



UNIVERSITY OF NAPLES *FEDERICO II* 1224 A.D.

Propulsione Aerospaziale

T. Astarita

astarita@unina.it

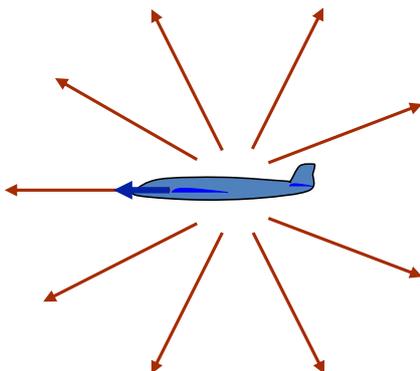
www.docenti.unina.it

Versione del 8.10.2021

Onde d'urto

E' stato visto in precedenza che i **piccoli disturbi** di pressione si propagano alla **velocità del suono**.

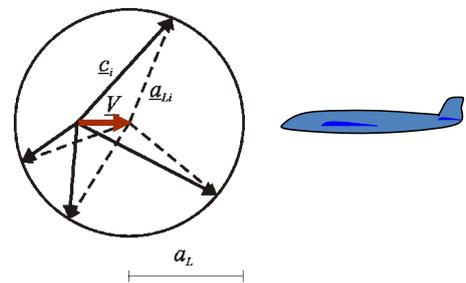
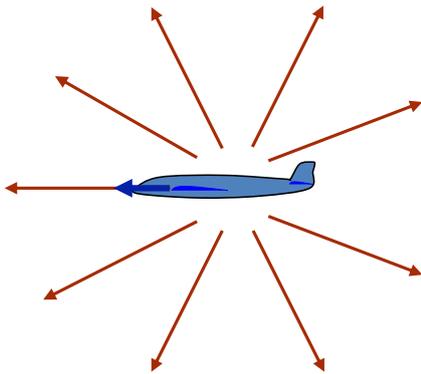
Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto



Onde d'urto

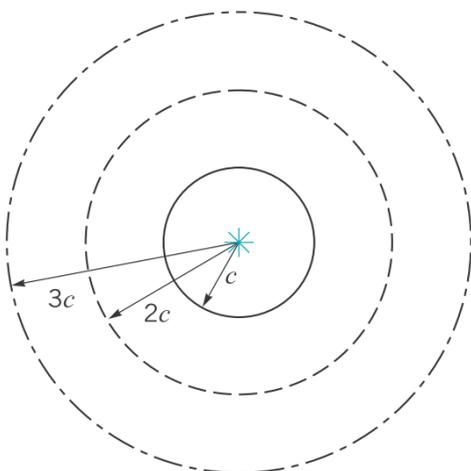
Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso. Ovviamente, l'aria si deve aprire per far passare l'oggetto.

Alternativamente, in un **sistema di riferimento** inerziale per il quale **l'oggetto è fermo** ed è investito da una corrente **subsonica**, questi disturbi riescono a **risalire la corrente** in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto la corrente viaggi verso valle.



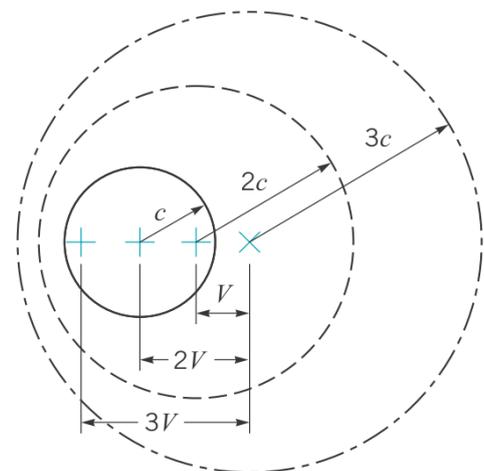
Onde d'urto

Nel caso di un **oggetto** che si muova a **velocità subsonica** in aria ferma, i disturbi di pressione causati dalla sua presenza, viaggiando più velocemente dell'oggetto, riescono a **raggiungere** tutti i punti del fluido **prima** che arrivi l'oggetto stesso.



----- Wave emitted at $t = 0$ s ----- Wave emitted at $t = 1$ s ----- Wave emitted at $t = 2$ s

Velocità nulla ($M=0$)

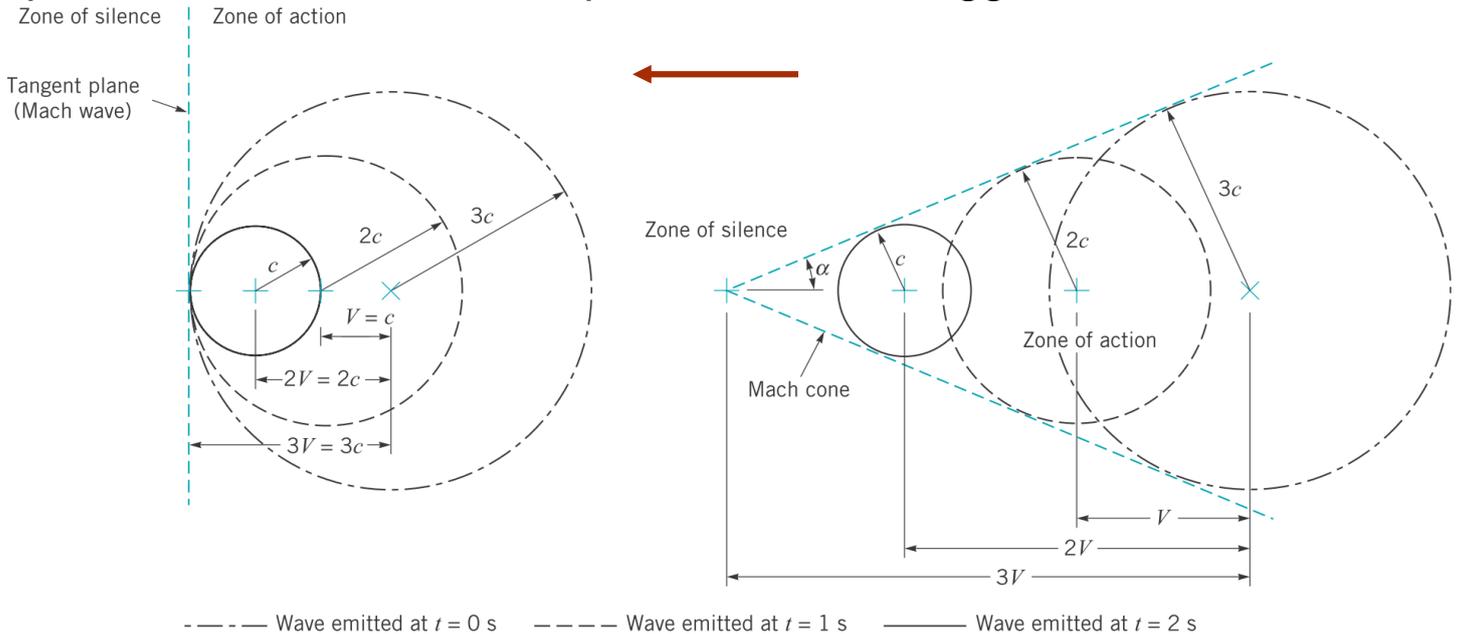


Velocità Subsonica ($M=0.7$)



Onde d'urto

Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

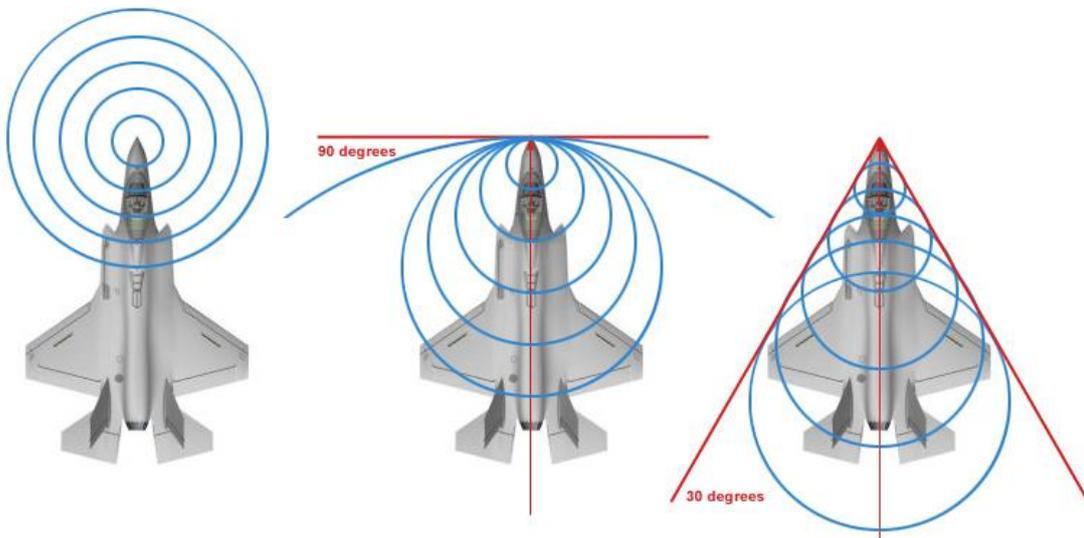


Velocità sonica (M=1)

Velocità Supersonica (M=2)



Onde d'urto



Speed = 0

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object remains stationary. There is no shock front.

Origin of each circle is on the tip.

Speed = Mach 1

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object also moves at the speed of sound.

The so called sonic barrier is created because all the pressure fronts created in the past moves at the same speed as the object and hence arrives at the same point as the object.

The shock front is a plane tangent to all the infinite number of pressure fronts ever formed over time and is 90 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly the length of the circle's radius from the tip.

Speed = Mach 2

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object moves at twice the speed of sound.

Because the object is moving twice as fast as the pressure fronts and the boundaries of all pressure fronts are tangent to a conical surface.

At Mach 2, the shock front cone is roughly 30 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly 2 x the radius of the circle itself from the tip.

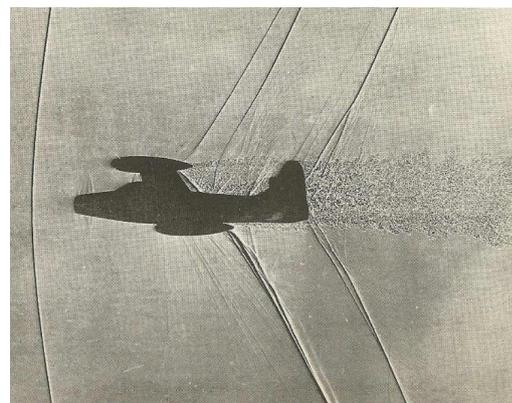
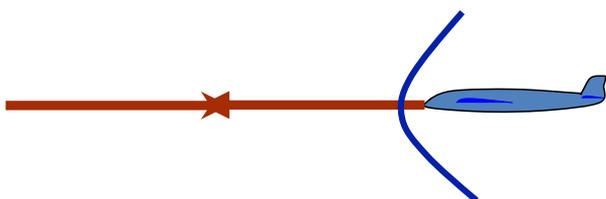


Onde d'urto

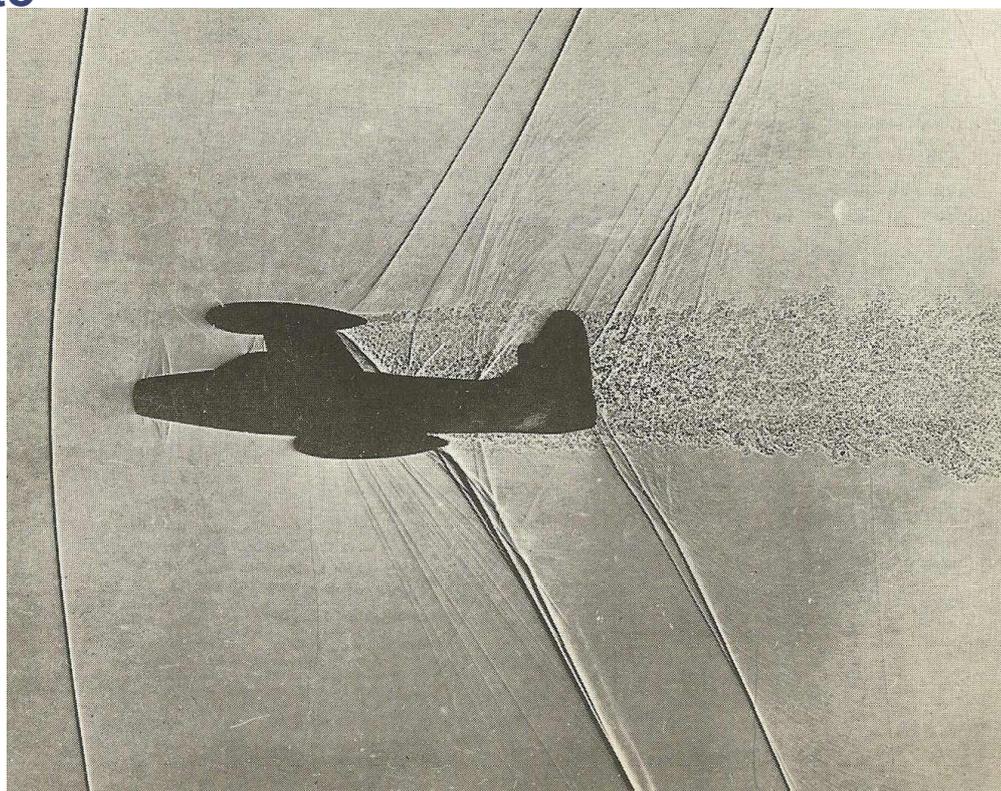
Nel caso, invece, in cui **l'oggetto** si muova a **velocità supersonica** arriva **prima l'oggetto** e **poi i disturbi di pressione**. L'aria **non** può, quindi, essere **avvisata** da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

L'oggetto deve, in ogni caso, **passare** e l'aria si deve aprire per farlo passare. Da ciò deriva la presenza di **superfici di discontinuità (onde d'urto)** che, rendendo la corrente **subsonica**, e/o **deviando** la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per far passare il corpo.

Le onde d'urto possono essere presenti anche in **altre situazioni fluidodinamiche**.



Onde d'urto



Shadowgraph del Thunderjet F84 (scala 1/200 , $M = 1.05$). **L'onda d'urto** davanti all'aereo, che viaggia a $M \cong 1$, è praticamente **normale** alla corrente che lo investe.





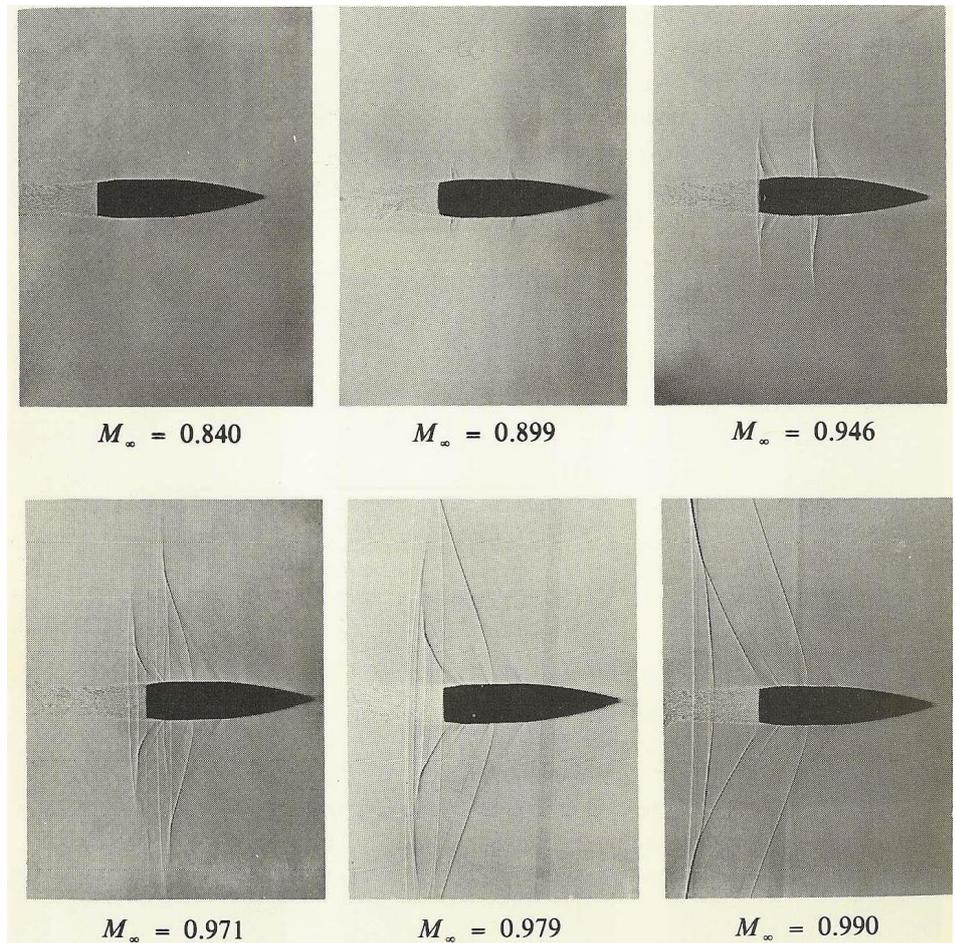
F14 rompe il muro del suono



Onde d'urto

Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **transonico**.

Pur essendo il moto **subsonico**, si può notare la presenza di onde (di Mach, o deboli onde urto) dove la corrente accelera.

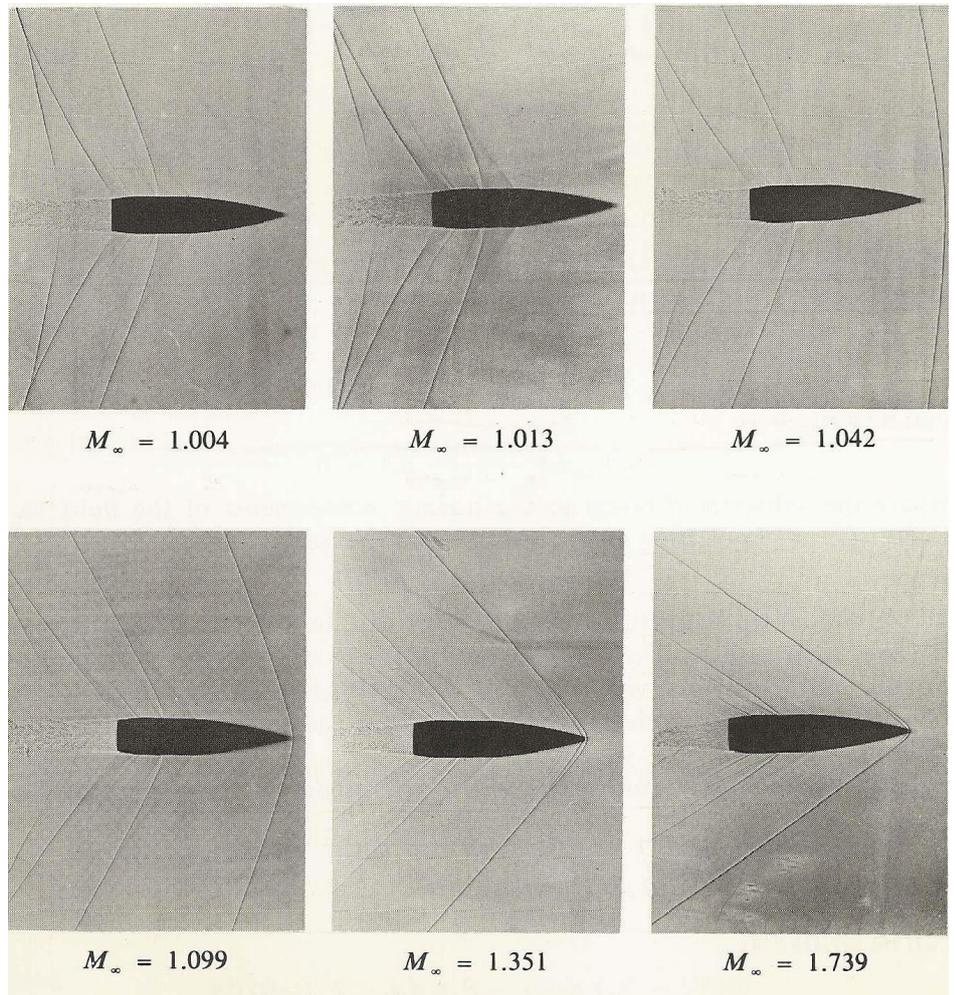


Onde d'urto

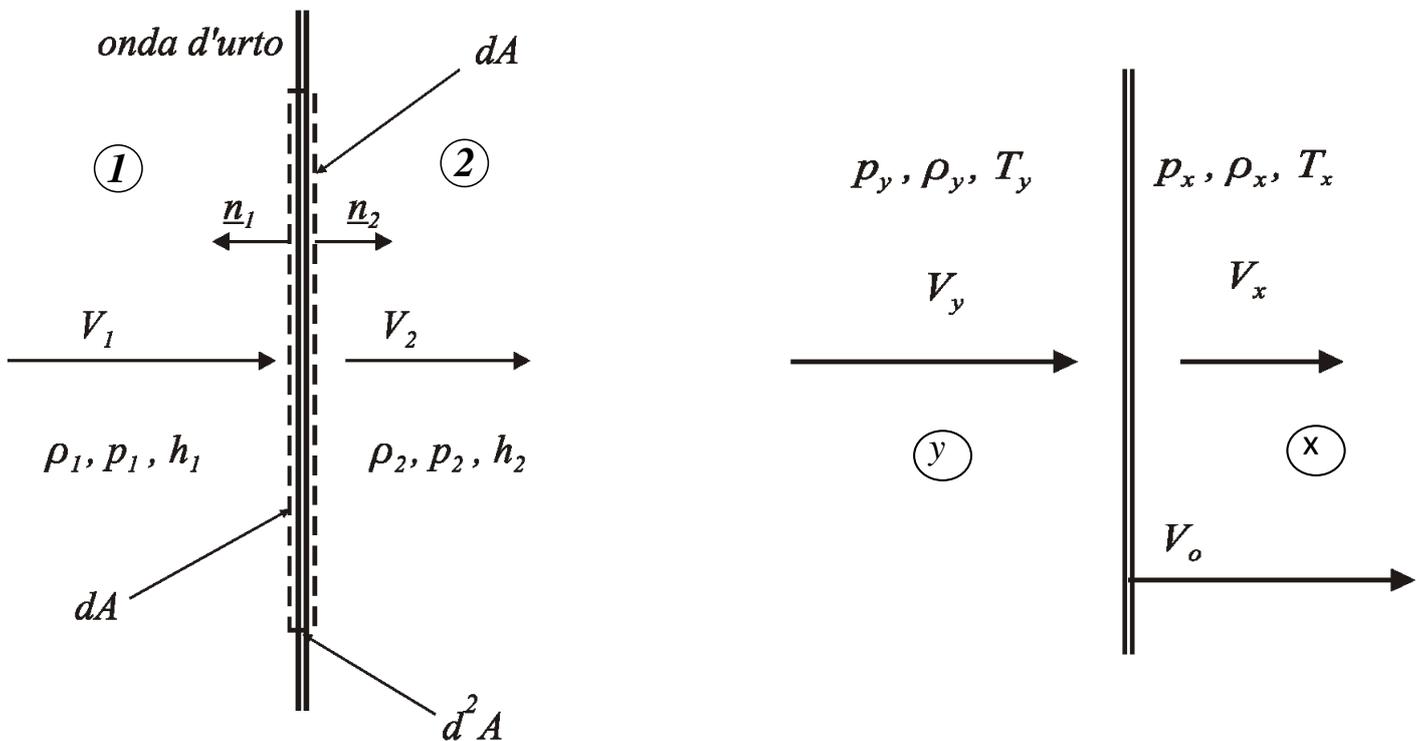
Shadowgraphs del campo di moto intorno a un **proiettile** in moto **supersonico**.

Ai bassi numeri di Mach (1.004 e 1.013) l'onda si trova molto a monte del corpo e **non appare**.

L'onda d'urto staccata, è quasi **normale**, per $M \cong 1$ e si avvicina al corpo **inclinandosi** verso valle **all'aumentare** del numero di **Mach**.



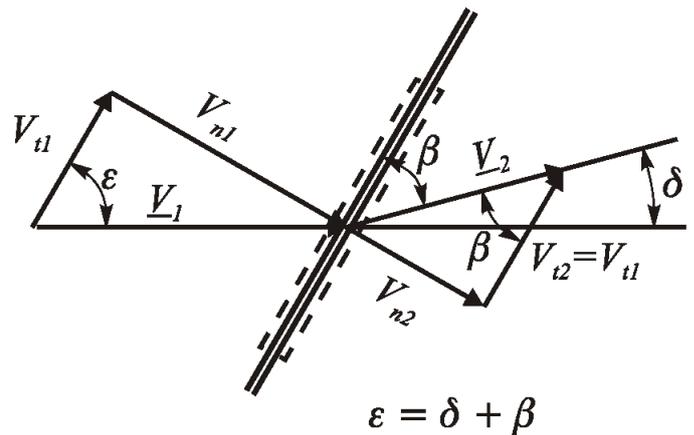
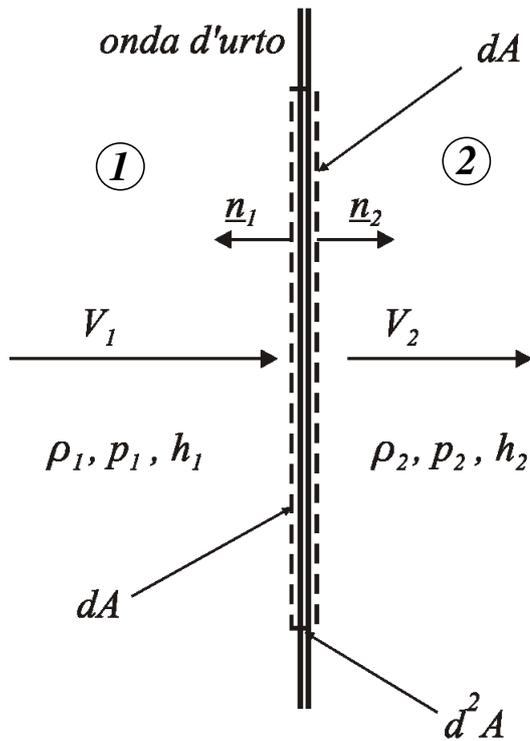
Onde d'urto



Le condizioni a monte dell'onda sono rispettivamente 1 (a sinistra) e x (a destra) per onde **stazionarie** e **non stazionarie**.



Onde d'urto



Le onde d'urto si chiamano **normali** (a sinistra), quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda. In caso contrario, si dicono **oblique** (a destra).



Onde d'urto

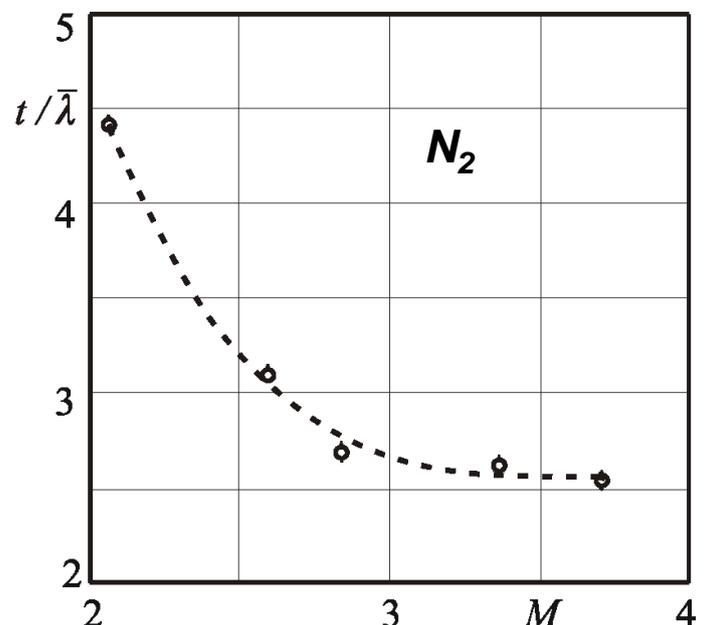
Inizialmente le ipotesi su cui si baserà lo studio sono:

- onde d'urto **adiabatiche** (il fluido non scambia energia nel modo calore);
- onde d'urto **anergodiche** (il fluido non scambia energia nel modo lavoro);

Nella figura a lato è riportato lo **spessore** di un'onda d'urto, misurato per una corrente di azoto N_2 , in termini di **libero cammino medio** molecolare, al variare M .

Per aria in condizioni normali il libero cammino medio molecolare è dell'ordine di $0.1\mu m$ (il diametro di un capello umano è $\sim 80\mu m$).

Quindi lo **spessore** di un'onda d'urto, essendo dell'ordine di qualche libero cammino medio molecolare, è **di vari ordini di grandezza inferiore** a quelli di una tipica lunghezza caratteristica.



Onde d'urto normali

Attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\begin{aligned}\rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 = G = \text{cost} \\ p_1 + \rho_1 V_1^2 &= p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost} \\ h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}\end{aligned}$$

Nella derivazione di queste equazioni non è stata fatta alcuna **ipotesi** sul **modello di gas**. Sono quindi completamente **generali**.

Dalla prima equazione è immediato verificare che se l'onda è di **compressione** (aumento di densità) la **velocità** a valle **diminuisce**.

Dalla seconda e dalla terza ($G = \text{cost}$):

$$p_1 + G V_1 = p_2 + G V_2 = \text{cost}$$

Si nota che la **pressione** e l'**entalpia sensibile** devono **aumentare**.



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Attraverso un'onda d'urto rimangono **costanti** il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale:

$$\begin{aligned}\rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 = G = \text{cost} \\ p_1 + \rho_1 V_1^2 &= p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost} \\ h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}\end{aligned}$$

Per **gas più che perfetti** questo sistema d'equazioni, unito alle equazioni di stato, si può risolvere esplicitamente fornendo le grandezze a **valle** dell'onda in funzione di quelle a **monte**.

La **soluzione** benché non particolarmente complessa è **tediosa**.

Combinando queste equazioni si trova la **relazione di Prandtl** per le onde d'urto normali:

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_t^2 = a^{*2} = \text{cost}$$



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Dalla **relazione di Prandtl** si ha:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Si possono fare le seguenti osservazioni (si ricorda che per la stabilità termodinamica $\gamma > 1$):

- per $M_1 = 1$ si ha $M_2 = 1$ che è la soluzione banale;
- il denominatore cresce più rapidamente del numeratore quindi la funzione è strettamente decrescente (quindi $M_2 \leq 1$);
- per $M_1 \rightarrow \infty$ si ha un asintoto (in parentesi il valore per $\gamma = 1.4$):

$$M_{2l} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} = (0.3780);$$

- il denominatore si annulla per $M_1 = M_{2l}$ e per valori di M_1 inferiore a questo valore la funzione restituisce valori complessi.



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Utilizzando la relazione precedente si possono trovare i seguenti **rapporti caratteristici** per **onda d'urto normale**; essi sono funzione del solo numero di Mach a monte dell'onda d'urto e di γ .

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

Come già detto per $M_1 > 1$ la pressione, la temperatura e la densità aumentano a valle dell'onda ovvero i rapporti, per $\gamma > 1$, **sono maggiori di uno**.



Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left((\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Il rapporto fra le pressioni di ristagno, invece, è per $M_1 > 1$ **minore di uno**, quindi la pressione di ristagno a valle dell'onda diminuisce.

La relazione fondamentale entropica, applicata in condizioni di ristagno e per $T_{o2} = T_{o1}$ è:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = -R \ln \frac{p_{t2}}{p_{t1}}$$

Da cui si valuta la **variazione di entropia** attraverso un onda d'urto:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

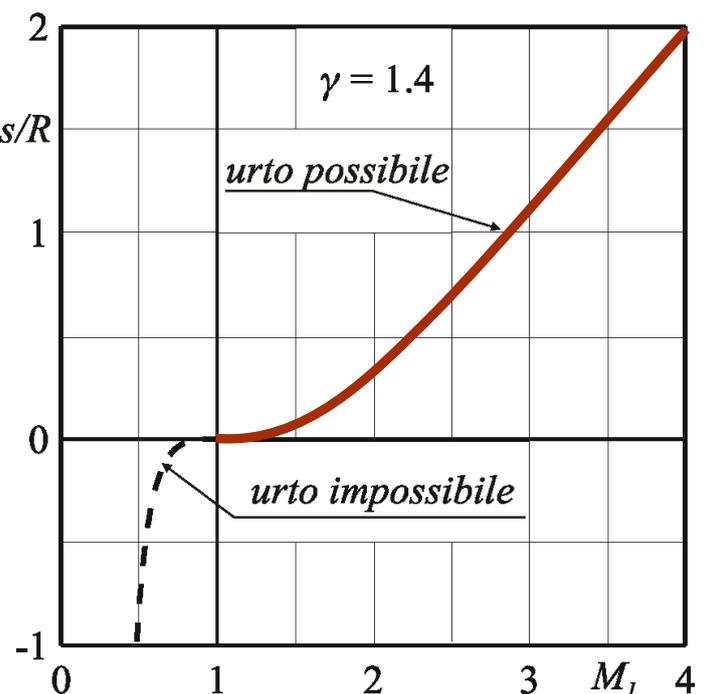


Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Per il **secondo principio** della **termodinamica** il salto di **entropia** $\Delta s/R$ deve essere **positivo** ed è possibile dare un verso alla trasformazione.

Dal diagramma si vede che gli unici **urti possibili** sono quelli in cui $M_1 \geq 1$.



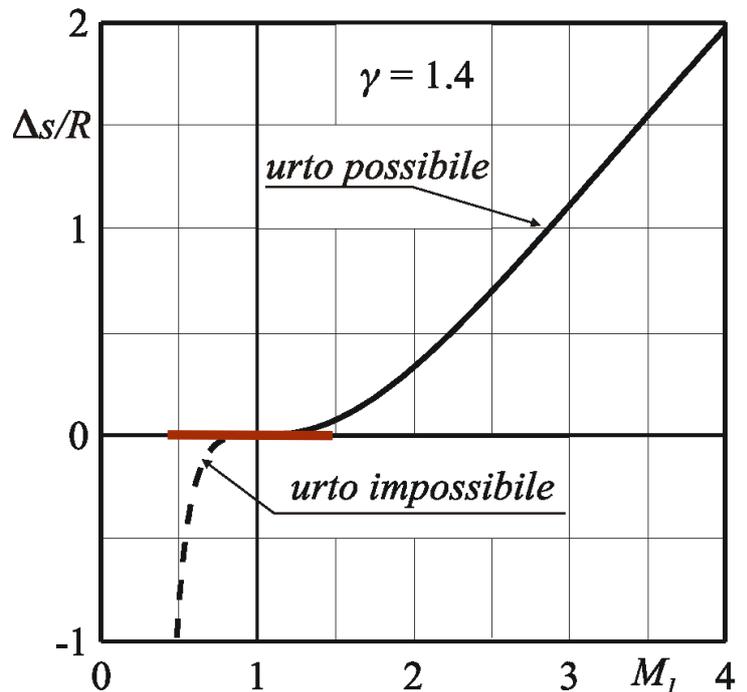
Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di $M_1 = 1$ si ha:

$$\lim_{M_1 \rightarrow 1} \frac{\Delta s}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

La variazione d'entropia ha un **flesso a tangente orizzontale**, ovvero la prime due derivate, nell'intorno di $M_1 = 1$ sono nulle.

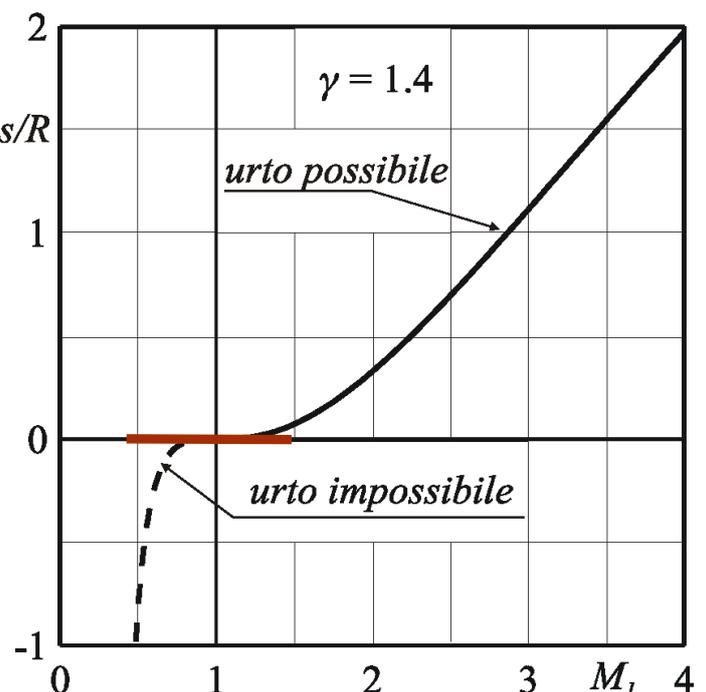


Onde d'urto normali gas più che perfetti

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} + \ln(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]}{\gamma - 1}$$

Le onde d'urto che avvengono per $M_1 = 1$, dette **onde di Mach**, sono **praticamente isoentropiche**, cioè **reversibili**.

Le onde di Mach, essendo reversibili possono essere sia di **compressione** sia di **espansione**.



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Ricapitolando:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left((\gamma - 1) + \frac{2}{M_1^2} \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



Onde d'urto normali gas più che perfetti

Oppure in forma più compatta con:

$$\Theta = 2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1), \quad \Xi = (\gamma - 1)M_1^2 + 2:$$

$$M_2^2 = \frac{\Xi}{\Theta}:$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{\Xi}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Theta}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Theta \Xi}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = (\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\Xi}{M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Theta^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{\Theta} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



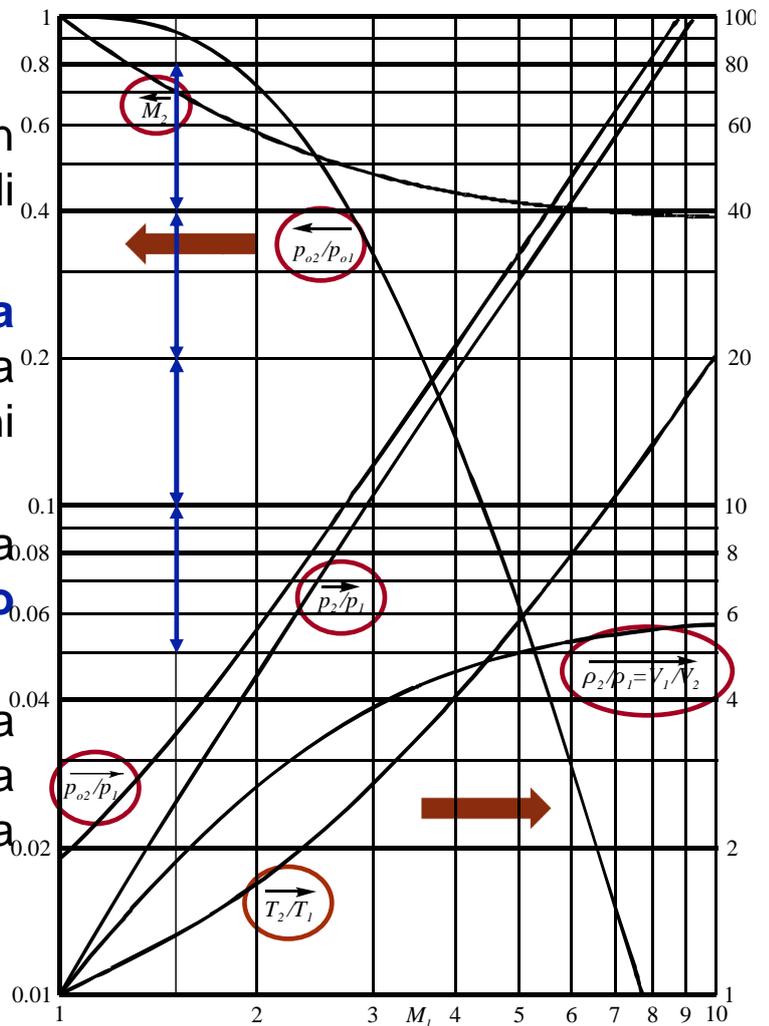
Onde d'urto normali gas PCP

Il diagramma è **bi-logaritmico**. In modo da meglio visualizzare grandi variazioni.

In un diagramma **logaritmico a** parità di distanza lungo un asse sia hanno le stesse variazioni percentuali.

I rapporti che si leggono sulla scala di **destra** comportano un **aumento** della grandezza attraverso l'urto.

I rapporti che si leggono sulla scala di **sinistra** comportano una **diminuzione** della grandezza attraverso l'urto.

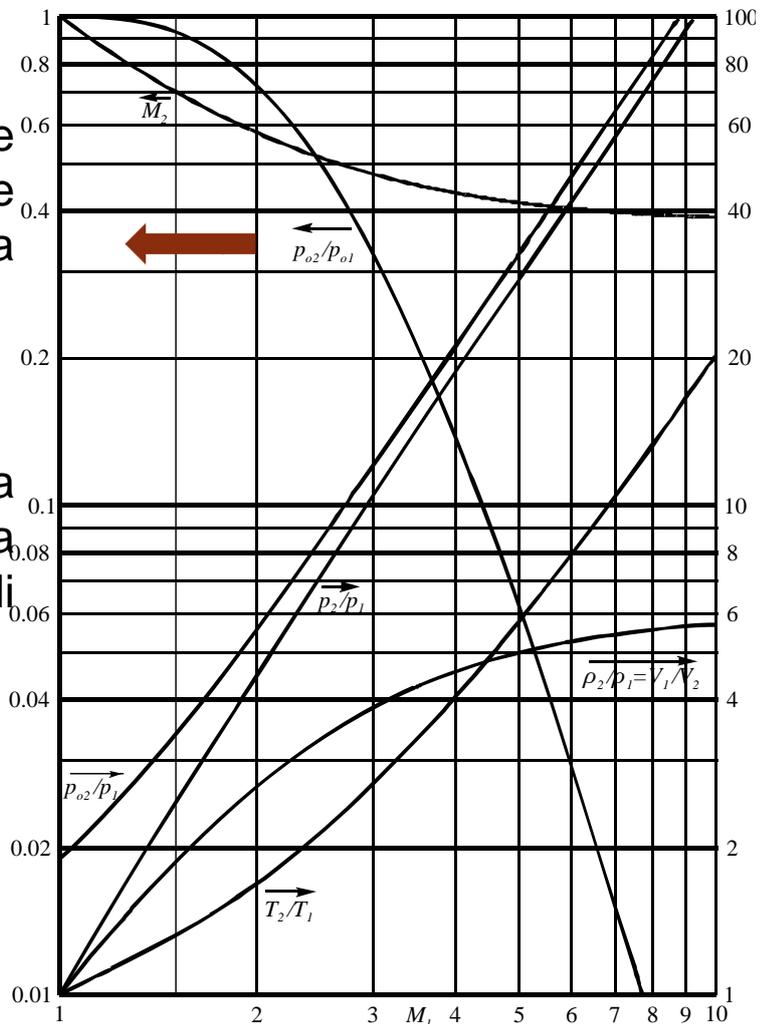


Onde d'urto normali gas PCP

Per numero di **Mach** a monte prossimo a 1 si ha $p_{t2}/p_{t1} \cong 1$ e l'onda può essere considerata **isentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{t2}}{p_{t1}}$$

Infatti la pendenza iniziale della **pressione** è **maggiore** di quella della **densità** che è maggiore di quella della **temperatura**.



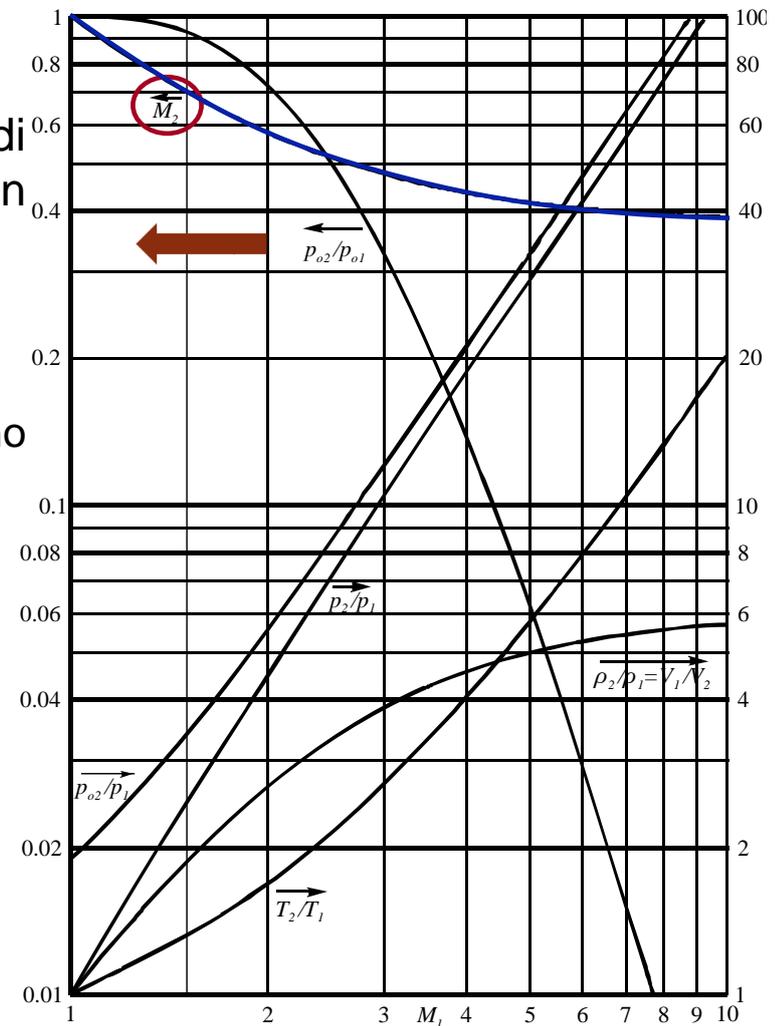
Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una diminuzione:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

- del numero di Mach a valle M_2 , sino al valore asintotico M_{2l} ;

$$M_{2l} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} = (0.3780);$$



Onde d'urto normali gas PCP

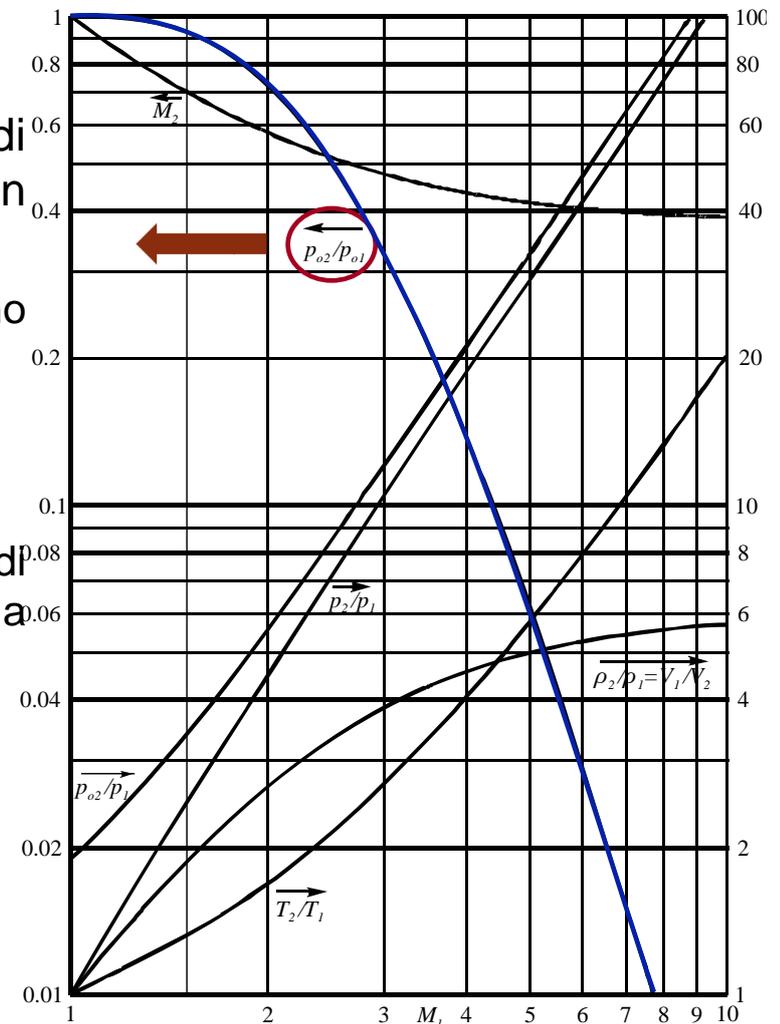
All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha una diminuzione:

- del numero di Mach a valle M_2 , sino al valore asintotico M_{2l} ;

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = (\gamma + 1)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\Xi}{M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

- del rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia) sino a zero.

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{t2}}{p_{t1}} = \text{cost } M_1^{1-\gamma} = 0;$$



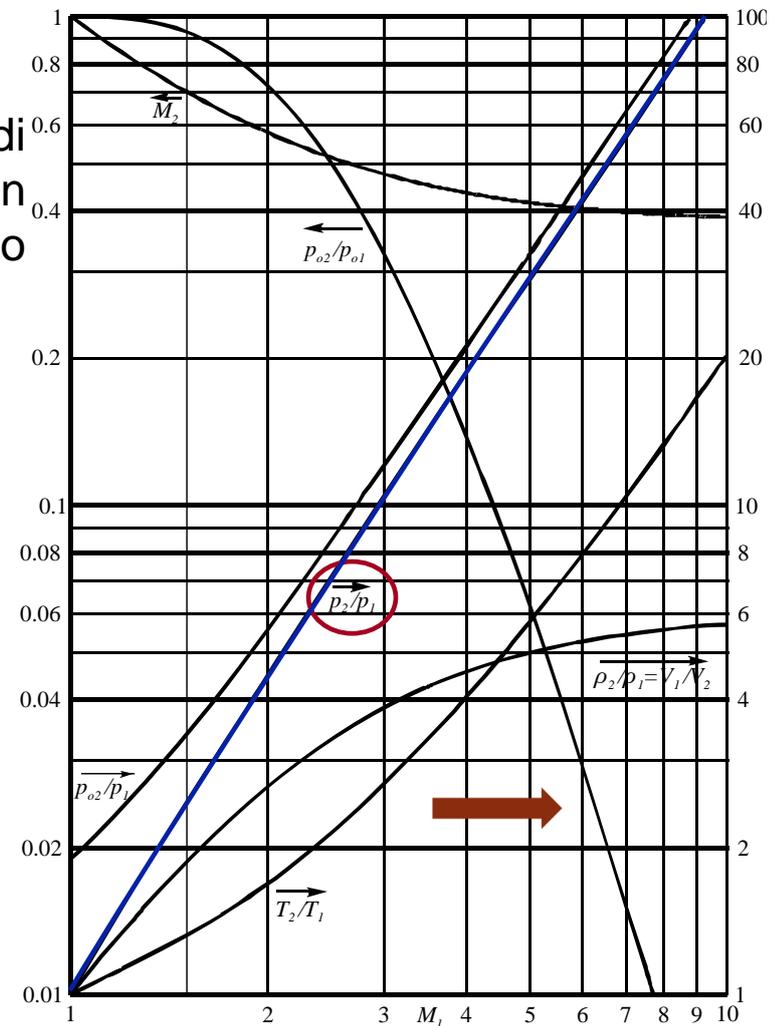
Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1};$$

- pressione;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



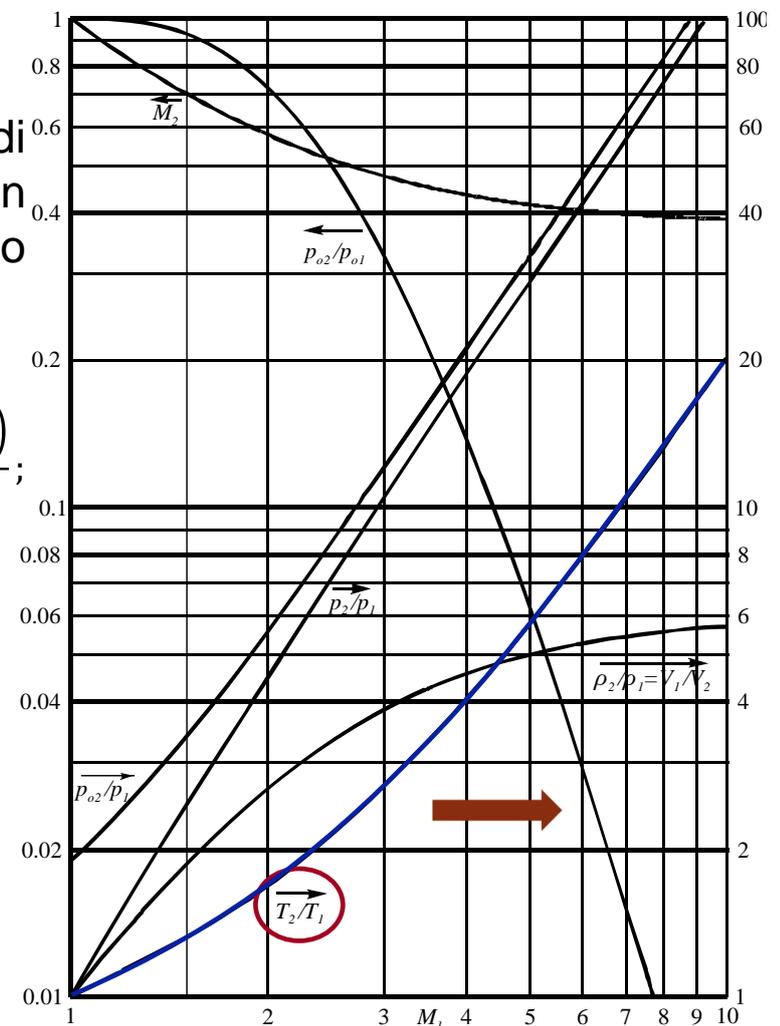
Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2};$$

- temperatura;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 1} M_1^2 = \infty;$$



Onde d'urto normali gas PCP

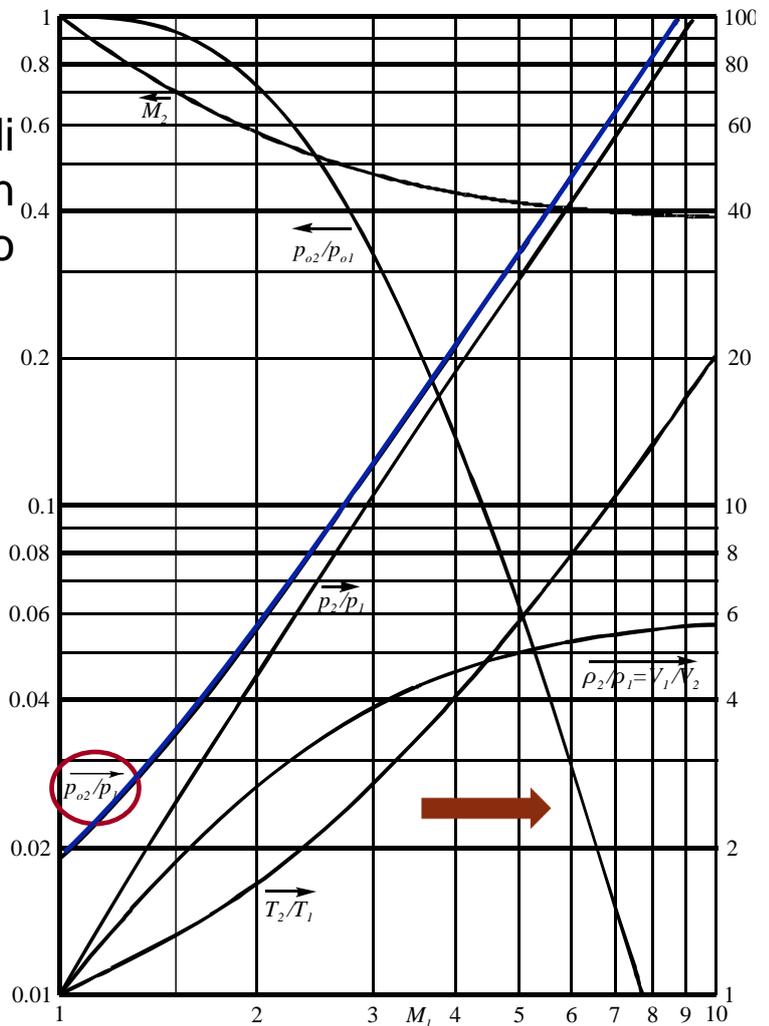
All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{2M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- della funzione di Rayleigh;

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_1} = \text{cost } M_1^2 = \infty$$



Onde d'urto normali gas PCP

All'aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su, si ha un aumento indefinito dei rapporti di:

- pressione;
- temperatura;
- della funzione di Rayleigh;

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

L'aumento della **densità** è invece **limitato**:

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = (6)$$

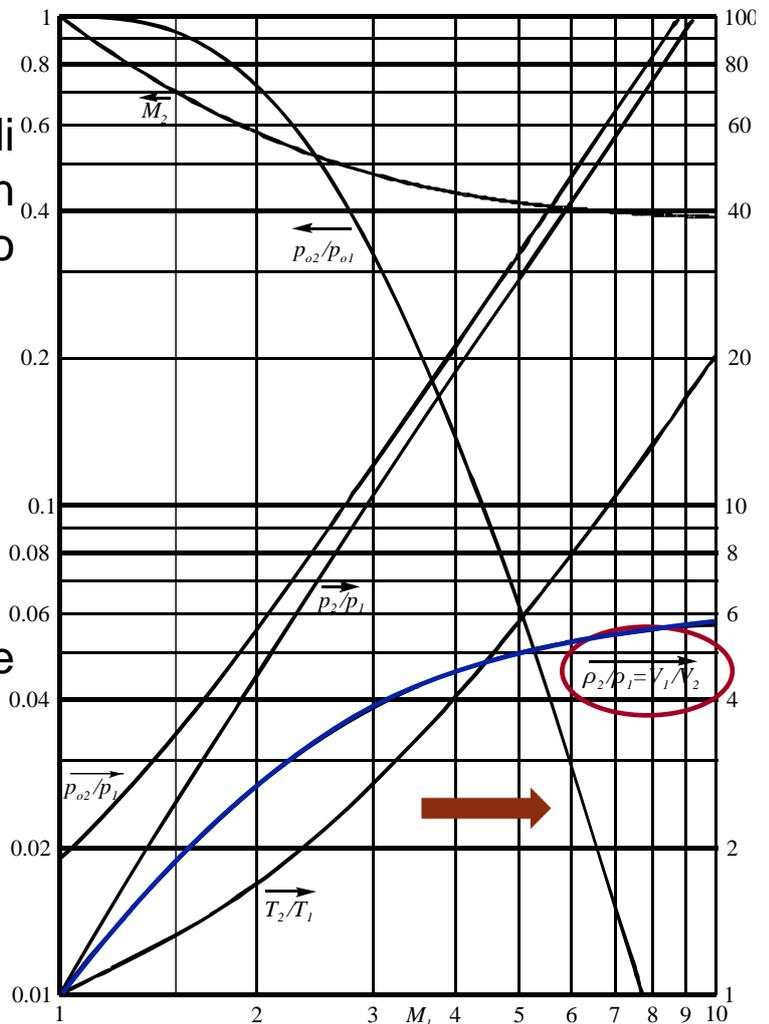


Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



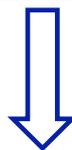
Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



Tabelle - NSW

Queste funzioni sono tabellate:

Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



15.00	.3823	2.623 +2	5.870	4.469 +1	.4395 -3	.3446 -2
17.50	.3811	3.571 +2	5.904	6.049 +1	.2074 -3	.2533 -2
20.00	.3804	4.665 +2	5.926	7.872 +1	.1078 -3	.1940 -2
∞	.3780	∞	6.000	∞	.0000	.0000

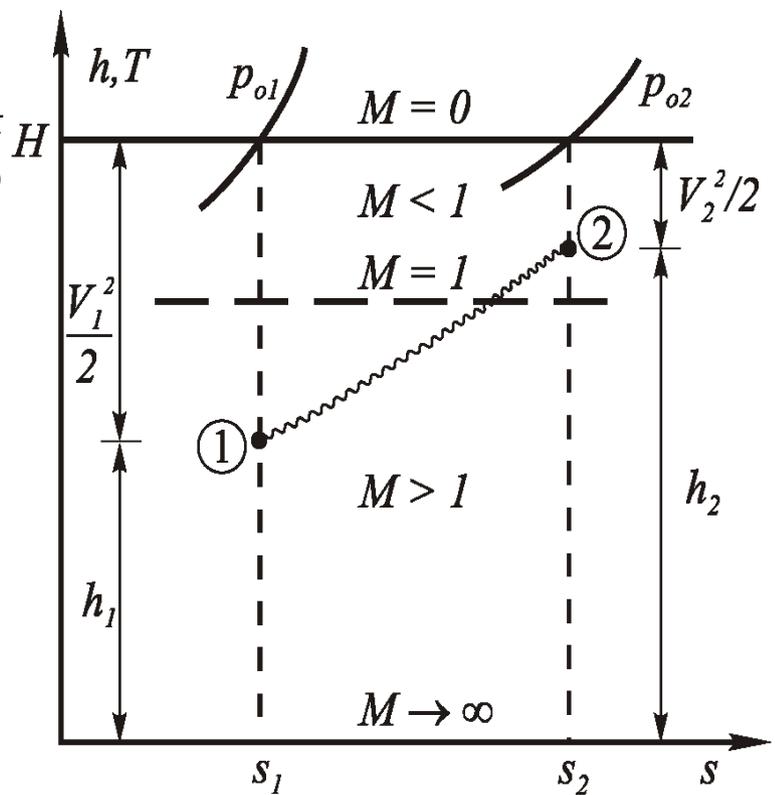


Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

$$h = c_p T$$

- a entalpia costante;



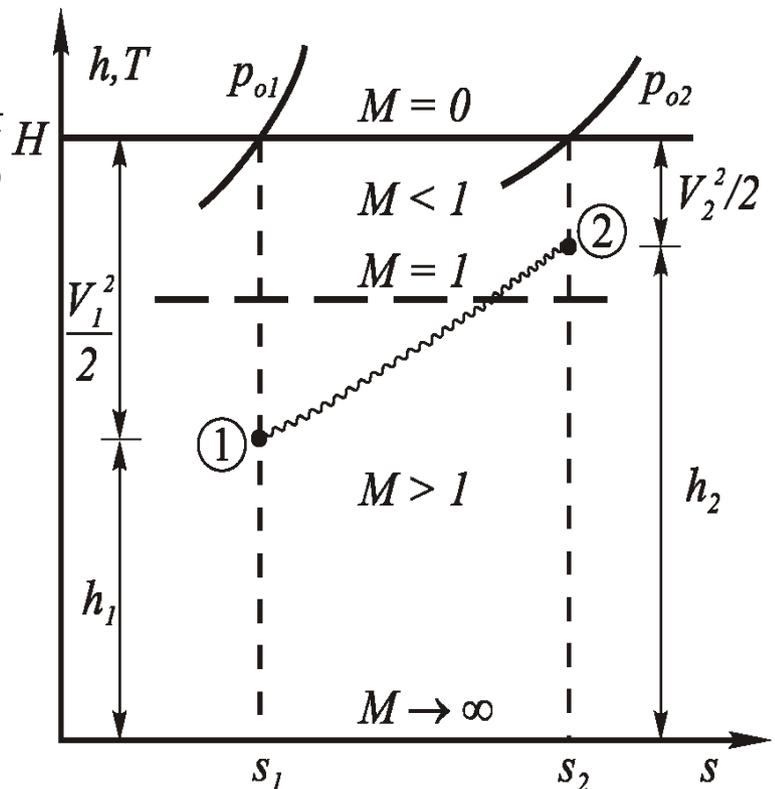
Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

- a entalpia costante;

- a velocità costante;



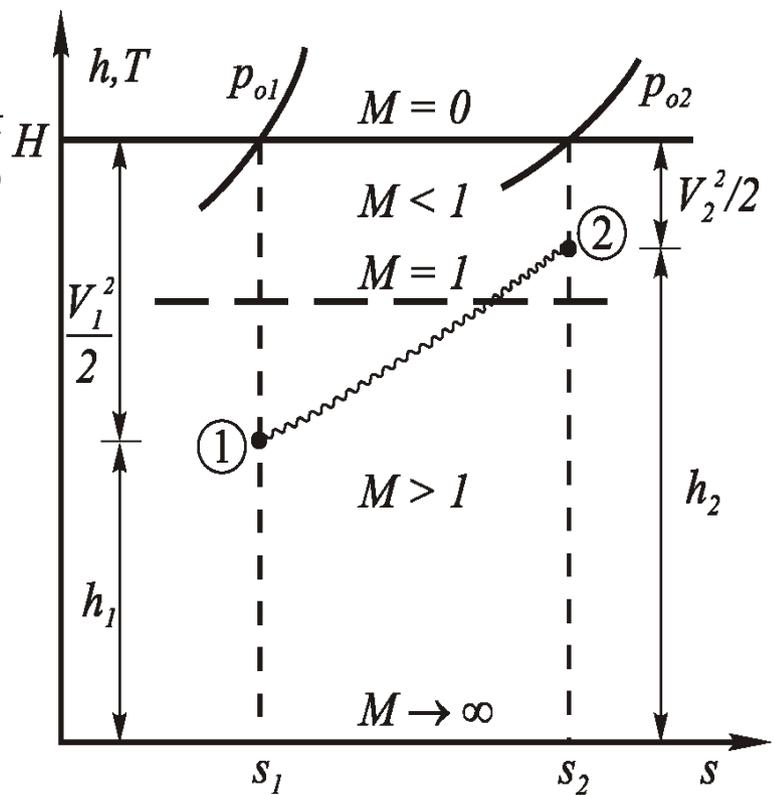
Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}$$

- a numero di Mach costante;

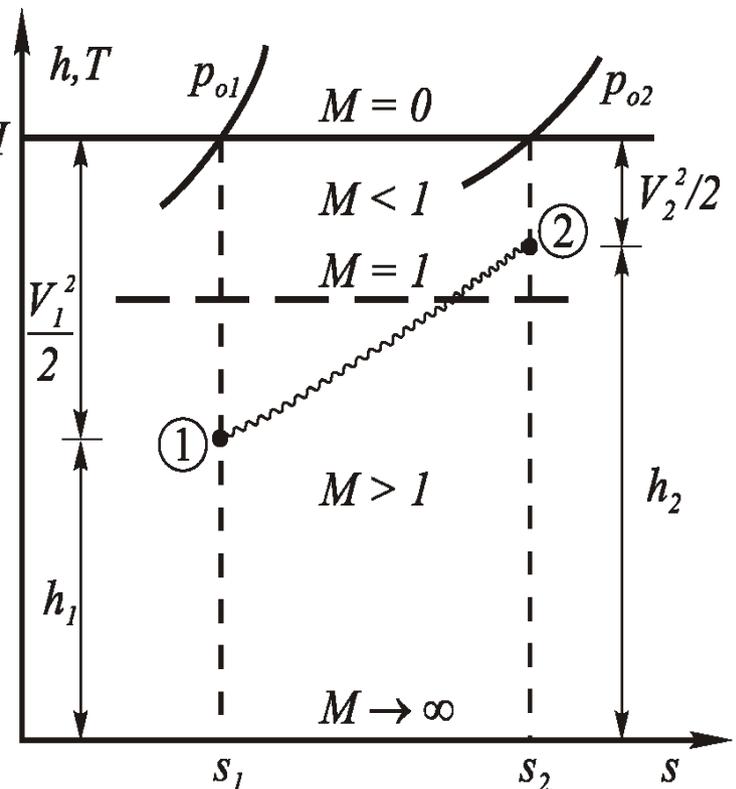


Onde d'urto normali gas PCP

Attraverso l'onda d'urto $H=cost$ mentre s aumenta. Avendo fissato T_o (e H) **rette orizzontali** oltre ad essere delle **isoterme** sono rette:

- a entalpia costante;
- a velocità costante;
- a numero di Mach costante;

La retta a $M=1$, indicata in figura con il tratteggio, separa il moto **supersonico** da quello **subsonico**. I punti a monte (1) ed a valle (2) sono indicati in figura.



Il collegamento è indicato con una linea **ondulata** per mettere in risalto che la trasformazione **non è reversibile** ($\dot{s} > 0$).



Onde d'urto normali gas PCP

Un **onda d'urto** è una superficie di **discontinuità** attraverso la quale avviene una **brusca conversione** di **energia cinetica ordinata** in energia cinetica **disordinata** ad entalpia totale costante.

$$\rho V = G = \text{cost}$$

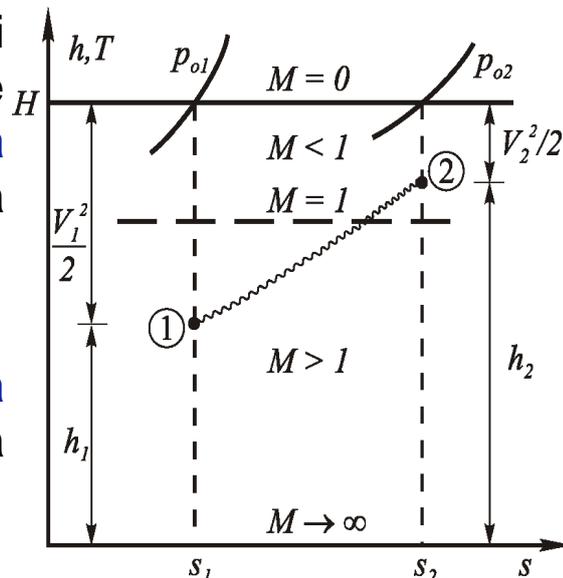
Per la continuità la **diminuzione di velocità** dà luogo ad un brusco **innalzamento** della **densità**.

$$p + \rho V^2 = p + GV = I = \text{cost}$$

Dal bilancio della **quantità di moto** un aumento della **pressione**.

$$h + \frac{V^2}{2} = H = \text{cost}$$

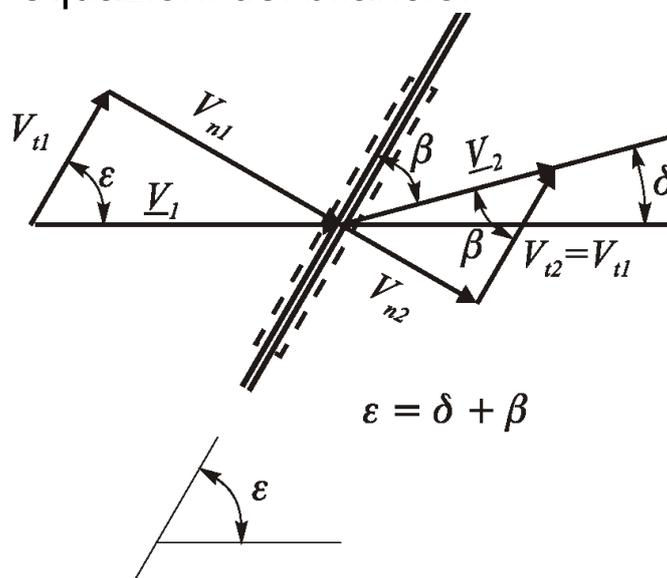
Dalla conservazione dell'**energia** un aumento di **temperatura** e **entalpia**. Ovviamente anche l'**entropia** aumenta.



Onde d'urto oblique

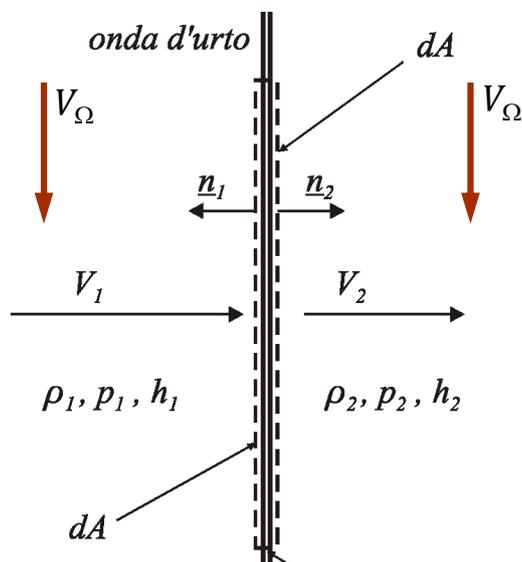
Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di un'**onda d'urto obliqua** stazionaria inclinata di un angolo $\epsilon \neq 90^\circ$ (detto **angolo d'urto**) rispetto alla direzione della corrente a monte.

Questo caso si può **derivare** da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, **cambiando** il **sistema di riferimento** inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.



Onde d'urto oblique

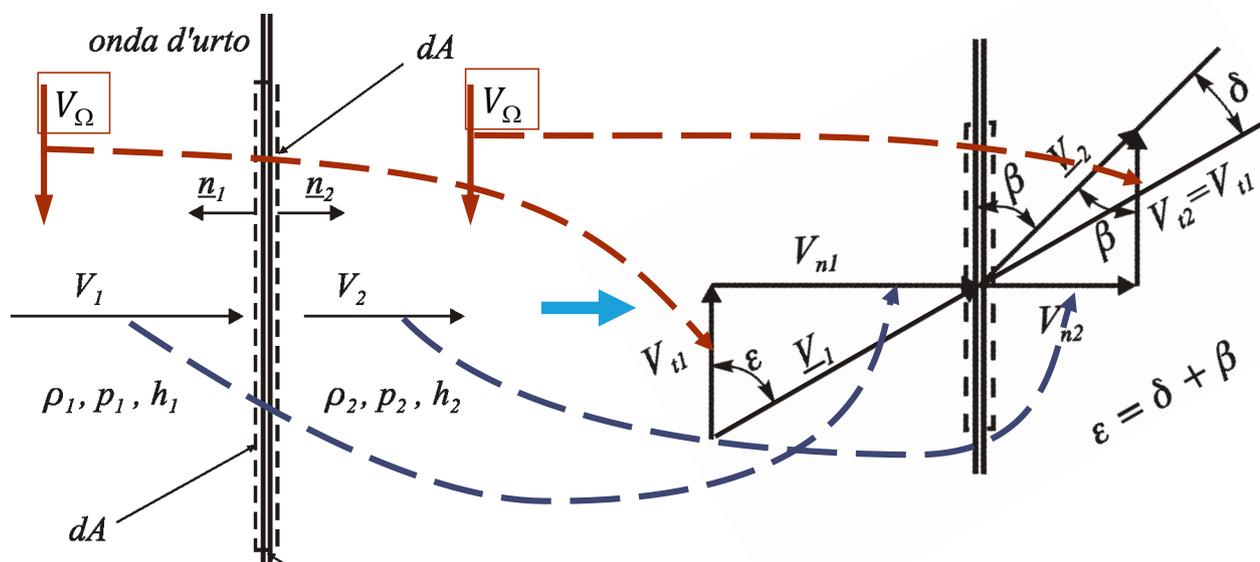
Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale. Il **nuovo** sistema di riferimento inerziale si muove dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con **velocità V_Ω costante** rispetto al precedente.



Onde d'urto oblique

In questo **nuovo** sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità V_1 e V_2 , normali all'onda, anche di una **velocità parallela all'onda** che è la stessa per entrambi i fluidi ed è pari a:

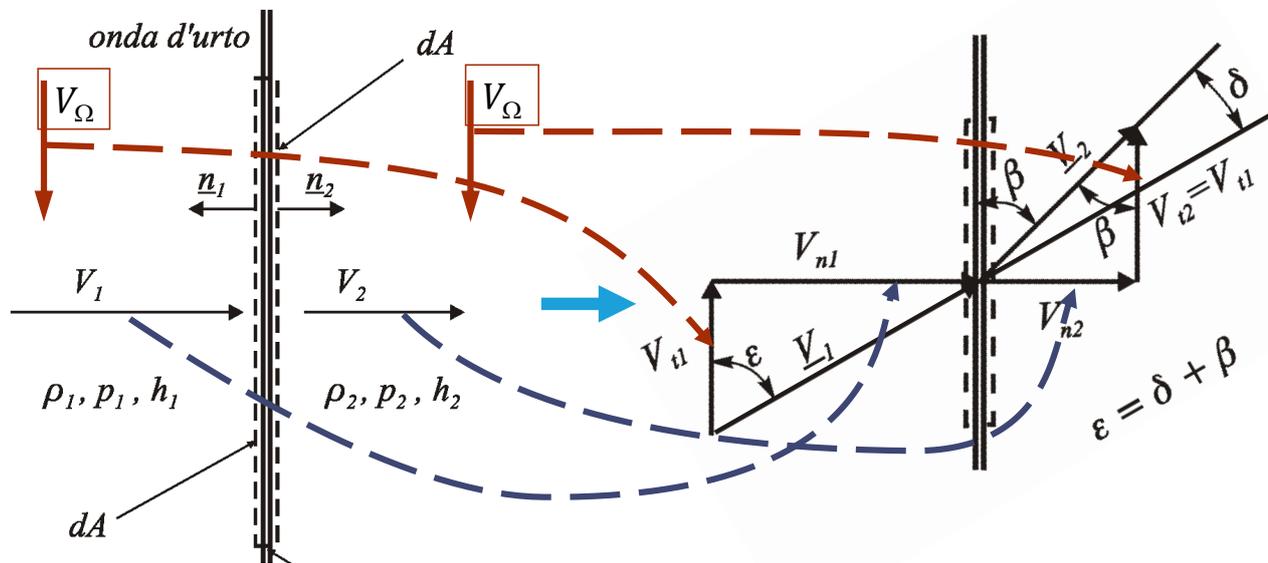
$$V_{t1} = V_{t2} = V_t = -V_\Omega$$



Onde d'urto oblique

Le grandezze statiche non cambiano nel nuovo sistema di riferimento, quindi, intuitivamente, **è possibile trattare l'onda d'urto obliqua con le stesse relazioni dell'onda d'urto normale** purché si considerino solamente le componenti normali delle velocità a monte e a valle.

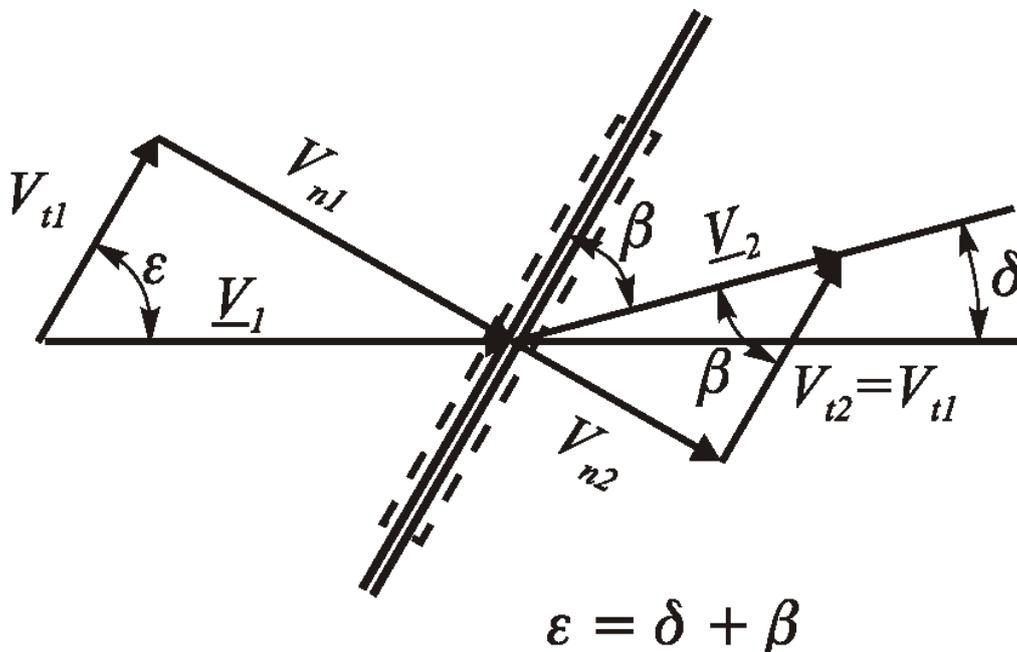
Per comodità si ruota il sistema di riferimento.



Onde d'urto oblique

La **costanza** della componente **tangenziale** della **velocità**, associata alla **riduzione** della componente **normale**, genera la **deviazione** della corrente di un angolo δ (**detto angolo di deviazione della corrente**).

La corrente **ruota** verso **l'onda d'urto** stessa, cioè tende ad **adagiarsi** sull'onda.



Onde d'urto oblique

La **componente normale** (spesso detta semplicemente *Mach normale*) del numero di Mach a monte dell'onda d'urto è definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \epsilon}{a_1} = M_1 \sin \epsilon$$

Quella a valle è:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin \beta}{a_2} = M_2 \sin \beta = M_2 \sin(\epsilon - \delta)$$

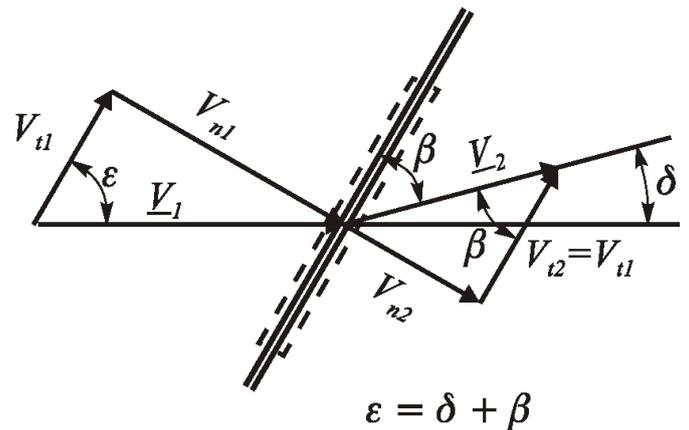
Evidentemente si ha:

$$M_{n1} > 1, \quad M_{n2} < 1$$

E.g. con queste posizioni si ha:

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)}$$

$$M_2^2 \sin^2 \beta = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \epsilon + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \epsilon - (\gamma - 1)}$$



Onde d'urto oblique

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \epsilon - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

Il **salto di pressione**, che è una misura della **forza** di un'onda d'urto, aumenta con l'**angolo d'urto**.

Evidentemente l'onda d'urto **normale** ($\epsilon = 90^\circ \rightarrow \sin \epsilon = 1$) è quella che provoca il **massimo salto di pressione** attraverso l'urto.

Viceversa l'onda diventa **evanescente** (salto di pressione unitario ovvero forza nulla) per il valore minimo dell'angolo d'urto che corrisponde all'**onda di Mach**. Cioè quando:

$$M_{n1} = M_1 \sin \epsilon = 1 \rightarrow \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$$

Evidentemente valori di $\epsilon < \mu$ non **sono possibili** perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda **risulterebbe inferiore all'unità**.

μ è detto **angolo di Mach**.



Onde d'urto oblique

Partendo dalla costanza della componente tangenziale della velocità si può determinare il legame fra M_1 , ϵ e δ :

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1} \quad \left(\cot \epsilon = \frac{1}{\tan \epsilon} \right)$$

La **deviazione** della corrente è **nulla** quando:

- $\cot \epsilon = 0 \rightarrow \epsilon = 90^\circ$ che corrisponde al caso di **onda normale**;
- $\sin^2 \epsilon = 1/M_1^2 \rightarrow \epsilon = \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$ che corrisponde al caso di **onda di Mach**.

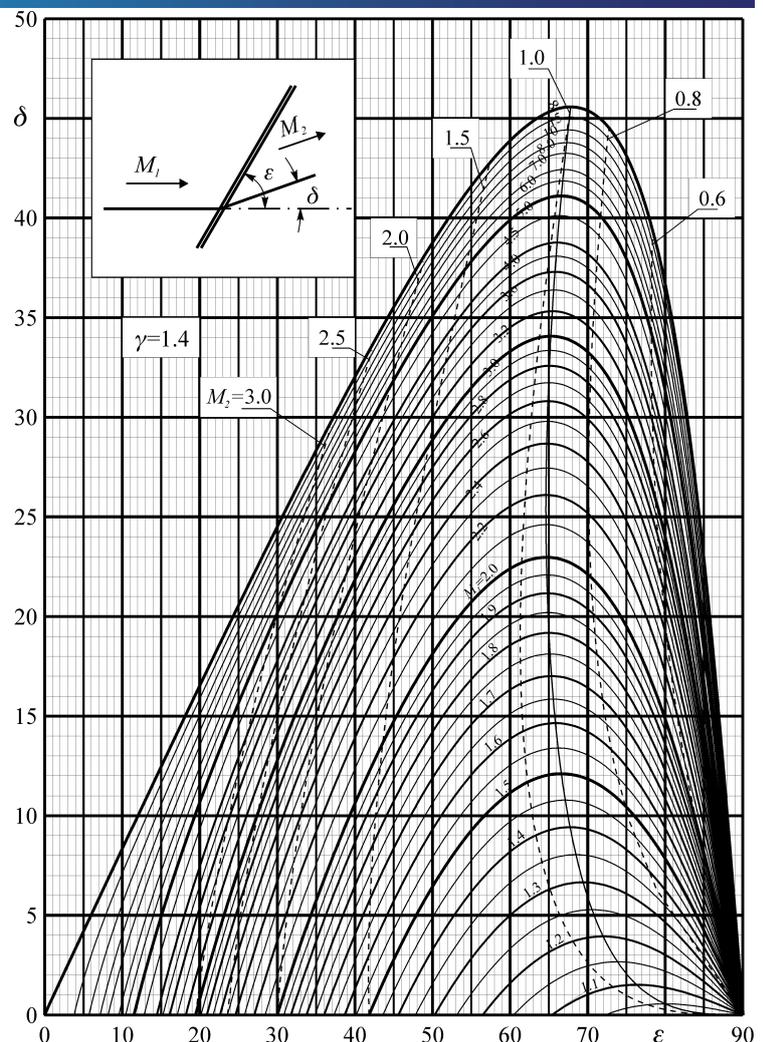
Come già detto l'**onda di Mach** è quella per la quale il numero di Mach **normale** è **unitario** per cui essa **non comporta** alcuna **variazione** finita delle **proprietà termofluidodinamiche del fluido**.



Onde d'urto oblique

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per $\epsilon = \mu$ e per $\epsilon = 90^\circ$; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.



Onde d'urto oblique

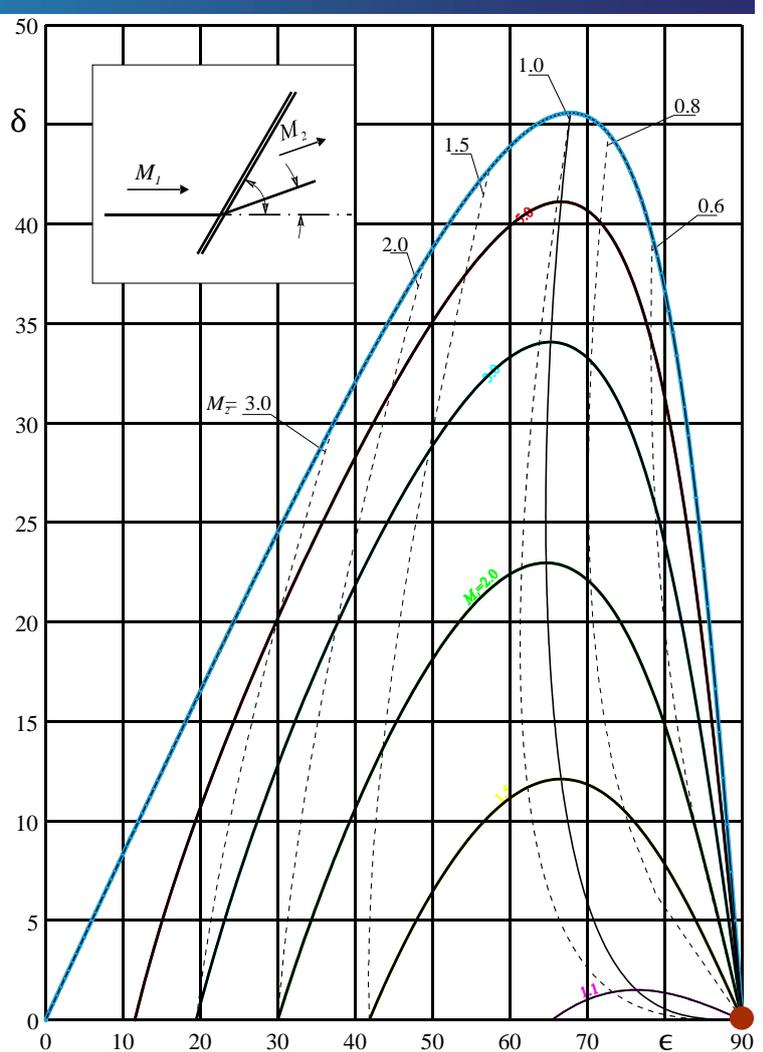
$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per $\epsilon = \mu$ e per $\epsilon = 90^\circ$; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.

La **parabola** si **sposta** verso l'**alto ingrandendosi** all'**aumentare** del numero di **Mach**.

La **parabola** si **sposta** verso il **basso** rimpicciolendosi al **diminuire** del numero di **Mach**.

Nel limite di $M_1 \rightarrow 1$ la curva degenera nel punto $\delta = 0, \epsilon = 90$.



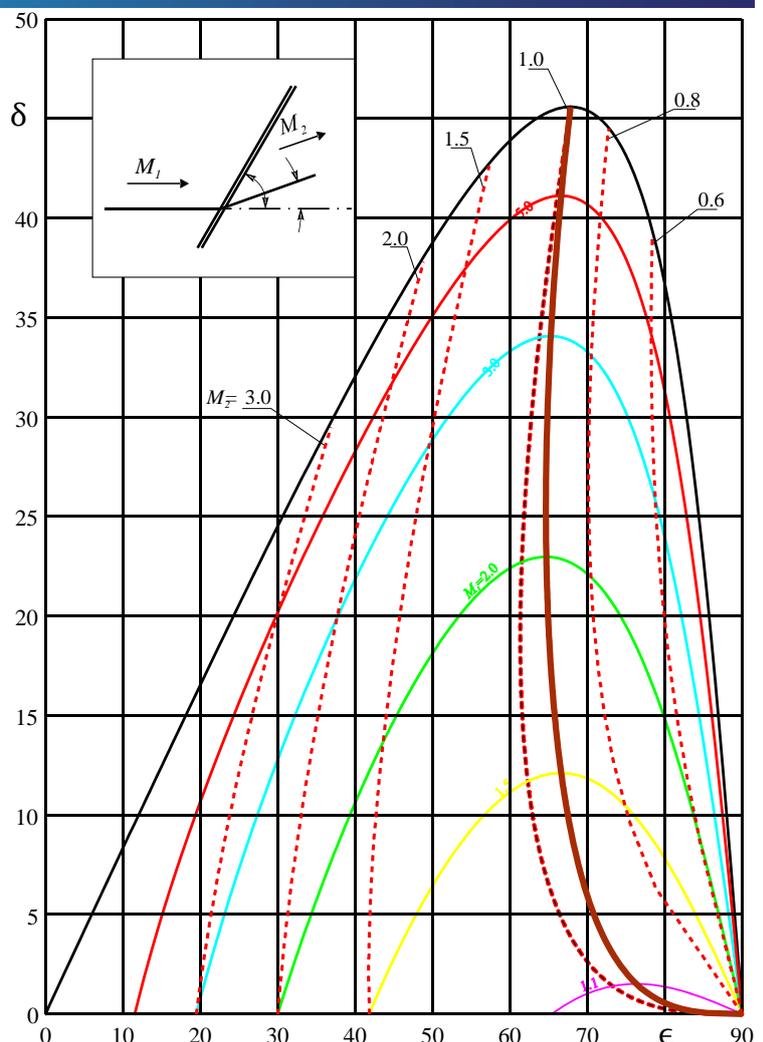
Onde d'urto oblique

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

Le linee tratteggiate indicano le curve **isovalore** del numero di **Mach a valle**.

In particolare la curva relativa a $M_2 = 1$ separa le zone in cui il moto a valle è **supersonico** (a sinistra) da quelle in cui è **subsonico** (a destra).

La linea continua individua invece il luogo dei punti in cui l'**angolo di deviazione è massimo**.



Onde d'urto oblique

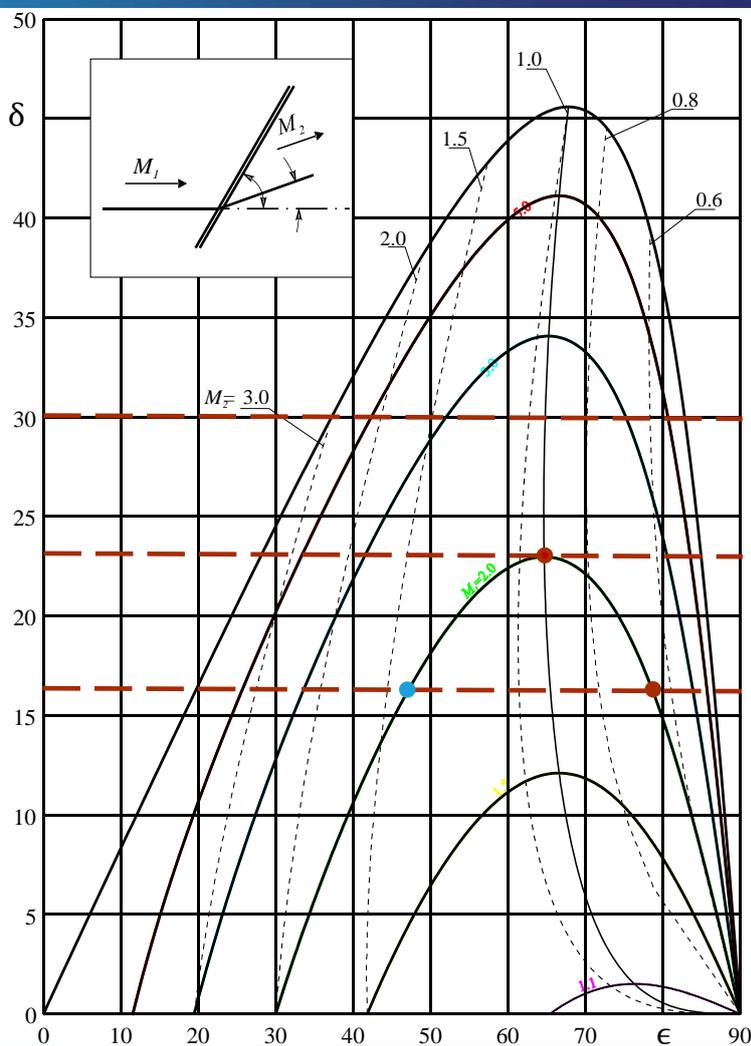
Per un **dato** numero di **Mach** (e.g. 2.0) e per δ **crescente** si hanno tre possibilità:

- **due soluzioni** con due valori distinti per l'angolo ϵ ;
- **una sola soluzione**;
- **nessuna** soluzione.

La soluzione unica corrisponde alla **deviazione massima** δ_{max} per un dato numero di Mach.

Per $\delta > \delta_{max}$ non esistono soluzioni.

Se $\delta > \delta_{max}$ **non** è **possibile deviare** la corrente con una **semplice** onda d'urto obliqua.



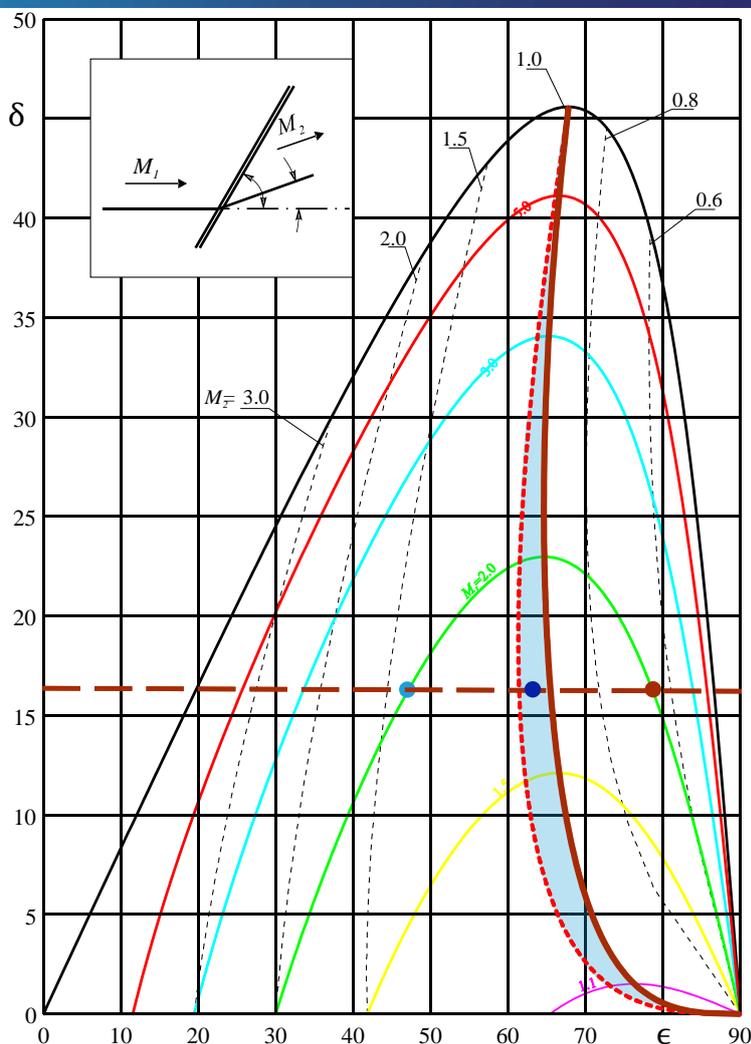
Onde d'urto oblique

Nel caso delle due soluzioni, la **prima** (valore di ϵ inferiore) è detta soluzione **debole** mentre l'altra è la soluzione **forte**.

Infatti, per un dato numero M_1 , valori **maggiori** di ϵ corrispondono ad un più **elevato** numero di **Mach normale** e, di conseguenza, ad una maggiore **intensità (forza)** dell'urto.

La soluzione **forte** provoca sempre $M_2 < 1$;

La soluzione **debole** dà luogo quasi sempre a $M_2 > 1$, salvo che nella **falce** vicino all'angolo di deviazione massima della corrente per la quale $M_2 < 1$.

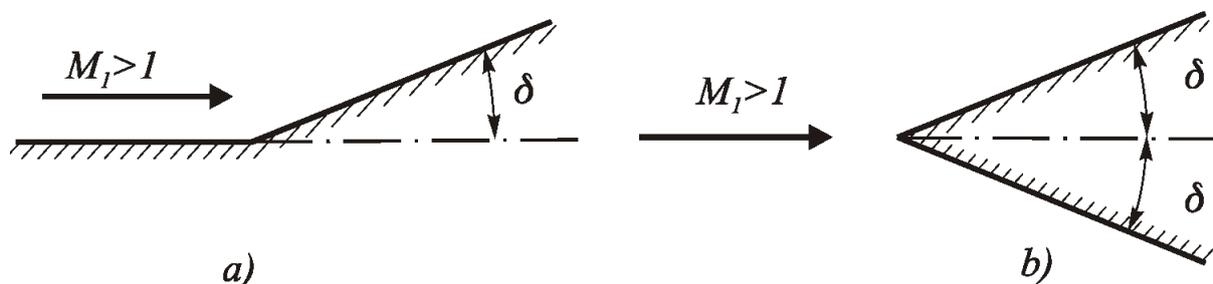


Moto supersonico su un diedro

Si consideri un flusso **supersonico** su una parete che devia bruscamente di un **angolo δ** per la presenza di una **concavità** o di un **diedro infinito** (la geometria è bidimensionale piano).

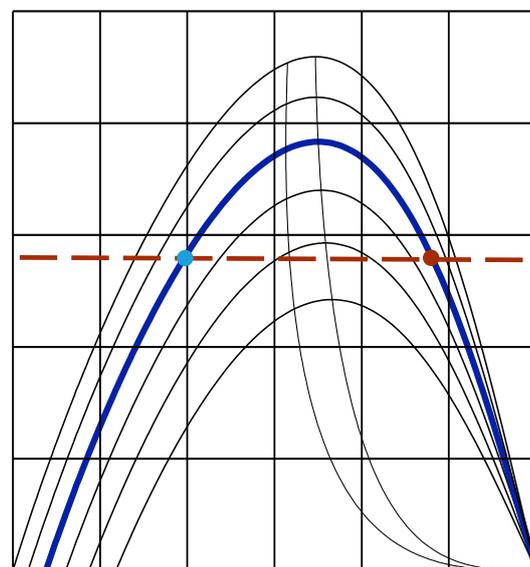
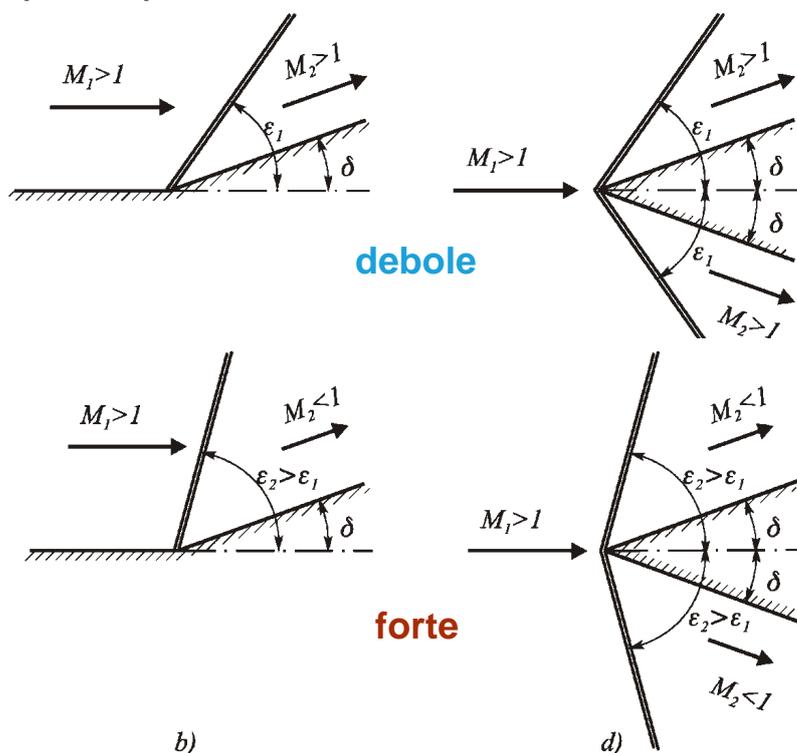
In dipendenza dai valori di M_1 e di δ , sono possibili i tre comportamenti prima descritti.

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione δ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a M_1 ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.



Moto supersonico su un diedro

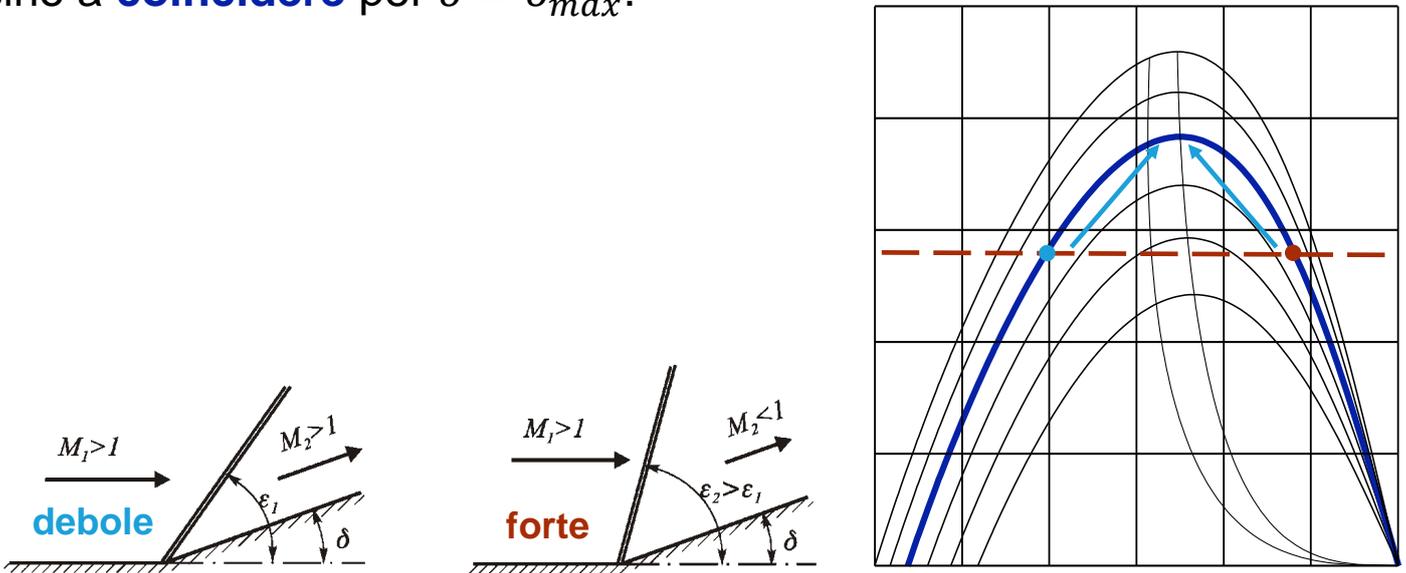
Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione δ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a M_1 ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.



Moto supersonico su un diedro

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione δ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a M_1 ; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.

All'aumentare di δ , e/o al **diminuire** M_1 , i due **angoli di inclinazione** ϵ relativi alla soluzione **debole** e a quella **forte**, tendono ad avvicinarsi sino a **coincidere** per $\delta = \delta_{max}$.



Moto supersonico su un diedro

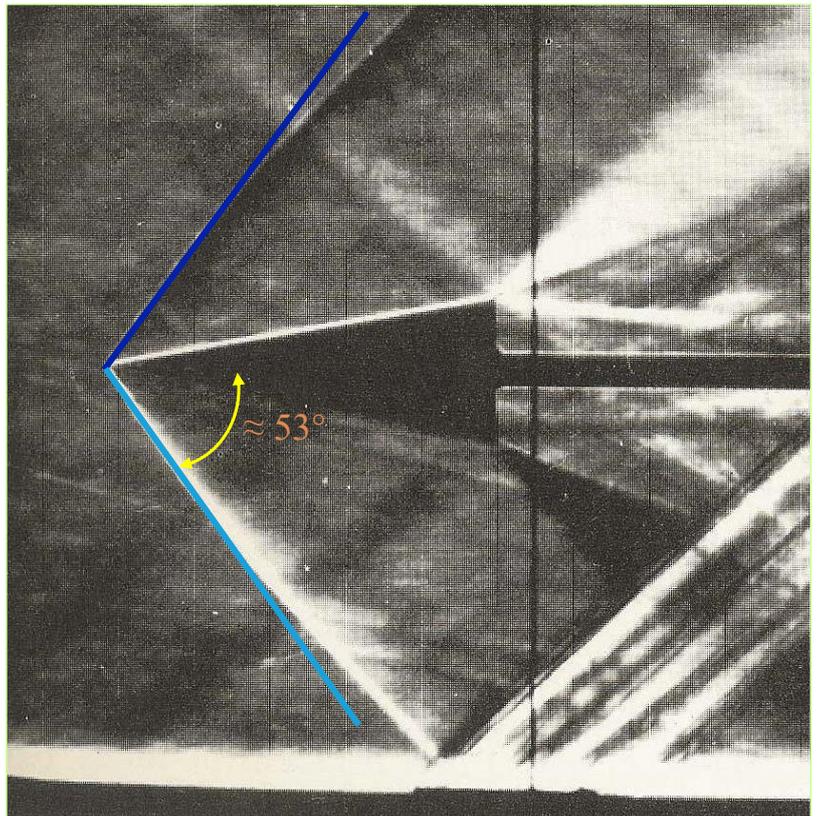
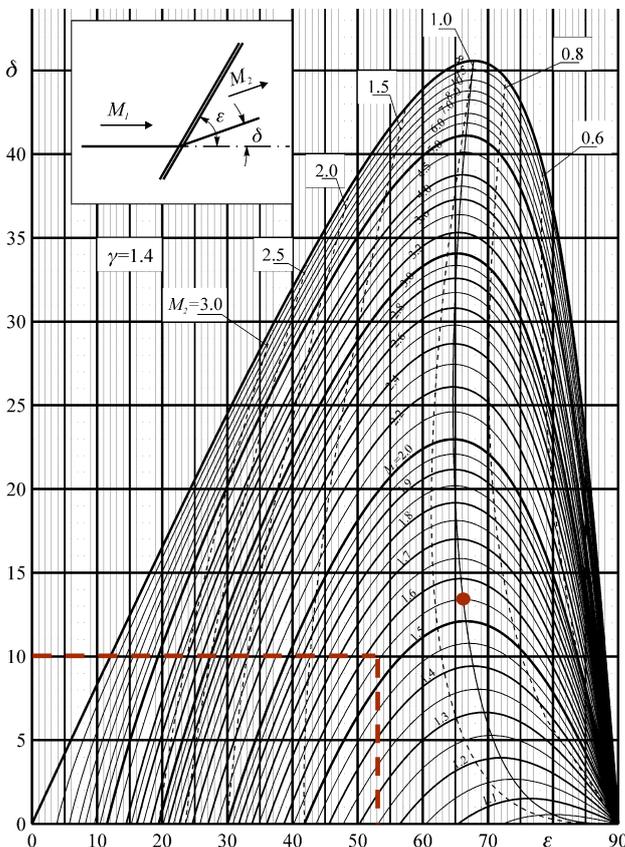
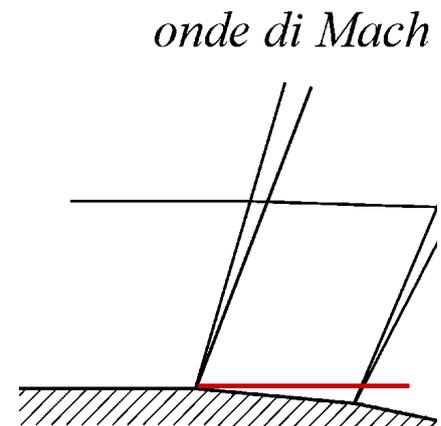
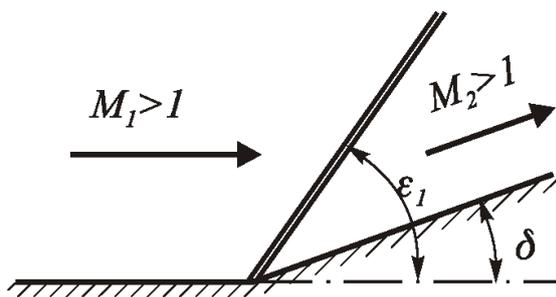


Immagine Schlieren di un flusso **supersonico** di aria su un **diedro** con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 10^\circ$ ($< \delta_{max}$). La soluzione in questo caso è **debole**.



Onde di espansione

La deviazione imposta da un angolo **concavo** della superficie è resa possibile dalla nascita di **un'onda d'urto obliqua**, viceversa, nel caso in cui l'angolo formato dalla parete sia **convesso** anziché concavo nasce un **ventaglio d'espansione**.



Onde di espansione

La deviazione imposta da un angolo **concavo** della superficie è resa possibile dalla nascita di **un'onda d'urto obliqua**, viceversa, nel caso in cui l'angolo formato dalla parete sia **convesso** anziché concavo nasce un **ventaglio d'espansione**.

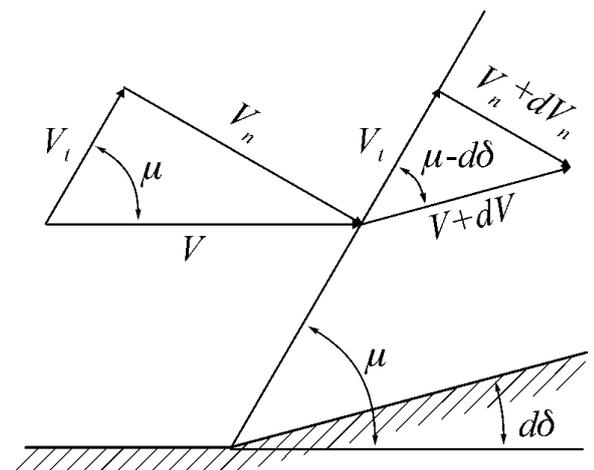
Si supponga, inizialmente, che la parete formi ancora un angolo concavo ma di valore **infinitesimo $d\delta$** .

Per $d\delta \rightarrow 0$, oltre all'onda d'urto normale è possibile anche avere **un'onda di Mach** ($\epsilon \rightarrow \mu = \arcsin 1/M_1$).

Per $d\delta \rightarrow 0$ la soluzione più realistica è quella **debole**, quindi la deviazione sarà prodotta da un'onda di Mach.

L'onda di Mach **non produce** alcuna **compressione finita** della corrente.

Si possono però avere variazioni **infinitesime** ed **isentropiche**.



Onde di espansione

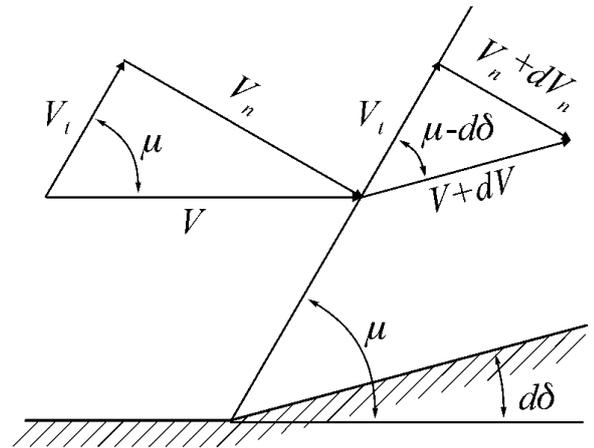
$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Per angoli $d\delta$ **positivi** (parete concava del tipo indicato in figura), la corrente subisce una **diminuzione** (infinitesima) della sua **velocità** ($dV < 0$).

Viceversa, per angoli $d\delta$ **negativi** (parete convessa), la corrente accelera ($dV > 0$).

Ricordando che $dp + \rho V dV = 0$, nel primo caso (**decelerazione**) la corrente è soggetta ad una **compressione** (infinitesima), mentre nel secondo caso (**accelerazione**) ad un'**espansione**.

Attraverso un'**onda di Mach** la trasformazione è **reversibile**.

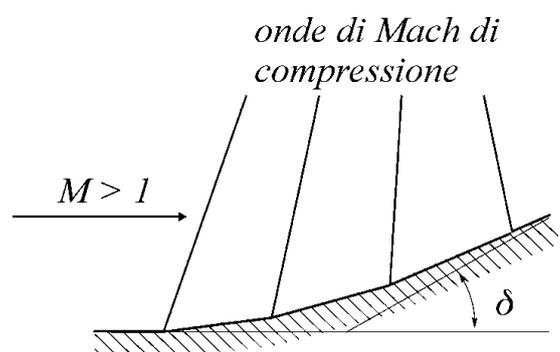
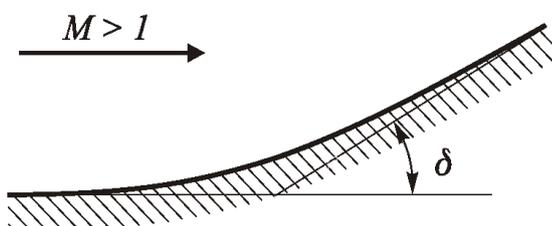


Onde di espansione

Il moto su una **parete concava** con curvatura **continua** che da luogo ad una deviazione finita δ si può approssimare con un numero n molto grande di tratti rettilinei, ciascuno inclinato rispetto al precedente di un **angolo** $\Delta\delta$ ($\delta = n\Delta\delta$), per cui l'effetto sulla corrente è quello che, da ciascun punto angoloso, partirà un'onda di Mach di **compressione**.

Le onde di Mach di compressione tendono a **coalescere** (a unirsi):

- perché la **parete ruota** verso il fluido;
- perché l'**angolo** di inclinazione delle onde μ **aumenta** perché le onde di compressione provocano una progressiva diminuzione del numero di Mach della corrente ($\mu = \arcsin 1/M$).

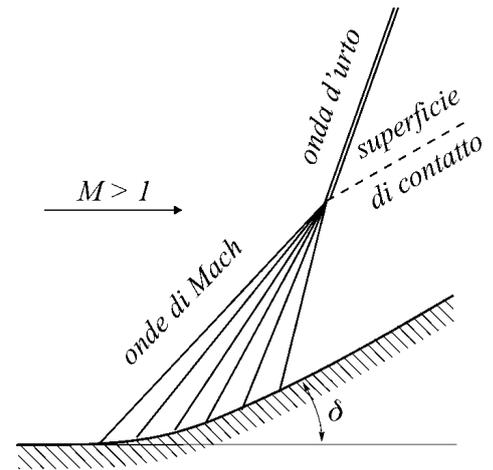
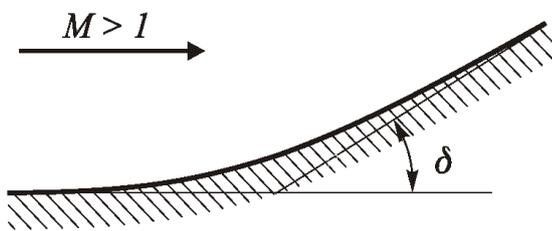


Onde di espansione

In realtà la **curvatura continua** provoca la nascita di **infinite onde** di Mach che creano altrettante **rotazioni infinitesime**

Ad una certa distanza dalla parete, la **coalescenza** delle onde di Mach genera un'onda d'urto.

Ovviamente nel caso in cui la parete risulti concava per **un solo punto angoloso**, le onde di Mach non saranno più presenti e la configurazione sarà piuttosto quella già descritta in precedenza, con la **sola onda d'urto obliqua**.

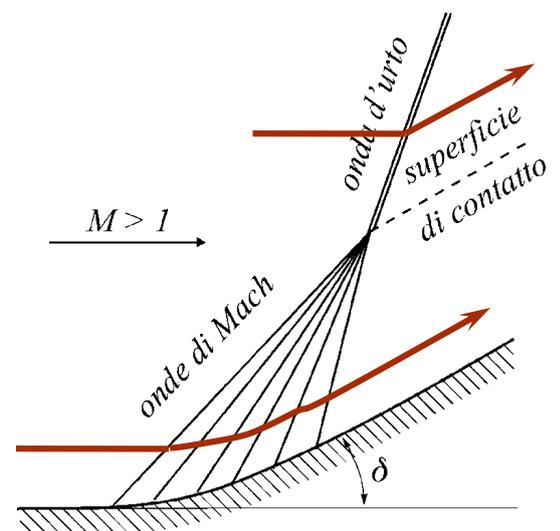
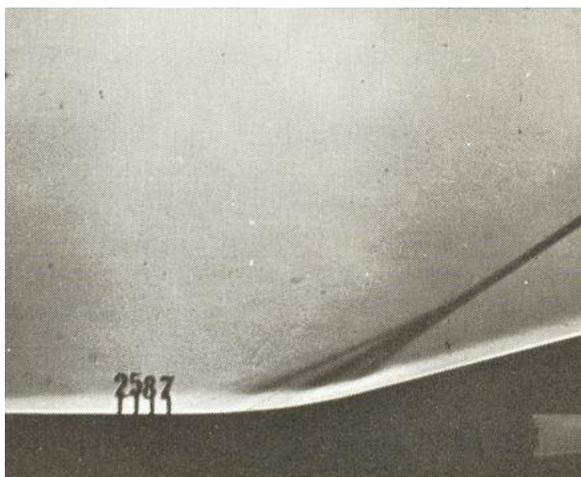


Onde di espansione

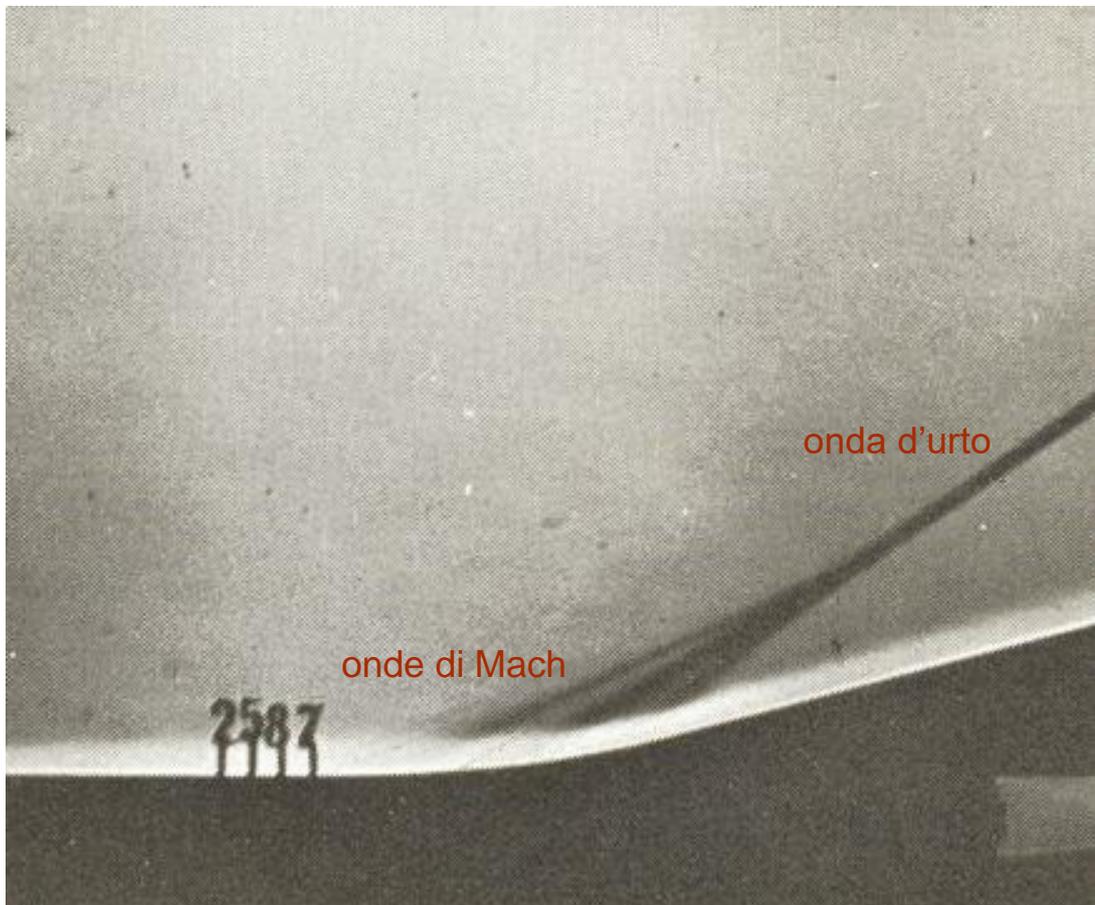
Il fluido, che attraversa le (infinite) onde di Mach, è soggetto ad una trasformazione **isoentropica** (perché ciascuna onda è isoentropica).

Ciò non è vero per il fluido che attraversa l'**onda d'urto** nella quale vi è **produzione** di **entropia**.

La **superficie di contatto**, curva tratteggiata in figura, indica la **superficie** di separazione tra questi due flussi, che, ovviamente, avranno diverse caratteristiche tra loro.



Onde di espansione



Moto su una parete concava a curvatura continua ($M = 2.75$).



Onde di espansione

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Su una parete **convessa** ($d\delta < 0$) avente una curvatura continua, le onde di Mach sono onde di **espansione** che tendono a **divergere**:

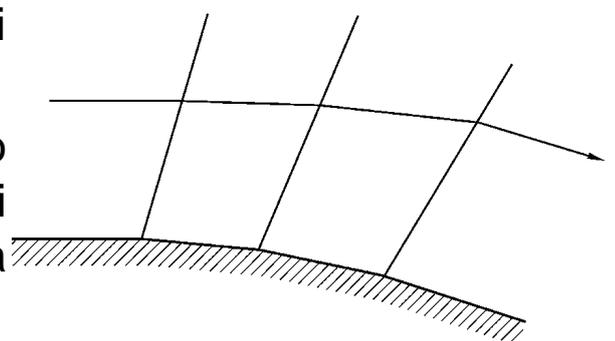
- perché la **parete ruota** allontanandosi dal fluido;
- perché l'**angolo** di inclinazione delle onde μ **diminuisce** perché le onde di espansione provocano un progressivo aumento del numero di Mach della corrente ($\mu = \arcsin 1/M$).

La corrente, oltre ad accelerare diminuisce la sua pressione.

L'insieme delle onde di espansione, che per una deviazione finita $-\delta$ è infinito, si chiama **ventaglio di espansione**.

La relativa trasformazione del fluido (**isoentropica** perché ciascuna onda di Mach è isoentropica) viene denominata **espansione alla Prandtl e Meyer**.

onde di Mach di espansione



Onde di espansione

Nel caso di una **singola deviazione finita** le infinite onde di espansione hanno tutte **origine** nel **punto angoloso**.

Inoltre, nel caso in cui sia $M_1 = 1$, la **prima onda di Mach** che incontra la corrente è **ortogonale** alla corrente stessa ($\mu = \arcsin 1/M$).

Si ribadisce che un'onda di Mach di **espansione** dà luogo ad un $d\delta$ **negativo** per cui la corrente tende (sia pure con una rotazione infinitesima) ad **allontanarsi** dall'onda.

Viceversa, per un'onda di Mach di **compressione**, il $d\delta$ è positivo e la corrente tende ad **adagiarsi** sull'onda così come avviene nel caso di un'onda d'urto obliqua.

