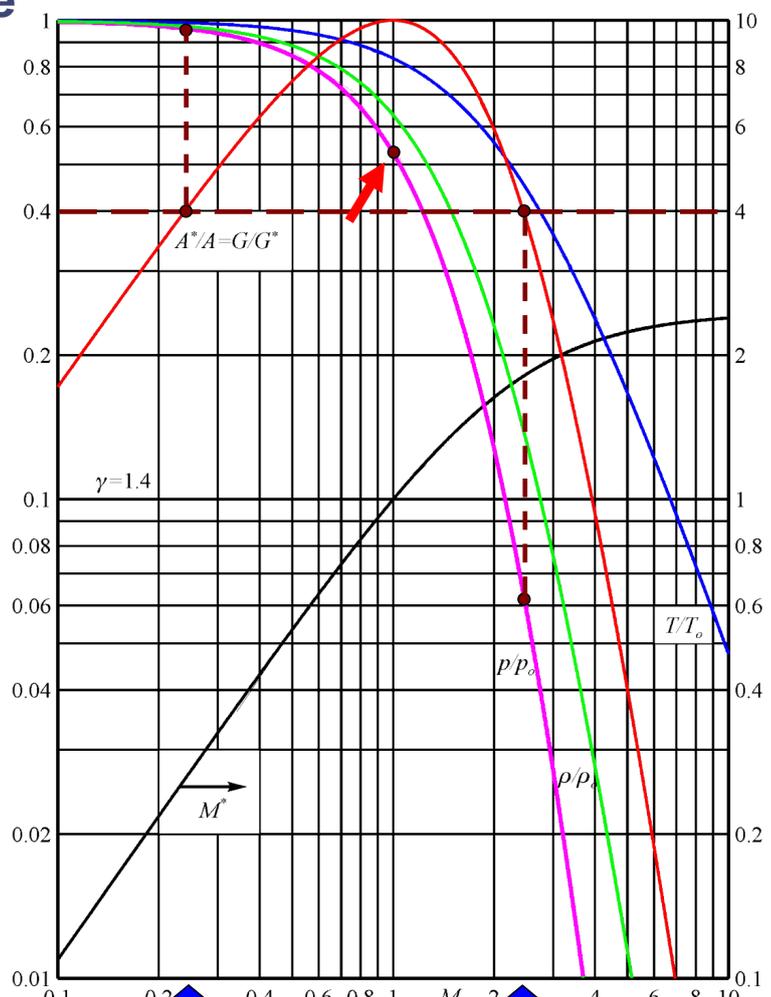


Moto quasi unidimensionale

I due rapporti r_1 ed r_3 si leggono sull'asse delle ordinate entrando con il rapporto assegnato tra l'area di gola e quella di uscita dell'ugello, A_g/A_u che, per l'ipotesi di funzionamento dell'ugello con **gola strozzata**, risulta pari a A^*/A_u .

Questo valore del rapporto A_g/A_u corrisponderà a **due** valori del numero di **Mach**, uno in regime **subsonico** ed uno **supersonico**.

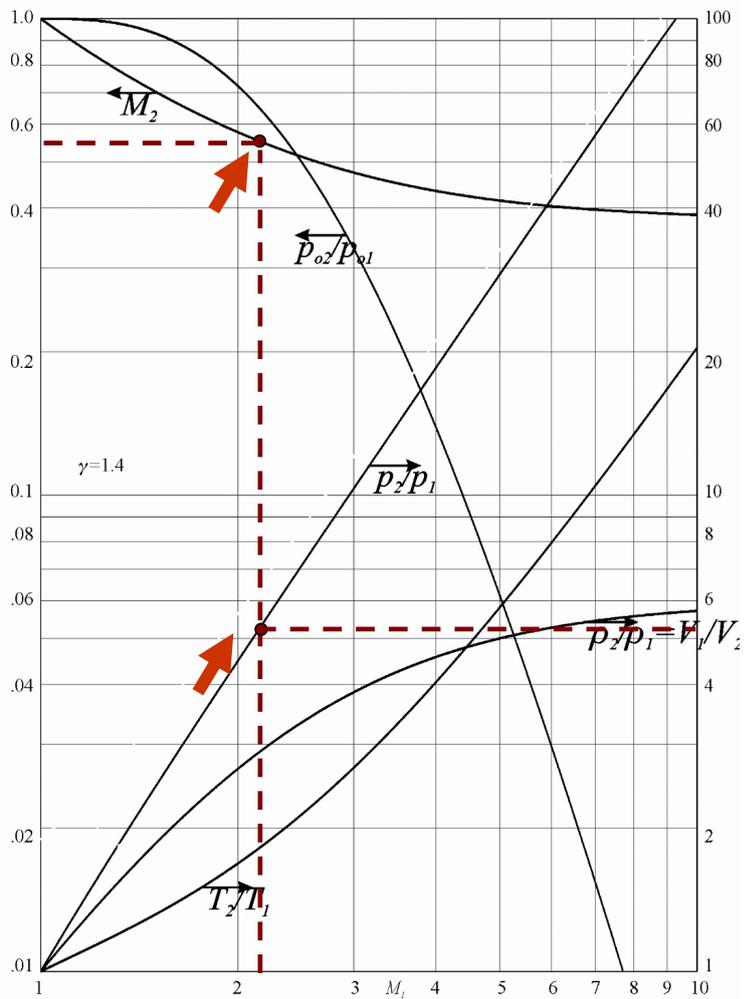
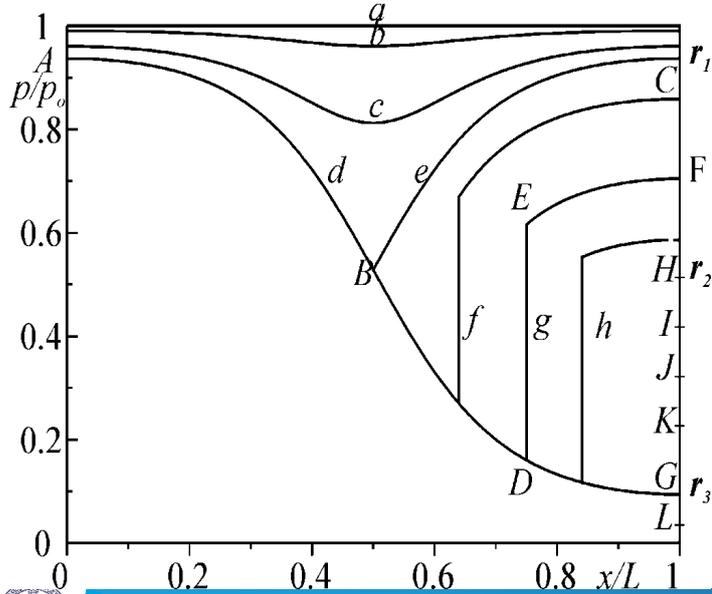
r_1 risulta sempre **maggiore** di p^*/p_t mentre r_3 **minore**.



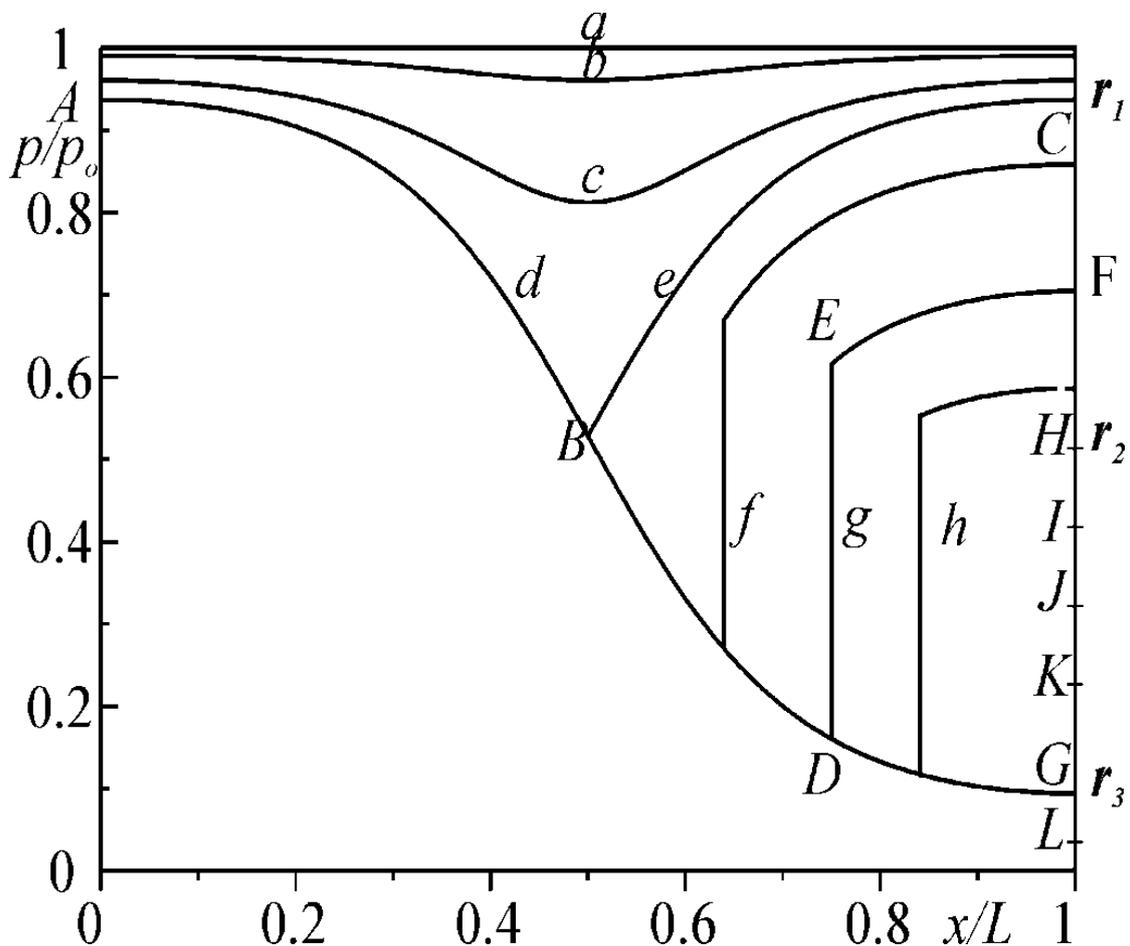
Moto quasi unidimensionale

Per calcolare il valore di r_2 occorre entrare nel grafico delle onde d'urto con il valore di M_{r_3} e leggere il rapporto p_2/p_1 . Si ha:

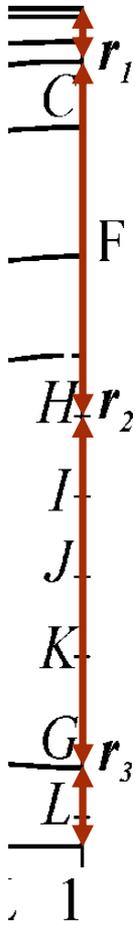
$$r_2 = r_3 \frac{p_2}{p_1}$$



Moto quasi unidimensionale



Moto quasi unidimensionale

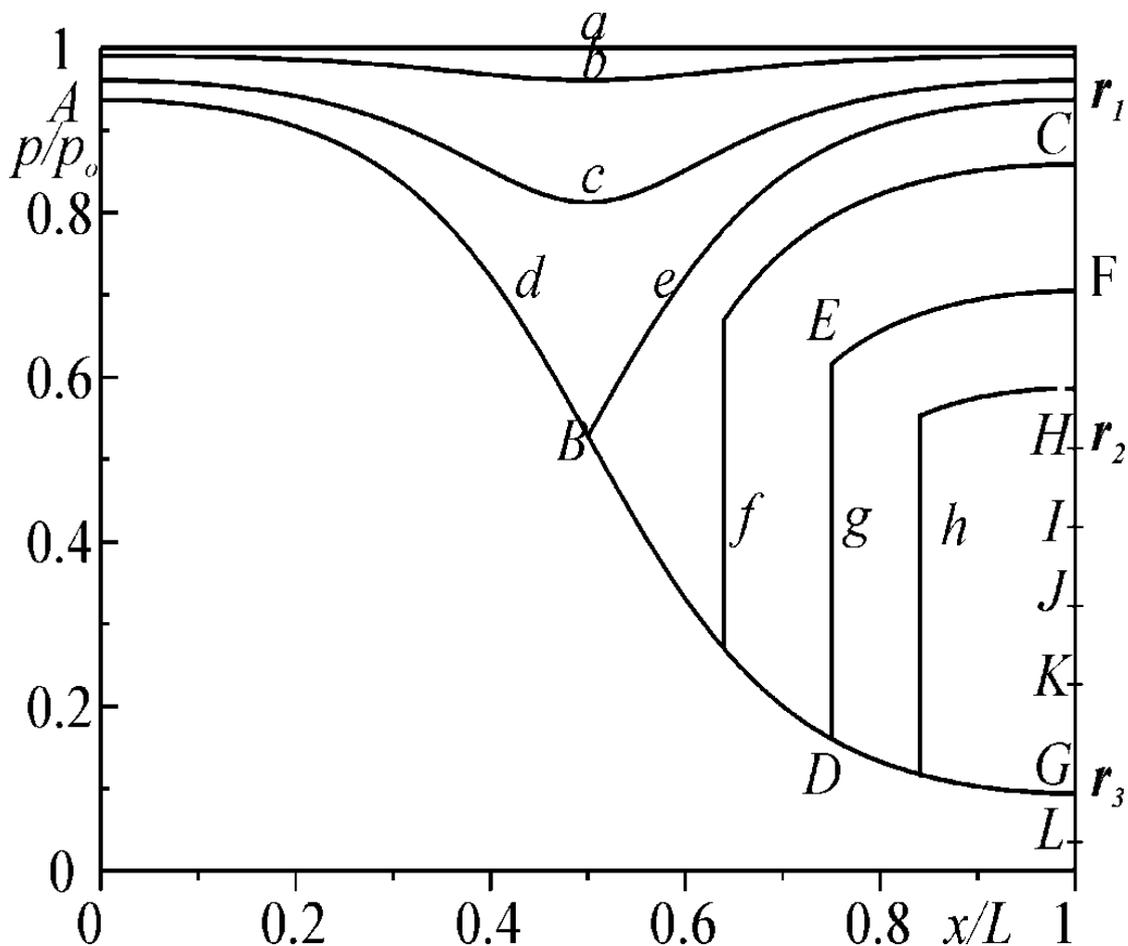


Riassumendo:

- $r_1 < p_a/p_t$ - **regime alla Venturi**; la corrente è ovunque **subsonica** nell'ugello con un minimo della pressione (massimo della velocità e del numero di Mach) nella sezione di gola; è **valida** la **condizione di Kutta**.
- $r_2 < p_a/p_t < r_1$ - regime con **onda d'urto** nel **divergente**; la corrente percorre un tratto del divergente in regime **supersonico**, ma, per la presenza dell'onda d'urto, l'efflusso dall'ugello è subsonico; è **valida** la **condizione di Kutta**.
- $r_3 < p_a/p_t < r_2$ - **ugello sovraespanso**; l'efflusso dall'ugello è **supersonico**, la **pressione** nella sezione di **uscita** dell'ugello è **minore** di quella **ambiente**; la corrente si porta alla p_a con un'onda d'urto obliqua esterna; **non è valida** la **condizione di Kutta**.
- $p_a/p_t < r_3$ - **ugello sottoespanso**; l'efflusso dall'ugello è **supersonico**, la **pressione** nella sezione di **uscita** dell'ugello è **maggiore** di quella **ambiente**; la corrente continua ad espandere al di fuori dell'ugello fino a p_a con un ventaglio di espansione; **non è valida** la **condizione di Kutta**.



Moto quasi unidimensionale



Esempio Farokhi 2.12

Consider a diffusing duct of the following geometrical and flow characteristics:

A_1 is the inlet area

$$M_1 = 0.7$$

Total pressure loss in the diffuser is 1% of the inlet total pressure, i.e., $p_{t2}/p_{t1} = 0.99$

The exit area is $A_2 = 1.237 A_1$

Assume that the flow in the diffuser is adiabatic and unseparated and the exit flow is uniform, calculate

- the exit Mach number M_2
- the static pressure recovery in the diffuser C_{PR}
- the force acting on the diffuser inner wall, i.e., $F_{x,wall}$, nondimensionalized by the inlet static pressure and area, i.e., $p_1 A_1$



Moto quasi unidimensionale

Esempio Farokhi 2.13

Consider a convergent–divergent nozzle as shown in Figure 2.57. The flow conditions are

- inlet Mach number $M_1 = 0.5$
- inlet nozzle total pressure is $p_{t1} = 10 p_0$, where p_0 is the ambient pressure
- total pressure loss in the convergent section of the nozzle is 1%, i.e. $(p_{t1} - p_{t,th})/p_{t1} = 0.01$
- total pressure loss in the divergent section of the nozzle is 2%, i.e. $(p_{t,th} - p_{t2})/p_{t,th} = 0.02$
- nozzle area expansion ratio is $A_2/A_{th} = 2.0$

Calculate

- the exit Mach number M_2
- the exit static pressure in terms of ambient pressure p_2/p_0
- the nondimensional axial force acting on the convergent nozzle $F_{x,con.-wall}/A_{th} p_{t1}$

In addition, we assume that the gas is perfect and its properties remain unchanged throughout the nozzle. The gas is characterized by

- $\gamma = 1.4$
- $R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

The flow in the nozzle is assumed to be steady and adiabatic, therefore the total enthalpy remains constant, i.e.,

- $h_{t2} = h_{t1}$
- the nondimensional axial force acting on the divergent nozzle $F_{x,div.-wall}/A_{th} p_{t1}$
- the total (nondimensional) axial force acting on the nozzle $F_{x,nozzle}/A_{th} p_{t1}$

