



# Propulsione Aerospaziale

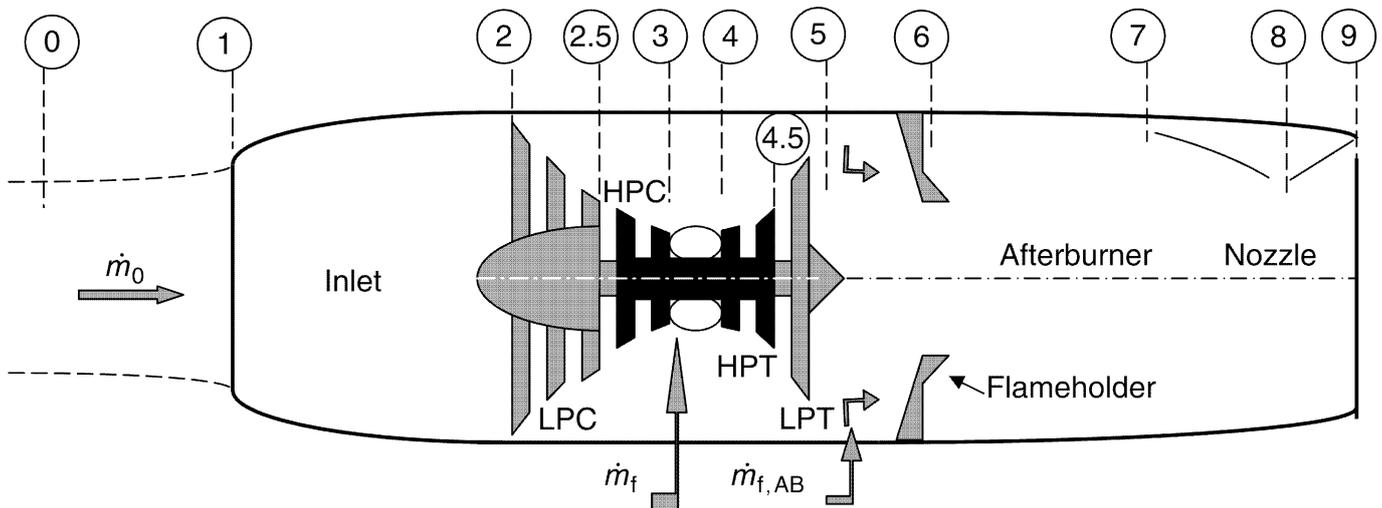
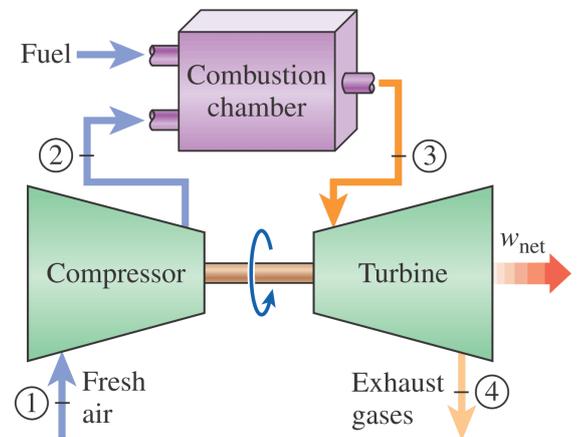
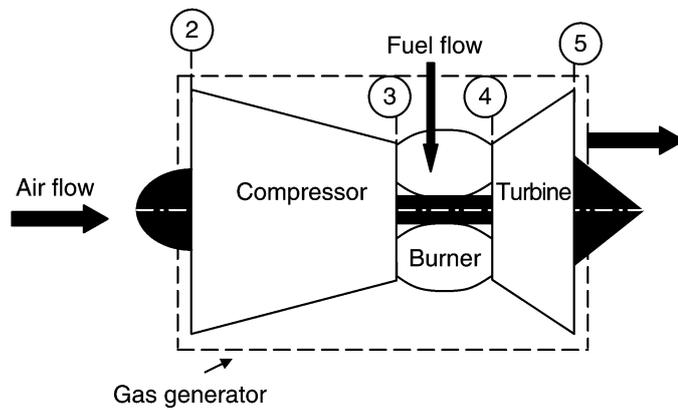
T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

Versione del 29.10.2021

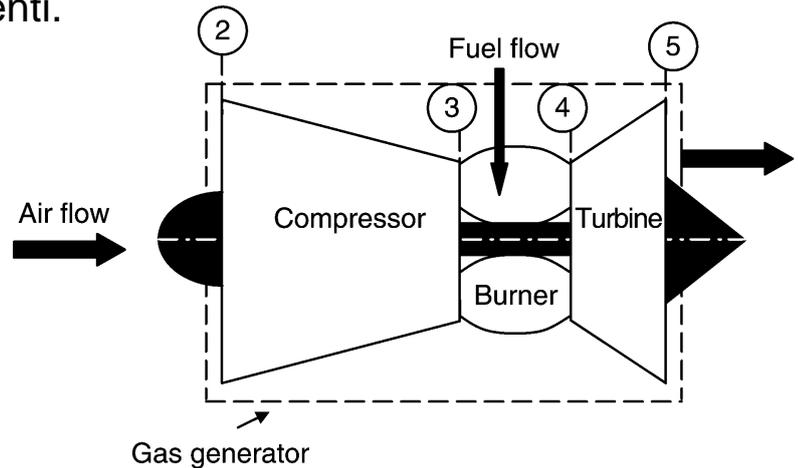
## Generatore di gas



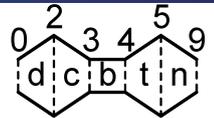
# Generatore di gas

I parametri fondamentali di un **generatore di gas** sono:

- Il **rapporto di compressione** del compressore  $\pi_c = \frac{p_{t3}}{p_{t2}}$ ;
- La **portata di aria** nel compressore  $\dot{m}_0 \left[ \frac{kg}{s} \right]$ ;
- La **portata di combustibile**  $\dot{m}_f$  o la **temperatura all'ingresso della turbina**  $T_{t4} [K]$ ;
- Il **potere calorifico** del combustibile  $Q_R \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$ ;
- I **rendimenti** dei singoli componenti.



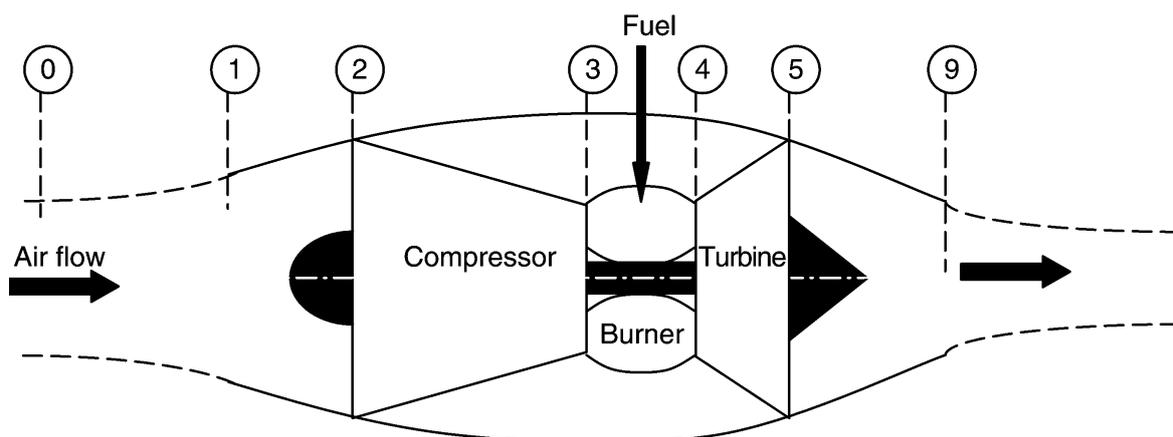
## Turbogetto



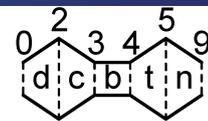
I **componenti** di un **turbogetto** sono:

- Presa d'aria (PA);
- Compressore;
- Camera di combustione (CC);
- Turbina;
- Ugello.

In questa prima fase questi **componenti** verranno esaminati solo da un punto di vista **termodinamico**.



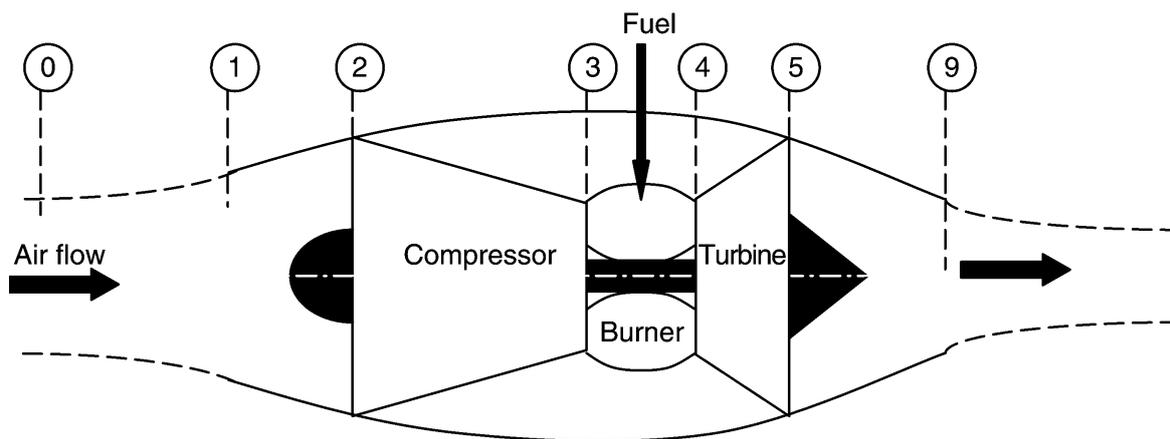
# Generatore di gas



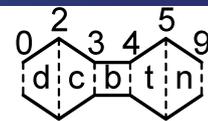
Per semplificare la trattazione si utilizzeranno le seguenti **notazioni**:

$$k = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad \psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 = \frac{T_t}{T} = \frac{h_t}{h} \quad \theta = \frac{h_t}{h_0}$$

mentre con  $\pi$  e  $\tau$  si indicano i **rapporti** di **pressione** e **entalpia** (tendenzialmente totali) valle-monte dei singoli componenti.



# Generatore di gas

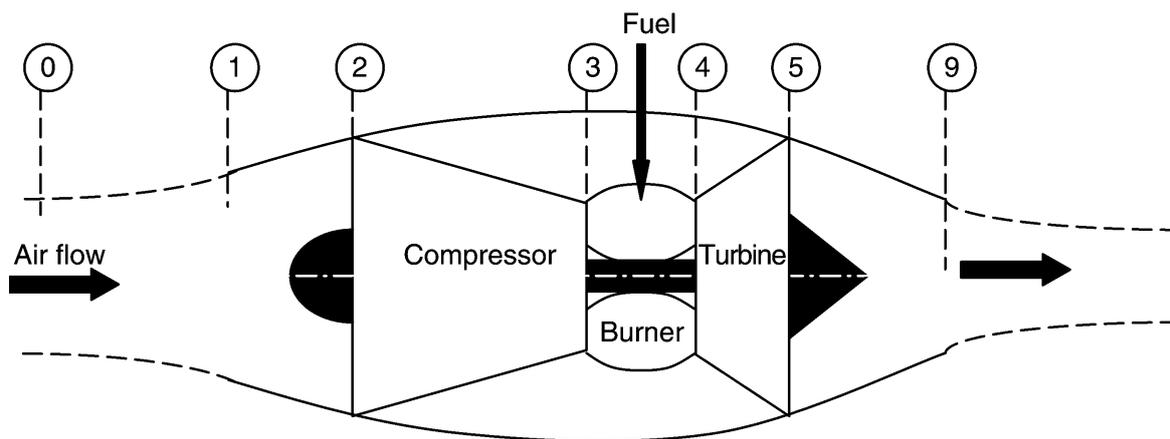


In dettaglio:

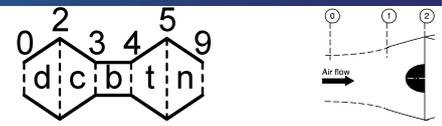
$$\tau_r = \frac{h_{t0}}{h_0} \quad \tau_d = \frac{h_{t2}}{h_{t0}} \quad \tau_c = \frac{h_{t3}}{h_{t2}} \quad \tau_b = \frac{h_{t4}}{h_{t3}} \quad \tau_t = \frac{h_{t5}}{h_{t4}} \quad \tau_n = \frac{h_{t9}}{h_{t5}}$$

$$\pi_r = \frac{p_{t0}}{p_0} \quad \pi_d = \frac{p_{t2}}{p_{t0}} \quad \pi_c = \frac{p_{t3}}{p_{t2}} \quad \pi_b = \frac{p_{t4}}{p_{t3}} \quad \pi_t = \frac{p_{t5}}{p_{t4}} \quad \pi_n = \frac{p_{t9}}{p_{t5}}$$

Inoltre:  $\tau_\lambda = \theta_t = \theta_4 = \frac{h_{t4}}{h_0} = c_{pt} \frac{T_{t4}}{c_p T_0}$



# Presenza d'aria



La funzione della **presa d'aria** (PA) è di **convogliare** il flusso nel compressore alla corretta velocità e con una **buona qualità** del flusso. Tipicamente i compressori assiali sono progettati per lavorare a Mach assiale di circa 0.5, **inferiore alla velocità di crociera** dei moderni velivoli.

La funzione della presa d'aria è normalmente di **decelerare** la corrente, quindi viene spesso chiamata **diffusore**. La decelerazione provoca un gradiente di pressione avverso che può provocare separazioni.

Il funzionamento della PA in condizioni ideali è **adiabatico** e **reversibile**. In **condizioni reali** la reversibilità viene a mancare ma l'ipotesi di **adiabaticità** è ragionevolmente **soddisfatta**.



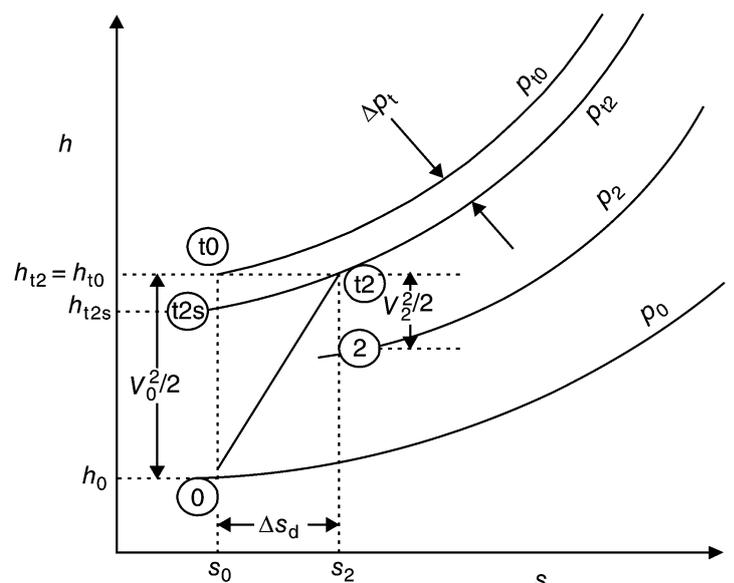
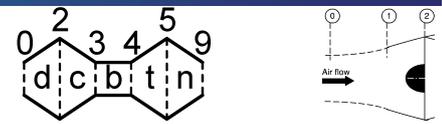
# Presenza d'aria

Visto che il processo è **adiabatico** la temperatura di ristagno passando dallo stato 0 al 2 rimane invariata ( $\tau_d = 1$ ).

A causa dei processi irreversibili è presente un **aumento di entropia**.

In figura sono anche indicati i **punti di ristagno** con il pedice t.

Inoltre è stato aggiunto il punto t2s alla stessa entropia iniziale ma alla pressione del punto t2.

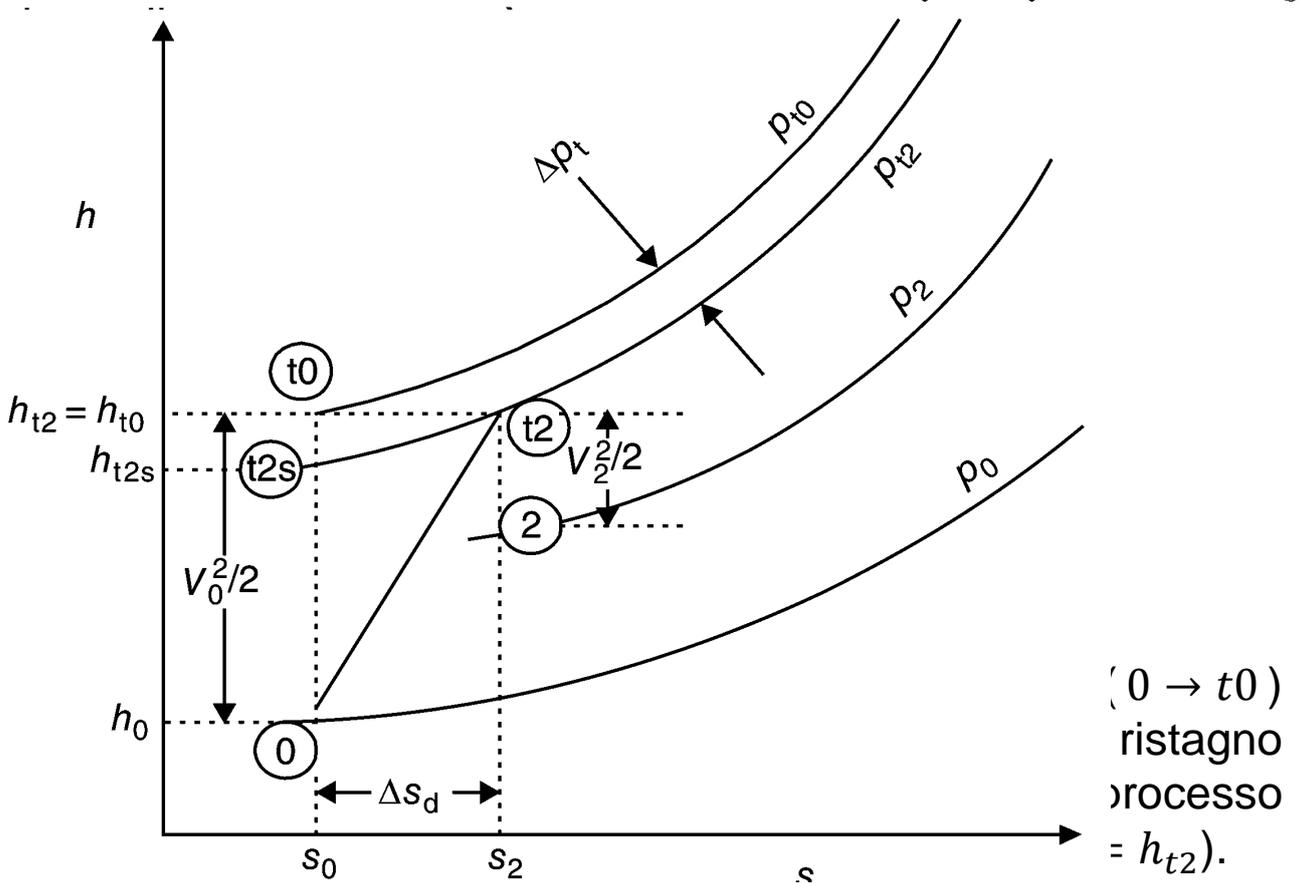


Come si vede dalla figura una conversione **reversibile** ( $0 \rightarrow t0$ ) dell'energia cinetica porterebbe ad una **pressione** di ristagno **maggiore** di quella raggiunta in un processo reale. Poiché il processo è adiabatico l'entalpia totale (di ristagno) rimane invariata ( $h_{t0} = h_{t2}$ ).



# Presenza d'aria

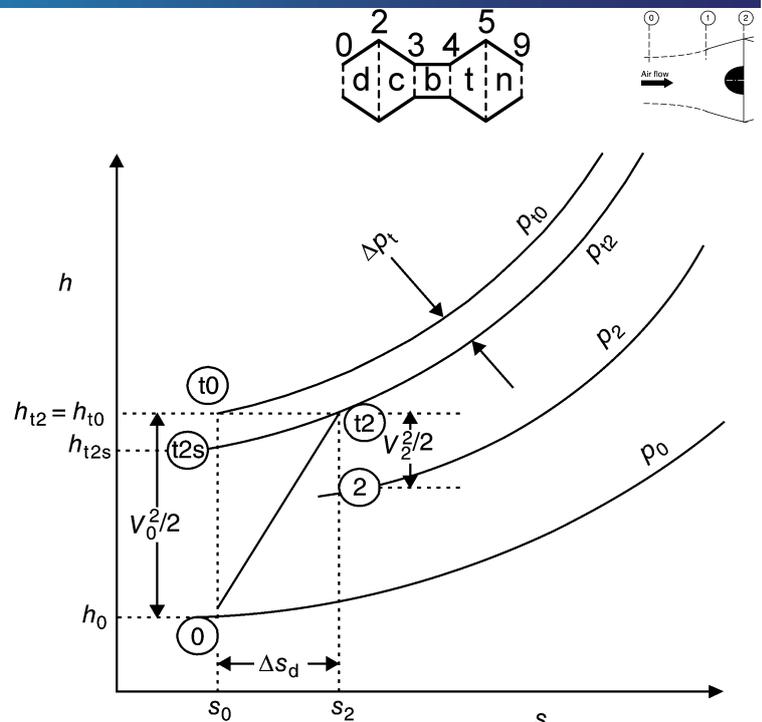
Visto  
**adiabati**  
 ristagno  
 2 rimane  
 A causa  
 presente  
 In figura  
**punti di**  
 Inoltre è  
 t2s alla  
 ma alla p  
 Come s  
 dell'ener  
**maggior**  
 è adiabata



# Presenza d'aria

Quindi se la trasformazione fosse  
**reversibile** si raggiungerebbe la  
 pressione di ristagno t2 con una  
 minore conversione di energia  
 cinetica.

La **differenza** fra l'entalpia dei  
 punti t0 e ts2 rappresenta proprio  
 l'aliquota di energia cinetica che,  
 a causa di **irreversibilità** è stata  
**convertita inutilmente** in  
**energia termica**.

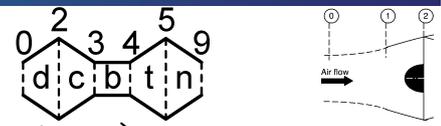


Si può quindi definire un **rendimento adiabatico** del diffusore come:

$$\eta_d = \frac{h_{t2s} - h_0}{h_{t2} - h_0}$$



## Presenza d'aria



ricordando che:  $p_{t2s} = p_{t2}$ ,  $h = c_p T$ ,  $T_t = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) = T\psi$  e per

flussi isentropici  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k$  si ha:

$$\eta_d = \frac{h_{t2s} - h_0}{h_{t2} - h_0} = \frac{\frac{h_{t2s}}{h_0} - 1}{\frac{h_{t2}}{h_0} - 1} = \frac{\frac{T_{t2s}}{T_0} - 1}{\frac{T_{t2}}{T_0} - 1} = \frac{\left(\frac{p_{t2s}}{p_0}\right)^k - 1}{\tau_r - 1} = \frac{\left(\frac{p_{t2}}{p_0}\right)^k - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_0^2}$$

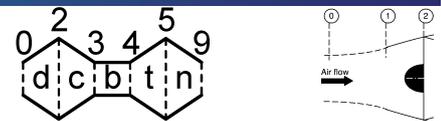
dove si  $\tau_r$  è il **rapporto di temperatura** associato all'effetto dinamico (**ram**). L'equazione precedente risolta in termini di pressione da:

$$\frac{p_{t2}}{p_0} = \left(1 + \eta_d \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{1/k}$$

che chiaramente restituisce la relazione isentropica quando il rendimento è unitario.



## Presenza d'aria



Un ulteriore parametro che descrive le prestazioni della presa d'aria è il **rapporto fra le pressioni di ristagno** a monte del compressore e quella asintotica.

$$\pi_d = \frac{p_{t2}}{p_{t0}}$$

$$\frac{p_{t2}}{p_0} = \left(1 + \eta_d \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{1/k}$$

chiaramente i due indici sono correlati:

$$\pi_d = \frac{p_{t2} p_0}{p_0 p_{t0}} = \frac{\left(1 + \eta_d \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{1/k}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} = \frac{\left(1 + \eta_d \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{1/k}}{\pi_r}$$

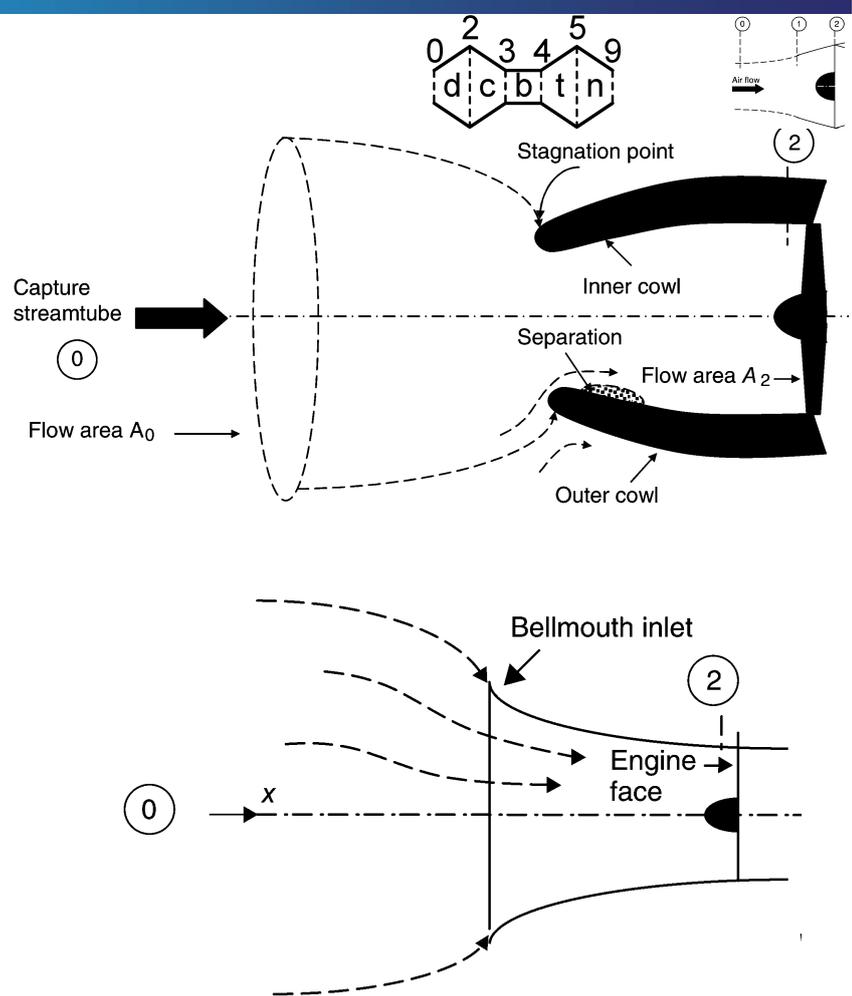
dove si  $\pi_r$  è il rapporto di pressione associato all'effetto di **pressione dinamica** (ram effect). Chiaramente al tendere del rendimento a uno anche  $\pi_d \rightarrow 1$ .



# Pres a d'aria

Evidentemente **al punto fisso** la situazione è completamente diversa.

Quando si effettuano prove del motore a terra, per evitare separazioni, conviene aggiungere un ugello convergente a monte della presa d'aria del motore.



# Pres a d'aria

## Example 4.1

An aircraft is flying at an altitude where the ambient static pressure is  $p_0 = 10$  kPa and the flight Mach number is  $M_0 = 0.85$ . The total pressure at the engine face is measured to be  $p_{t2} = 15.88$  kPa. Assuming the inlet is adiabatic and  $\gamma = 1.4$ , calculate

- (a) the inlet total pressure recovery  $\pi_d$
- (b) the inlet adiabatic efficiency  $\eta_d$
- (c) the nondimensional entropy rise caused by the inlet  $\Delta s_d/R$

## SOLUTION

We first calculate the flight total pressure  $p_{t0}$ , and from definition of  $\pi_d$  (i.e., Equation 4.6), the inlet total pressure recovery.

$$p_{t0} = p_0 [1 + (\gamma - 1)M_0^2/2]^{1/\gamma} = 10 \text{ kPa} [1 + 0.2(0.85)^2]^{3.5} = 16.04 \text{ kPa}$$

$$\pi_d \equiv p_{t2}/p_{t0} = 15.88/16.04 = 0.990$$

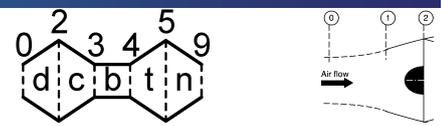
Inlet adiabatic efficiency  $\eta_d$  is calculated from Equation 4.4

$$\eta_d = \left[ \left( \frac{p_{t2}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] / \left( \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right) = [(15.88/10)^{0.2857} - 1] / [0.2(0.85)^2] \cong 0.9775$$

The entropy rise is linked to the inlet total pressure loss parameter  $\pi_d$  via Equation 4.2,

$$\Delta s_d/R = -\ln(\pi_d) = -\ln(0.99) \cong 0.010$$

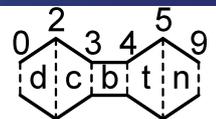




- the inlet flow may be considered to be adiabatic, that is,  $h_{t2} = h_{t0}$
- the inlet flow is always irreversible, that is,  $p_{t2} < p_{t0}$ , with viscous dissipation in the boundary layer and in a shock as the sources of irreversibility ( $s_2 > s_0$ )
- there are two figures of merit that describe the extent of *losses* in the inlet and these are  $\eta_d$  and  $\pi_d$
- the two figures of merit are related (via Equation 4.6b)
- in cruise,  $A_0 < A_2$  and hence a diffusing passage and at low speed or takeoff,  $A_0 > A_2$ , that is, a nozzle
- the outer nacelle geometry of an inlet dictates the drag divergence and high angle of attack characteristics of the inlet and is crucial for the installed performance.

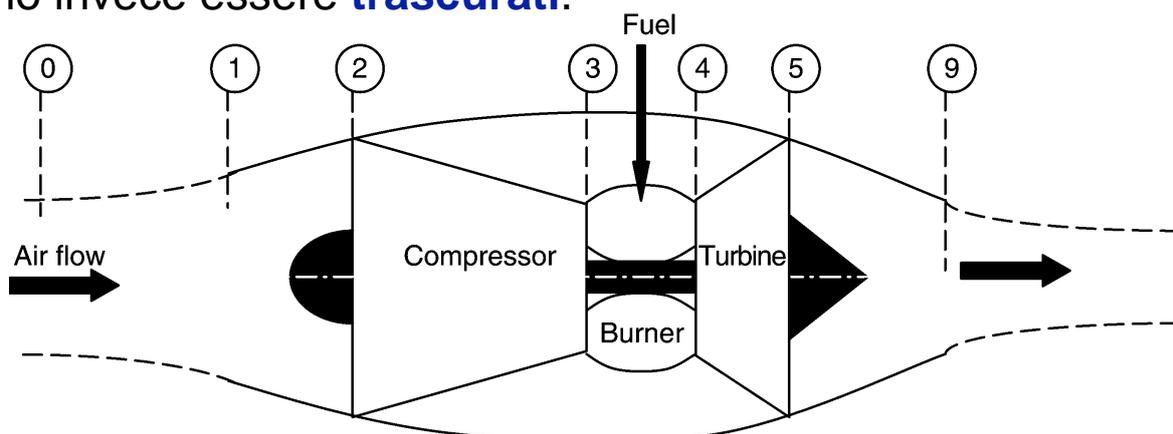


## Compressore

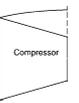
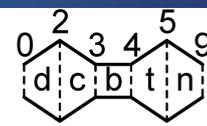


Il **compressore** è una **macchina operatrice** quindi fornisce energia nel **modo lavoro** al fluido e, chiaramente, necessita di un potenza esterna che normalmente viene fornita dalla turbina attraverso l'albero. All'avviamento il compressore deve essere alimentato da una **fonte esterna**.

Anche il funzionamento di un compressore reale è essenzialmente **adiabatico**. A causa delle elevate velocità gli **effetti dissipativi** associati agli sforzi viscosi e, eventualmente, alle onde d'urto **non** possono invece essere **trascurati**.



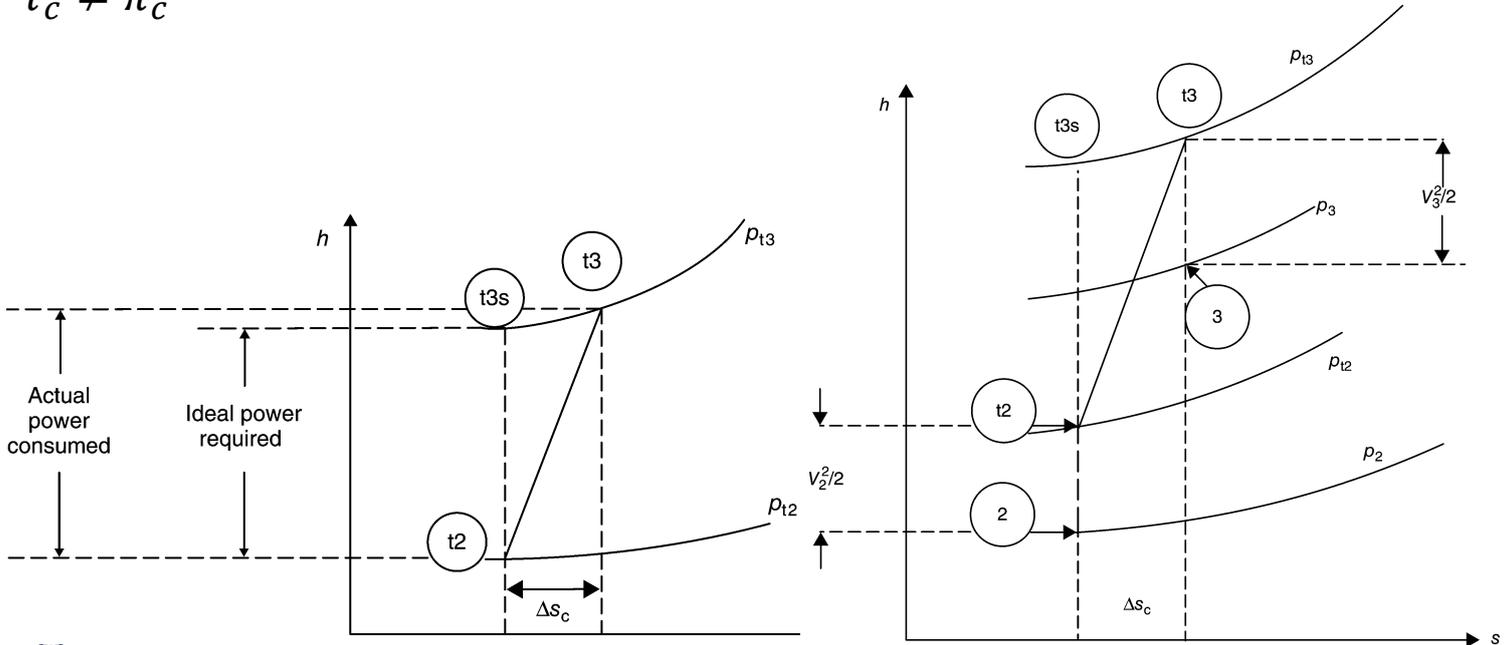
# Compressore



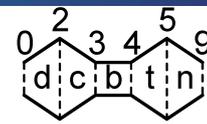
Dal punto di vista puramente termodinamico il comportamento di un **compressore** è molto **simile** al quello delle **prese d'aria**. Una differenza è che normalmente  $V_2 \cong V_3$ .

L'aumento di pressione non seguirà una isentropica, quindi:

$$\tau_c \neq \pi_c^k$$



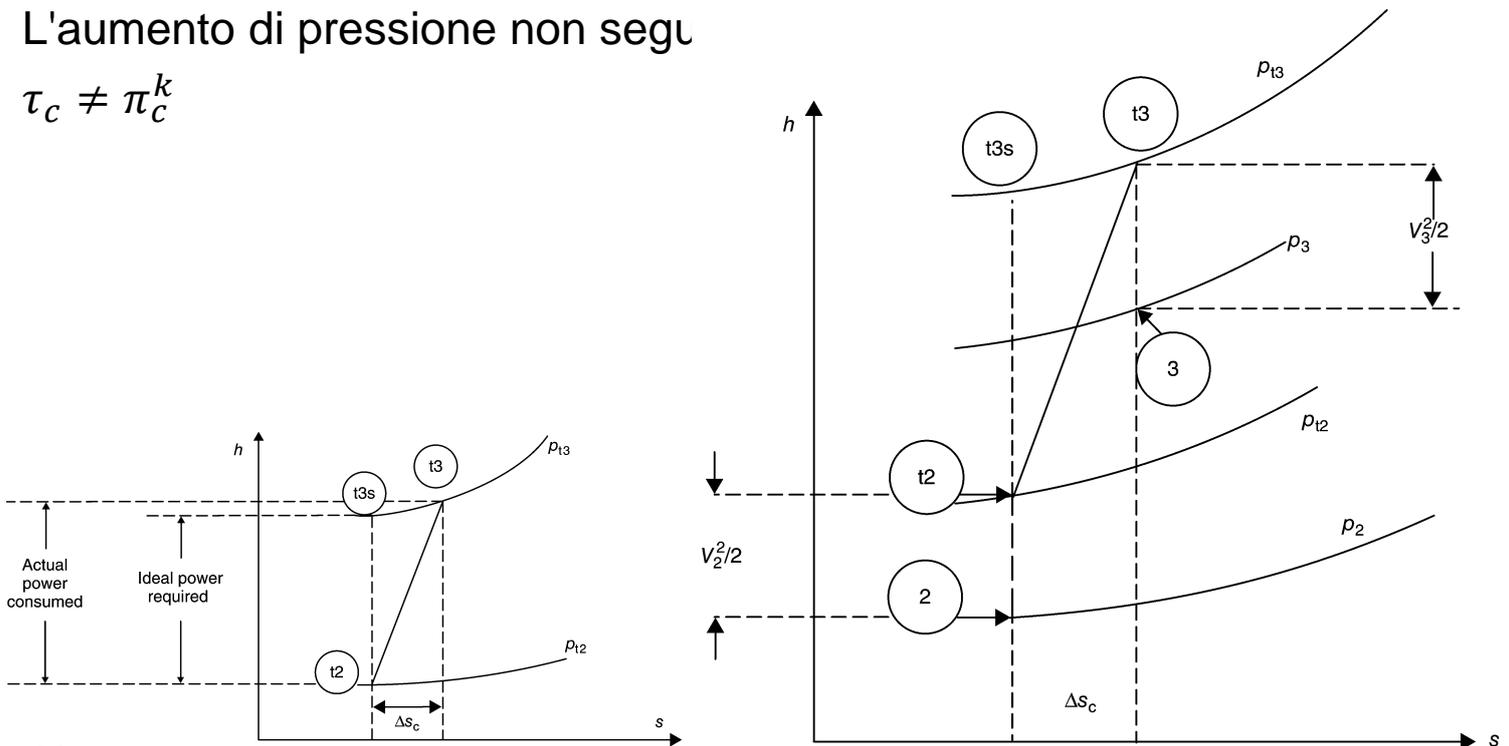
# Compressore



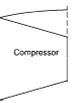
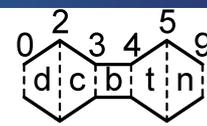
Dal punto di vista puramente termodinamico il comportamento di un **compressore** è molto **simile** al quello delle **prese d'aria**. Una differenza è che normalmente  $V_2 \cong V_3$ .

L'aumento di pressione non segu

$$\tau_c \neq \pi_c^k$$

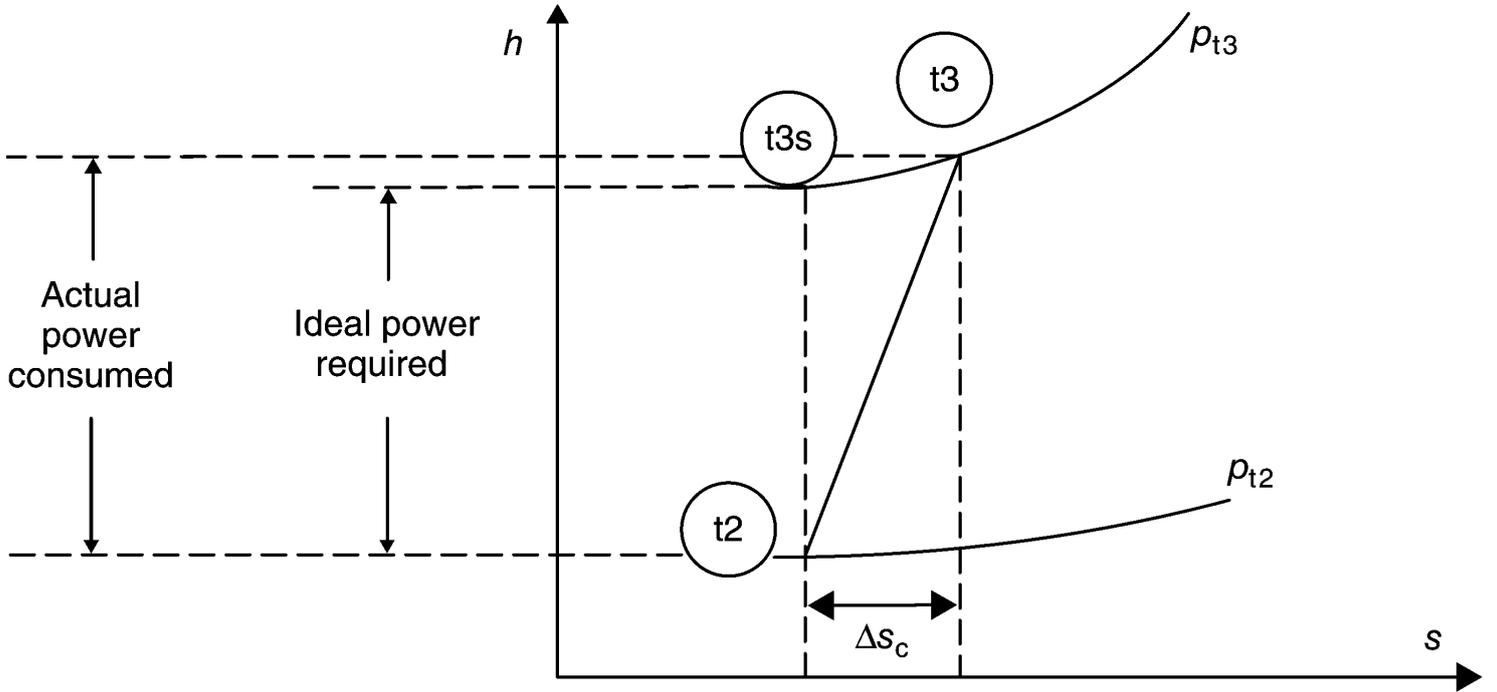


# Compressore

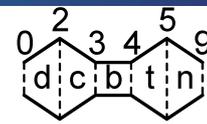


Dal punto di vista puramente termodinamico il comportamento di un **compressore** è molto **simile** al quello delle **prese d'aria**. Una differenza è che normalmente  $V_2 \cong V_3$ .

L'aumento di pressione non seguirà una isentronica quindi:



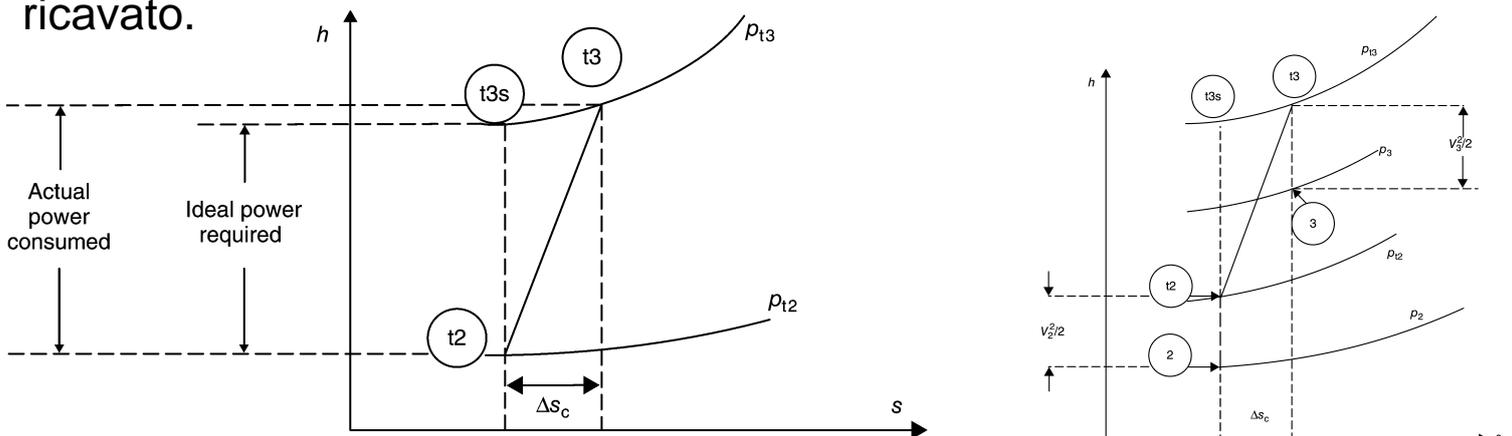
# Compressore



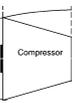
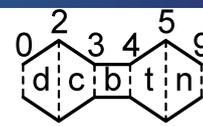
Si può quindi definire un **rendimento adiabatico** come il rapporto fra le differenze di entalpia di un processo isentropico e di quello reale, ovvero, il rapporto tra la **potenza assorbita** da un compressore **ideale** e quella necessaria per il compressore **reale**:

$$\eta_c = \frac{h_{t3s} - h_{t2}}{h_{t3} - h_{t2}} = \frac{T_{t3s}/T_{t2} - 1}{T_{t3}/T_{t2} - 1} = \frac{\left(\frac{p_{t3}}{p_{t2}}\right)^k - 1}{\tau_c - 1} = \frac{\pi_c^k - 1}{\tau_c - 1}$$

Normalmente si suppone che  $\eta_c$  e  $\pi_c$  siano noti mentre  $\tau_c$  deve essere ricavato.



# Compressore



Un secondo parametro che misura l'efficienza di un compressore è il **rendimento politropico**:

$$e_c = \frac{dh_{ts}}{dh_t}$$

Per piccoli rapporti di compressione le due definizioni di rendimento tendono a coincidere. Per una trasformazione isentropica:

$$dh_{ts} = dp_t / \rho_t$$

quindi:

~~$$e_c = \frac{1}{\rho_t c_p} \frac{dp_t}{dT_t} = \frac{RT_t}{p_t c_p} \frac{dp_t}{dT_t} = k \frac{dp_t/p_t}{dT_t/T_t} \rightarrow \frac{dp_t}{p_t} = \frac{e_c}{k} \frac{dT_t}{T_t}$$~~

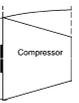
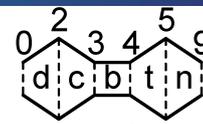
che integrata da:

$$\frac{p_{t3}}{p_{t2}} = \pi_c = \left( \frac{T_{t3}}{T_{t2}} \right)^{\frac{e_c}{k}} = \tau_c^{\frac{e_c}{k}} \rightarrow \tau_c = \pi_c^{\frac{k}{e_c}}$$



# Compressore

$$\tau_c = \pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma e_c}}$$



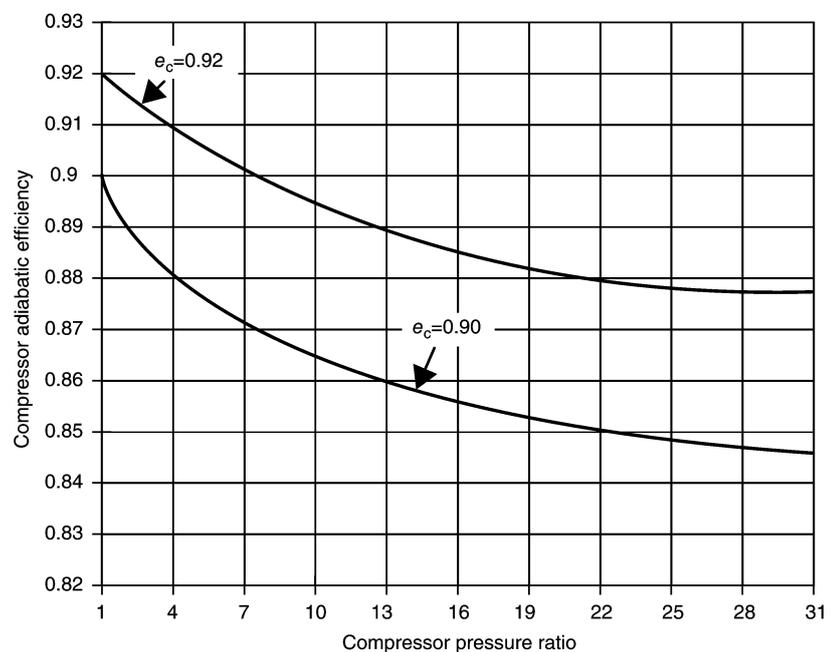
Essendo  $e_c$  minore di uno il **rapporto di temperature** è maggiore di quello isentropico a parità di rapporto di pressione imposto.

Valori tipici di  $e_c$  sono del ordine di 88-92%.

Sostituendo questa espressione nella relazione del rendimento adiabatico si ha:

$$\eta_c = \frac{\pi_c^k - 1}{\tau_c - 1} = \frac{\pi_c^k - 1}{\pi_c^{\frac{k}{e_c}} - 1}$$

Il **rendimento politropico** è **indipendente** dal **rapporto di compressione** al contrario di quello adiabatico. Per questo motivo è il parametro che ci permette una progettazione preliminare del motore.



# Compressore



A multistage axial-flow compressor has a mass flow rate of 50 kg/s and a total pressure ratio of 35. The compressor polytropic efficiency is  $e_c = 0.90$ . The inlet flow condition to the compressor is described by  $T_{12} = 288$  K and  $p_{12} = 100$  kPa. Assuming the flow in the compressor is adiabatic, and constant gas properties throughout the com-

pressor are assumed, i.e.,  $\gamma = 1.4$  and  $c_p = 1004$  J/kg · K, calculate

- compressor exit total temperature  $T_{13}$  in K
- compressor adiabatic efficiency  $\eta_c$
- compressor shaft power  $\dot{Q}_c$  in MW

## SOLUTION

Following Equation 4.20, we relate compressor total temperature and pressure ratio via polytropic efficiency,

$$\tau_c = \pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma e_c}} = (35)^{0.31746} \cong 3.0916$$

Therefore, the exit total temperature is  $T_{13} = 3.0916 T_{12} = 3.0916(288 \text{ K}) \cong 890.4$  K.

Compressor adiabatic efficiency is related to the polytropic efficiency and compressor pressure ratio, via Equation 4.13

$$\eta_c = \frac{\pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\tau_c - 1} = \frac{35^{0.2857} - 1}{3.0916 - 1} \approx 0.8422$$

Therefore, compressor adiabatic efficiency is  $\eta_c \cong 84.22\%$ .

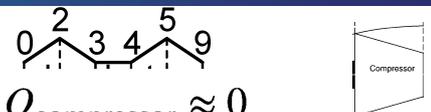
Compressor shaft power is proportional to the mass flow rate (i.e., the size of the compressor) as well as the total enthalpy rise across the compressor, according to

$$\begin{aligned} \dot{Q}_c &= \dot{m}(h_{13} - h_{12}) = \dot{m}c_p(T_{13} - T_{12}) \\ &= (50 \text{ kg/s})(1004 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(890.4 - 288) \text{ K} \\ &\approx 30.24 \text{ MW} \end{aligned}$$

Therefore the shaft power delivered to the compressor is  $\dot{Q}_c \approx 30.24$  MW



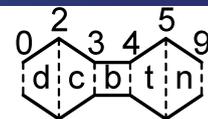
# Compressore



- a real compressor flow may be considered adiabatic, that is,  $Q_{\text{compressor}} \approx 0$
- the energy transfer to the fluid due to the shaft in a compressor is several orders of magnitude higher than any heat transfer that takes place through the casing, thus heat transfer is neglected
- viscous dissipation in the wall boundary layer and shocks account for the sources of irreversibility in a compressor
- there are two figures of merit that describe the compressor efficiency, one is the adiabatic compressor efficiency  $\eta_c$  (sometimes referred to as “isentropic” efficiency) and the second is the polytropic or small-stage efficiency  $e_c$
- the two compressor efficiencies are interrelated, that is,  $\eta_c = \eta_c(\pi_c, e_c)$
- the compressor polytropic efficiency is independent of compressor pressure ratio  $\pi_c$
- the compressor adiabatic efficiency is a function of  $\pi_c$  and decreases with increasing pressure ratio
- to achieve a high-pressure ratio in a compressor, multistage and multispool configurations are needed
- in a gas turbine engine, the compressor power is derived from a shaft that is connected to a turbine.



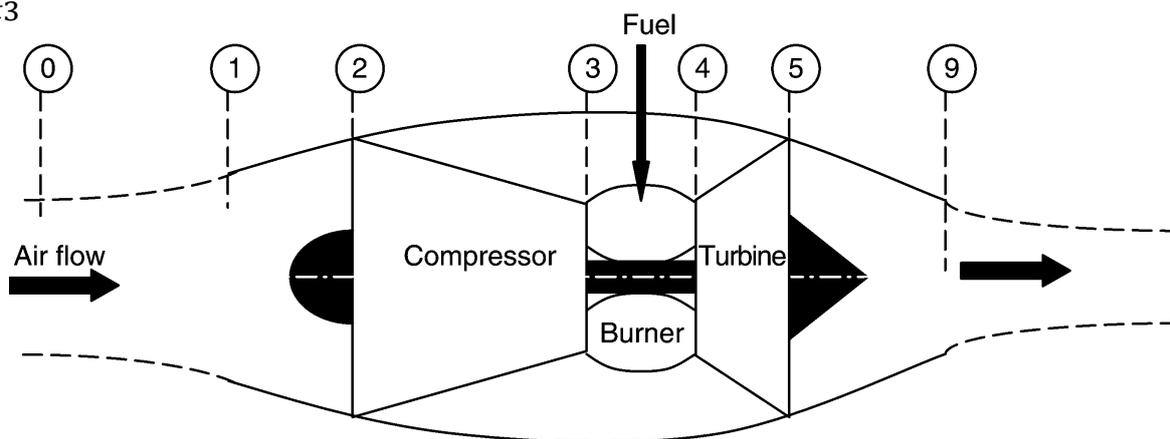
# Camera di combustione



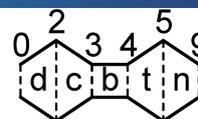
Nella **camera di combustione** (CC) l'aria proveniente dal compressore viene miscelata con il combustibile e attraverso una **reazione esotermica** si ha un aumento di temperatura ed una **variazione delle proprietà del gas** ( $\gamma$  e  $c_p$ ).

In un combustore **ideale** si suppone che gli **effetti dissipativi** siano **trascurabili** e che il numero di **Mach** sia **nulla**, in queste ipotesi il processo è isobaro:

$$\pi_b = \frac{p_{t4}}{p_{t3}} = 1$$



# Camera di combustione

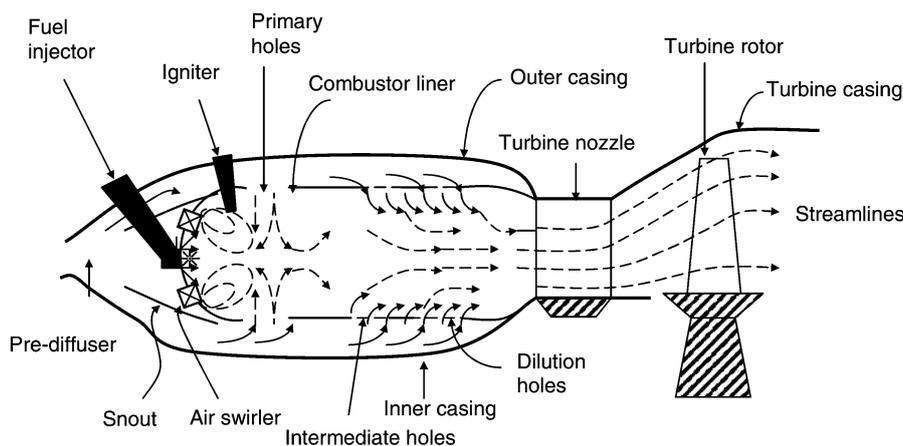


In realtà a causa degli attriti, del miscelamento turbolento e delle reazioni chimiche ad un numero di Mach basso ma diverso da zero il processo porta ad una **caduta della pressione di ristagno**.

Supponendo che la perdita di pressione sia proporzionale alla pressione dinamica si trova la seguente relazione:

$$\pi_b = \frac{p_{t4}}{p_{t3}} = \frac{p_{t3} - \epsilon \frac{1}{2} \rho V_b^2}{p_{t3}} \approx 1 - \epsilon \frac{\gamma \rho V_b^2}{2 \gamma p_{t3}} \approx 1 - \epsilon \frac{\gamma}{2} M_b^2$$

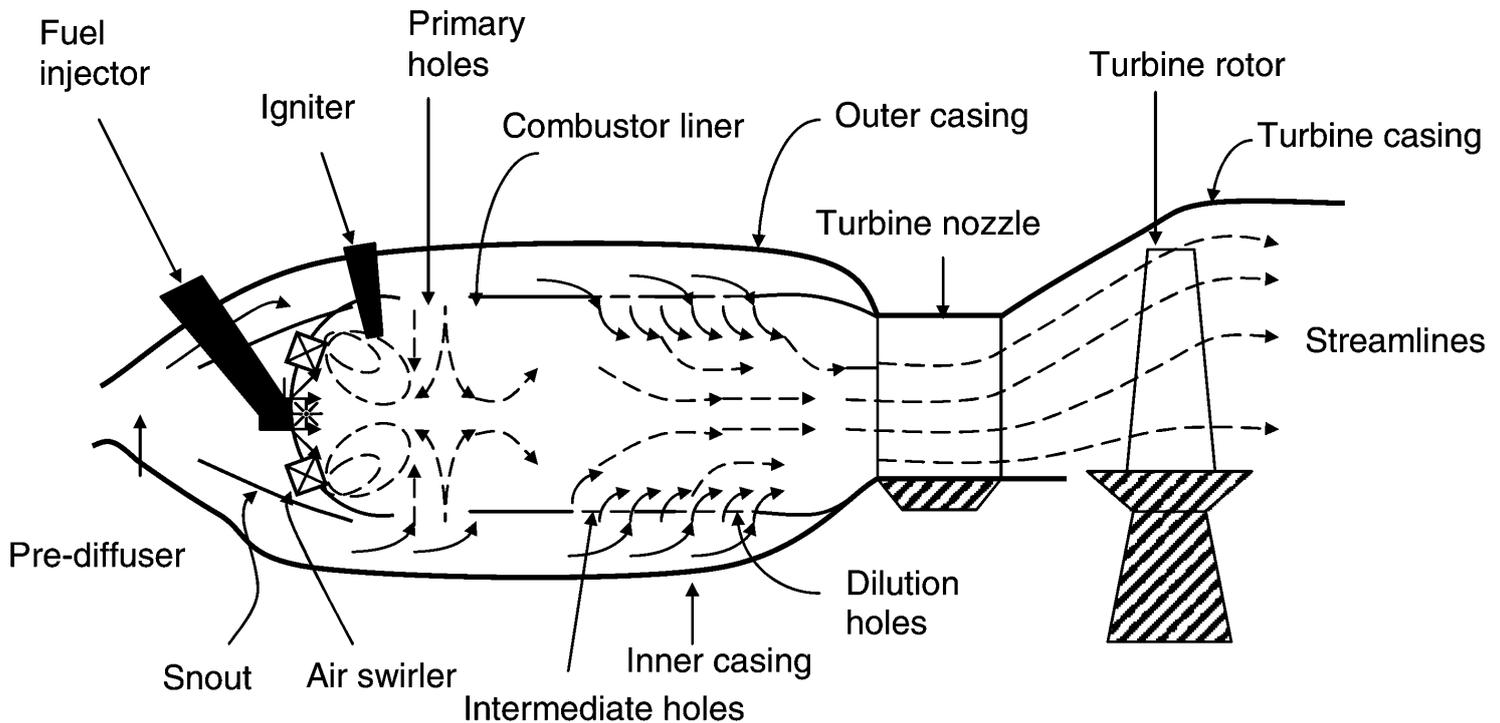
dove tipici valori della costante  $\epsilon$  sono compresi fra 1 e 2 (e.g. per  $M_b = 0.2$ ,  $\epsilon = 2$  si ha  $\pi_b \approx .95$ ).



# Camera di combustione



In figura è mostrato lo schema di un combustore.



# Camera di combustione



In questa fase si analizzerà la camera di combustione solo dal punto di vista globale come variazioni delle condizioni fra le sezioni 3 e 4.

Da un bilancio di massa:

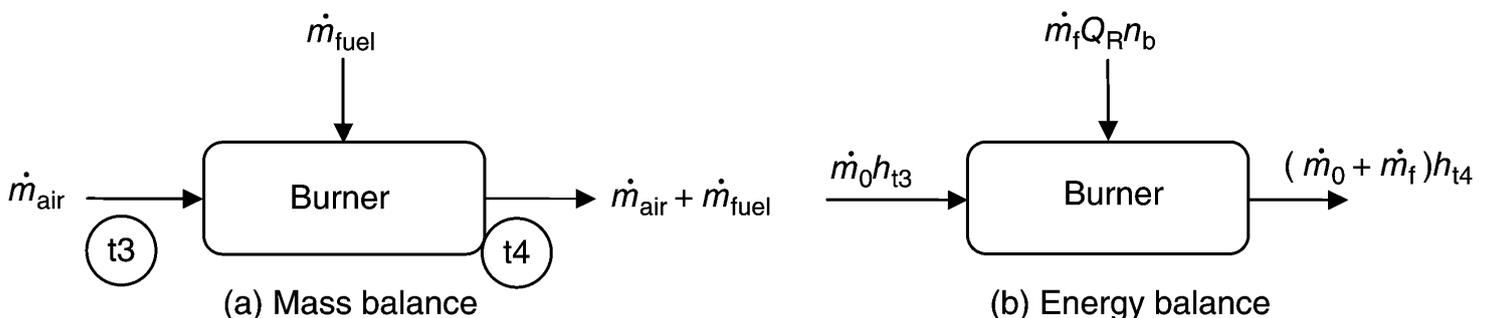
$$\dot{m}_4 = \dot{m}_0 + \dot{m}_f = (1 + f)\dot{m}_0$$

dove  $f$  è il **rapporto** fra la **portata di combustibile** e quella **d'aria**. Il bilancio di energia invece:

$$\dot{m}_0 h_{t3} + \dot{m}_f Q_R \eta_b = (\dot{m}_0 + \dot{m}_f) h_{t4} = (1 + f)\dot{m}_0 h_{t4}$$

dove  $Q_R \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$  è il **potere calorifico del combustibile (fuel heating value)** e si

è introdotto il **rendimento del combustore**:  $\eta_b = \frac{Q_{R.Actual}}{Q_{R.Ideal}}$  che normalmente è circa 98-99%.



# Camera di combustione



La temperatura limite  $T_{t4}$  è funzione della tecnologia di **raffreddamento** utilizzata e tipici valori sono del ordine di **1,750-2,000K**.

Dal **bilancio di energia** si può ricavare  $f$ :

$$h_{t3} + \dot{m}_f / \dot{m}_0 Q_R \eta_b = h_{t3} + f Q_R \eta_b = (1 + f) h_{t4} \rightarrow f = \frac{h_{t4} - h_{t3}}{Q_R \eta_b - h_{t4}}$$

Ricordando che

$$\tau_\lambda = \frac{h_{t4}}{h_0} \text{ si ha:}$$

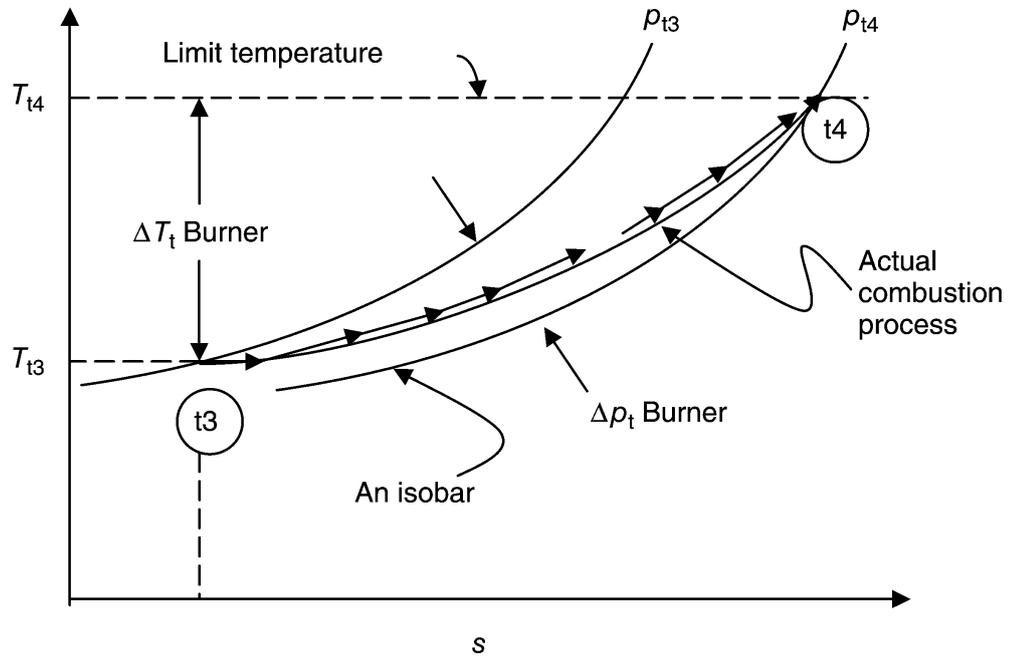
$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R \eta_b / h_0 - \tau_\lambda}$$

inoltre:

$$\tau_b = \frac{h_{t4}}{h_{t3}} = \frac{\tau_\lambda}{\tau_r \tau_c}$$

Dove:

$$\tau_c = \frac{h_{t3}}{h_{t2}} \quad \tau_r = \frac{h_{t2}}{h_0}$$



# Camera di combustione



A gas turbine combustor has inlet condition  $T_{t3} = 800 \text{ K}$ ,  $p_{t3} = 2 \text{ Mpa}$ , air mass flow rate of  $50 \text{ kg/s}$ ,  $\gamma_3 = 1.4$ ,  $c_{p3} = 1004 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

A hydrocarbon fuel with ideal heating value  $Q_R = 42,000 \text{ kJ/kg}$  is injected in the combustor at a rate of  $1 \text{ kg/s}$ . The burner efficiency is  $\eta_b = 0.995$  and the total pressure at the combustor exit is 96% of the inlet total pressure,

i.e., combustion causes a 4% loss in total pressure. The gas properties at the combustor exit are  $\gamma_4 = 1.33$  and  $c_{p4} = 1156 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Calculate

- fuel-to-air ratio  $f$
- combustor exit temperature  $T_{t4}$  in K and  $p_{t4}$  in MPa

## SOLUTION

The air and fuel flow rates are specified at 50 and 1 kg/s, respectively, in the problem, therefore,  $f = 1/50 = 0.02$  or 2%.

We calculate combustor exit temperature by energy balance,

$$\dot{m}_0 h_{t3} + \dot{m}_f Q_R \eta_b = (\dot{m}_0 + \dot{m}_f) h_{t4} = \dot{m}_0 (1 + f) h_{t4}$$

Therefore

$$h_{t3} + f Q_R \eta_b = (1 + f) h_{t4}$$

$$T_{t4} = \frac{(c_{p3}/c_{p4})T_{t3} + f Q_R \eta_b / c_{p4}}{1 + f}$$

$$= \frac{(1004/1156) 800 \text{ K} + 0.02 (42000 \text{ kJ/kg}) (0.995) / 1.156 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}}{1.02}$$

Therefore, combustor exit temperature is  $T_{t4} \cong 1390 \text{ K}$  and  $p_{t4} = 0.96(2 \text{ MPa}) = 1.92 \text{ MPa}$

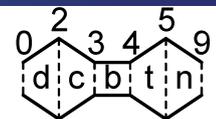




- the fuel is characterized by its heating value  $Q_R$  (maximum releasable thermal energy per unit mass)
- the burner is characterized by its efficiency  $\eta_b$ , and its total pressure ratio  $\pi_b$
- burning at finite Mach number, frictional losses on the walls and turbulent mixing are identified as the sources of irreversibility, that is, losses, in a burner
- the fuel-to-air ratio  $f$  and the burner exit temperature  $T_{t4}$  are the thrust control/engine design parameters
- the application of the energy balance across the burner yields either  $f$  or  $T_{t4}$ .

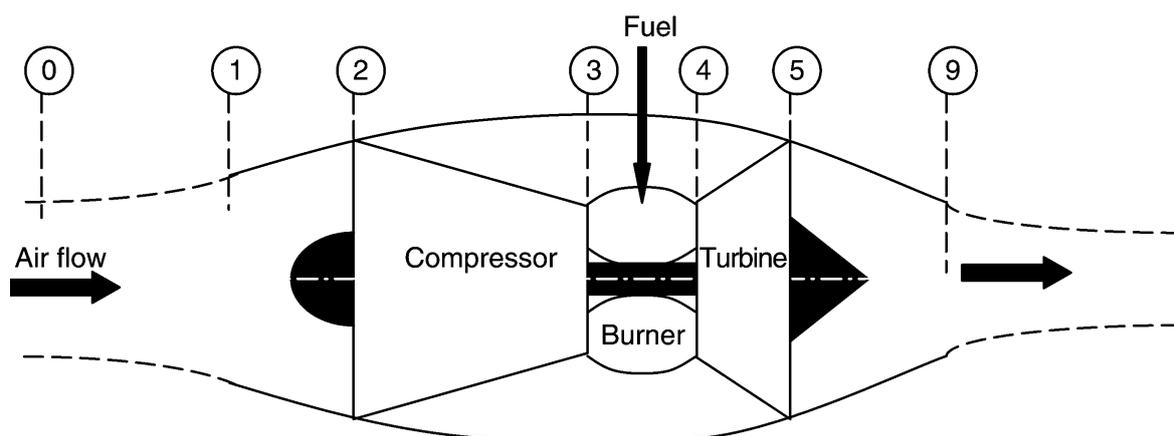


## Turbina

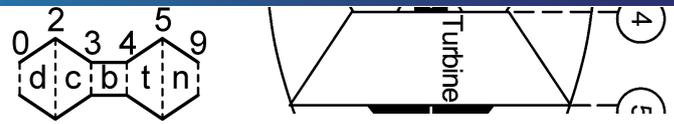


La turbina è una **macchina motrice** quindi prende energia nel modo lavoro dal fluido e la trasferisce attraverso un albero al compressore e alle altre macchine operatrici. Evidentemente all'interno di una turbina **il fluido espande** riducendo sia la **pressione** che la **temperatura**.

A causa delle **alte temperature** a valle della CC i primi stadi della turbina (HPT) devono essere **raffreddati** con aria presa dal compressore (e.g. fra il compressore di alta (HPC) e di bassa LPT); questo effetto normalmente si trascura nell'analisi preliminare.

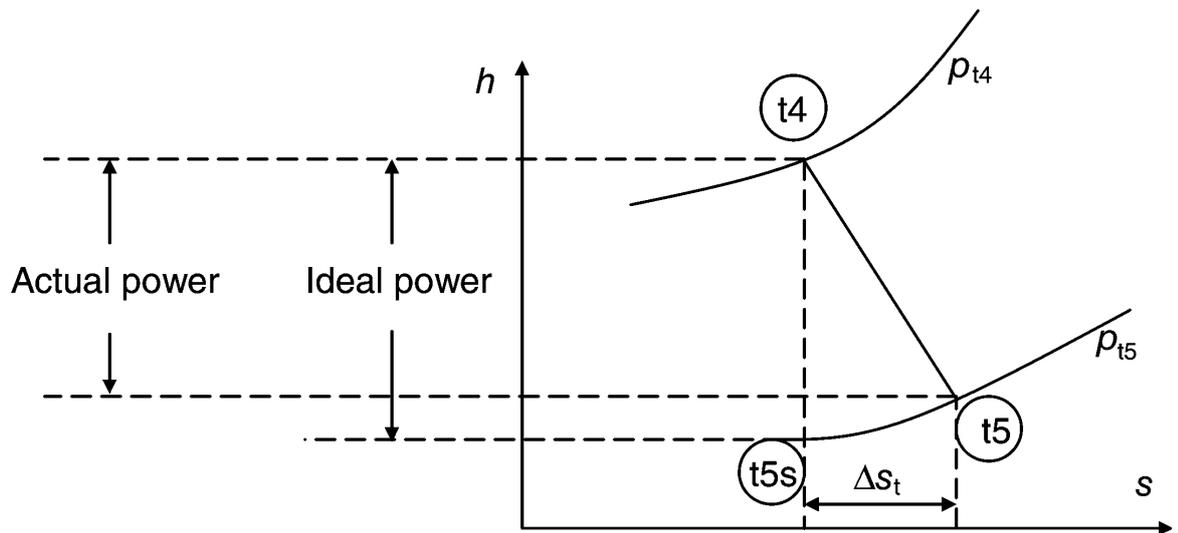


# Turbina

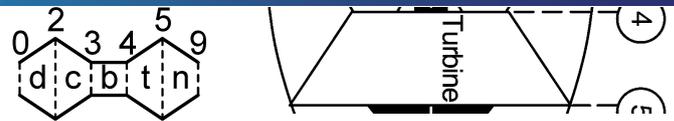


Anche nel flusso attraverso una turbina esistono degli effetti dissipativi. Quindi il processo **non è isentropico** ed in analogia con i compressori si possono definire sia un rendimento adiabatico che politropico:

$$\eta_t = \frac{h_{t4} - h_{t5}}{h_{t4} - h_{t5s}} = \frac{1 - T_{t5}/T_{t4}}{1 - T_{t5s}/T_{t4}} = \frac{1 - \tau_t}{1 - \left(\frac{p_{t5}}{p_{t4}}\right)^{k_t}} = \frac{1 - \tau_t}{1 - \pi_t^{k_t}} \quad k_t = \frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}$$



# Turbina

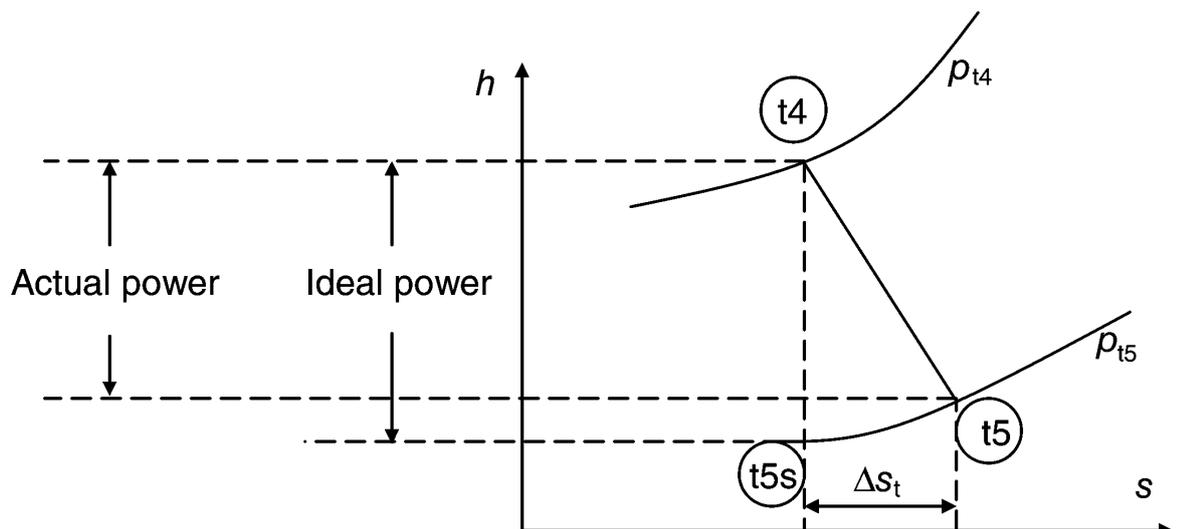


Come già fatto per i compressori dal **rendimento politropico**:

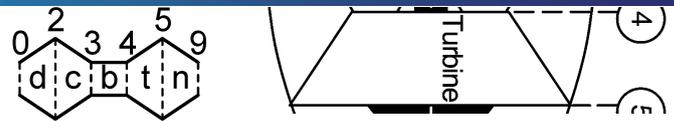
$$e_t = \frac{dh_t}{dh_{ts}} \rightarrow \tau_t = \pi_t^{k_t e_t} \rightarrow \pi_t = \tau_t^{\frac{1}{k_t e_t}}$$

Sostituendo quest'ultima equazione nell'espressione del **rendimento adiabatico**:

$$\eta_t = \frac{1 - \tau_t}{1 - \tau_t^{\frac{1}{e_t}}}$$



# Turbina



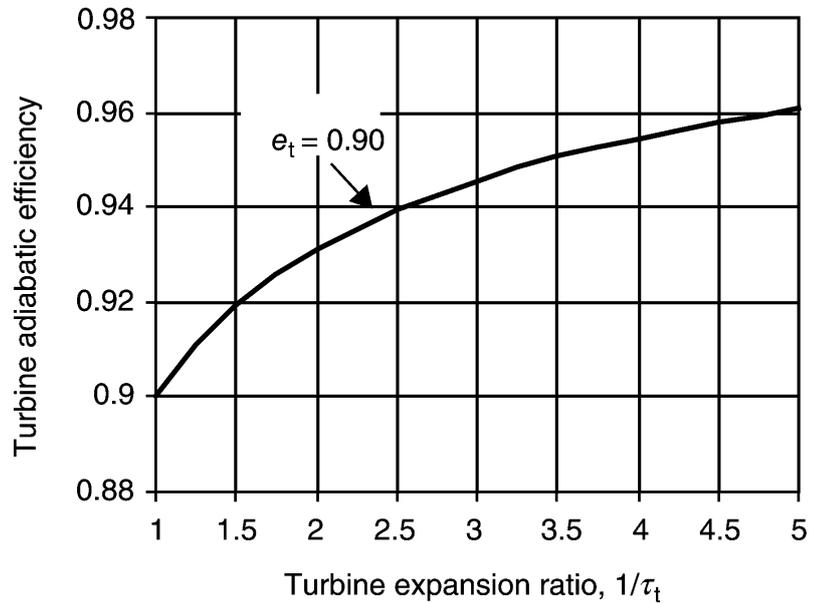
Come già fatto per i compressori dal **rendimento politropico**:

$$e_t = \frac{dh_t}{dh_{ts}} \rightarrow \tau_t = \pi_t^{k_t e_t} \rightarrow \pi_t = \tau_t^{\frac{1}{k_t e_t}}$$

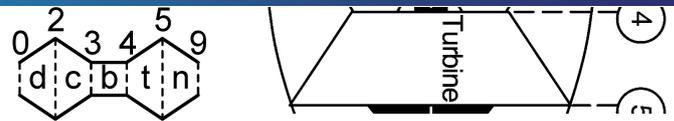
Sostituendo quest'ultima equazione nell'espressione del **rendimento adiabatico**:

$$\eta_t = \frac{1 - \tau_t}{1 - \tau_t^{\frac{1}{e_t}}}$$

Il comportamento per una **turbina** è **opposto** a quello del **compressore**.



# Turbina



Il rapporto delle temperature si ricava da un **bilancio delle potenze** necessarie per il **compressore** e per le **altre utenze** (potenza elettrica e potenze dissipate nei cuscinetti). Nell'ipotesi **ideale** che la potenza generata dalla turbina sia assorbita solo dal compressore:

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_c \rightarrow \dot{m}_0(1+f)(h_{t4} - h_{t5}) = \dot{m}_0(h_{t3} - h_{t2})$$

Ovvero in forma adimensionale:

~~$$(1+f)(h_{t4} - h_{t5})/h_0 = (h_{t3} - h_{t2})/h_0$$~~

~~$$(1+f)(1 - \tau_t)\tau_\lambda = (\tau_c - 1)\tau_r$$~~

Quindi:

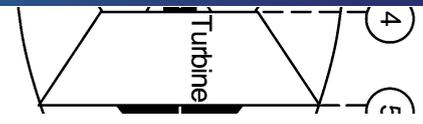
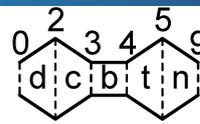
$$\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{(1+f)\tau_\lambda}$$

Dove:

$$\tau_t = \frac{T_{t5}}{T_{t4}} = \frac{h_{t5}}{h_{t4}} \quad \tau_c = \frac{h_{t3}}{h_{t2}} = \frac{T_{t3}}{T_{t2}} \quad \tau_r = \frac{h_{t2}}{h_0} = \frac{T_{t2}}{T_0} \quad \tau_\lambda = \frac{h_{t4}}{h_0}$$



# Turbina



Normalmente le potenze aggiuntive:

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_t - \Delta\mathcal{P}_b - \Delta\mathcal{P}_e$$

vengono trattate come **aliquota** della potenza del **compressore**:

$$\mathcal{P}_c = \eta_m \mathcal{P}_t$$

Dove è stato introdotto il **rendimento meccanico** che dovrebbe essere assegnato a priori. La formula precedente diventa:

$$\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\eta_m(1 + f)\tau_\lambda}$$



# Turbina

Consider an uncooled gas turbine with its inlet condition the same as the exit condition of the combustor described in Example 4.3. The turbine adiabatic efficiency is 88%. The turbine produces a shaft power to drive the compressor and other accessories at  $\mathcal{P}_t = 45$  MW. Assuming that the gas properties in the turbine are the same as the burner exit in Example 4.3, calculate

- (a) turbine exit total temperature  $T_{t5}$  in K
- (b) turbine polytropic efficiency,  $e_t$
- (c) turbine exit total pressure  $p_{t5}$  in kPa
- (d) turbine shaft power  $\mathcal{P}_t$  based on turbine expansion  $\Delta T_t$

## SOLUTION

The turbine shaft power is proportional to the mass flow rate through the turbine, which from Example 4.3 is 51 kg/s (50 for air and 1 for fuel flow rate), as well the total enthalpy drop, i.e.,

$$\mathcal{P}_t = \dot{m}_t(h_{t4} - h_{t5})$$

Therefore, we isolate  $h_{t5}$  from above equation to get

$$\begin{aligned} h_{t5} &= h_{t4} - \mathcal{P}_t/\dot{m}_t = c_{p4}T_{t4} - 45 \times 10^6/51 \\ &= 1.156 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} (1390 \text{ K}) \\ &\quad - 45,000 \text{ kW}/51 \text{ kg/s} \approx 724.5 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{t5} &= h_{t5}/c_{p5} \\ &= (724.5 \text{ kJ/kg})/(1.156 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}) \approx 626.7 \text{ K} \end{aligned}$$

Turbine polytropic efficiency  $e_t$  may be related to its adiabatic efficiency and  $\tau_t$  via equation

$$\eta_t = \frac{1 - \tau_t}{1 - \tau_t^{1/e_t}}$$

The turbine expansion parameter  $\tau_t = 626.7/1390 = 0.4509$ ; and if we isolate  $e_t$  from above equation we get

$$\begin{aligned} e_t &= \ln(\tau_t)/\ln[1 - (1 - \tau_t)/\eta_t] \\ &= \ln(0.4509)/\ln[1 - 0.5491/0.88] \approx 0.8144 \end{aligned}$$

We know that turbine pressure and temperature ratios are related by the polytropic efficiency via

$$\pi_t = \tau_t^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)e_t}} = (0.4509)^{\frac{1.33}{0.33(0.8144)}} \approx 0.01941$$

The turbine exit total pressure is therefore  $p_{t4} \cdot \pi_t$ . We had found  $p_{t4} = 1.92$  MPa in Example 4.3, therefore,

$$p_{t5} = 0.01941(1.92 \text{ MPa}) = 37.26 \text{ kPa}$$

The turbine shaft power is the product of the turbine mass flow rate and the total enthalpy drop across the turbine, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t &= \dot{m}_t c_{pt}(T_{t4} - T_{t5}) \\ &= 51 \text{ kg/s} (1156 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(1390 - 626.7) \text{ K} \approx 45 \text{ MW} \end{aligned}$$



# Turbina

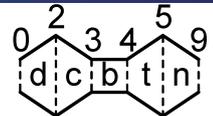


- the flow expansion in the turbine produces the needed shaft power for the compressor and other propulsion system or aircraft needs, for example, an electric generator
- there are two figures of merit in a turbine, which measure the extent of irreversibility in a turbine,  $\eta_t$  and  $e_t$  and they are related
- the gas expansion in an uncooled turbine is treated as adiabatic
- the frictional losses on the blades and the casing as well as any shock losses, in relative supersonic passages, are the sources of irreversibility in an uncooled turbine
- turbulent mixing losses between the coolant and the hot gas is an added source of irreversibility in a cooled turbine
- the turbine entry temperature  $T_{t4}$  is a design parameter that sets the stage for the turbine material and cooling requirements
- the power balance between the turbine, the compressor, and other known power drainage, establishes the turbine expansion ratio  $\tau_t$
- cooling of the high-pressure turbine is achieved through compressor air bleed that is injected through the blade root in the rotor and the casing for the turbine nozzle
- the turbine nozzle is choked (i.e., the throat Mach number is 1), over a wide operating range of the engine, and as such is the first *throttle station* of the engine.

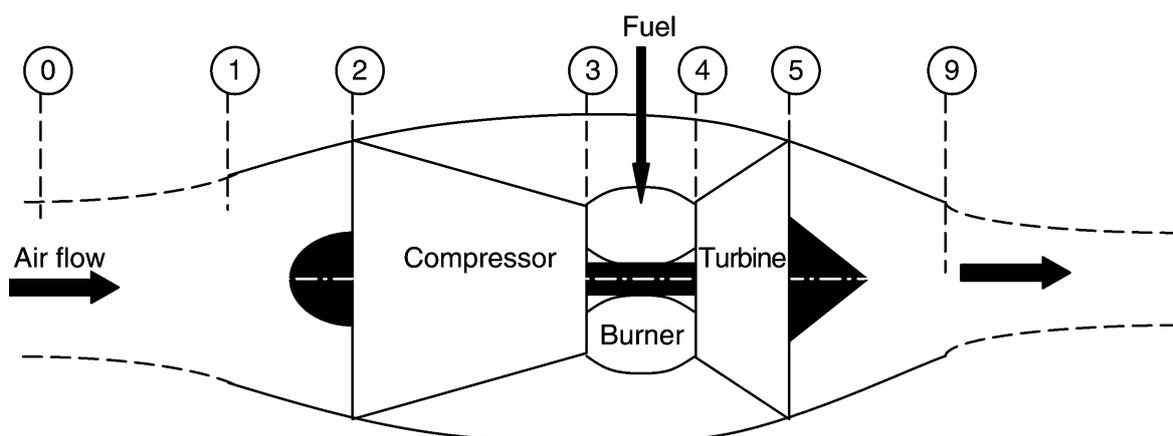


39

# Ugello

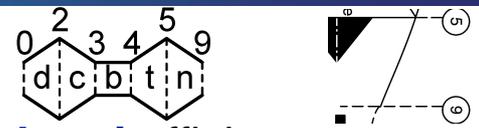


La funzione dell'ugello è di **accelerare** i **gas combusti** efficientemente. L'espansione dei gas nel ugello provoca un **gradiente di pressione favorevole**, quindi lo strato limite è sottile e stabile.



40

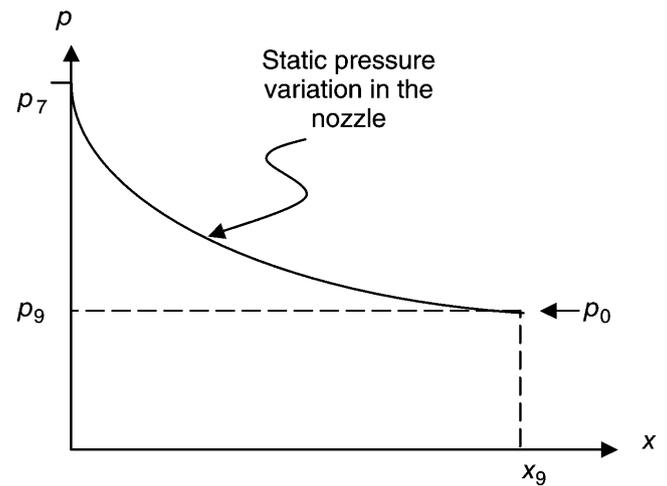
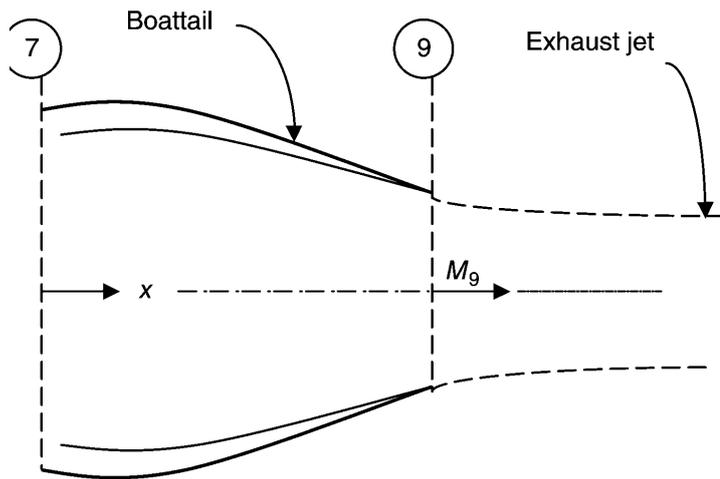
# Ugello



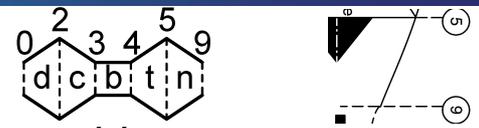
La funzione dell'ugello è di **accelerare** i **gas combusti** efficientemente. L'espansione dei gas nel ugello provoca un **gradiente di pressione favorevole**, quindi lo strato limite è sottile e stabile.

Evidentemente anche la **forma esterna** (Boattail) è importante per ridurre le perdite all'esterno.

Le curve di funzionamento di un ugello convergente **dovrebbero essere note**, di seguito si farà un brevissima ripetizione.



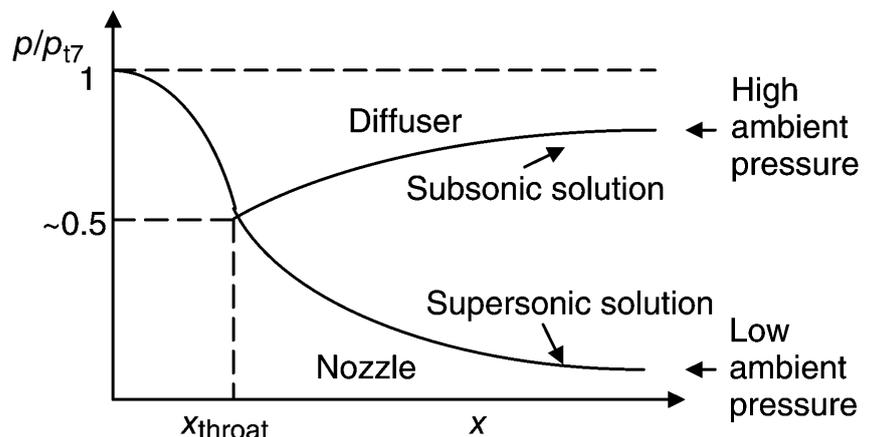
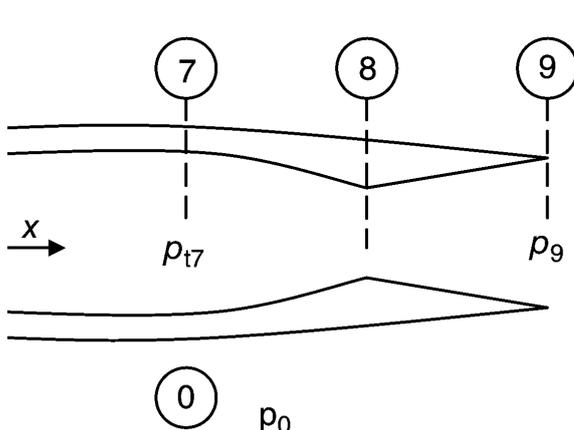
# Ugello



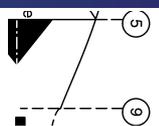
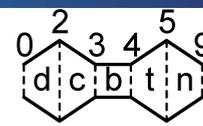
Nel caso di ugelli convergenti divergenti potrebbe non essere soddisfatta la condizione di **Kutta**.

La simbologia è leggermente diversa. Si definisce il rapporto di pressione nell'ugello (**Nozzle Pressure Ratio**):

$$NPR = \frac{p_{t7}}{p_0}$$



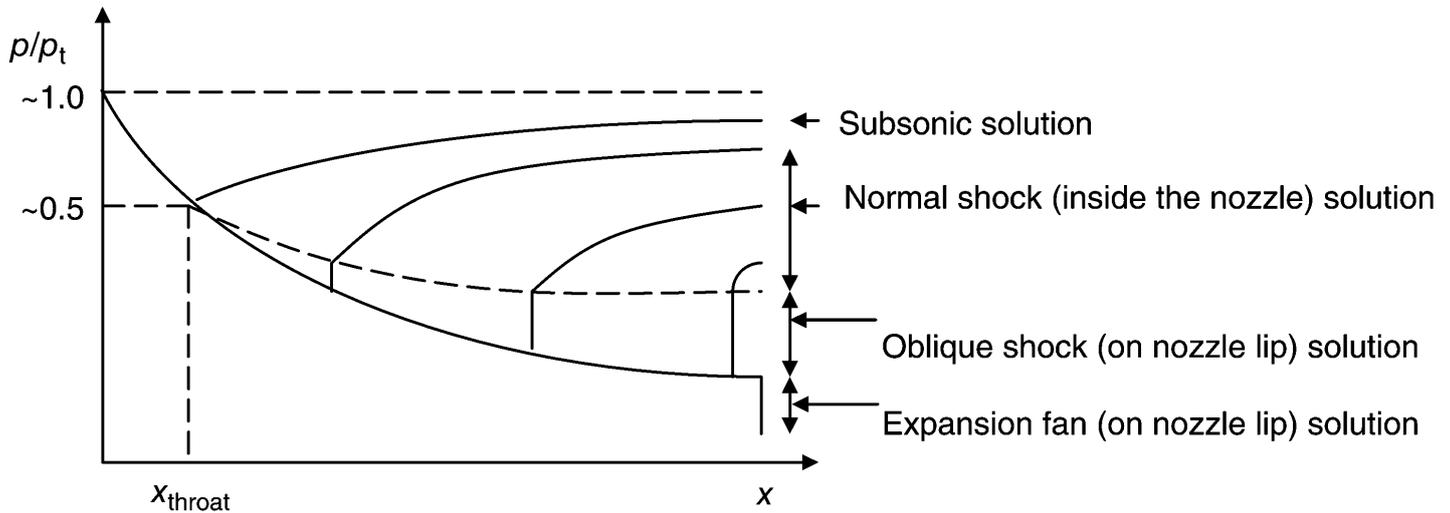
# Ugello



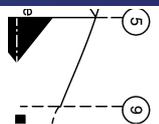
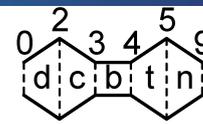
Nel caso di ugelli convergenti divergenti potrebbe non essere soddisfatta la condizione di **Kutta**.

La simbologia è leggermente diversa. Si definisce il rapporto di pressione nell'ugello (**Nozzle Pressure Ratio**):

$$NPR = \frac{p_{t7}}{p_0}$$



# Ugello



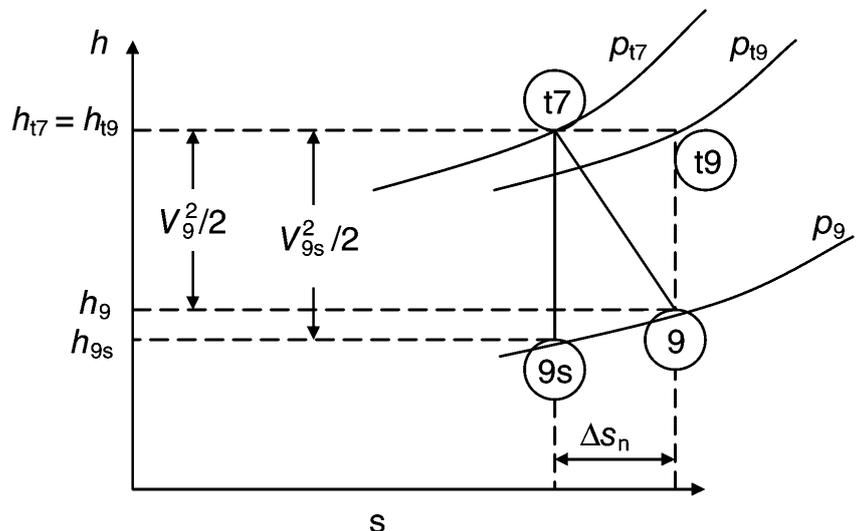
Anche per l'ugello si può definire un **rendimento adiabatico**:

~~$$\eta_n = \frac{h_{t7} - h_9}{h_{t7} - h_{9s}} = \frac{V_9^2/2}{V_{9s}^2/2} = \frac{1 - \frac{h_9}{h_{t7}}}{1 - \frac{h_{9s}}{h_{t7}}} = \frac{1 - \left(\frac{p_9}{p_{t7}}\right)^{k_9}}{1 - \left(\frac{p_9}{p_{t9}}\right)^{k_9}}$$~~

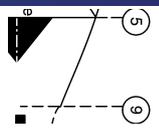
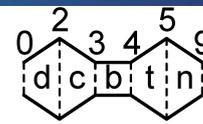
~~Dove si è utilizzata la costanza delle entalpie  $h_{t7} = h_{t9}$ .~~

~~Moltiplicando numeratore e denominatore per:~~

~~$$\left(\frac{p_{t7}}{p_9}\right)^{k_9}$$~~



# Ugello



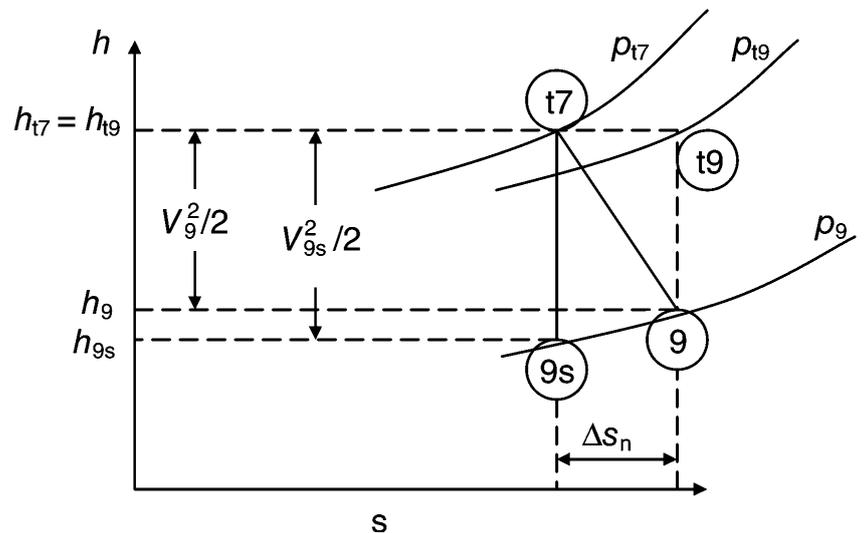
$$\eta_n = \frac{1 - \left(\frac{p_9}{p_{t9}}\right)^{k_9}}{1 - \left(\frac{p_9}{p_{t7}}\right)^{k_9}} = \frac{\left(\frac{p_{t7}}{p_9}\right)^{k_9} - \pi_n^{-k_9}}{\left(\frac{p_{t7}}{p_9}\right)^{k_9} - 1}$$

Con il rapporto fra le pressioni totali nell'ugello dato da:

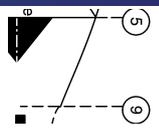
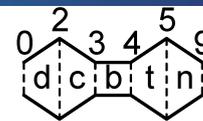
$$\pi_n = \frac{p_{t9}}{p_{t7}}$$

Il rendimento si può anche esprimere attraverso NPR:

$$\frac{p_{t7}}{p_9} = \frac{p_{t7} p_0}{p_0 p_9} = NPR \frac{p_0}{p_9}$$



# Ugello



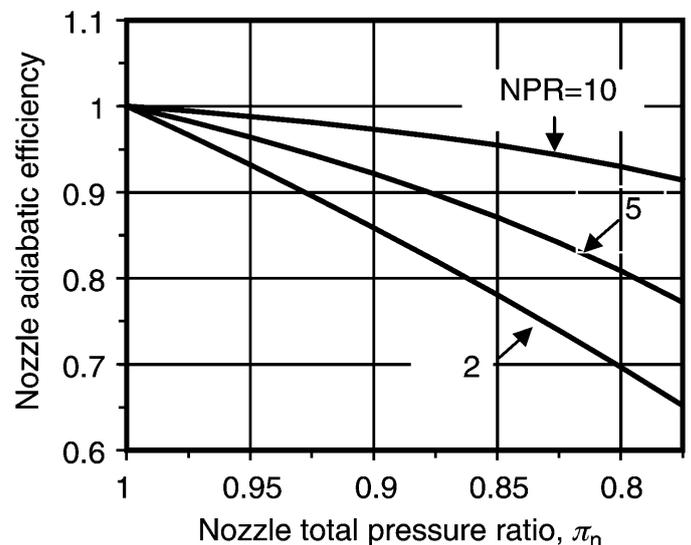
$$\eta_n = \frac{\left(\frac{p_{t7}}{p_9}\right)^{k_9} - \pi_n^{-k_9}}{\left(\frac{p_{t7}}{p_9}\right)^{k_9} - 1} = \frac{\left(NPR \frac{p_0}{p_9}\right)^{k_9} - \pi_n^{-k_9}}{\left(NPR \frac{p_0}{p_9}\right)^{k_9} - 1}$$

$$\frac{p_{t7}}{p_9} = \frac{p_{t7} p_0}{p_0 p_9} = NPR \frac{p_0}{p_9}$$

$$\pi_n = \frac{p_{t9}}{p_{t7}}$$

Dove il rapporto  $p_0/p_9$  è unitario per **espansione corretta**. In queste condizioni il rendimento adiabatico è diagrammato nella figura.

Nel caso di ugello isentropico chiaramente  $\pi_n$  è unitario.





Consider a convergent–divergent nozzle with a pressure ratio  $NPR = 10$ . The gas properties are  $\gamma = 1.33$  and  $c_p = 1,156 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  and remain constant in the nozzle. The nozzle adiabatic efficiency is  $\eta_n = 0.94$ . Calculate

- (a) nozzle total pressure ratio  $\pi_n$
- (b) nozzle area ratio  $A_9/A_8$  for a perfectly expanded nozzle
- (c) nozzle exit Mach number  $M_9$  (perfectly expanded)

## SOLUTION

We may use Equation 4.64 that relates the figures of merit of a nozzle ( $\eta_n$  and  $\pi_n$ ) with  $NPR$ ,

$$\eta_n = \frac{\left\{ NPR \left( \frac{p_0}{p_9} \right) \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \pi_n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\left\{ NPR \left( \frac{p_0}{p_9} \right) \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

For a perfectly expanded nozzle,  $p_0 = p_9$ , therefore, we get the following expression for  $\pi_n$

$$\pi_n = \left[ NPR^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \eta_n \left( NPR^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cong 0.8335$$

The entropy rise in an adiabatic nozzle is a function of the total pressure ratio  $\pi_n$ , according to (Equation 4.59)

$$\Delta s_n/R = -\ell n \pi_n \cong -\ell n(0.8335) \approx 0.1822$$

We can calculate the local Mach number  $M_9$  if we know the total and static pressures  $p_{t9}$  and  $p_9$  simultaneously. From the NPR and the total pressure ratio, we may write

$$p_{t9}/p_9 = (p_{t9}/p_{t7})(p_{t7}/p_0)(p_0/p_9) = 0.8335(10)(1) = 8.335$$

From the general expression for total pressure and Mach number

$$p_t/p = (1 + (\gamma - 1)M^2/2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

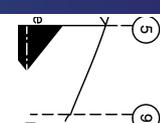
We can isolate Mach number as follows

$$M_9 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[ (p_{t9}/p_9)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2}{0.33} \left[ (8.335)^{0.3/1.33} - 1 \right]} \cong 2.05$$

Using continuity, we calculate  $A_9/A_8 \sim 1.8242$



# Ugello



- the primary function of a nozzle is to accelerate the gas efficiently
- the gross thrust parameter  $F_g$  signifies nozzle's contribution to the thrust production
- the gross thrust reaches a maximum when the nozzle is perfectly expanded; that is,  $p_9 = p_0$
- real nozzle flows may still be considered as adiabatic
- a nozzle pressure ratio (NPR) that causes a Mach-1 flow at the throat (i.e., choking condition) is called the *critical nozzle pressure ratio*, and as a rule of thumb, we may remember an  $(NPR)_{crit}$  of  $\sim 2$
- there are two efficiency parameters that quantify losses or the degree of irreversibility in a nozzle and they are related
- nozzle losses manifest themselves as the total pressure loss
- all subsonic exhaust streams have  $p_{jet} = p_{ambient}$
- a perfect nozzle expansion means that the nozzle exit (static) pressure and the ambient pressure are equal
- an imperfect nozzle expansion is caused by a mismatch between the nozzle area ratio and the altitude of operation
- underexpansion is caused by smaller-than-necessary nozzle area ratio, leading to  $p_9 > p_0$
- overexpansion is caused by larger-than-necessary nozzle area ratio, leading to  $p_9 < p_0$ .



# Ricapitolando

In figura sono mostrati i valori tipici delle grandezze caratteristiche in ventenni successivi (1945-65, 1965-85, 1985-05, 2005-2025).

Component	Figure of merit	Type <sup>a</sup>	Level of technology <sup>b</sup>			
			1	2	3	4
Diffuser	$\pi_{d\max}$	A	0.90	0.95	0.98	0.995
		B	0.88	0.93	0.96	0.98
		C	0.85	0.90	0.94	0.96
Compressor	$e_c$		0.80	0.84	0.88	0.90
Fan	$e_f$		0.78	0.82	0.86	0.89
Burner	$\pi_b$		0.90	0.92	0.94	0.95
	$\eta_b$		0.88	0.94	0.99	0.999
Turbine	$e_t$	Uncooled	0.80	0.85	0.89	0.90
		Cooled		0.83	0.87	0.89
Afterburner	$\pi_{AB}$		0.90	0.92	0.94	0.95
	$\eta_{AB}$		0.85	0.91	0.96	0.99
Nozzle	$\pi_n$	D	0.95	0.97	0.98	0.995
		E	0.93	0.96	0.97	0.98
		F	0.90	0.93	0.95	0.97
Mechanical shaft	$\eta_m$	Shaft only	0.95	0.97	0.99	0.995
		With power takeoff	0.90	0.92	0.95	0.97
Maximum $T_{t4}$		(K)	1110	1390	1780	2000
		(R)	2000	2500	3200	3600
Maximum $T_{t7}$		(K)	1390	1670	2000	2220
		(R)	2500	3000	3600	4000

<sup>a</sup>A = subsonic aircraft with engines in nacelles    D = fixed-area convergent nozzle  
<sup>b</sup>B = subsonic aircraft with engine(s) in airframe    E = variable-area convergent nozzle  
<sup>c</sup>C = supersonic aircraft with engine(s) in airframe    F = variable-area convergent-divergent nozzle  
<sup>d</sup>Notes: Stealth may reduce  $\pi_{d\max}$ ,  $\pi_{AB}$ , and  $\pi_n$ . The levels of technology can be thought of as representing the technical capability for 20-yr increments in time beginning in 1945. Thus level 3 of technology presents typical component design values for the time period 1985–2005.



# Ricapitolando

Component	Figure of merit	Type <sup>a</sup>	Level of technology <sup>b</sup>			
			45-65 1	65-85 2	85-05 3	05-25 4
Diffuser	$\pi_{d\max}$	A	0.90	0.95	0.98	0.995
		B	0.88	0.93	0.96	0.98
		C	0.85	0.90	0.94	0.96
Compressor	$e_c$		0.80	0.84	0.88	0.90
Fan	$e_f$		0.78	0.82	0.86	0.89
Burner	$\pi_b$		0.90	0.92	0.94	0.95
	$\eta_b$		0.88	0.94	0.99	0.999
Turbine	$e_t$	Uncooled	0.80	0.85	0.89	0.90
		Cooled		0.83	0.87	0.89
Afterburner	$\pi_{AB}$		0.90	0.92	0.94	0.95
	$\eta_{AB}$		0.85	0.91	0.96	0.99
Nozzle	$\pi_n$	D	0.95	0.97	0.98	0.995
		E	0.93	0.96	0.97	0.98
		F	0.90	0.93	0.95	0.97



# Ricapitolando

			45-65	65-85	85-05	05-25
Afterburner	$\pi_{AB}$		0.90	0.92	0.94	0.95
	$\eta_{AB}$		0.85	0.91	0.96	0.99
Nozzle		D	0.95	0.97	0.98	0.995
		E	0.93	0.96	0.97	0.98
		F	0.90	0.93	0.95	0.97
Mechanical shaft	$\eta_m$	Shaft only	0.95	0.97	0.99	0.995
		With power takeoff	0.90	0.92	0.95	0.97
Maximum $T_{t4}$		(K)	1110	1390	1780	2000
		(R)	2000	2500	3200	3600
Maximum $T_{t7}$		(K)	1390	1670	2000	2220
		(R)	2500	3000	3600	4000

<sup>a</sup>A = subsonic aircraft with engines in nacelles

D = fixed-area convergent nozzle

B = subsonic aircraft with engine(s) in airframe

E = variable-area convergent nozzle

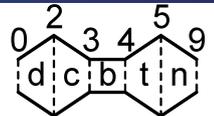
C = supersonic aircraft with engine(s) in airframe

F = variable-area convergent-divergent nozzle

<sup>b</sup>Notes: Stealth may reduce  $\pi_{dmax}$ ,  $\pi_{AB}$ , and  $\pi_n$ . The levels of technology can be thought of as representing the technical capability for 20-yr increments in time beginning in 1945. Thus level 3 of technology presents typical component design values for the time period 1985–2005.



## Rendimento termico

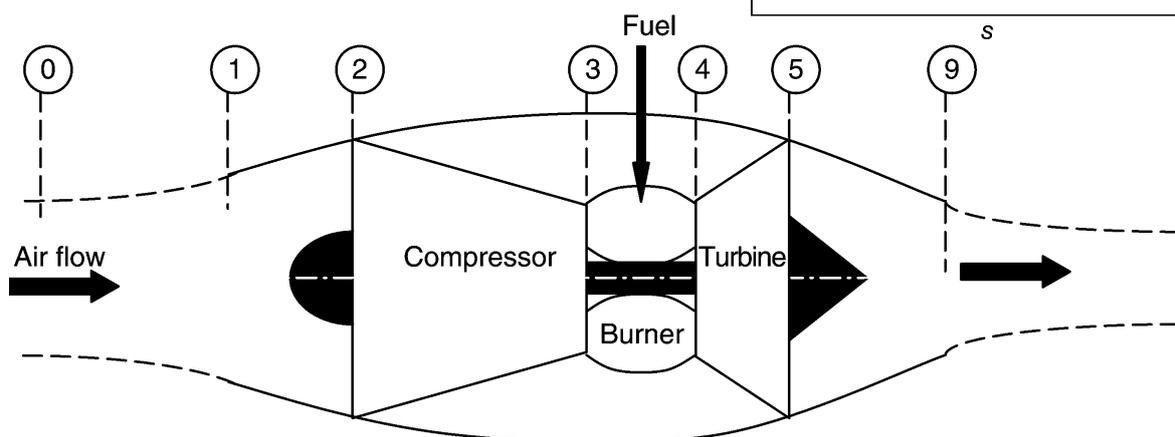
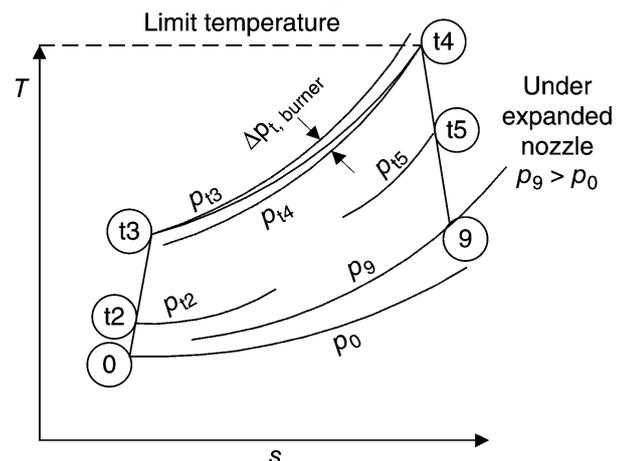


Come già detto il **rendimento termico** teorico di un turbogetto è:

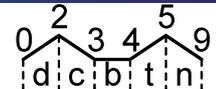
$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_0}{T_{t3}}$$

Che in termini di rapporti diventa:

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\frac{T_{t3}}{T_{t2}} \frac{T_{t2}}{T_0}} = 1 - \frac{1}{\tau_c \tau_r}$$



## Rendimento del ciclo ideale

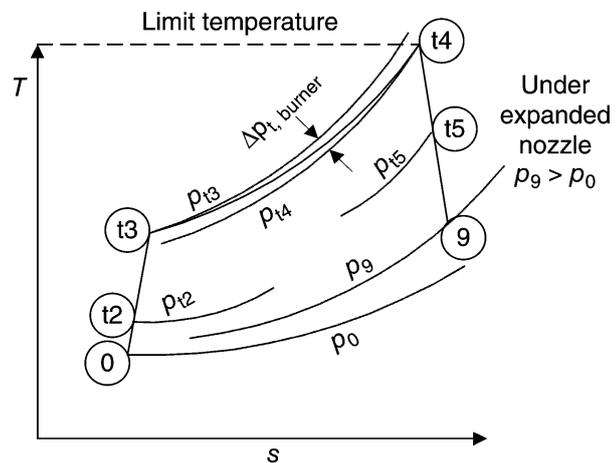


Ricordando che:

$$\tau_c = \pi_c^k \quad \tau_r = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right) = \psi_0$$

Si ha:

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\pi_c^k \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right)} = 1 - \frac{1}{\pi_c^k \psi_0}$$

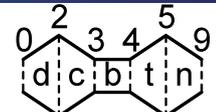


Per numero di Mach fissato il **rendimento aumenta** al crescere del **rapporto di pressioni** nel compressore. Però un aumento eccessivo della rapporto di pressione implica anche temperature più elevate e di conseguenza:

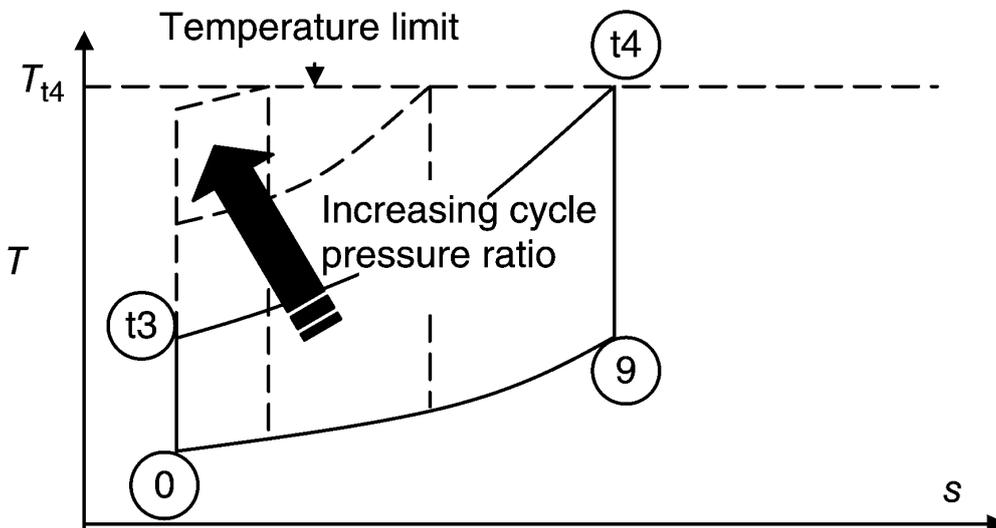
- Utilizzo di superleghe anche negli stadi finali del compressore (HPC);
- Raffreddamento del HPC;
- Passaggi anulari molto stretti con conseguenti grosse perdite secondarie nel HPC.



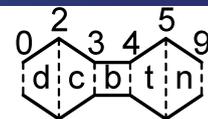
## Rendimento del ciclo ideale



Un ulteriore problema è, che come già detto, il tendere della temperatura a valle del compressore alla temperatura limite porta una **diminuzione** del **lavoro** che può essere **estratto dal ciclo**.



# Rendimento del ciclo ideale



$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)}$$

Mantenendo costante  $\pi_c$  l'aumento del numero di Mach provoca un aumento del rendimento.

Il **rendimento è minimo** al punto **fisso**.

Se  $M_0$  aumenta molto può essere conveniente eliminare il compressore perché la compressione fornita dalla presa d'aria è sufficiente.



## Rendimento del ciclo ideale

Ricordando la:

$$W_{net} = c_p T_1 \left[ \left( \frac{T_3}{T_1} - \tau_c \right) (1 - \tau_c^{-1}) \right]$$

Che riscritta in un ambito più generale diventa:

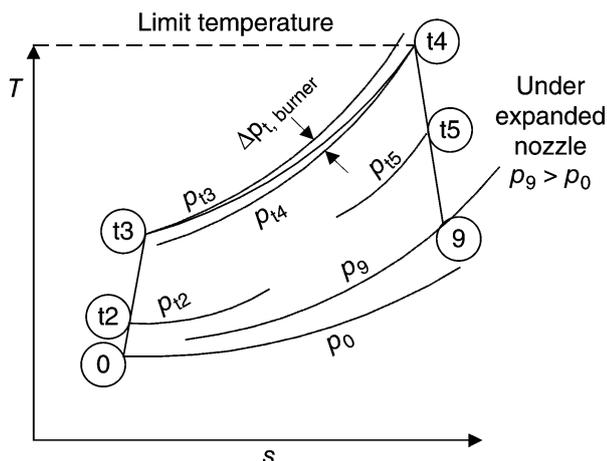
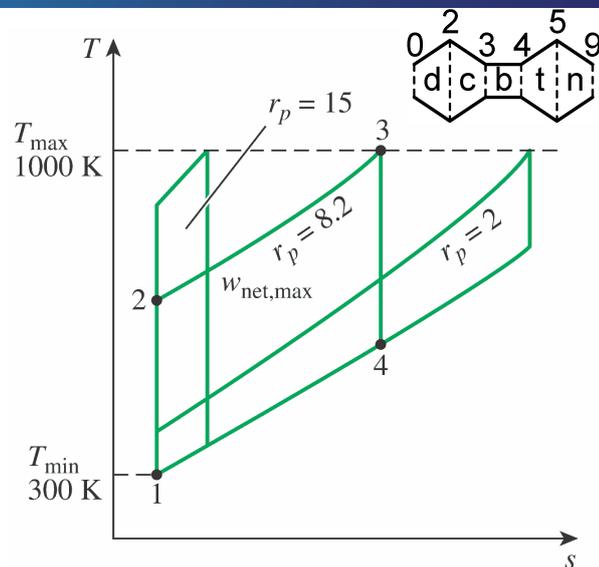
$$W_{net} = h_0 \left[ (\tau_\lambda - \tau_c \tau_r) \left( 1 - \frac{1}{\tau_c \tau_r} \right) \right]$$

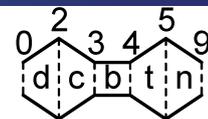
Nel ciclo ideale si ha:  $c_p = c_{pt} \rightarrow$

$$\tau_\lambda = \frac{T_{t4}}{T_0}$$

Derivando (rispetto a  $\tau_c \tau_r$ ) si ottiene che il lavoro prodotto è massimo per:

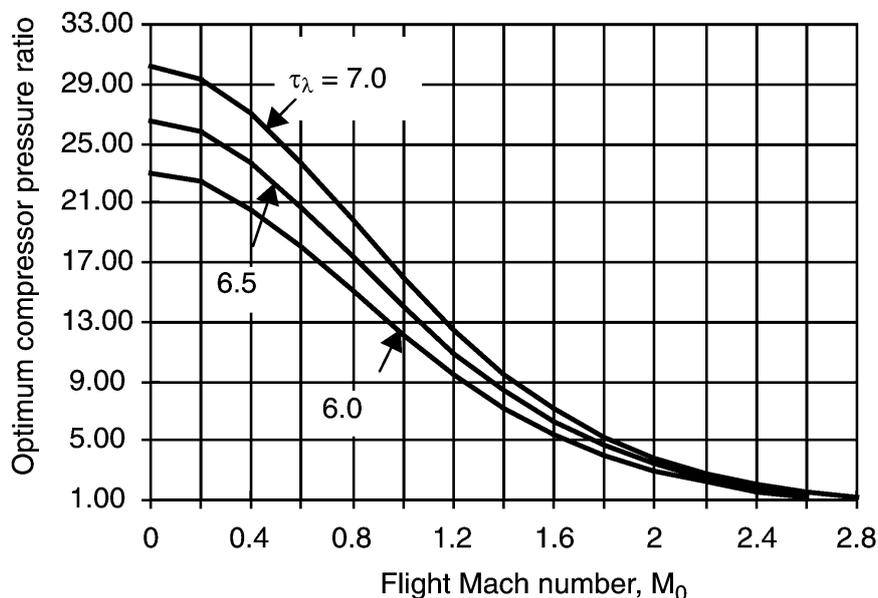
$$\tau_c \tau_r = \sqrt{\tau_\lambda} \rightarrow \tau_c = \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\tau_r} = \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\psi_0}$$



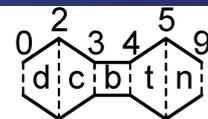


La relazione precedente può essere riscritta in termini di **rapporto di pressione ottimo** (per aumentare la **spinta**):

$$\pi_{c.max.F} = \left( \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\tau_r} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\psi_0} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \right)^{\frac{1}{k}}$$



# Rendimento del ciclo ideale



La relazione precedente può essere riscritta in termini di **rapporto di pressione ottimo** (per aumentare la **spinta**):

$$\pi_{c.max.F} = \left( \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{\psi_0} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{\sqrt{\tau_\lambda}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \right)^{\frac{1}{k}}$$

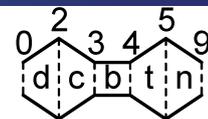
Se si impone che il rapporto di pressioni ottimo sia unitario (i.e. compressore assente) si può determinare il minimo numero di Mach di volo per cui un **RamJet** diventa più efficiente di un turbo getto:

$$M_{0.max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} (\sqrt{\tau_\lambda} - 1)}$$

Per aria si ha  $M_{0.max} = 2.78$  e  $2.87$  per  $\tau_\lambda$  rispettivamente uguale a 6.5 e 7.



# Rendimento del ciclo ideale



Riprendendo l'equazione  $\tau_c \tau_r = \sqrt{\tau_\lambda}$  si ha:

~~$$\sqrt{\tau_\lambda} = \sqrt{\frac{T_{t4}}{T_0}} = \sqrt{\frac{T_{t4} T_9}{T_9 T_0}}$$~~

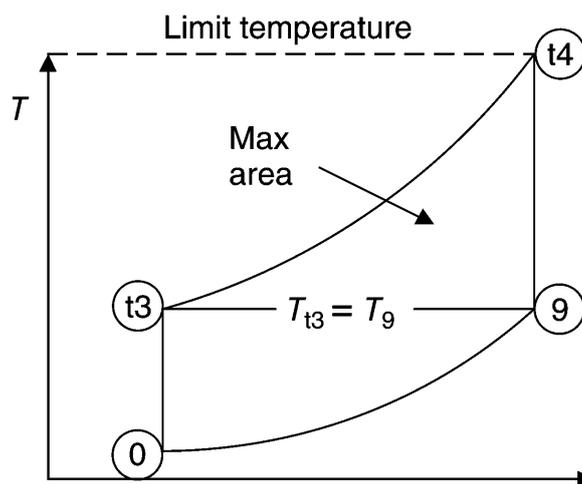
Per un ciclo ideale:  $\frac{T_{t4}}{T_9} = \left(\frac{p_{t4}}{p_9}\right)^k = \left(\frac{p_{t3}}{p_0}\right)^k = \frac{T_{t3}}{T_0}$  da cui:

~~$$\sqrt{\tau_\lambda} = \sqrt{\frac{T_{t4} T_9}{T_9 T_0}} = \sqrt{\frac{T_{t3} T_9}{T_0 T_0}}$$~~

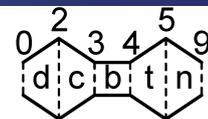
Quindi:

~~$$\tau_c \tau_r = \frac{T_{t3} T_{t2}}{T_{t2} T_0} = \frac{T_{t3}}{T_0} = \sqrt{\frac{T_{t3} T_9}{T_0 T_0}} = \sqrt{\tau_\lambda}$$~~

~~$$T_{t3} = \sqrt{T_{t3} T_9} \rightarrow T_{t3} = T_9$$~~



# Rendimento del ciclo ideale



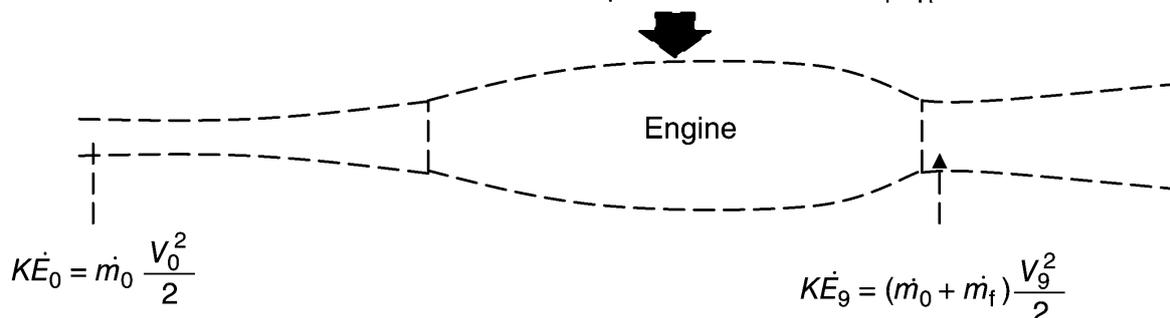
Se le seguenti ipotesi sono verificate:

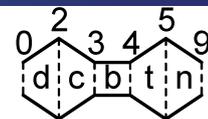
- $f$  sia **trascurabile**;
- **componenti ideali** (reversibili);
- **espansione corretta**:

Si può dimostrare che la relazione per il rendimento termico, trovata in precedenza, coincide con la definizione termodinamica del rendimento termico:

$$\eta_{th} = \frac{\Delta K\dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{(1+f)V_9^2 - V_0^2}{2fQ_R} \rightarrow = 1 - \frac{T_0}{T_{t3}} = \eta_{th}$$

Thermal power investment,  $\dot{m}_f Q_R$





Nella **progettazione preliminare** alcuni parametri sono assegnati mentre altri vengono derivati. **Una scelta possibile** (a sinistra della freccia quelli assegnati a destra quelli ricavati):

- Parametri di volo:  $M_0, T_0, T_{t4}, c_p, \gamma, c_{p_t} = c_{p_9}, \gamma_t = \gamma_9 \rightarrow \tau_\lambda$ ;
- Presa d'aria:  $\eta_d \rightarrow \pi_d, \pi_r$ ;
- Compressore:  $e_c, \pi_c \rightarrow \tau_c, \eta_c$ ;
- Camera di combustione:  $\eta_b, \pi_b, Q_R \rightarrow f, \tau_b$ ;
- Turbina:  $e_t, \eta_m \rightarrow \tau_t, \pi_t, \eta_t$ ;
- Ugello:  $\pi_n, p_0/p_9 \rightarrow \eta_n$ .

Si suppone inoltre che:

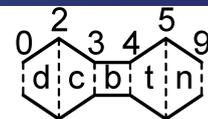
- $\tau_d = \tau_n = 1$ .

Nel **caso ideale** si suppone che il gas sia sempre lo stesso e che:

- tutte le trasformazioni siano reversibili;
- $p_0 = p_9$ ;
- $(f + 1) \rightarrow 1, \pi_b = 1$ .



## Valutazione della spinta e degli indici di prestazione



Per calcolare gli **indici di prestazioni** si deve procedere a calcolare i parametri del ciclo componente per componente.

La spinta specifica è:  $\frac{F_u}{\dot{m}_0} = (1 + f)V_9 - V_0 + \frac{(p_9 - p_0)A_9}{\dot{m}_0}$

dove la  $\dot{m}_0$  può essere messa nella forma:

~~$$\dot{m}_0 = \frac{\dot{m}_9}{1 + f} = \frac{\rho_9 V_9 A_9}{1 + f} = \frac{p_9 V_9 A_9}{R_9 T_9 (1 + f)}$$~~

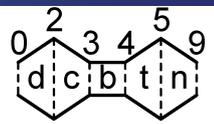
~~$$\frac{F_u}{\dot{m}_0} = (1 + f)V_9 - V_0 + \frac{R_9 T_9 (1 + f)}{V_9} \left(1 - \frac{p_0}{p_9}\right)$$~~

~~$$= (1 + f)V_9 \left[1 + \frac{1}{\gamma_9 M_9^2} \left(1 - \frac{p_0}{p_9}\right)\right] - V_0 \quad V_{9.e} = V_9 \left[1 + \frac{1}{\gamma_9 M_9^2} \left(1 - \frac{p_0}{p_9}\right)\right]$$~~

~~$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + f) \frac{V_9}{a_0} \left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2}\right) - M_0$$~~

dove i parametri ancora incogniti sono  $\frac{V_9}{a_0}, M_9$  e  $f$ .





Il primo può essere calcolato come:

$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{\frac{\gamma_9 R_9 T_9}{\gamma R T_0}}$$

Ricordando i simboli ( $\theta$  rispetto alla temperatura all'infinito a monte):

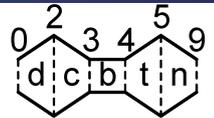
$$k = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad k_9 = \frac{\gamma_9 - 1}{\gamma_9} \quad \psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 = \frac{T_t}{T}$$

Si ha:

$$\frac{T_{t9}}{T_9} = \left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^{k_9} = \psi_9 \rightarrow M_9^2 = \frac{2}{\gamma_9 - 1} \left[ \left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^{k_9} - 1 \right]$$

$$\frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9} \quad \pi_r = \psi_0^{1/k}$$

dove  $\pi_n, \pi_b, \pi_c, \pi_d$  e  $p_0/p_9$   $\pi_n, \pi_b, \pi_c, \pi_d$  e  $p_0/p_9$  sono dati di input, mentre  $\pi_t$  si deve determinare.



Il rapporto di temperature:

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\theta_9}{\left(\frac{p_{t9}}{p_9}\right)^{k_t}} \quad \theta_9 = \frac{T_{t9}}{T_{t5}} \tau_t \frac{T_{t4}}{T_0} = \tau_t \tau_\lambda \frac{c_p}{c_{pt}}$$

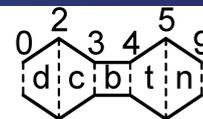
Come già detto nella CC:

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R \eta_b / (c_p T_0) - \tau_\lambda} \quad \tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r}$$

Mentre dalla turbina e nel compressore si ha:

$$\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1) \tau_r}{\eta_m (1 + f) \tau_\lambda} \quad \pi_t = \tau_t^{\frac{1}{k_t e_t}} \quad \tau_c = \pi_c^{\frac{k}{e_c}}$$





Infine nella presa d'aria:

$$\tau_r = \theta_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} = \psi_0 \quad \pi_d = \left( \frac{1 + \eta_d \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2} \right)^{1/k}$$

Che completa la ricerca dei parametri incogniti.

Se necessario si possono calcolare anche i rendimenti:

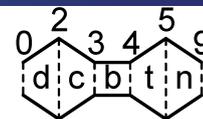
$$\eta_t = \frac{1 - \tau_t}{1 - \tau_\tau^{e_t}} \quad \eta_c = \frac{\pi_c^k - 1}{\tau_c - 1} \quad TSFC = \frac{f}{F_u/\dot{m}_0}$$

$$\eta_{th} = \frac{\Delta K \dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{(1 + f)V_9^2 - V_0^2}{2fQ_R} = \frac{a_0^2[(1 + f)(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}{2fQ_R}$$

$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K \dot{E}} \approx \frac{2F_u V_0/\dot{m}_0}{a_0^2[(1 + f)(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}$$



# Valutazione della spinta e degli indici di prestazione



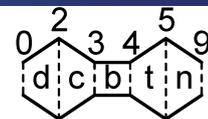
Per tenere in conto di una eventuale non corretta espansione nell'ugello si deve utilizzare la **velocità effettiva** nel calcolo dei rendimenti:

$$V_{9,e} = V_9 \left[ 1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right]$$

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + f) \frac{V_9}{a_0} \left( 1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right) - M_0 = (1 + f) \frac{V_{9,e}}{a_0} - M_0$$



# Valutazione della spinta caso ideale



Nell'ipotesi di ciclo ideale si ha:

$$\gamma_9 = \gamma \quad \tau_t = \pi_t^{k_t} \quad \tau_c = \pi_c^k \quad \pi_d = \pi_n = \pi_b = 1$$

$$\dot{m}_0 \approx \dot{m}_9 \quad \rightarrow \quad 1 + f \rightarrow 1 \quad p_9 = p_0$$

Quindi i parametri sono:

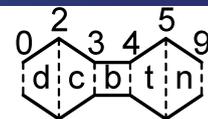
- Parametri di volo:  $M_0, T_0, T_{t4}, c_p, \gamma \rightarrow \tau_\lambda$ ;
- Presa d'aria:  $\rightarrow \pi_r$ ;
- Compressore:  $\pi_c \rightarrow \tau_c$ ;
- Camera di combustione:  $Q_R \rightarrow f, \tau_b$ ;
- Turbina:  $\rightarrow \tau_t, \pi_t$ ;

La spinta è:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + f) \frac{V_9}{a_0} \left( 1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right) - M_0 = \frac{V_9}{a_0} - M_0$$



# Valutazione della spinta caso ideale



~~$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{V_9}{a_0} - M_0$$~~

Riprendendo le equazioni precedenti::

~~$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{\frac{T_9}{T_0}} \quad \frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \overset{=1}{\pi_t} \pi_b \overset{=1}{\pi_c} \pi_d \overset{=1}{\pi_r} \frac{p_0}{p_9} \overset{=1}{=} = \pi_t \pi_c \pi_r$$~~

~~$$M_9^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_{t9}}{p_9} \right)^k - 1 \right] = \frac{2}{\gamma - 1} [(\pi_t \pi_c \pi_r)^k - 1] = \frac{2}{\gamma - 1} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1)$$~~

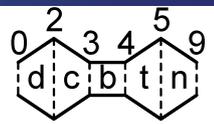
~~$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\theta_9}{\left( \frac{p_{t9}}{p_9} \right)^k} = \frac{\theta_9}{\tau_t \tau_c \tau_r} = \frac{\tau_\lambda = \theta_9 / \tau_t}{T_0 T_{t5}} \frac{1}{\tau_c \tau_r} = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} = \tau_b$$~~

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1)} - M_0$$



## Valutazione della spinta caso ideale

$$\tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r}$$



$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1) - M_0^2}$$

inoltre:

$$\tau_t = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\eta_m(1+f)\tau_\lambda} = 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda}$$

La spinta può essere manipolata:

$$\frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1) = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} \left( \left( 1 - \frac{(\tau_c - 1)\tau_r}{\tau_\lambda} \right) \tau_c \tau_r - 1 \right) =$$

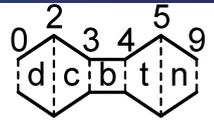
$$= \tau_\lambda - \tau_c \tau_r + \tau_r + \left( \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} - \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} \right) - \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} (\tau_c - 1) - \tau_r (\tau_c - 1) + \tau_b (\tau_r - 1)$$

$$= \tau_r (\tau_b - 1) (\tau_c - 1) + \tau_b (\tau_r - 1)$$



## Valutazione della spinta caso ideale

$$\tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r}$$



$$\frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1) = \tau_r (\tau_b - 1) (\tau_c - 1) + \tau_b (\tau_r - 1)$$

ma:

$$\tau_r = \psi_0 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \quad \rightarrow \quad (\tau_r - 1) = \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2$$

La spinta diventa:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \tau_r (\tau_b - 1) (\tau_c - 1) + \tau_b M_0^2 - M_0^2}$$

In questa forma è chiaro che:

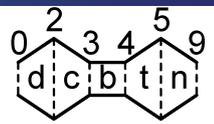
- se  $\tau_b \rightarrow 1$ , ovvero non c'è combustione, la spinta è nulla;
- se  $\tau_c \rightarrow 1$  si ricade nel caso del RamJet:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = M_0 (\sqrt{\tau_b} - 1);$$



# Valutazione della spinta caso ideale

$$\tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r}$$



$$\frac{F_u}{\dot{m}_0 a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \tau_r (\tau_b - 1) (\tau_c - 1) + \tau_b M_0^2} - M_0$$

Inoltre:

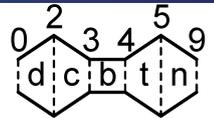
~~$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R \eta_b / (c_p T_0) - \tau_\lambda} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)} - \frac{c_p T_0}{Q_R} (\tau_\lambda - \tau_c \tau_r)$$~~

dove si è trascurato  $f \tau_\lambda$  rispetto a  $\tau_\lambda$ . Quindi:

$$TSFC = \frac{f}{F_u / \dot{m}_0} = \frac{\frac{c_p T_0}{a_0 Q_R} (\tau_\lambda - \tau_c \tau_r)}{\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \tau_r (\tau_b - 1) (\tau_c - 1) + \tau_b M_0^2} - M_0}$$

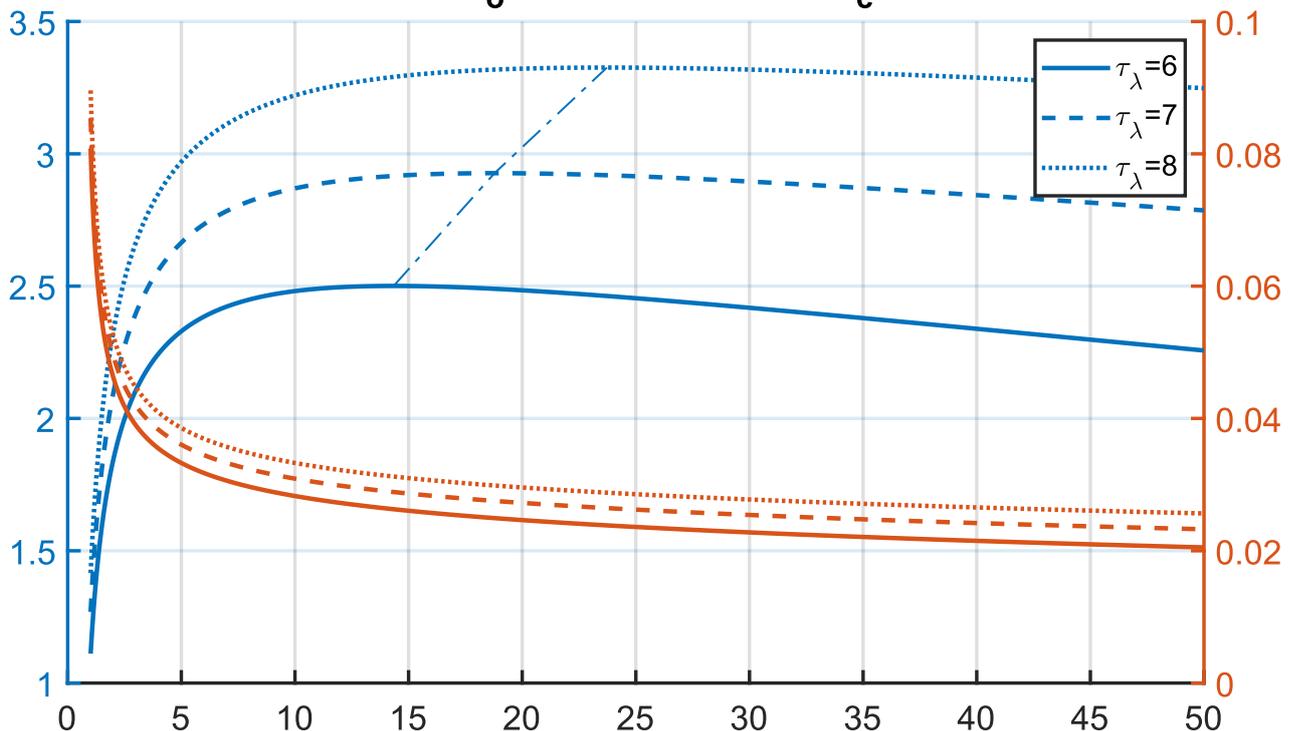


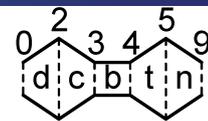
# Valutazione della spinta caso ideale



$$M_0 = 0.85, T_0 = 250K, Q_R = 42,800kJ/kg$$

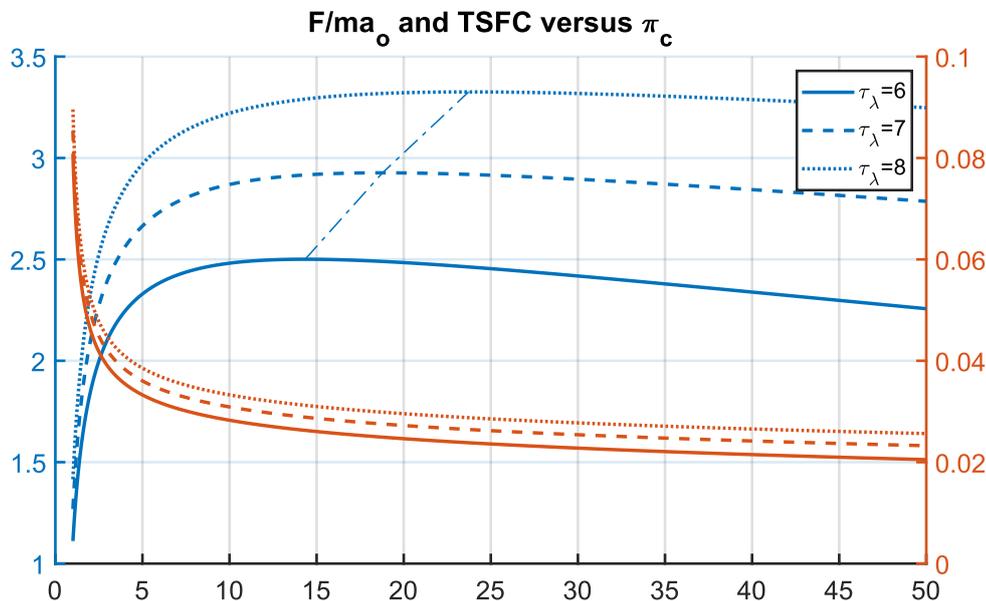
F/ma<sub>0</sub> and TSFC versus π<sub>c</sub>



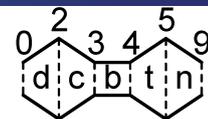


Dalla figura si nota:

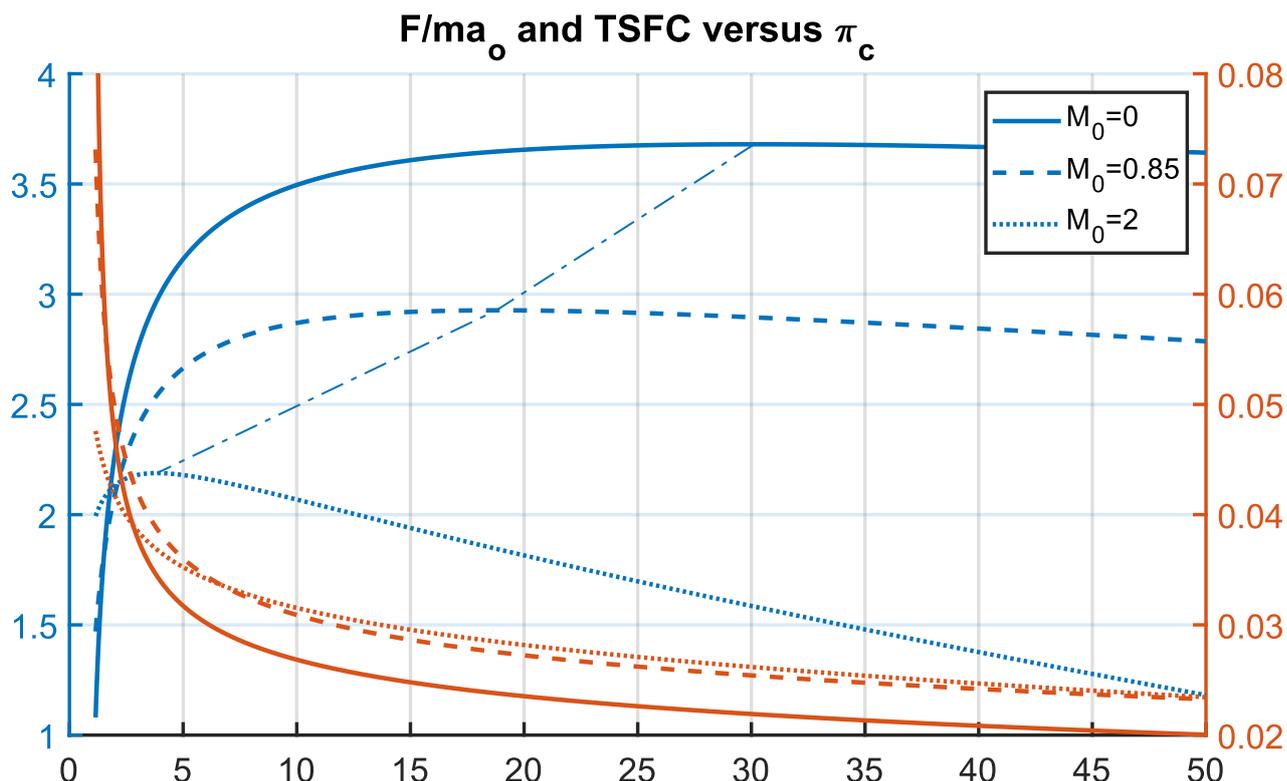
- All'aumentare di  $\tau_\lambda$  aumentano sia la spinta specifica che il consumo specifico;
- Come già visto la curva della spinta ha un massimo, viceversa il consumo specifico ha un minimo per  $\pi_c$  maggiore;



# Valutazione della spinta caso ideale

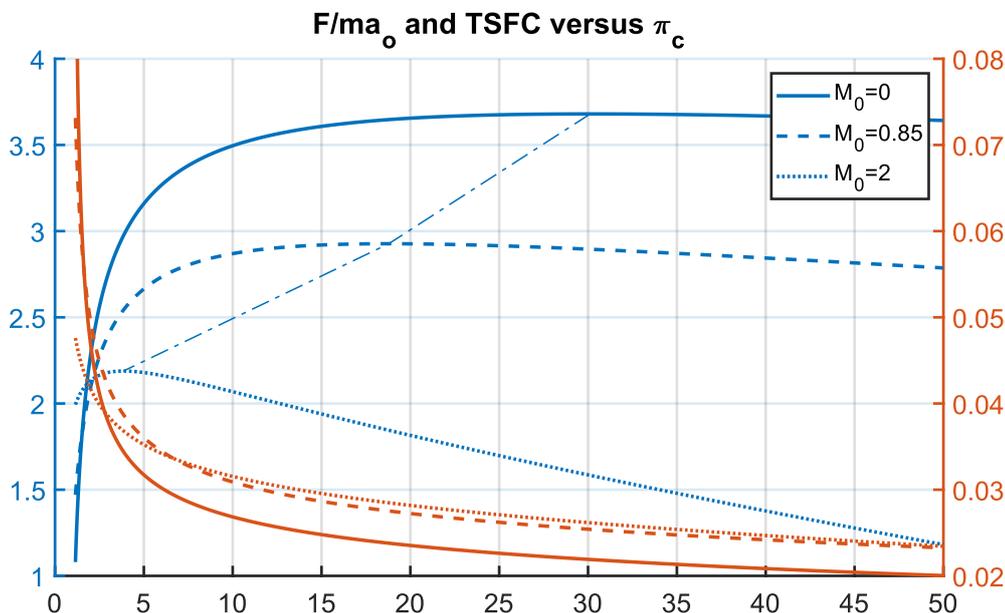


$$T_{t4} = 1750K, T_0 = 250K, Q_R = 42,800kJ/kg$$

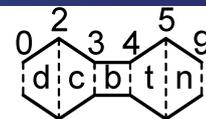


Dalla figura si nota:

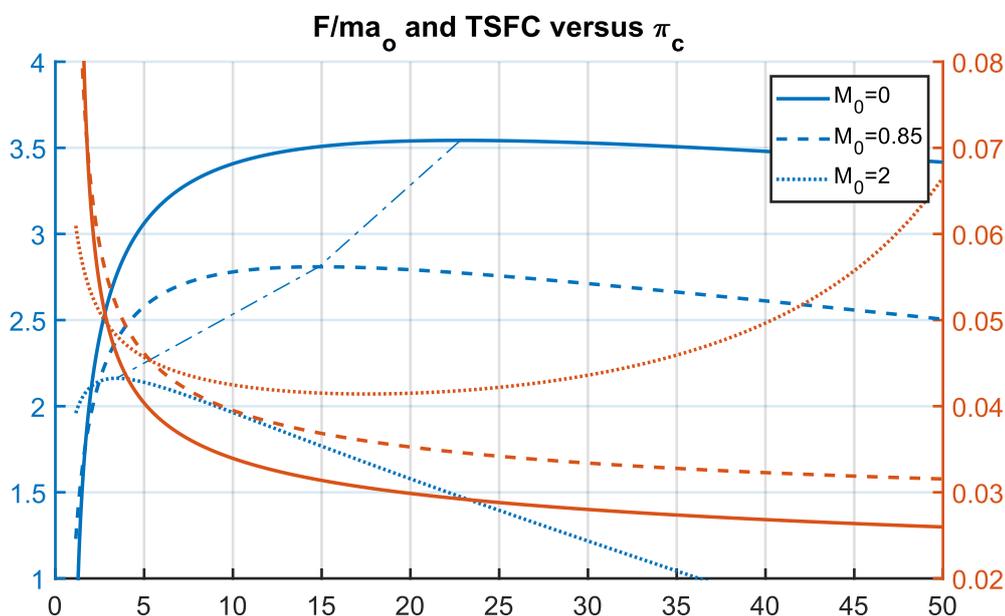
- All'aumentare del numero di Mach di volo il massimo della spinta specifica si sposta a sinistra;
- La spinta tende a zero per alti valori di  $\pi_c$  ma nel caso ideale il consumo specifico non diverge ( $f$  tende a zero).



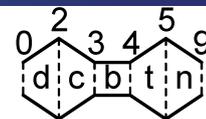
## Valutazione della spinta



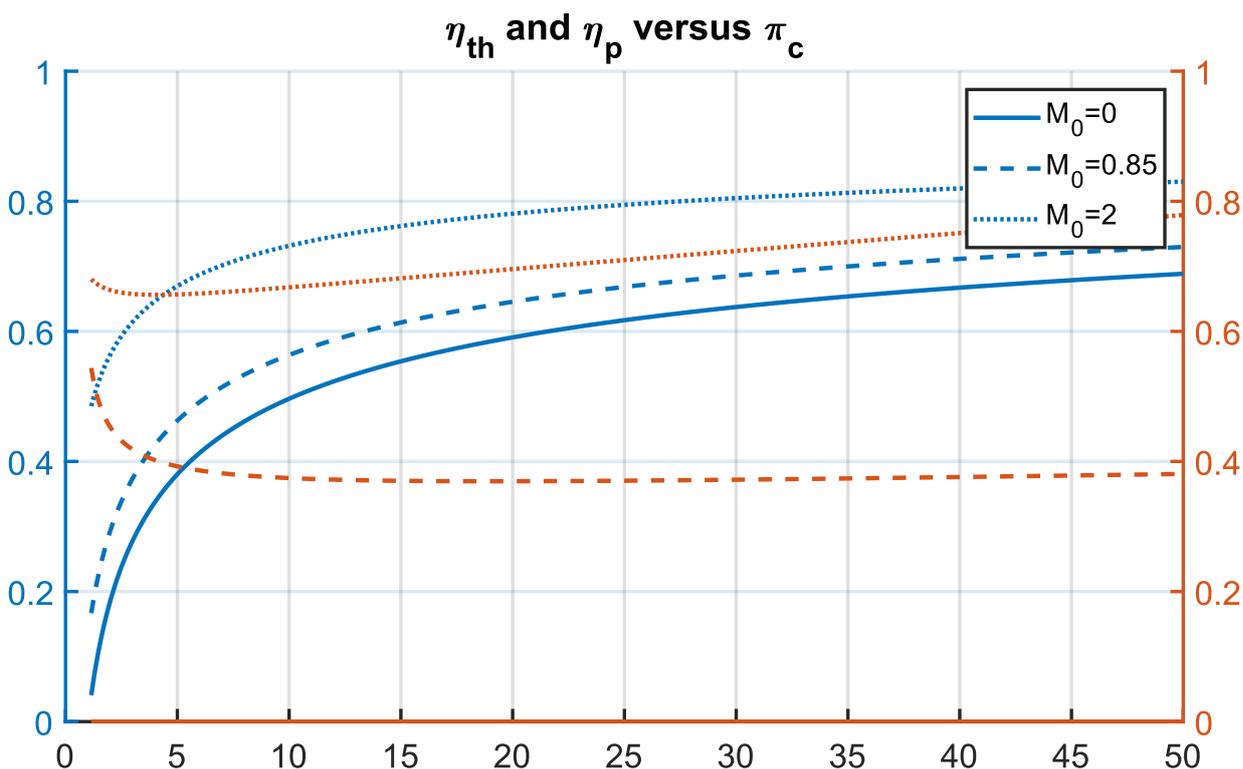
Nel **caso reale**, l'introduzione delle perdite, comportare una contenuta diminuzione della spinta ed un aumento del consumo specifico (ed una divergenza per alti  $\pi_c$ ).



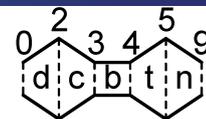
# Valutazione della spinta caso ideale



$$T_{t4} = 1750K, T_0 = 250K, Q_R = 42,800kJ/kg$$

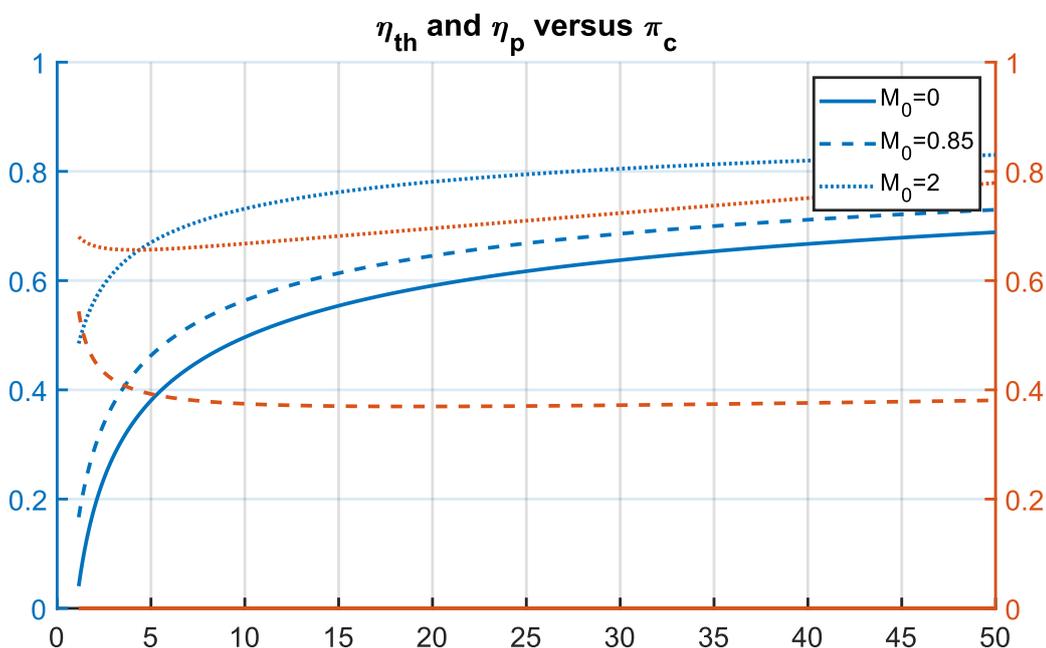


# Valutazione della spinta caso ideale

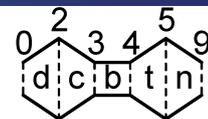


Il rendimento termico aumenta con il rapporto di compressione mentre quello propulsivo ha un minimo. Il rendimento complessivo aumenta.

$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K \dot{E}} \cong \frac{2V_0}{V_9 + V_0}$$



# Valutazione della spinta



Chiaramente nel **caso reale** il rendimento termico peggiora significativamente.

