

## Propulsione Aerospaziale

T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

Versione del 7.12.2020

### Accoppiamento dei componenti

Si deve ora analizzare come **l'interazione** fra i vari **componenti**.

Prima di iniziare l'analisi è necessario introdurre i parametri "**corretti**" del motore. Supponendo di fissare delle condizioni termodinamiche di riferimento ( $p_{ref} = 1atm$  e  $T_{ref} = 15C$ ) si introducono i rapporti per la generica stazione  $i$ :

$$\delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}}$$

Inoltre:

$$\dot{m} = \frac{p_t A \Psi}{\sqrt{\gamma R T_t}}$$

$$\Psi(\gamma, M) = \frac{A^*}{A} \Psi^* = \gamma M \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = \gamma M \psi^{-K}$$

$$\psi(\gamma, M) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad K(\gamma) = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}$$



# Accoppiamento dei componenti

La **portata corretta** è:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \frac{\frac{p_{ti} A_i \Psi_i}{\sqrt{\gamma_i R_i T_{ti}} \sqrt{\frac{T_{ti}}{T_{ref}}}}}{\frac{p_{ti}}{p_{ref}}} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i} \propto \Psi_i$$

La **velocità angolare** e la **portata di combustibile** corrette:

$$N_{ci} = N_i / \sqrt{\theta_i} \quad \dot{m}_{cf} = \dot{m}_f \sqrt{\theta_2} / \delta_2$$

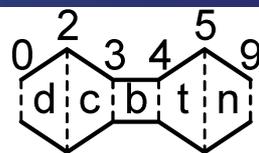
La **spinta** ed il **consumo specifico** corretti:

$$F_c = F / \delta_0 \quad TSFC_c = TSFC / \sqrt{\theta_0}$$

Ricombinando le equazioni precedenti si ha anche:

$$TSFC_c = \pi_d \frac{\dot{m}_{cf}}{F_c}$$

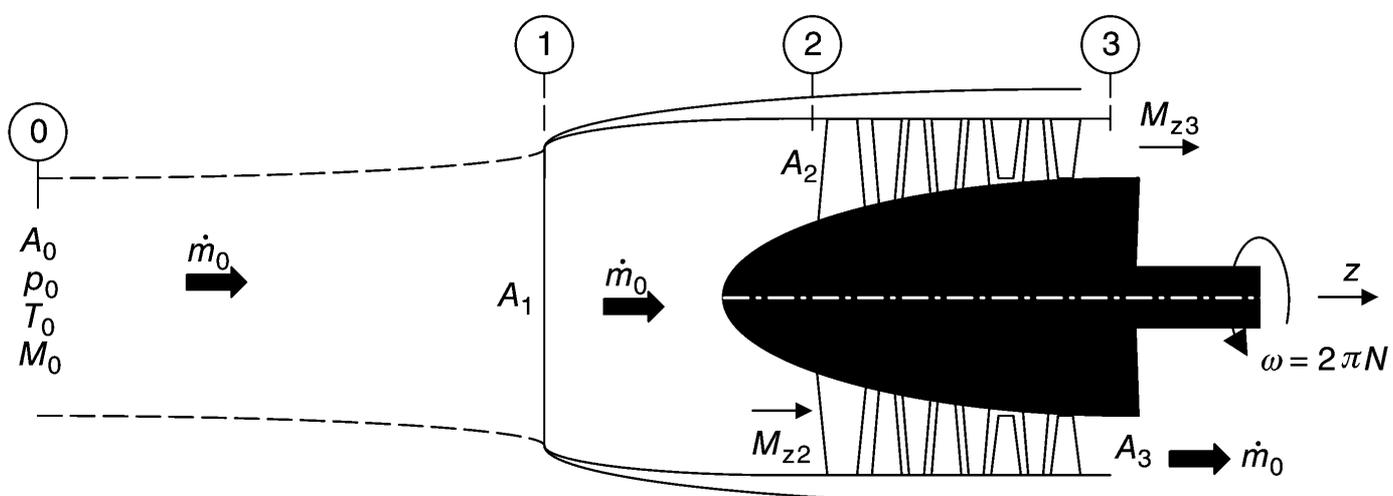
# Accoppiamento dei componenti

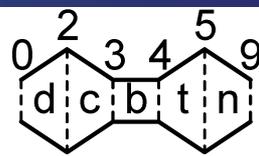


In figura è mostrato **l'accoppiamento** fra la **presa d'aria** ed il **compressore**. I parametri fissati sono le aree  **$A_1$** ,  **$A_2$**  e  **$A_3$**  mentre  $A_0$  dipende dalle condizioni di volo. Gli altri parametri indipendenti sono le condizioni di volo (i.e.  **$p_0$** ,  **$T_0$**  e  **$M_0$** ).

Uguagliando le portate si ha:

$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} = \frac{p_{t2} A_2 \Psi_2}{a_{t2}} = \dot{m}_2 \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K}$$





# Accoppiamento dei componenti

$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} = \frac{p_{t2} A_2 \Psi_2}{a_{t2}} = \dot{m}_2 \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K}$$

Supponendo che la temperatura di ristagno ed il gas rimangano invariati:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t0}} \frac{A_2}{A_0} M_{z2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{z2}^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = M_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

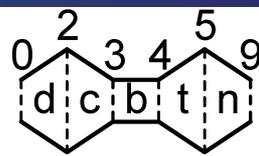
$$\frac{p_{t2}}{p_{t0}} \frac{A_2}{A_0} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = M_0 \psi_0^{-K_0}$$

In questa equazione le incognite sono  $\pi_d = p_{t2}/p_{t0}$ ,  $A_0$  e  $M_{z2}$ . Tipicamente dalle caratteristiche della presa d'aria si può risalire ad un **legame** fra il **rapporto di pressioni** e il **numero di Mach** di volo.

Quindi **le incognite** sono  $A_0$  e  $M_{z2}$ . Inoltre si deve fare attenzione alle eventuali distorsioni del flusso all'ingresso del compressore.



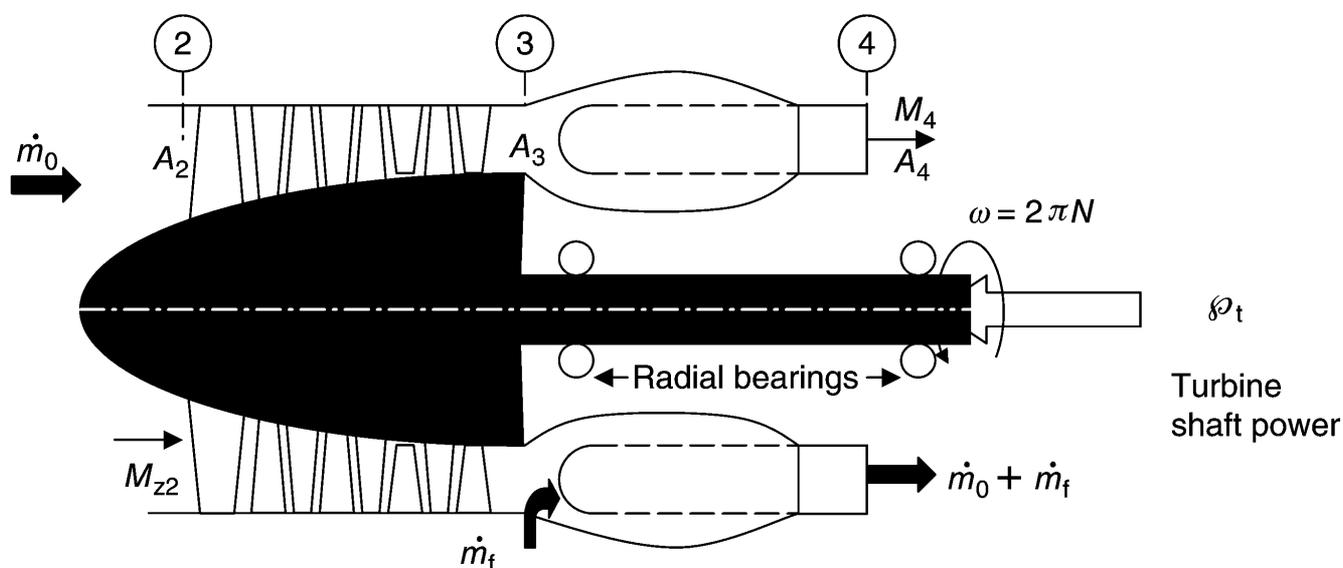
# Accoppiamento dei componenti

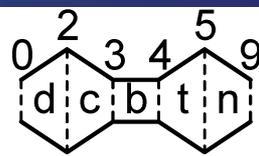


Anche nell'accoppiamento con la camera di combustione si parte dal bilancio di massa:

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_3 + \dot{m}_f = (1 + f)\dot{m}_3 = (1 + f)\dot{m}_2 = (1 + f)\dot{m}_0$$

dove  $f$  è fissato dalla posizione della **manetta** ( $\Theta = T_{t4}/T_{t2}$  impostata dal pilota). Viceversa, come già detto, la portata  $\dot{m}_2$  è funzione di  $M_{z2}$ .





# Accoppiamento dei componenti

Chiaramente la **portata** all'uscita della camera di combustione è:

$$\dot{m}_4 = \frac{p_{t4} A_4}{a_{t4}} \gamma_4 M_4 \psi_4^{-K_4} = \sqrt{\frac{\gamma_4 p_{t4} A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}}} M_4 \left(1 + \frac{\gamma_4 - 1}{2} M_4^2\right)^{-\frac{\gamma_4 + 1}{2(\gamma_4 - 1)}}$$

Se si suppone che la sezione 4 sia all'uscita dell'ugello della turbina, nella maggioranza dei casi si può supporre che il flusso sia **strozzato**:

$$\dot{m}_4 = \sqrt{\frac{\gamma_4 p_{t4} A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}}} \left(\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right)^{-K_4}} \quad \dot{m}_2 = \sqrt{\frac{\gamma_2 p_{t2} A_2}{R_2 \sqrt{T_{t2}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}}$$

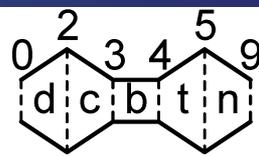
ricordando che  $p_{t4} = \pi_b \pi_c p_{t2}$ , la **conservazione della massa** diventa:

$$\sqrt{\frac{\gamma_4 \pi_b \pi_c A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \left(\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right)^{-K_4}} = (1 + f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}} \propto (1 + f) \dot{m}_{c2}$$

In condizioni di progetto, questa equazione permette di determinare  $A_4$ .

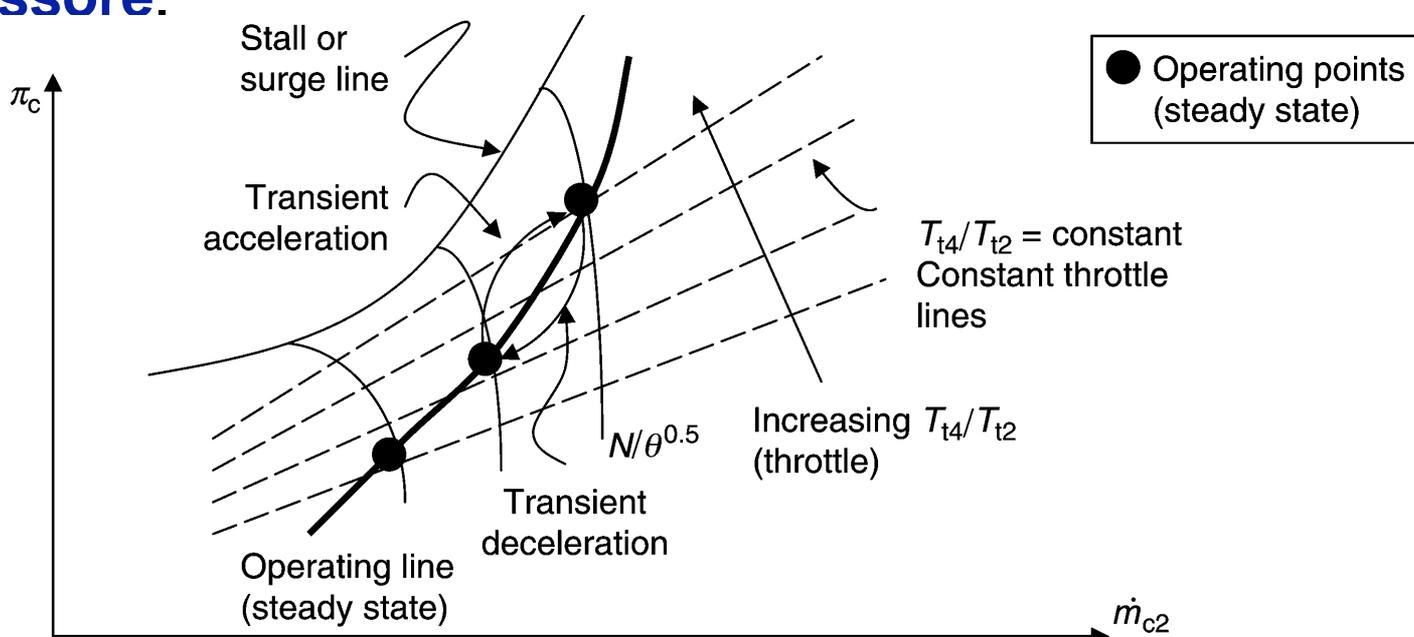


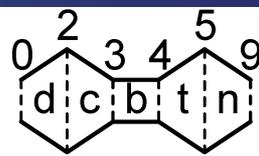
# Accoppiamento dei componenti



$$\sqrt{\frac{\gamma_4 \pi_b \pi_c A_4}{R_4 \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \left(\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right)^{-K_4}} = (1 + f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}} \propto (1 + f) \dot{m}_{c2}$$

In questa equazione  $f$  e  $T_{t4}$  sono funzione della posizione della manetta. Supponendo che  $\pi_b$  sia ricavabile dalle caratteristiche della camera di combustione,  $\pi_c$  può essere ricavato nota la portata corretta (funzione di  $M_{z2}$ ) e la posizione della manetta dalla **mappa del compressore**.





## Accoppiamento dei componenti

Riprendendo l'equazione ricavata dal **bilancio di energia** nella camera di combustione:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{\frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} - \tau_c}{\frac{Q_R \eta_b}{c_{p2} T_{t2}} - \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}}} = \frac{\frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta - \tau_c}{\frac{Q_R \eta_b}{c_{p2} T_{t2}} - \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta}$$

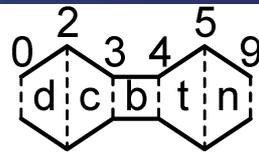
In questa equazione le incognite sono  $h_{t3}$  (o  $\tau_c$ ) e  $\eta_b$ :

- $h_{t3}$  (o  $\tau_c$ ) si ricava dal rapporto di pressione nel compressore;
- $\eta_b$  si ricava da opportune correlazioni.

Si trova quindi il legame fra la temperatura all'ingresso della turbina la posizione della manetta ed  $f$ .



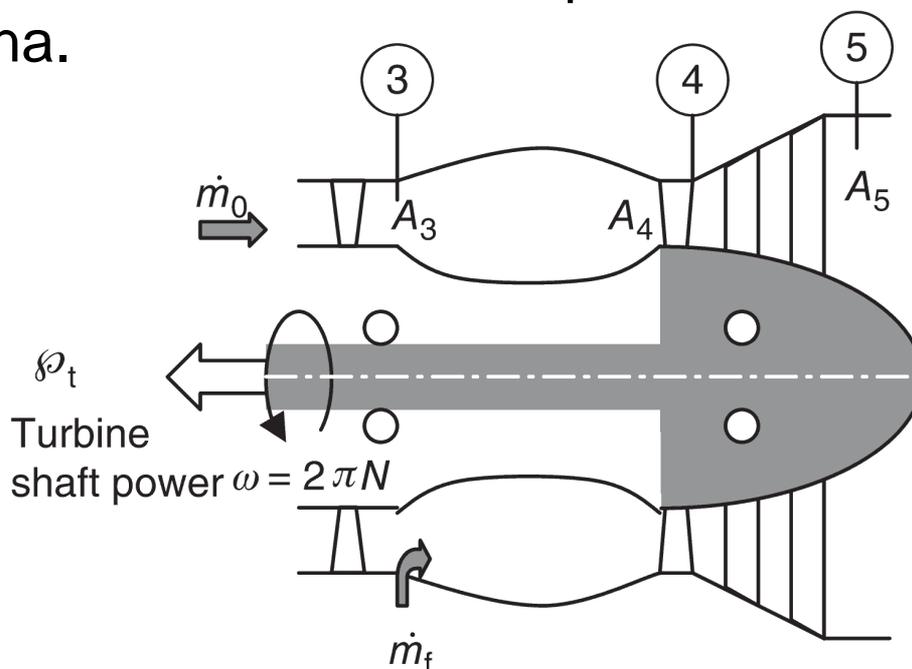
## Accoppiamento dei componenti

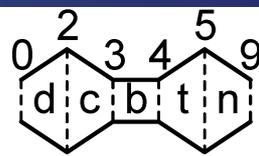


Nell'accoppiamento fra la **turbina** e la **camera di combustione** si cerca di valutare  $\tau_t$ . Se la turbina non è raffreddata le portate all'ingresso e all'uscita sono uguali quindi:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \sqrt{\frac{T_{t4} p_{t5}}{T_{t5} p_{t4}}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}}$$

Il parametro alla destra controlla la portata ed il numero di Mach assiale nella turbina.



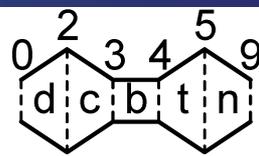
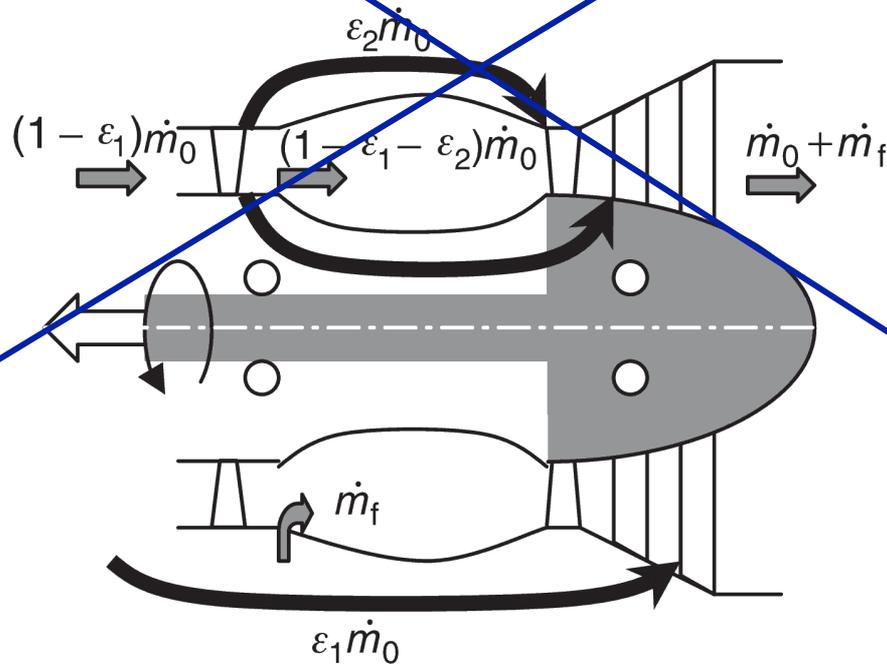


## Accoppiamento dei componenti

Nel caso di **turbina raffreddata** si suppone che l'aria venga spillata sia all'uscita del compressore che in una sezione intermedia. L'effetto del fluido refrigerante viene spesso **modellato** come una turbina con un **rendimento inferiore** (0.75-0.85).

Il bilancio di massa diventa:

$$\dot{m}_4 = (1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2)\dot{m}_0 \neq (1 + f)\dot{m}_0 = \dot{m}_5$$



## Accoppiamento dei componenti

Nel caso di **turbina raffreddata** si suppone che l'aria venga spillata sia all'uscita del compressore che in una sezione intermedia. L'effetto del fluido refrigerante viene spesso **modellato** come una turbina con un **rendimento inferiore** (0.75-0.85).

Il bilancio di massa diventa:

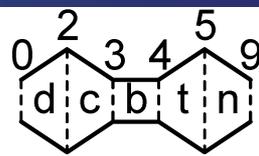
$$\dot{m}_4 = (1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2)\dot{m}_0 \neq (1 + f)\dot{m}_0 = \dot{m}_5$$

Le portate corrette sono quindi:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \frac{1 + f - \epsilon_1 - \epsilon_2}{1 + f} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left( 1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1 + f} \right)$$

Chiaramente  $\tau_t$  è inferiore nel caso di una turbina raffreddata e di conseguenza anche il rapporto fra le pressioni.





# Accoppiamento dei componenti

$$\frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left( 1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1 + f} \right)$$

Ricordando che:

$$\dot{m}_{ci} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i}$$

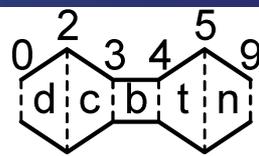
Supponendo:

- che il moto sia strozzato sia all'ingresso della turbina che nell'ugello;
- che  $\tau_t = \pi_t^{k_{te}t}$ ;
- che il secondo termine in parentesi sia costante;

Dalla prima ipotesi il **rapporto** fra le **portate** corrette è **costante** mentre le altre due implicano che i rapporti di temperatura e pressione anch'essi siano costanti.



# Accoppiamento dei componenti



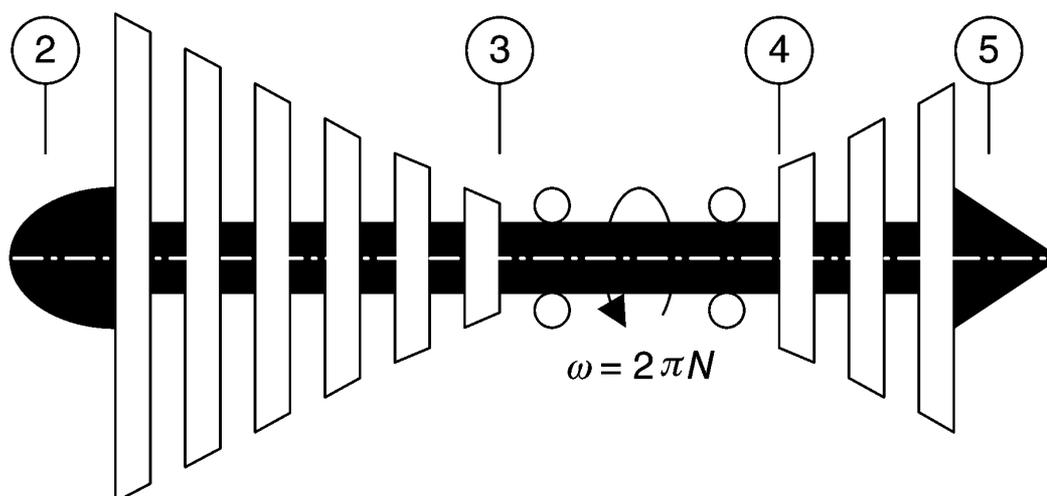
Come già visto il bilancio d'energia sull'albero è:

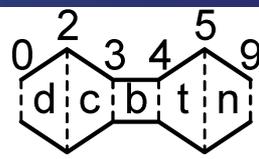
$$\mathcal{P}_c = \dot{m}_0(h_{t3} - h_{t2}) = \eta_m \dot{m}_0(1 + f)(h_{t4} - h_{t5}) = \eta_m \mathcal{P}_t$$

da cui:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta (1 - \tau_t)$$

visto che nelle ipotesi appena fatte  $\tau_t$  è costante  $\tau_c$  è una funzione lineare della **posizione della manetta**.





## Condizioni di fuori progetto

Come già visto il bilancio d'energia sull'albero è:

$$\mathcal{P}_c = \dot{m}_0(h_{t3} - h_{t2}) = \eta_m \dot{m}_0(1 + f)(h_{t4} - h_{t5}) = \eta_m \mathcal{P}_t$$

da cui:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta (1 - \tau_t)$$

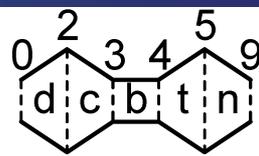
visto che nelle ipotesi appena fatte  $\tau_t$  è costante  $\tau_c$  è una funzione lineare della **posizione della manetta**.

Supponendo che le variazioni fra le condizioni di **progetto** e **fuori progetto** di  $\eta_m$  ed  $f$  siano trascurabili:

$$\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1} = \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \rightarrow \tau_{c,OD} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}$$

che può essere espressa anche in termini del rapporto di pressione:

$$\pi_{c,OD} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \right]^{\frac{1}{k}} \quad \pi_c = [1 + \eta_c (\tau_c - 1)]^{\frac{1}{k}}$$



## Condizioni di fuori progetto

Le **velocità** angolari **corrette** all'albero sono:

$$N_{ci} = \frac{N_i}{\sqrt{\theta_i}} \rightarrow \frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}}$$

Dalla relazione:

$$\Psi_c = \frac{\Delta h_t}{U^2} = \frac{w_c}{U^2}$$

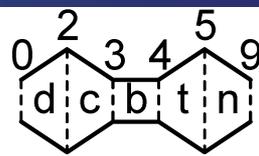
si ha ( $U = \omega r$  e supponendo  $\Psi_c \sim \text{cost}$ ) che il lavoro sia proporzionale a:

$$w_c \propto T_{t2}(\tau_c - 1) \propto N^2$$

quindi  $N_{c2}^2 \propto \tau_c - 1$ . Lo stesso ragionamento vale per la turbina ed in questo caso la costanza di  $\tau_t$  implica che anche  $N_{c4}$  sia **costante**. Di conseguenza  $N_{c2}$  è **proporzionale** alla posizione della **manetta**:

$$N_{c4,OD} \approx N_{c4,D} \approx \text{cost} \quad \frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}} = \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}}$$





Se la **turbina** non è **raffreddata** le portate nella turbina e nel compressore sono:

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i} \quad \rightarrow \quad (1+f) \dot{m}_{c2} \frac{\delta_2}{\sqrt{\theta_2}} = \dot{m}_{c4} \frac{\delta_4}{\sqrt{\theta_4}}$$

Nell'ipotesi (valida per  $\pi_c > \sim 2$ ) che la turbina sia **strozzata** la portata  $\dot{m}_{c4}$  è costante quindi:

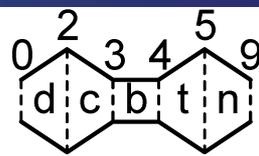
$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{p_{t4}}{p_{t2}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}}$$

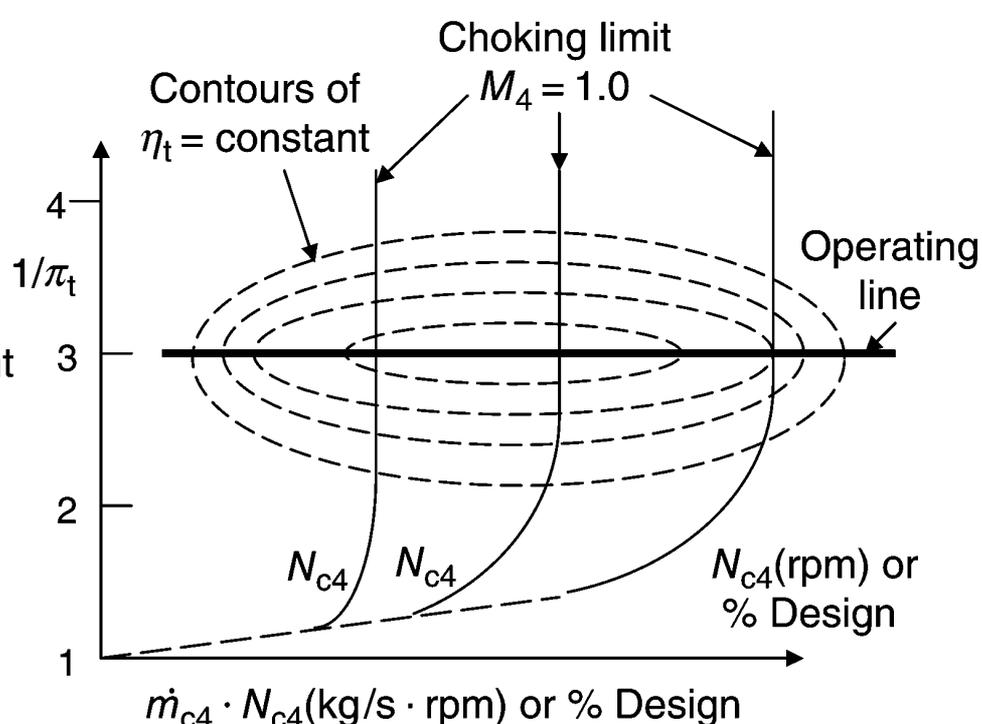
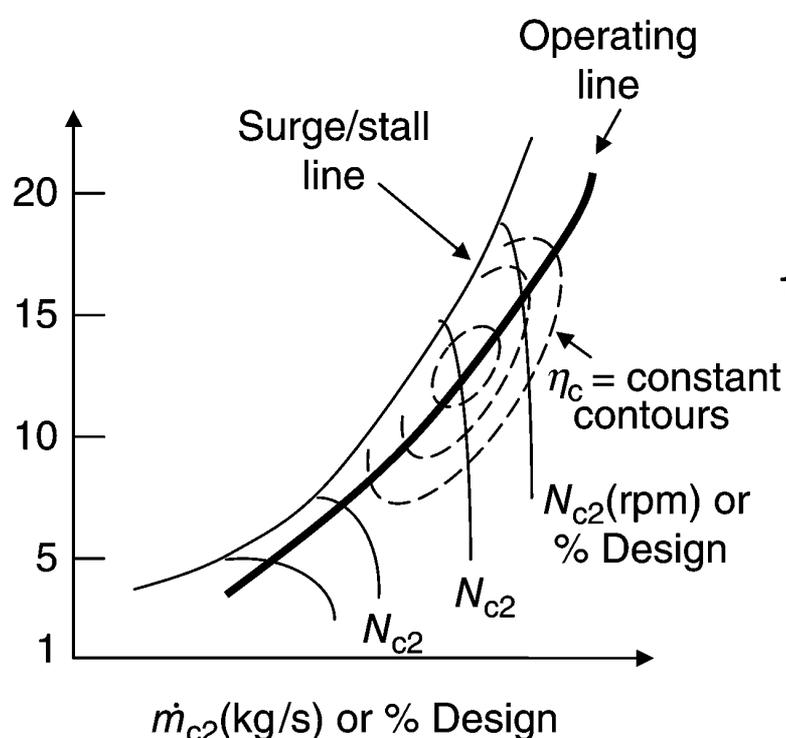
$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{z2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{z2,D}^{-K_2}}$$

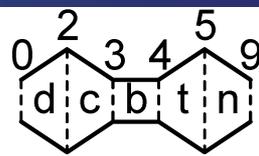


# Condizioni di fuori progetto



Tipiche **mappe** del **compressore** e della **turbina** sono mostrate nelle figure.





## Caratteristiche di pompaggio

Nell'ipotesi che il generatore di gas sia definito e che tutte le **mappe** delle **prestazioni** siano note si possono studiare gli stati di possibile funzionamento e determinate le cosiddette **caratteristiche** di **pompaggio** cioè:

- la portata corretta  $\dot{m}_{c2}$ ;
- Il rapporto di pressione complessivo  $p_{t5}/p_{t2}$ ;
- Il rapporto di temperatura complessivo  $T_{t5}/T_{t2}$ ;
- Un parametro che definisce la percentuale di combustibile  $f Q_R \eta_b / c_p T_{t2}$  oppure  $\dot{m}_{cf}$ .

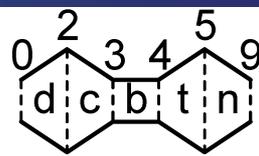
Questi parametri sono spesso espressi in funzione della **velocità** angolare **corretta** e della posizione della **manetta**.

Dall'equazione appena trovata si può ricavare il rapporto di pressioni nel compressore:

$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1 + f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \quad \rightarrow \quad \pi_c = \frac{1 + f}{\pi_b} \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$



## Caratteristiche di pompaggio



$$\pi_c = \frac{1 + f}{\pi_b} \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$

Ricordando che:

$$\frac{\dot{m}_{ci}}{A_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} M_i \psi_i^{-K_i}$$

Si ha nell'ipotesi di moto **strozzato** nella **turbina**:

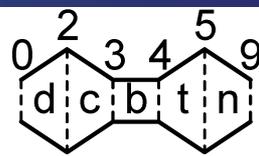
$$\frac{\dot{m}_{c4}}{A_4} = \sqrt{\frac{\gamma_4}{R_4}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} \left( \frac{\gamma_4 + 1}{2} \right)^{-K_4} = f(\gamma_4, R_4)$$

Per  $\gamma_4 = 1.33, R_4 = 286.8 \text{ J/kgK}, p_{ref} = 1 \text{ atm}, T_{ref} = 15 \text{ C}$  la costante vale circa  $237 \text{ kg}/(\text{sm}^2)$ . Nel compressore invece:

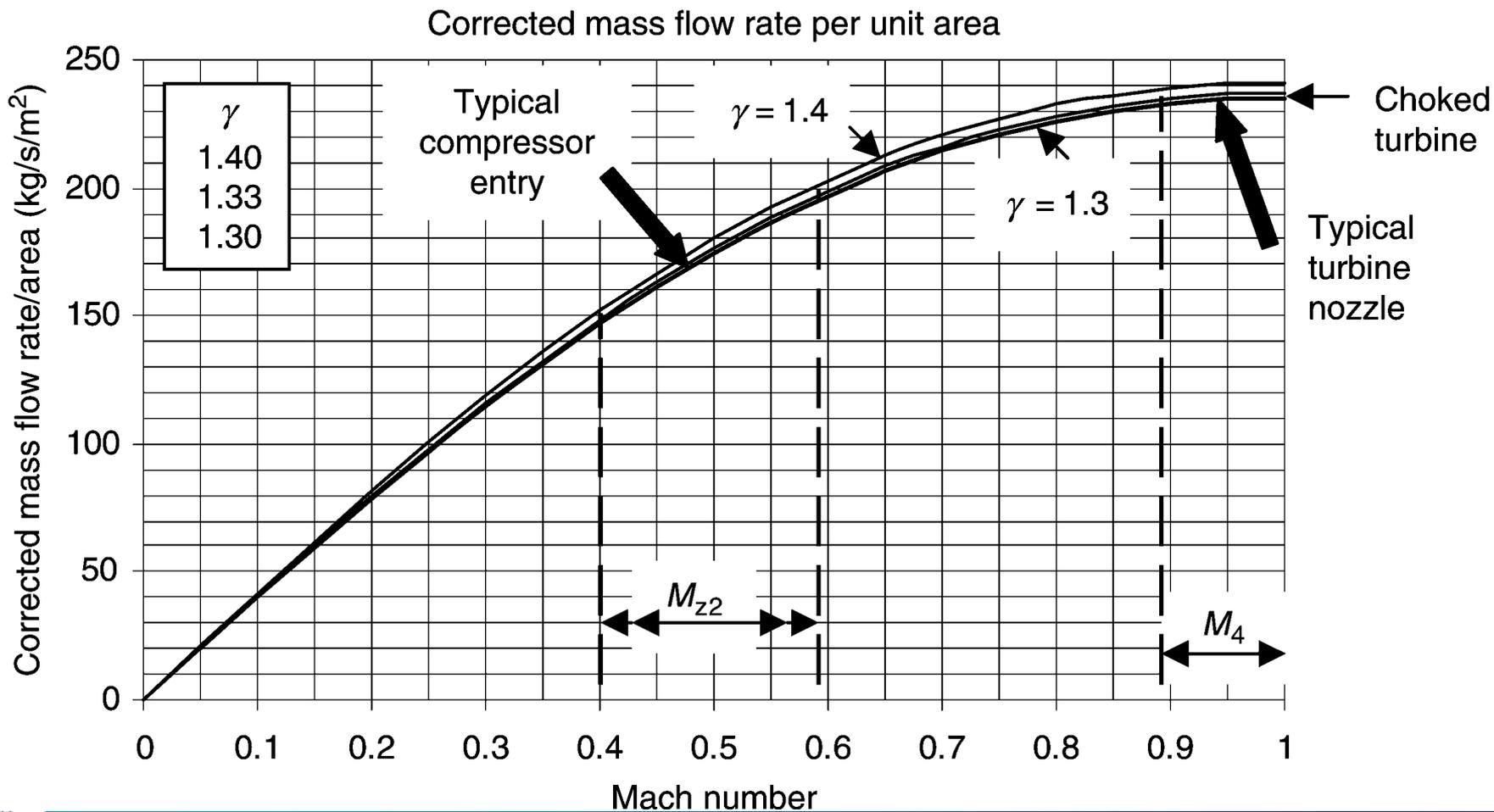
$$\frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = f(M_{z2}, \gamma_2, R_2)$$



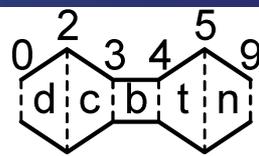
# Caratteristiche di pompaggio



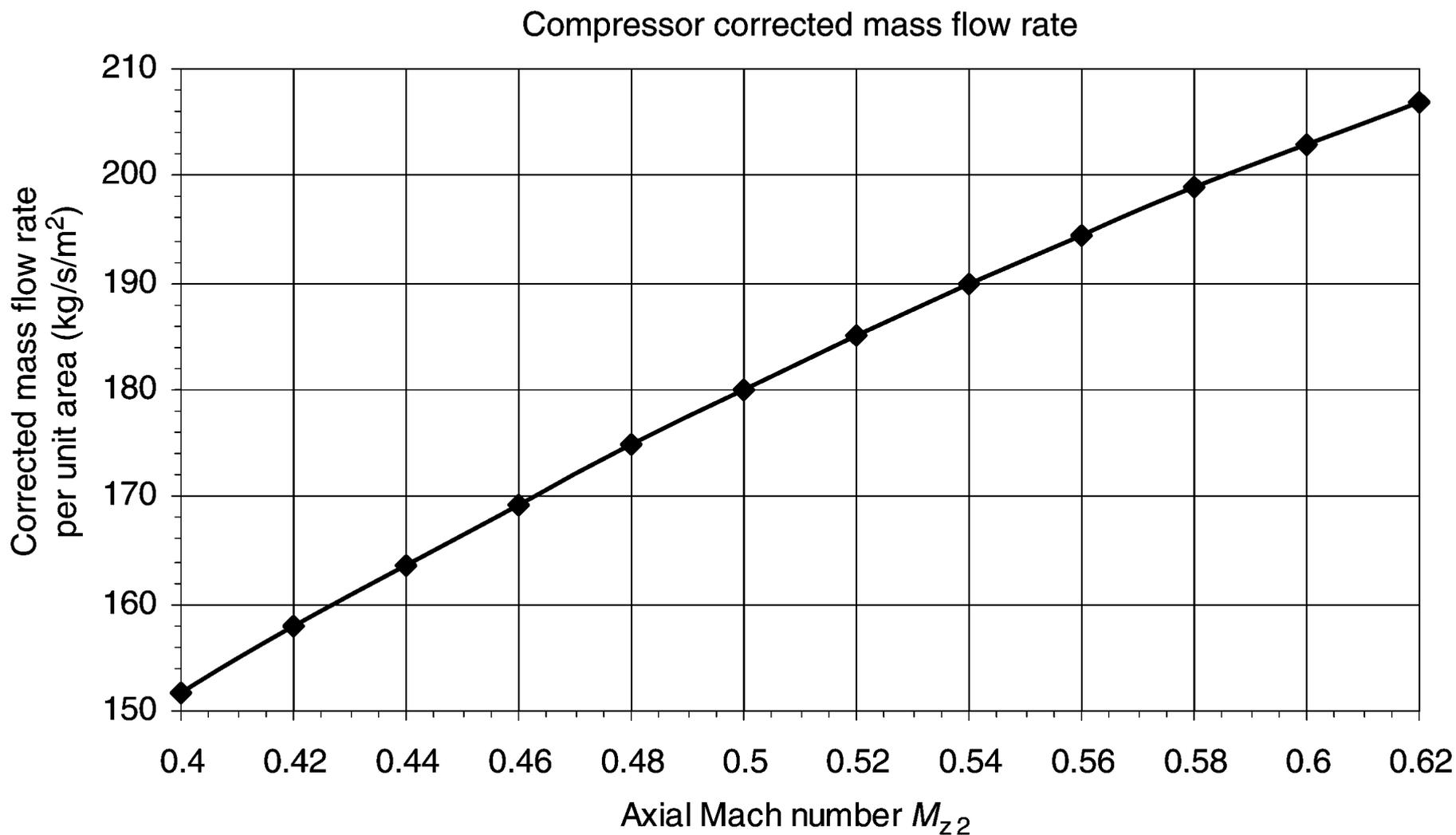
$$\frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2}} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = f(M_{z2}, \gamma_2, R_2)$$

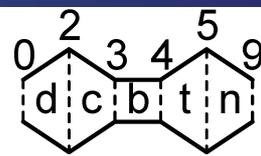


# Caratteristiche di pompaggio



Più in dettaglio nel **compressore**.





Per **esempio** supponendo che i parametri del motore siano:

- $T_{t2} = T_{ref} = 15C, M_{z2} = 0.5, \pi_c = 25, e_c = .9, \gamma_2 = 1.4, c_{p2} = 1.004kJ/kgK$
- $\theta = T_{t4}/T_{t2} = 6, \pi_b = .97, M_4 = 1 \rightarrow \dot{m}_{c4}/A_4 \cong 237kg/(sm^2)$
- $Q_R = 42,000kJ/kg, \eta_b = 0.995, \gamma_4 = 1.33, c_{p4} = 1.156kJ/kgK$

si può ricavare:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{(c_{p4}/c_{p2})T_{t4}/T_{t2} - \tau_c}{Q_R \eta_b / (c_{p2} T_{t2}) - (c_{p4}/c_{p2})T_{t4}/T_{t2}} \approx 0.03$$

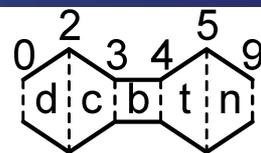
e dalla:

$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}}}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \rightarrow \frac{A_2}{A_4} = \frac{\pi_c \pi_b \frac{\dot{m}_{c4}/A_4}{\dot{m}_{c2}/A_2}}{1 + f \frac{\dot{m}_{c2}/A_2}{\dot{m}_{c4}/A_4}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

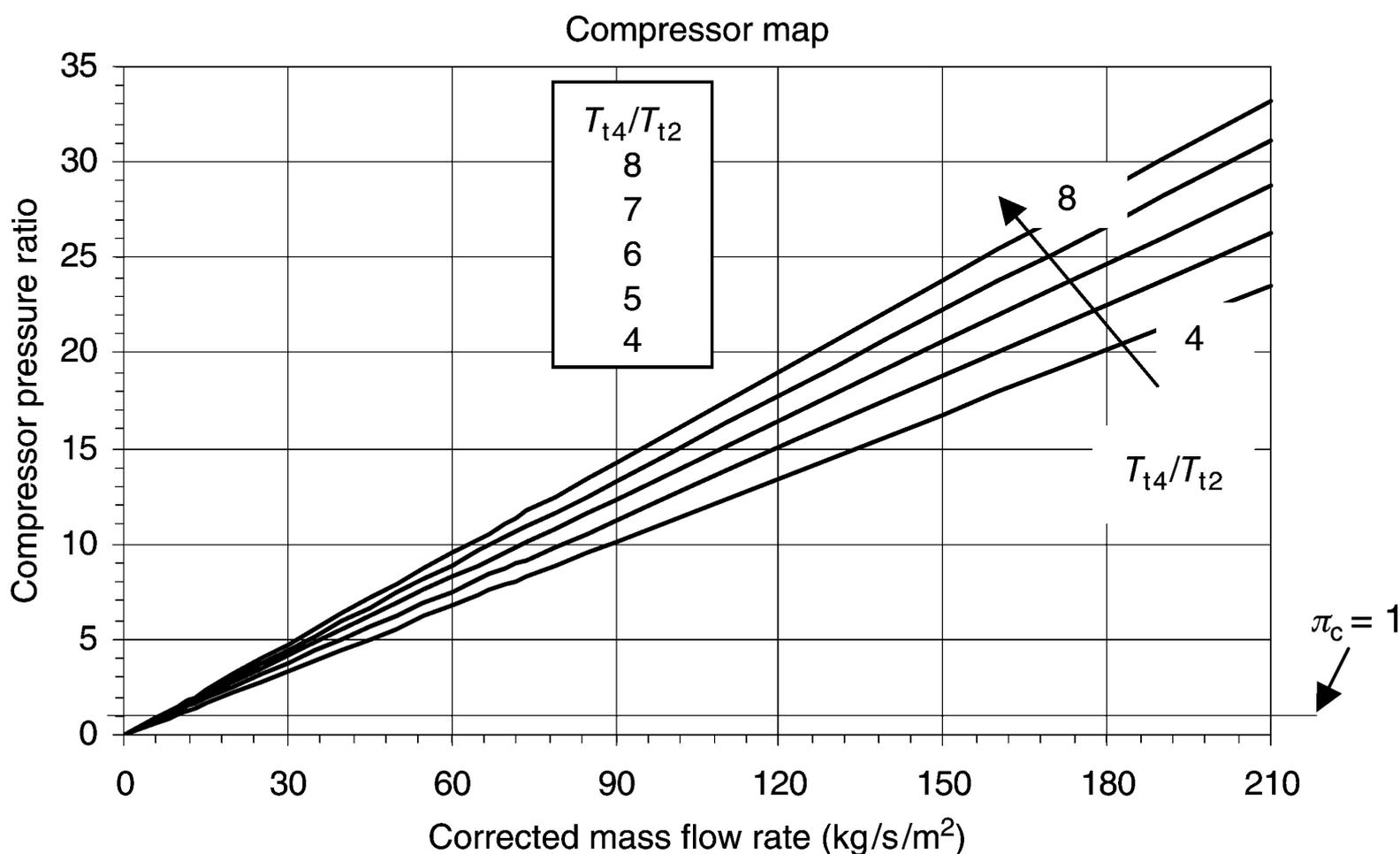
il rapporto delle aree  $A_4/A_2 \approx 0.08$ . Utilizzando questo valore nella relazione precedente si ha:

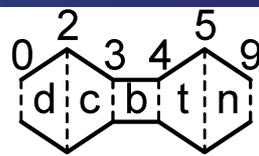
$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \approx 0.056 \frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$

# Caratteristiche di pompaggio



$$\pi_c = \frac{1 + f \frac{A_2 \dot{m}_{c2}/A_2}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}{\pi_b \frac{A_4 \dot{m}_{c4}/A_4}} \approx 0.056 \frac{\dot{m}_{c2}}{A_2} \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$





## Caratteristiche di pompaggio

Come già visto il bilancio di energia fra il **compressore** e la **turbina** dà:

$$\tau_c - 1 = \eta_m (1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) = \eta_m (1 + f) \frac{c_{p4}}{c_{p2}} \Theta (1 - \tau_t)$$

da cui si ricava il rapporto di temperature complessivo (uscita ingresso del generatore di gas):

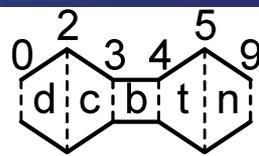
$$\tau_t = 1 - \frac{c_{p2}}{c_{p4} \eta_m (1 + f)} \frac{\tau_c - 1}{T_{t4}/T_{t2}}$$

$$\frac{T_{t5}}{T_{t2}} = \tau_t \frac{T_{t4}}{T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \frac{c_{p2}}{c_{p4} \eta_m (1 + f)} (\tau_c - 1)$$

Il rapporto di pressione complessivo invece è:

$$\frac{p_{t5}}{p_{t2}} = \pi_t \pi_b \pi_c$$

con  $\pi_t$  che può essere ricavato dal rendimento della turbina.



## Caratteristiche di pompaggio

Il parametro  $f Q_R \eta_b / \bar{c}_p T_{t2}$  può essere ricavato a partire dalla:

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} \approx \frac{c_{p4} T_{t4} - c_{p2} T_{t3}}{Q_R \eta_b} \approx \frac{\bar{c}_p (T_{t4} - T_{t3})}{Q_R \eta_b}$$

$$\frac{f Q_R \eta_b}{\bar{c}_p T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \frac{T_{t3}}{T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \tau_c = \Theta - \tau_c$$

infine per le **velocità corrette** si ha:

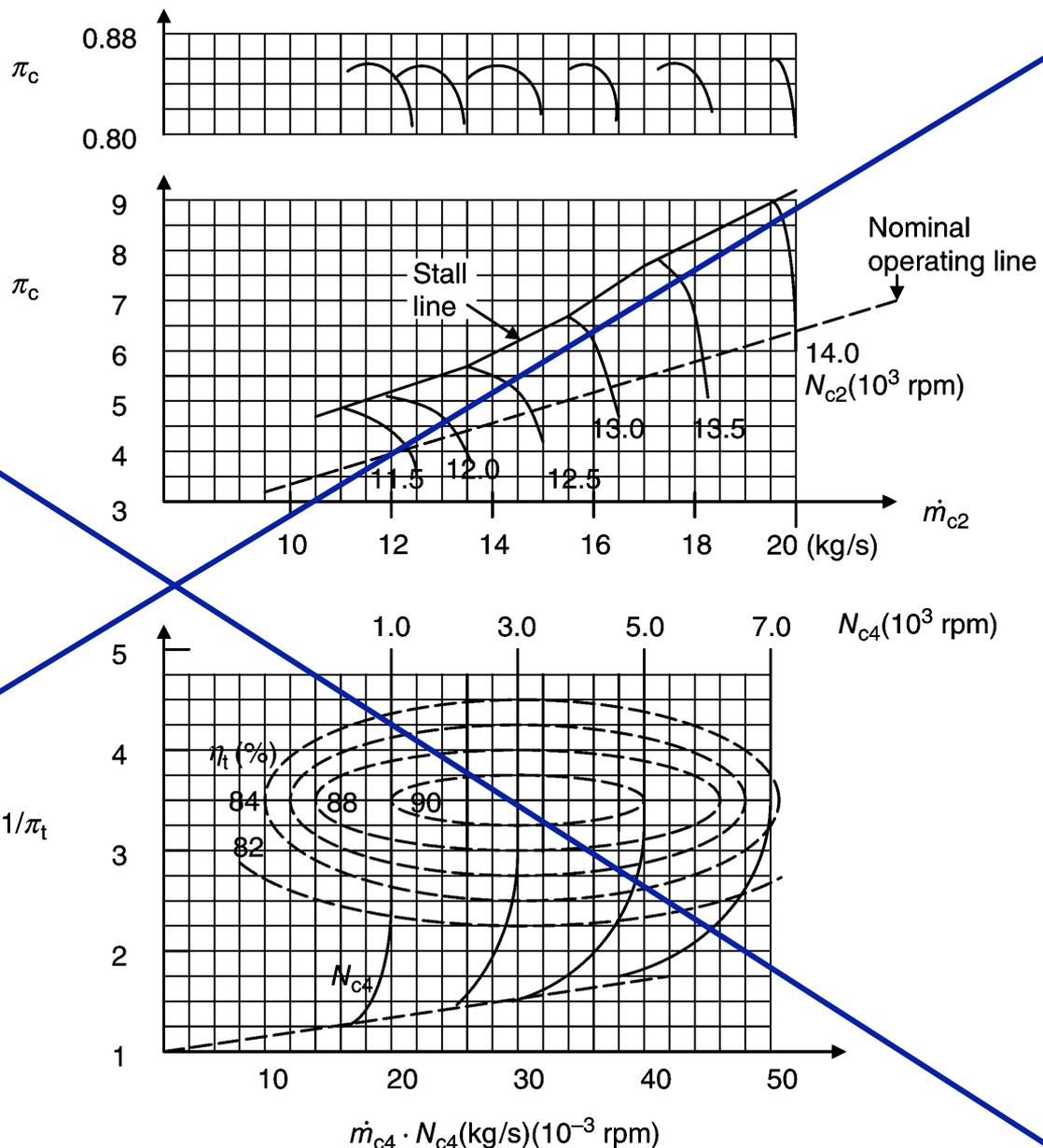
$$\frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}} = \sqrt{\Theta}$$



# Caratteristiche di pompaggio

## Esempio

Partendo dalle mappe di compressore e turbina mostrate in figura valutare le caratteristiche di pompaggio in funzione di  $N_{c2}$  ( $T_{t4}/T_{t2} = 6$ ,  $f = 0.03$ ,  $\eta_m = 0.995$ ,  $c_{pc} = 1004 \frac{J}{kgK}$ ,  $c_{pt} = 1156 \frac{J}{kgK}$ ).



# Caratteristiche di pompaggio

Dal grafico si può costruire la tabella.

Dalle:

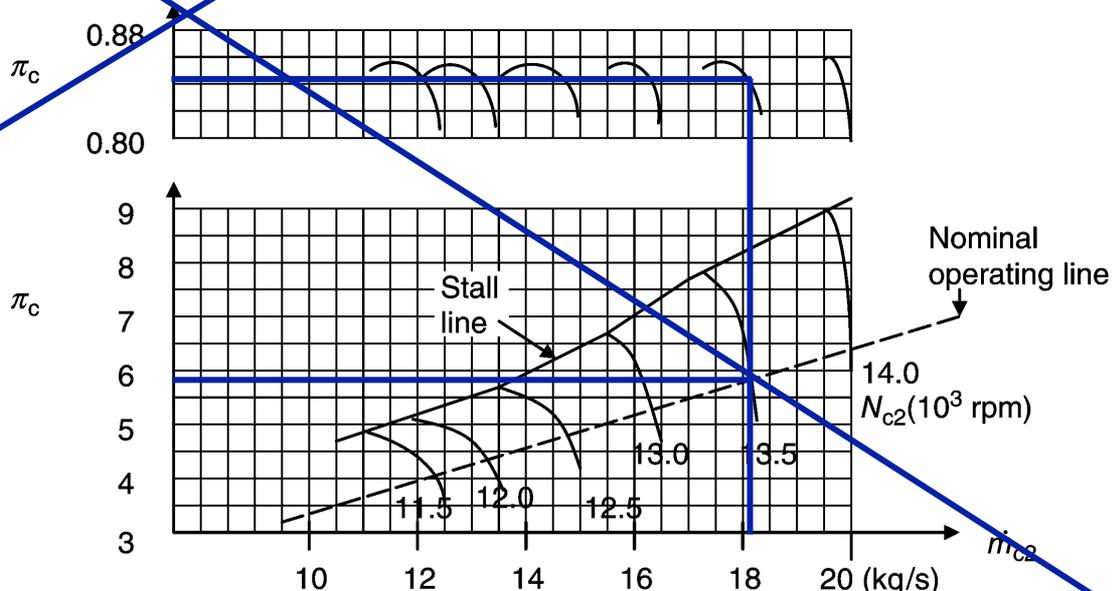
$$\tau_c = 1 + \frac{1}{\eta_c} (\pi_c^k - 1)$$

$$\frac{f Q_R \eta_b}{\bar{c}_p T_{t2}} = \frac{T_{t4}}{T_{t2}} - \tau_c$$

$$\tau_t = 1 - \frac{c_{p2}}{c_{p4}} \frac{\tau_c - 1}{\eta_m (1 + f) \frac{T_{t4}}{T_{t2}}}$$

Si calcolano  $f$  e i rapporti di temperatura nella turbina e nel compressore. Si calcola quindi il rapporto di temperatura complessivo.

| $N_{c2}$ (1,000 rpm) | $p_{t3}/p_{t2}$ (or $\pi_c$ ) | $\dot{m}_{c2}$ (kg/s) | $\eta_c$ |
|----------------------|-------------------------------|-----------------------|----------|
| 14.0                 | 6.50                          | 20.0                  | 0.82     |
| 13.5                 | 5.88                          | 18.1                  | 0.84     |
| 13.0                 | 5.32                          | 16.4                  | 0.83     |
| 12.5                 | 4.81                          | 14.8                  | 0.83     |
| 12.0                 | 4.36                          | 13.4                  | 0.83     |
| 11.5                 | 4.00                          | 12.2                  | 0.84     |



# Caratteristiche di pompaggio

La portata e velocità angolare corrette nella turbina si ricavano dalle:

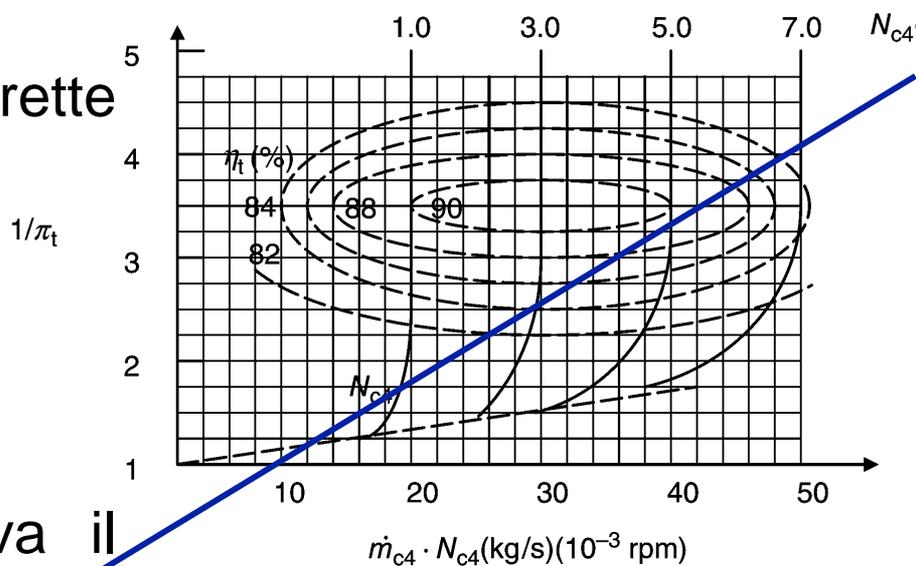
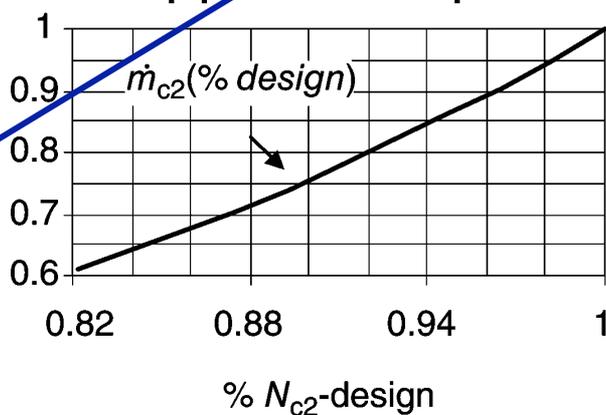
$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}}$$

$$N_{c4} = N_{c2} / \sqrt{T_{t4}/T_{t2}}$$

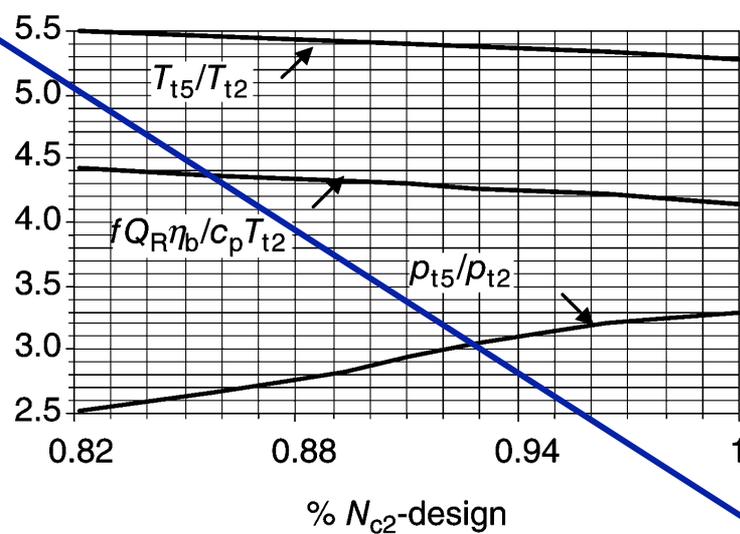
Dalla mappa della turbina si trova il rendimento adiabatico e dalla:

$$\pi_t = [1 + (\tau_t - 1)/\eta_t]^{1/k_t}$$

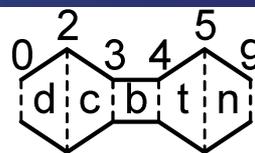
si può risalire al rapporto di pressioni complessivo.



Gas generator pumping characteristics



## Riassumendo (alcune formule)



$$\dot{m}_0 = \frac{p_{t0} A_0 \Psi_0}{a_{t0}} \quad \Psi(M, \gamma) = \gamma M \psi^{-K}$$

$$\delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}} \quad \Theta = \frac{T_{t4}}{T_{t2}}$$

$$\dot{m}_{ci} = \frac{\dot{m}_i \sqrt{\theta_i}}{\delta_i} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{R_i} \frac{p_{ref}}{\sqrt{T_{ref}}} A_i M_i \psi_i^{-K_i}}$$

$$\frac{p_{t2}}{p_{t0}} \frac{A_2}{A_0} M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2} = \psi_0^{-K_0}$$

$$\dot{m}_4 = (1+f)\dot{m}_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma_4}{R_4} \frac{\pi_b \pi_c A_4}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} \left(\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right)^{-K_4}} = (1+f) \sqrt{\frac{\gamma_2}{R_2} A_2 M_{z2} \psi_{z2}^{-K_2}}$$

$$f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}} = \frac{(c_{p4}/c_{p2}) T_{t4}/T_{t2} - \tau_c}{Q_R \eta_b / (c_{p2} T_{t2}) - (c_{p4}/c_{p2}) T_{t4}/T_{t2}}$$

$$\dot{m}_{c2} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{p_{t4}}{p_{t2}} \frac{1}{\sqrt{T_{t4}/T_{t2}}} = \frac{\dot{m}_{c4}}{1+f} \frac{\pi_b \pi_c}{\sqrt{\Theta}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} \left(1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{1+f}\right)$$

$$\tau_c - 1 = \eta_m (1+f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t)$$

$$\frac{N_{c2}}{N_{c4}} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_{t2}}} = \sqrt{\Theta}$$



## Riassumendo (alcune formule)

$$\tau_{c,OD} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} = 1 + (\tau_{c,D} - 1) \frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D}$$

$$\pi_{c,OD} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D} \right]^{\frac{1}{k}} = \left[ 1 + \eta_c (\tau_{c,D} - 1) \frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D} \right]^{\frac{1}{k}}$$

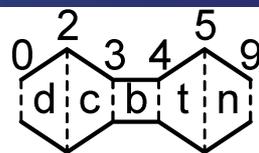
$$N_{c4,OD} \approx N_{c4,D} \approx \text{cost} \quad \frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}{(T_{t4}/T_{t2})_D}} = \sqrt{\frac{\Theta_{OD}}{\Theta_D}} = \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\Theta_D}{\Theta_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}}$$

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{z2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{z2,D}^{-K_2}}$$



## Condizioni di fuori progetto



Per determinare il funzionamento di un **turbogetto al di fuori** delle **condizioni di progetto** si iniziano a fissare i parametri del motore:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Parametri corretti:  $\dot{m}_{c2}, N_{c2}$ ;
- Parametri del compressore:  $M_{z2}, \pi_c$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  ( $\tau_\lambda$ );
- Potere calorifico del combustibile:  $Q_R$ ;
- Rendimenti dei componenti:  $\pi_d$  ( $\eta_d$ ),  $\pi_b, \pi_n, e_c$  ( $\eta_c$ ),  $e_t$  ( $\eta_t$ ),  $\eta_m, \eta_b$ ;
- Parametri dell'ugello:  $p_9/p_0$  ( $A_9/A_8$ );
- Proprietà del gas:  $\gamma_2, c_{p2}, \gamma_4, c_{p4}$ ;

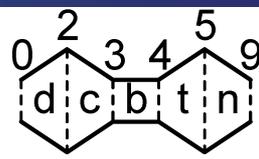
Si studia quindi il funzionamento del motore variando:

- Condizioni di volo:  $M_0, p_0, T_0$ ;
- Temperatura all'ingresso della turbina  $T_{t4}$  o  $\tau_\lambda$ ;

I **rendimenti** possono essere assunti costanti o **rielaborati dalle mappe** dei componenti.



# Condizioni di fuori progetto

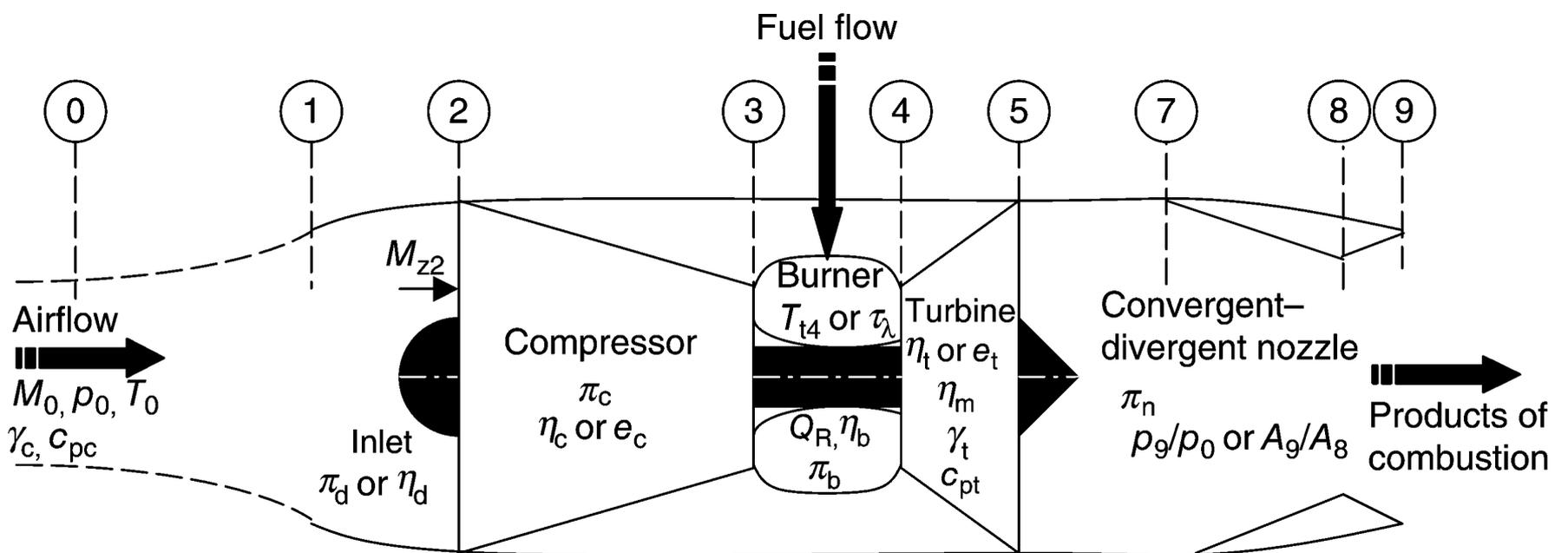


I parametri caratteristici sono anche mostrati nella figura.

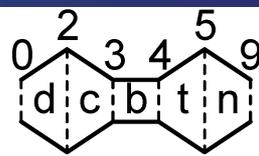
Supporremo che le **sezioni 4 e 8** siano **strozzate**. In queste ipotesi come già visto si ha:

$$\frac{\dot{m}_{c4}}{\dot{m}_{c5}} = \frac{\pi_t}{\sqrt{\tau_t}} = \text{cost}$$

e come già detto si può supporre che i singoli rapporti siano costanti.



# Condizioni di fuori progetto



Si esamini ora il seguente esercizio

Assume a turbojet engine has the following design-point parameters:

- $M_0 = 0, p_0 = 0.1 \text{ MPa}, T_0 = 15^\circ\text{C}$
- $\pi_d = 0.98$
- $\pi_c = 25, e_c = 0.90$
- $Q_R = 42,800 \text{ kJ/kg}, \pi_b = 0.98, \eta_b = 0.99, T_{t4} = 1500^\circ\text{C}$
- $e_t = 0.85, \eta_m = 0.995$
- $\dot{m}_{c2} = 73 \text{ kg/s}$
- $N_{c2} \text{ (rpm)} = 6000$
- $M_{z2} = 0.6$
- $\pi_n = 0.97, p_9/p_0 = 1.0$

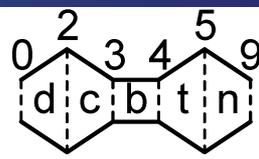
- $M_0 = 0.8, p_0 = 33 \text{ kPa}, T_0 = -15^\circ\text{C}$
- $T_{t4} = 1375^\circ\text{C}$
- $\pi_d = 0.995$
- $p_9/p_0 = 1.0$

assuming all other component efficiencies (except  $\pi_d$  that is specified) remain the same (as design) at off-design and gas properties are  $\gamma_c = \gamma_t = 1.4$  and  $c_{pc} = c_{pt} = 1104 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , calculate

- (a)  $\pi_{c-O-D}$
- (b)  $\dot{m}_{c2,O-D}$  (in kg/s)
- (c)  $N_{c2,O-D}$  (in rpm)
- (d)  $M_{z2,O-D}$

If this engine is operating in the following off-design condition





## Condizioni di fuori progetto

Considerando che:

$$\tau_\lambda = h_{t4}/h_0 \quad \tau_r = h_{t0}/h_0 \quad \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} = \frac{\tau_\lambda}{\tau_r}$$

la relazione:

$$\tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{c_{p4} T_{t4}}{c_{p2} T_{t2}} (1 - \tau_t) \quad \tau_c - 1 = \eta_m(1 + f) \frac{\tau_\lambda}{\tau_r} (1 - \tau_t)$$

supponendo che  $\tau_t$  e  $\eta_m(1 + f)$  rimangano costanti implica che :

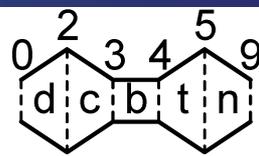
$$\frac{\tau_r}{\tau_\lambda} (\tau_c - 1) = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \tau_{c,OD} \approx 1 + \frac{(\tau_r/\tau_\lambda)_D}{(\tau_r/\tau_\lambda)_{OD}} (\tau_c - 1)_D$$

Si ha ( $M_0 = 0$ ,  $k = 0.286$ ):

$$\left(\frac{\tau_r}{\tau_\lambda}\right)_D = \frac{c_{p2} T_{t2}}{c_{p4} T_{t4}} = \frac{1104 \cdot 288}{1104 \cdot 1773} = 0.1624 \quad \tau_{c,D} = \pi_{c,D}^{\frac{k}{e_c}} = 25^{0.90} = 2.778$$

$$\left(\frac{\tau_r}{\tau_\lambda}\right)_{OD} = \left(\frac{c_{p2} T_0 \psi_{0,OD}}{c_{p4} T_{t4}}\right)_{OD} = \frac{1104 (273 - 15) 1.128}{1104 (273 + 1375)} = 0.1766$$

## Condizioni di fuori progetto



$$\tau_{c,OD} \approx 1 + \frac{(\tau_r/\tau_\lambda)_D}{(\tau_r/\tau_\lambda)_{OD}} (\tau_c - 1)_D = 1 + \frac{0.1624}{0.1766} 1.778 = 2.636$$

da cui:

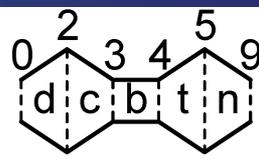
$$\pi_{c,OD} = \tau_{c,OD}^{\frac{e_c}{k}} = 2.636^{0.9} = 21.2$$

Conoscendo il rapporto di pressioni nel compressore si possono valutare gli indici di prestazione. La portata e la velocità angolare corrette sono:

$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} \approx \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{(T_{t4}/T_{t2})_D}{(T_{t4}/T_{t2})_{OD}}} = \frac{\pi_{c,OD}}{\pi_{c,D}} \sqrt{\frac{\tau_{c,D} - 1}{\tau_{c,OD} - 1}} = \frac{21.2}{25} \sqrt{\frac{1.778}{1.636}} = 0.883$$

$$\dot{m}_{c2,OD} = 73 \cdot 0.883 = 64.5 \text{ kg/s}$$

$$\frac{N_{c2,OD}}{N_{c2,D}} \approx \sqrt{\frac{\tau_{c,OD} - 1}{\tau_{c,D} - 1}} = \sqrt{\frac{1.636}{1.778}} = .959 \quad \rightarrow \quad N_{c2,OD} = 6000 \cdot 0.959 = 5754 \text{ rpm}$$



# Condizioni di fuori progetto

La portata in condizioni di fuori progetto si ricava da:

$$\dot{m}_{c2,OD} = \frac{\dot{m}_{2,OD} \sqrt{\theta_{2,OD}}}{\delta_{2,OD}} \quad \delta_i = \frac{p_{ti}}{p_{ref}} \quad \theta_i = \frac{T_{ti}}{T_{ref}} \quad \delta_{2,D} = 0.9871 \quad \theta_{2,D} = 1.000$$

$$T_{t2,OD} = \psi_{0,OD} T_0 = 1.128 \cdot 258 = 291K \quad \theta_{2,OD} = \frac{291}{288} = 1.011$$

$$p_{t0,OD} = \psi_{0,OD}^{\frac{1}{k}} p_0 = 1.128^{\frac{1}{0.286}} \cdot 33 = 50.3kPa$$

$$p_{t2,OD} = \pi_d p_{t0,OD} = 0.995 \cdot 50.3 = 50.05kPa \quad \delta_{2,OD} = \frac{50.05}{101.3} = 0.494$$

$$\dot{m}_{2,OD} = \frac{\dot{m}_{c2,OD} \delta_{2,OD}}{\sqrt{\theta_{2,OD}}} = \frac{64.5 \cdot 0.494}{\sqrt{1.011}} = 31.7kg/s$$

Risolvendo la seguente equazione iterativamente:

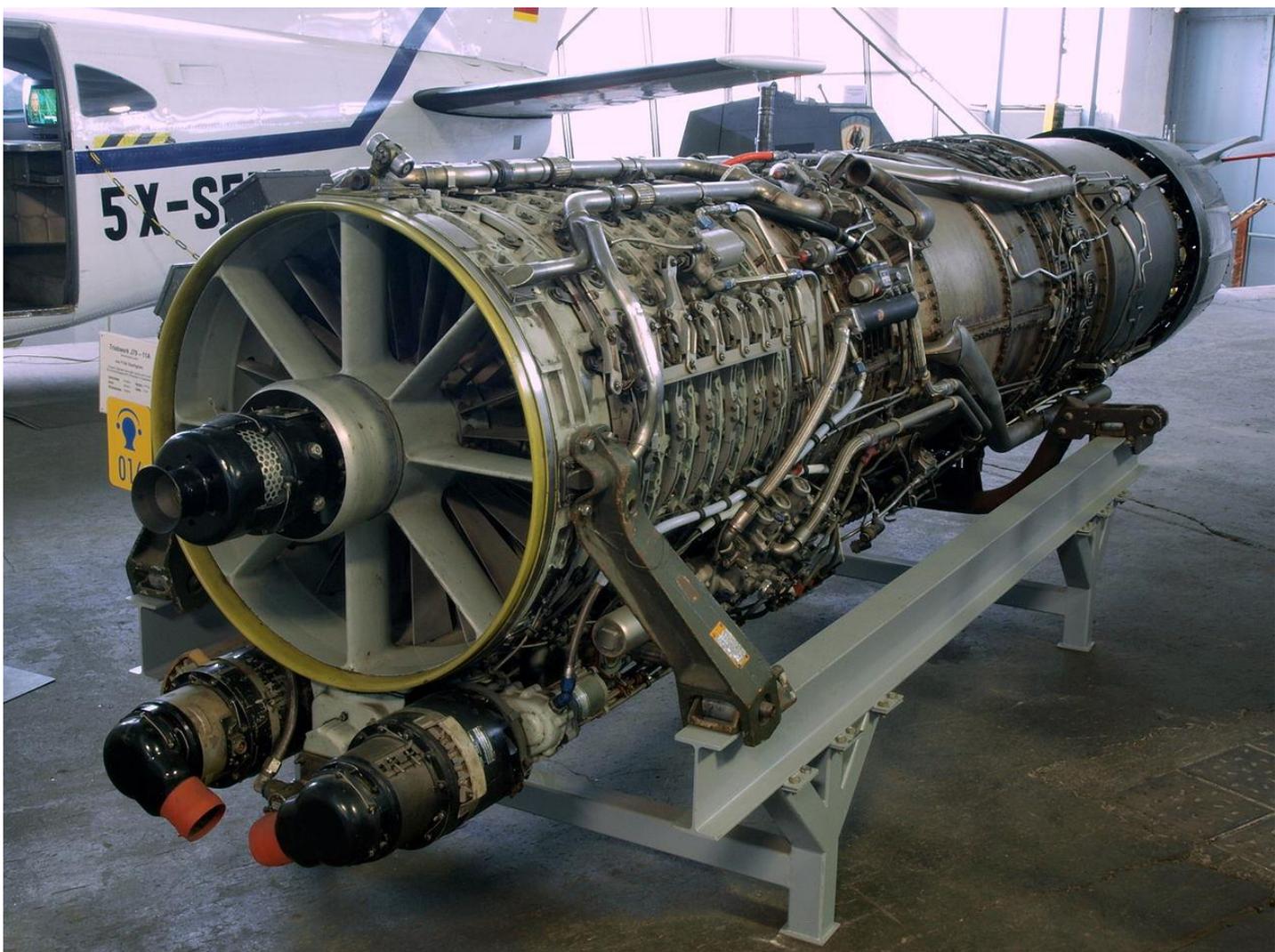
$$\frac{\dot{m}_{c2,OD}}{\dot{m}_{c2,D}} = \frac{M_{z2,OD} \psi_{2,OD}^{-K_2}}{M_{z2,D} \psi_{2,D}^{-K_2}} \rightarrow M_{z2,OD} = \frac{64.5}{73} 0.6 \left( \frac{1 + 0.2 M_{z2,OD}^2}{1 + 0.2 \cdot 0.6^2} \right)^3 = 0.497$$

La portata è quasi dimezzata  $\dot{m}_{c2} \approx \dot{m}_2$  mentre  $M_{z2}$  diminuisce di poco.

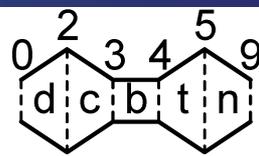


## J79 – Off Design

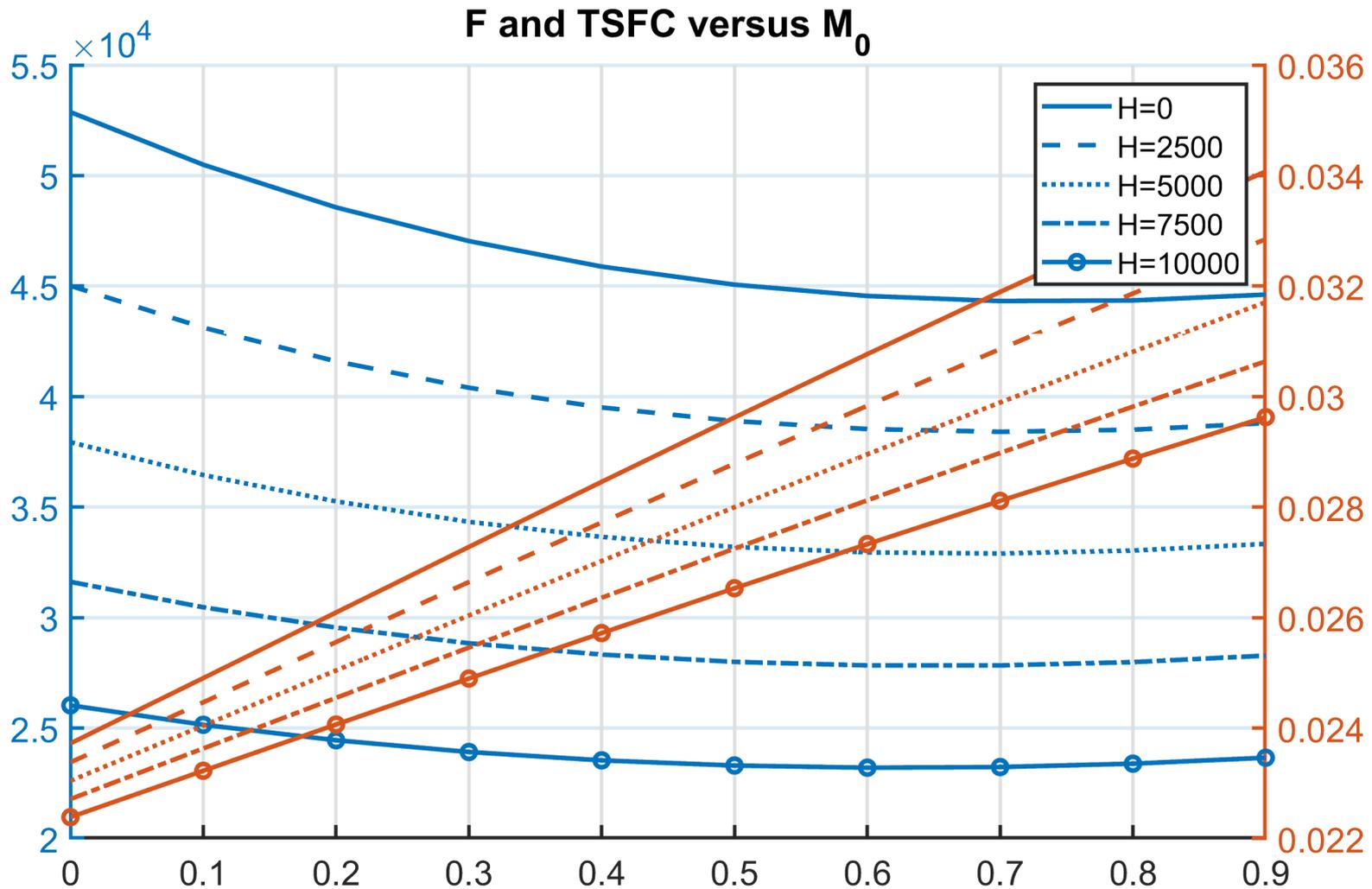
JT9 è stato usato su: Lockheed F-104 Starfighter, MD F-4 Phantom II



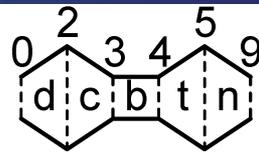
# J79 – Off Design



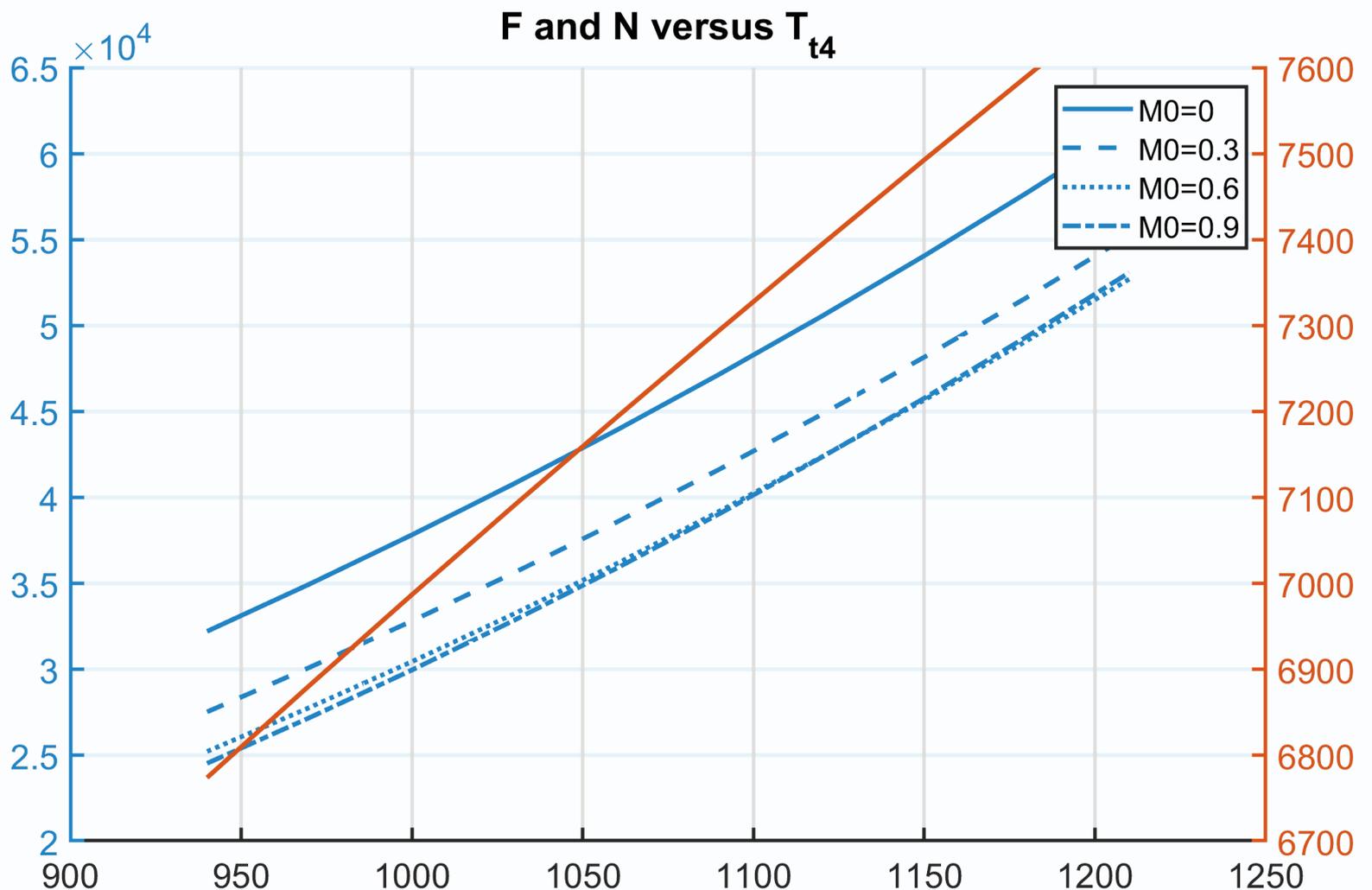
$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



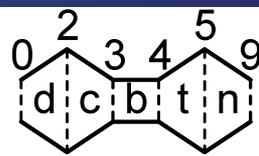
# J79 – Off Design



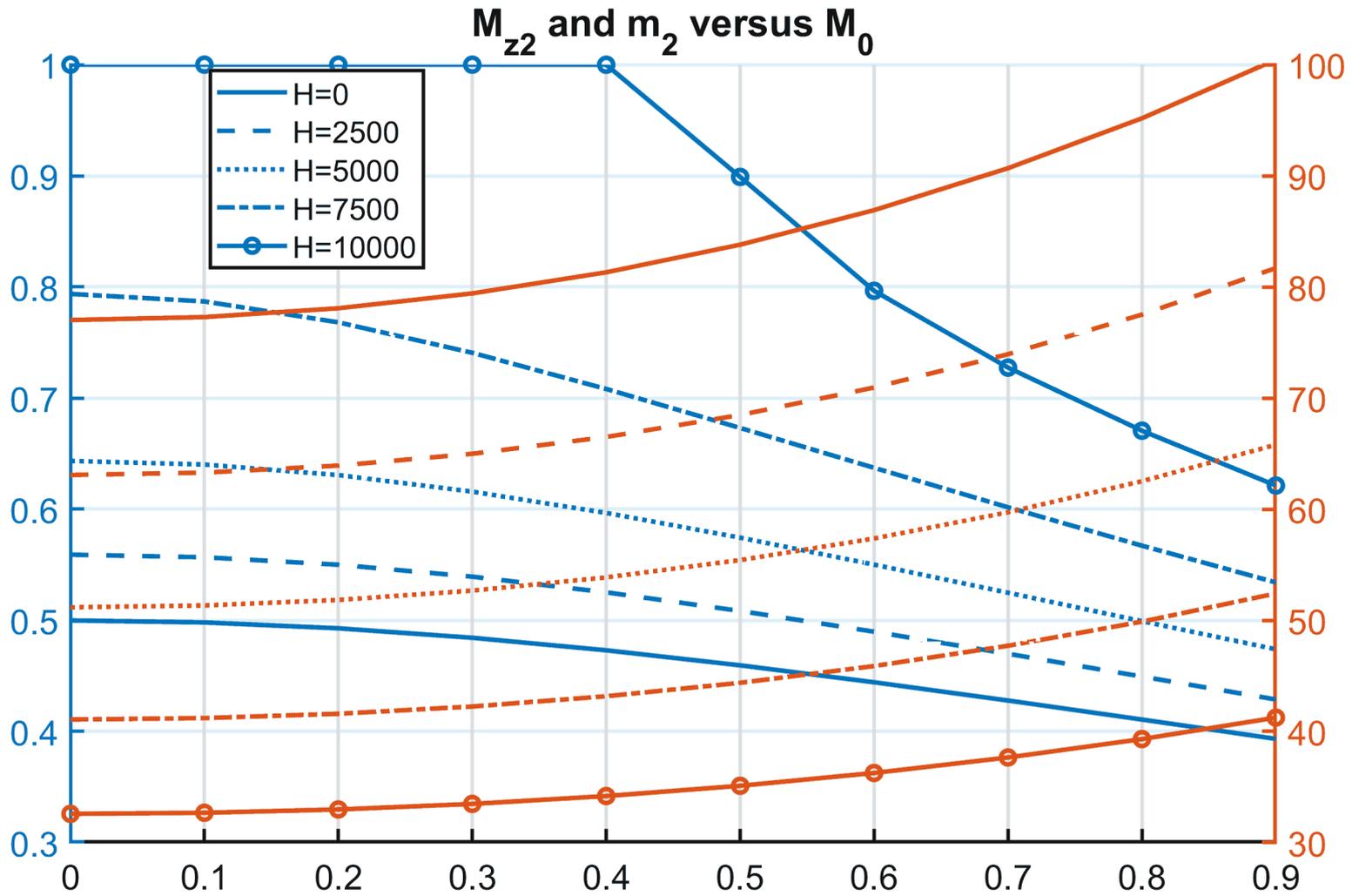
$$H = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



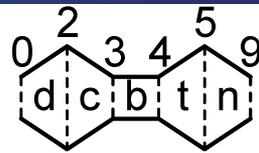
# J79 – Off Design



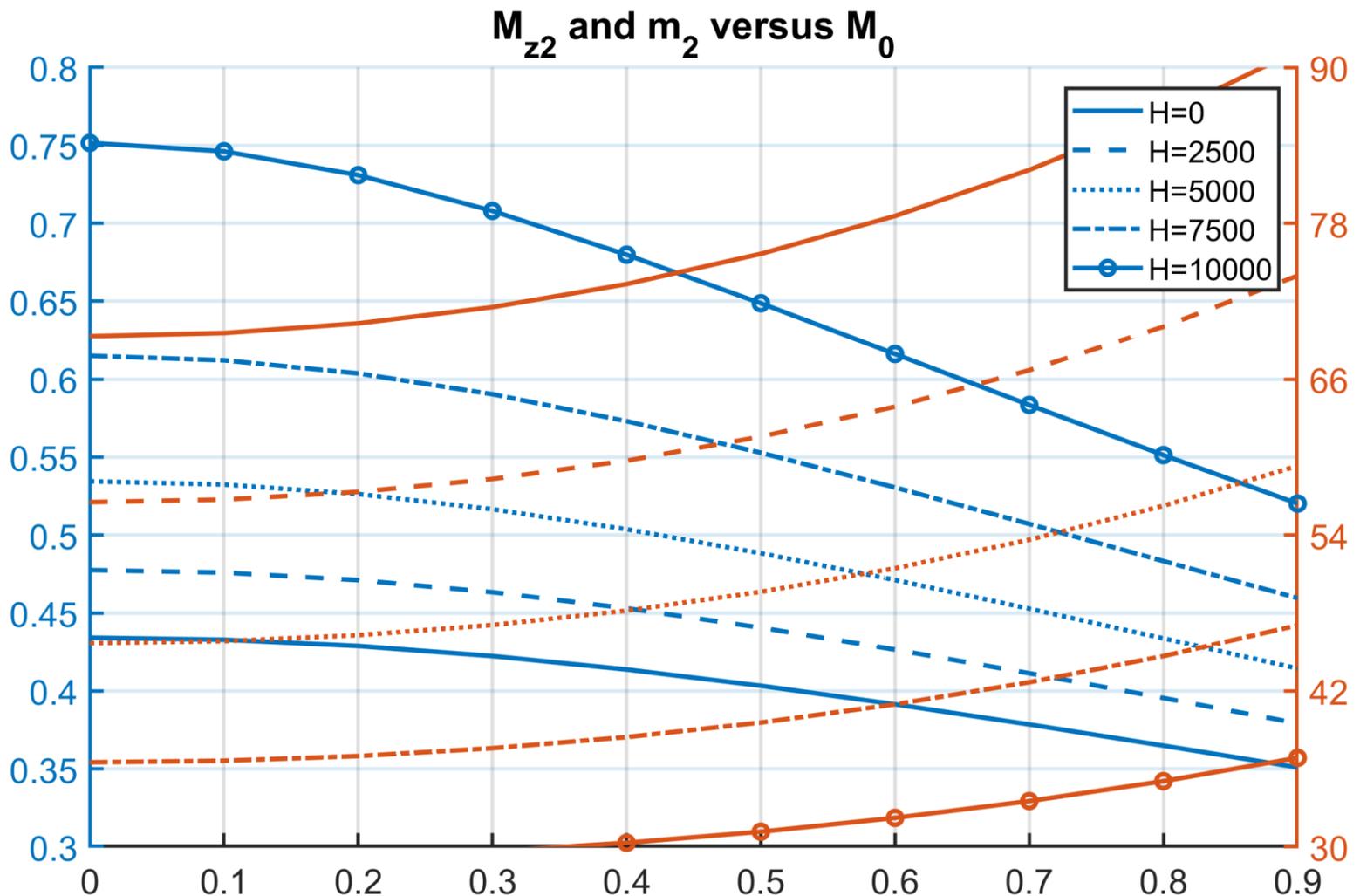
$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$



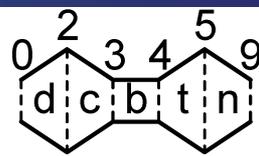
# J79 – Off Design



$T_{t4} = 1050K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$

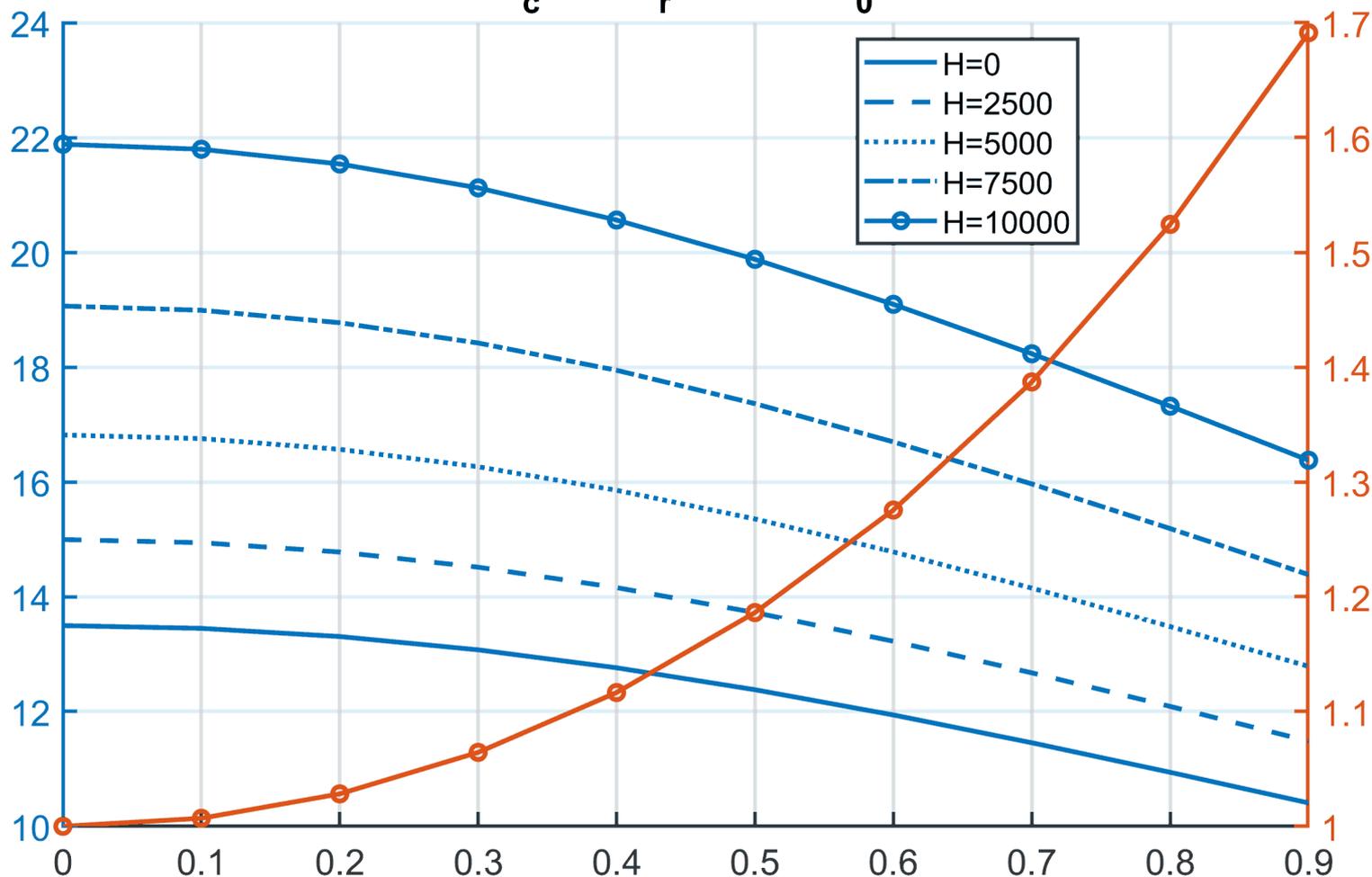


# J79 – Off Design

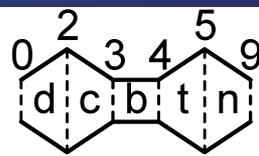


$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$

$\pi_c$  and  $\pi_r$  versus  $M_0$

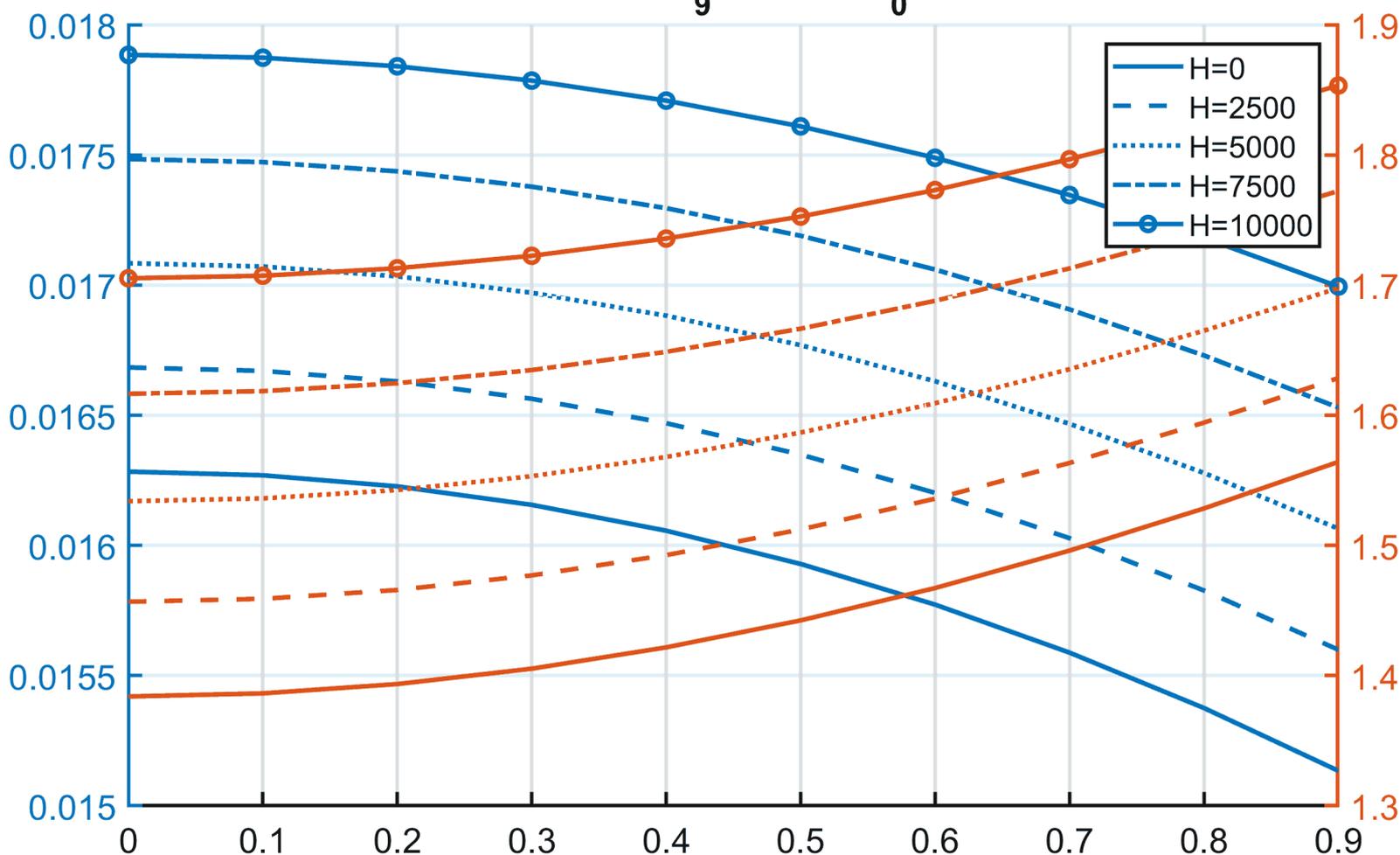


# J79 – Off Design

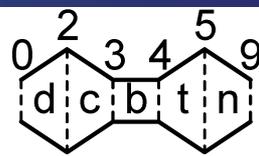


$$T_{t4} = 1140K, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$

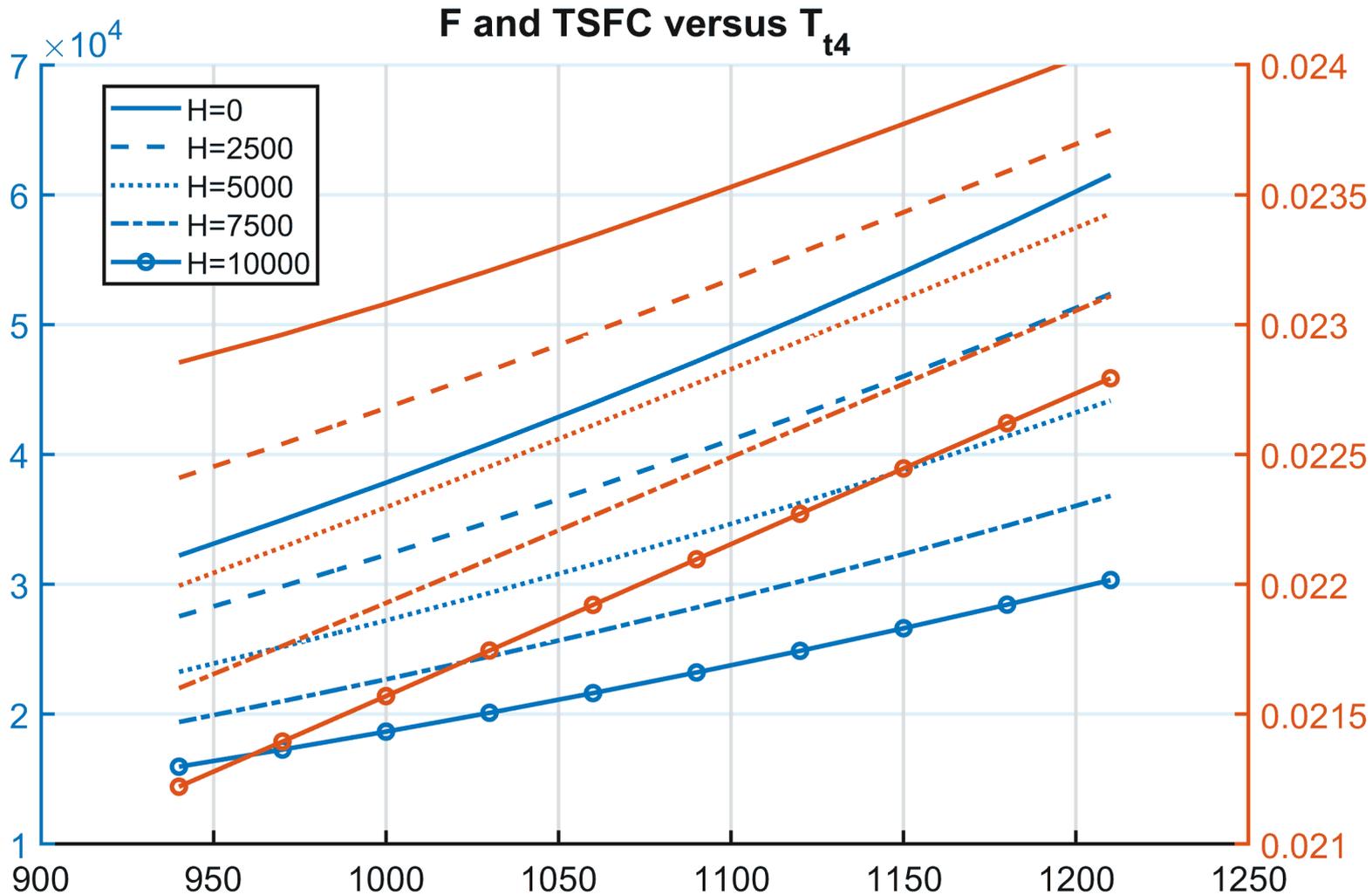
f and  $M_9$  versus  $M_0$



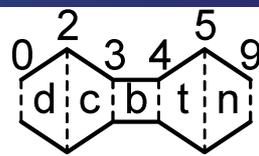
# J79 – Off Design



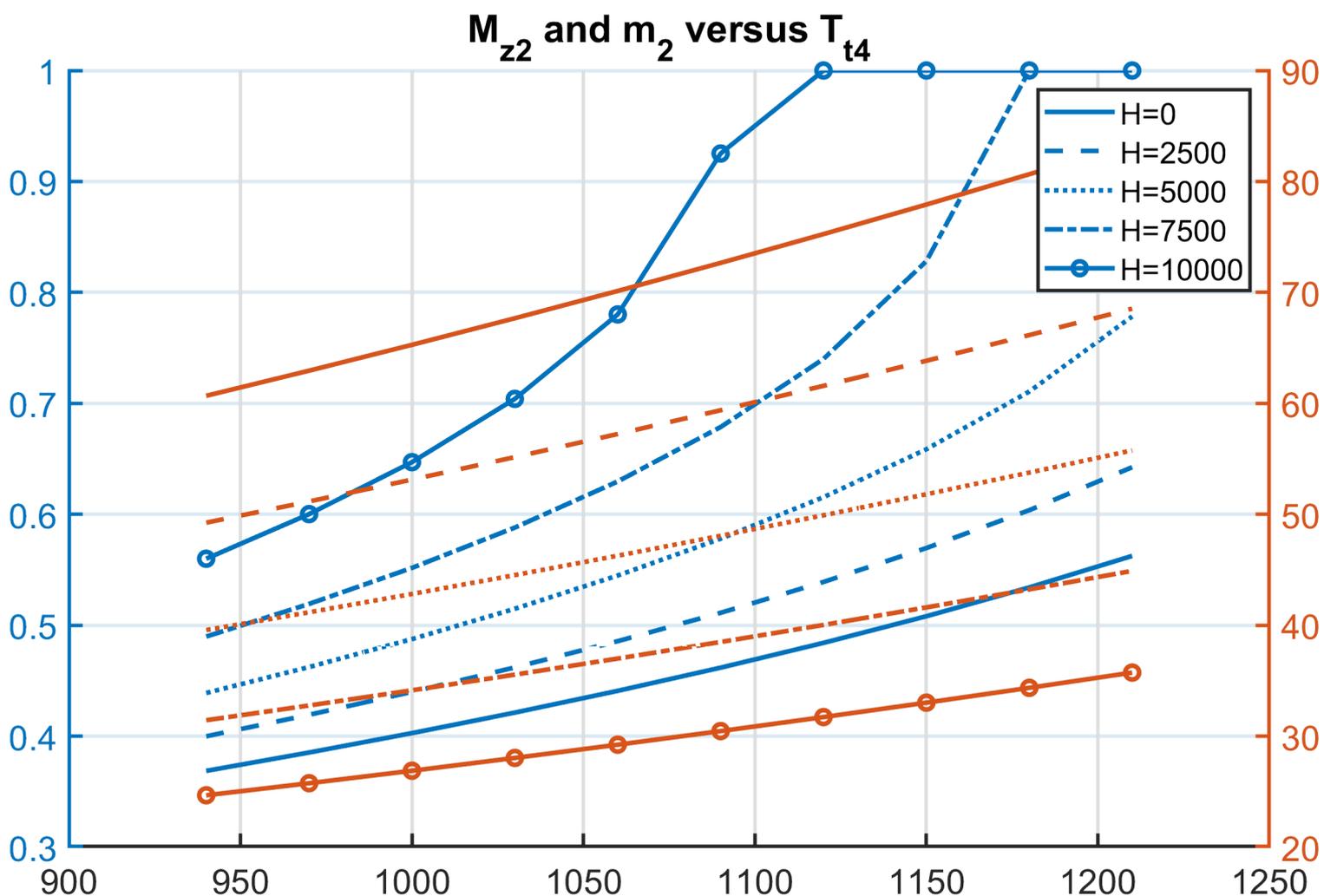
$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



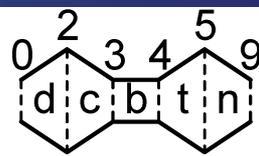
# J79 – Off Design



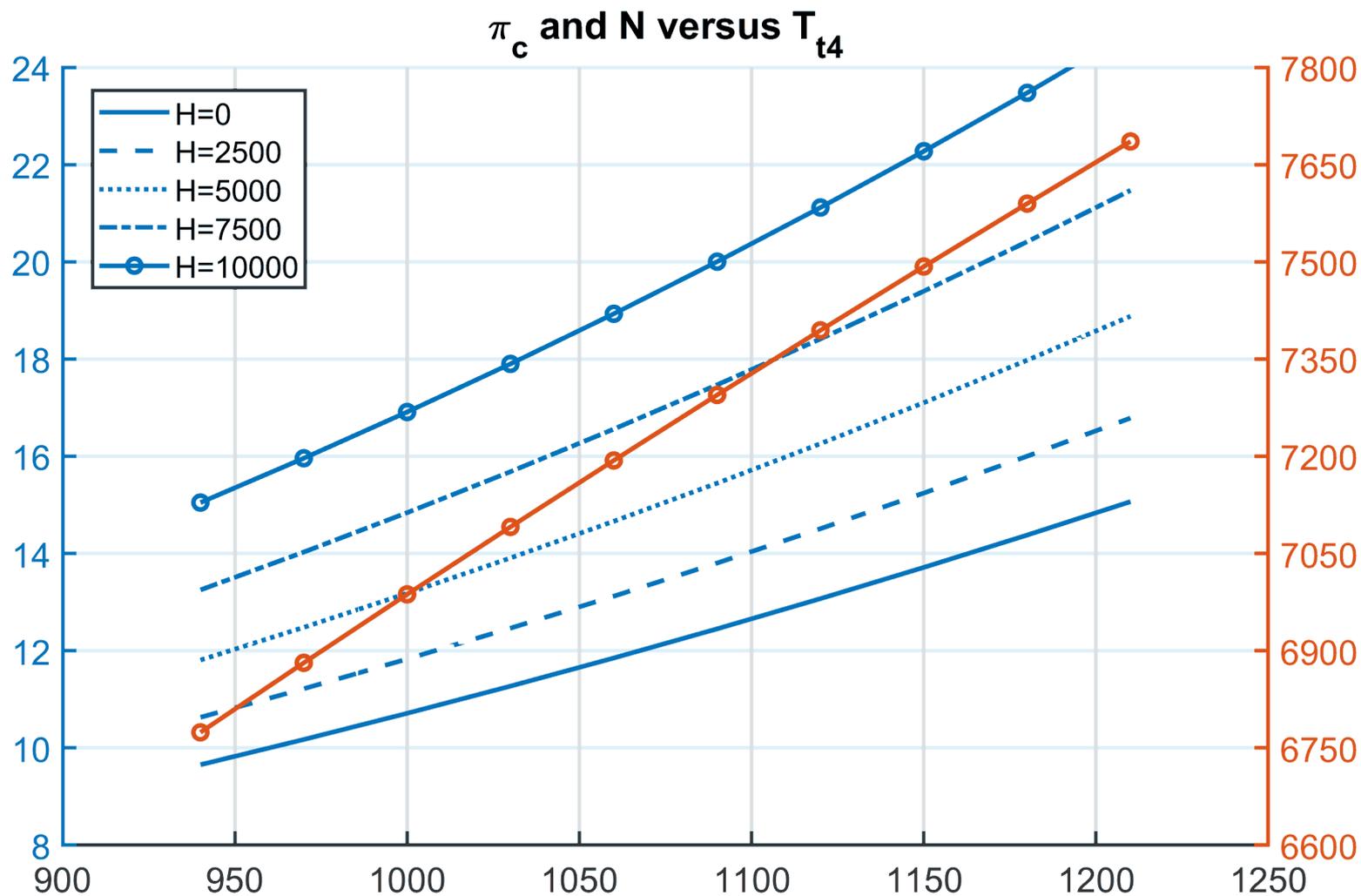
$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



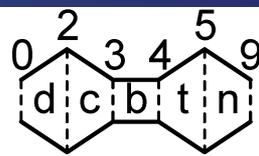
# J79 – Off Design



$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$



# J79 – Off Design



$$M_0 = 0, T_0 = 283K, \pi_c = 13.5, e_c = e_t = 0.91, \pi_d = \pi_n = 0.98$$

