



UNIVERSITY OF NAPLES **FEDERICO II** 1224 A.D.

Propulsione Aerospaziale

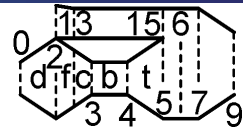
T. Astarita

astarita@unina.it

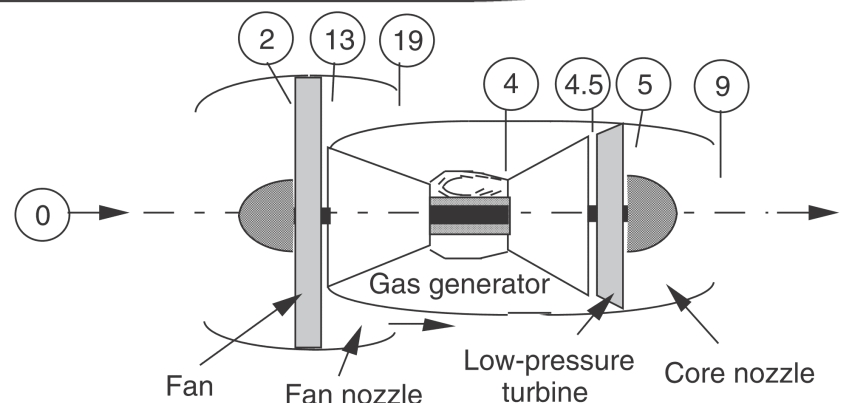
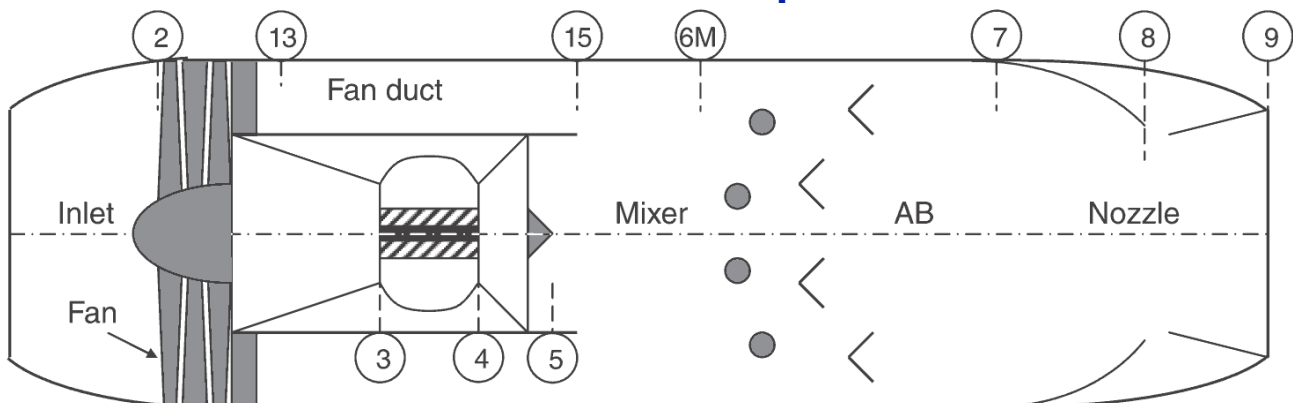
www.docenti.unina.it

Versione 19.4.2023

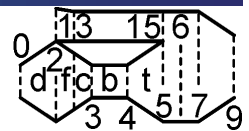
Turbofan a flussi miscelati



Il flusso secondario può essere **miscelato** a valle in un mixer oppure si può avere anche un motore a **flussi separati**.



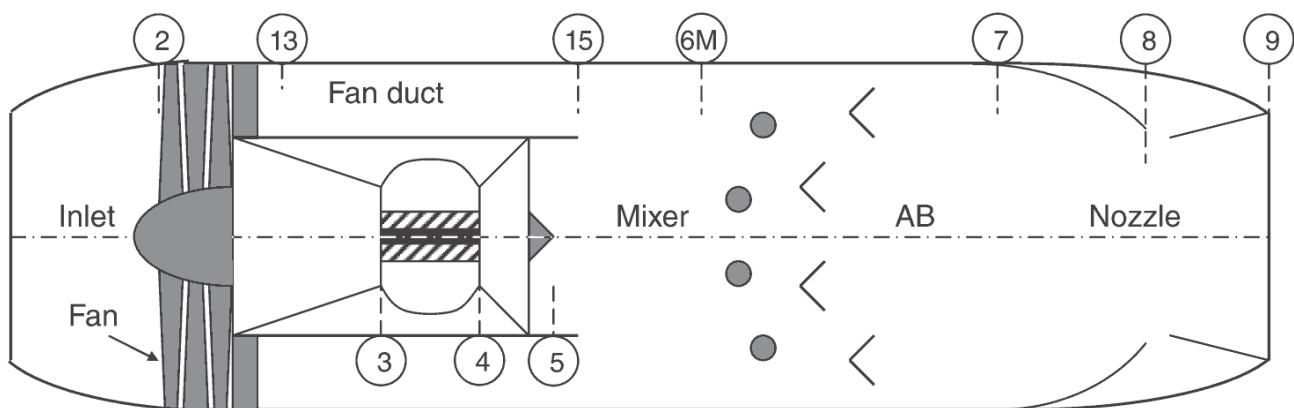
Turbofan a flussi miscelati



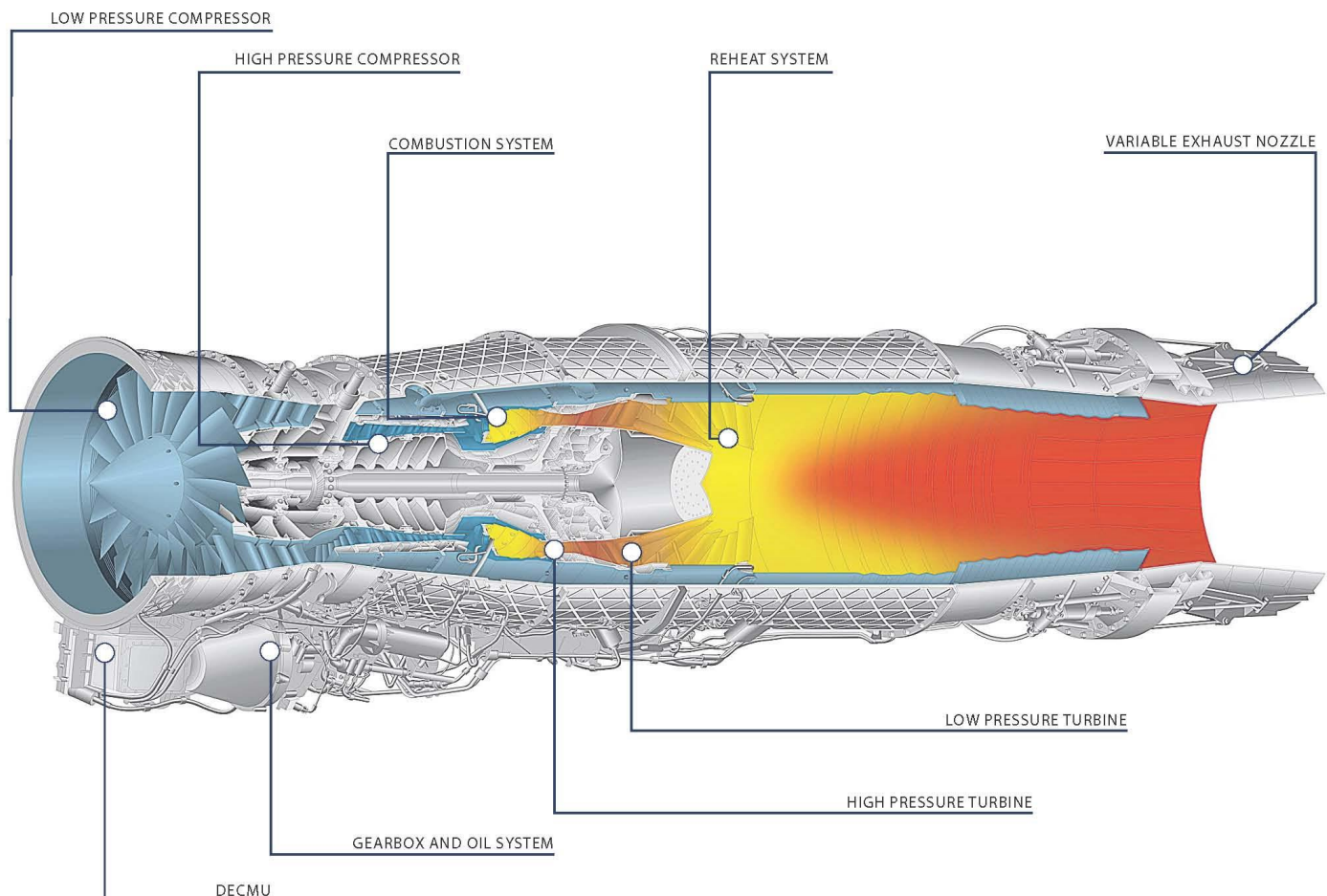
Il flusso secondario può essere **miscelato** a valle in un mixer oppure si può avere anche un motore a **flussi separati**.

I turbofan a flussi miscelati sono spesso utilizzati per applicazioni **militari**. Per ridurre il peso e la sezione frontale il rapporto di **bypass** è notevolmente minore di quello utilizzati per gli aerei **commerciali**.

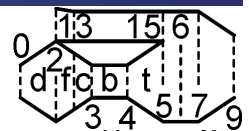
L'utilizzo di un **post bruciatore** è molto vantaggioso perché si ha a disposizione una maggiore portata d'aria e, di conseguenza, un maggiore aumento della spinta rispetto ad un turbogetto classico.



Turbofan a flussi miscelati EuroJet EJ200



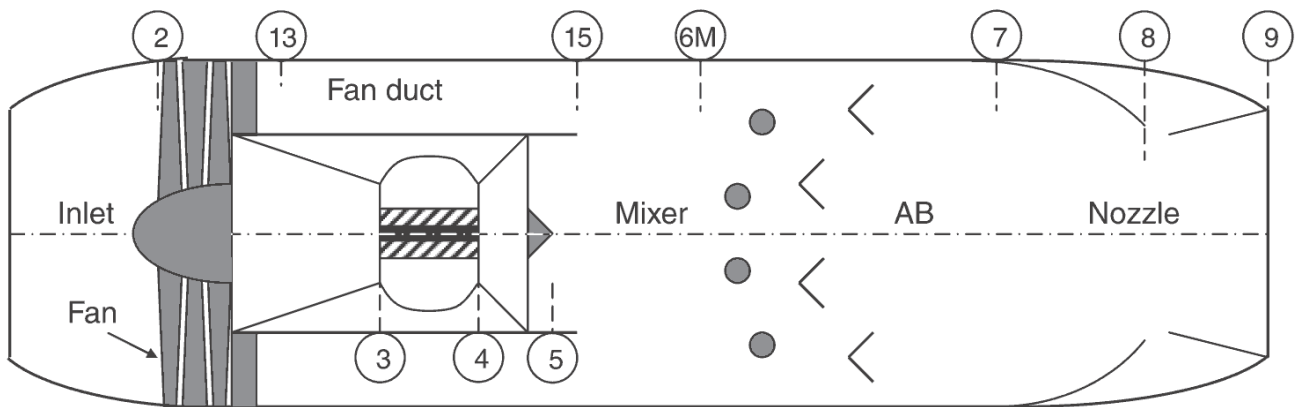
Turbofan a flussi miscelati



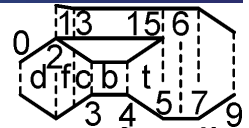
Il nuovo componente da analizzare è il **mixer** che permette di miscelare il gas **freddo** con quello **caldo** portandoli alla stessa temperatura, stessa pressione e composizione.

All'**ingresso** del mixer **temperatura** e **velocità** possono essere discontinue mentre la pressione deve rispettare la condizione di **Kutta** che impone l'uguaglianza delle pressioni.

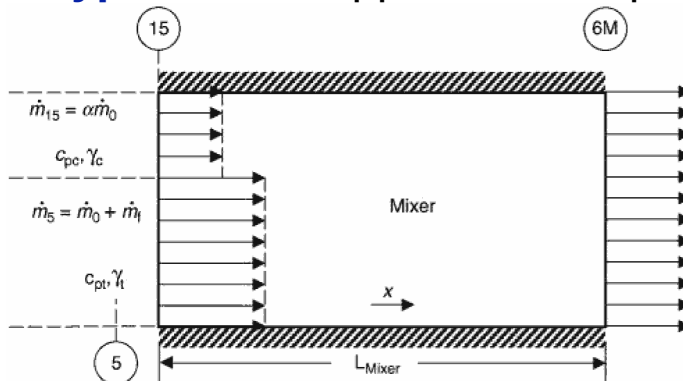
$$p_5 = p_{15}$$



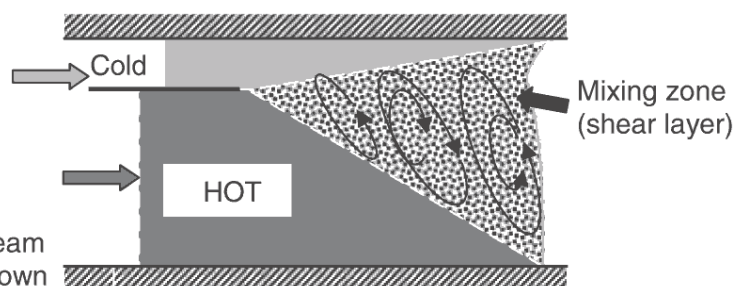
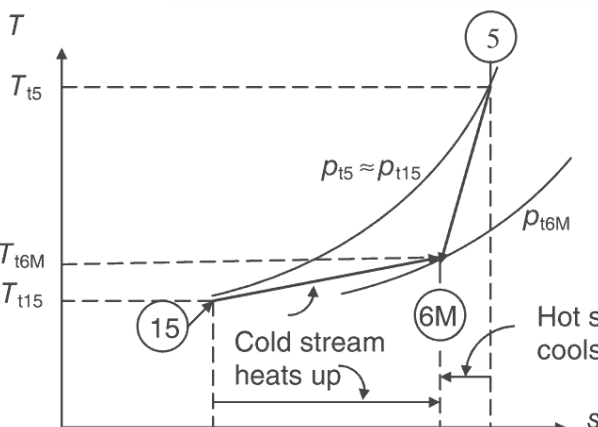
Turbofan a flussi miscelati



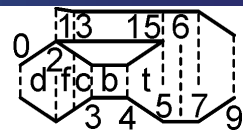
In un turbofan a flussi miscelati il mixer impone un legame fra il **rapporto** di **bypass** ed il rapporto di compressione nel **Fan**.



$$\begin{aligned} \dot{m}_{6M} &= (1 + \alpha) \dot{m}_0 + \dot{m}_t \\ \text{Mixed-out gas properties} \\ c_{p6M} &= \frac{\dot{m}_5 c_{pt} + \dot{m}_{15} c_{pc}}{\dot{m}_5 + \dot{m}_{15}} \\ \gamma_{6M} &= \frac{\dot{m}_5 c_{pt} + \dot{m}_{15} c_{pc}}{\dot{m}_5 \left(\frac{c_{pt}}{\gamma_t} \right) + \dot{m}_{15} \left(\frac{c_{pc}}{\gamma_c} \right)} \end{aligned}$$



Turbofan a flussi miscelati



Dalla conservazione della **massa** si ha:

$$\dot{m}_{15} + \dot{m}_5 = \alpha \dot{m}_0 + (1+f) \dot{m}_0 = (1+\alpha+f) \dot{m}_0 = \dot{m}_6$$

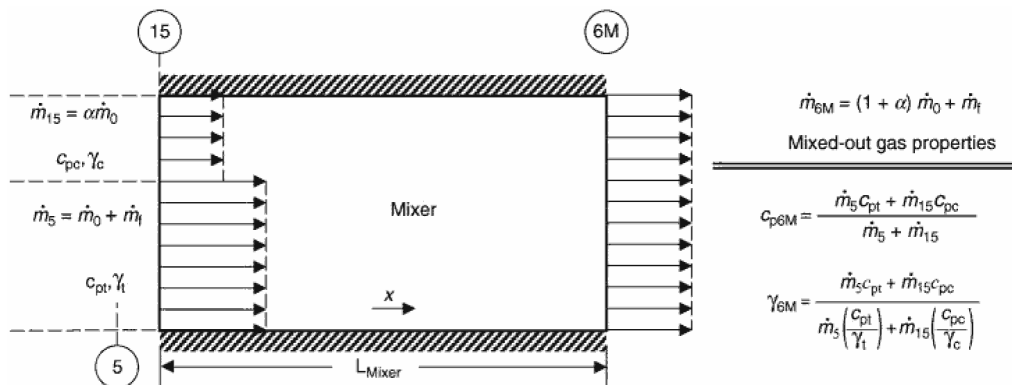
Mentre dalla conservazione dell'**energia**:

$$\dot{m}_{15} h_{t15} + \dot{m}_5 h_{t5} = \dot{m}_6 h_{t6}$$

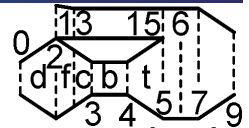
Che può essere risolta nell'incognita $h_{t6}/h_{t5} = \tau_M$:

~~$$\tau_M = \frac{h_{t6}}{h_{t5}} = \frac{\dot{m}_{15}}{\dot{m}_6} \frac{h_{t15}}{h_0} \frac{h_0}{h_{t5}} + \frac{\dot{m}_5}{\dot{m}_6} \frac{\alpha \tau_f \tau_r / \tau_t \tau_\lambda + (1+f)}{1+\alpha+f}$$~~

Dove però si deve ancora trovare un legame fra α e τ_f .



Turbofan a flussi miscelati



Oltre alla condizione di **Kutta** ($p_5 = p_{15}$) si suppone che le pressioni di ristagno siano uguali (la turbina si adatta):

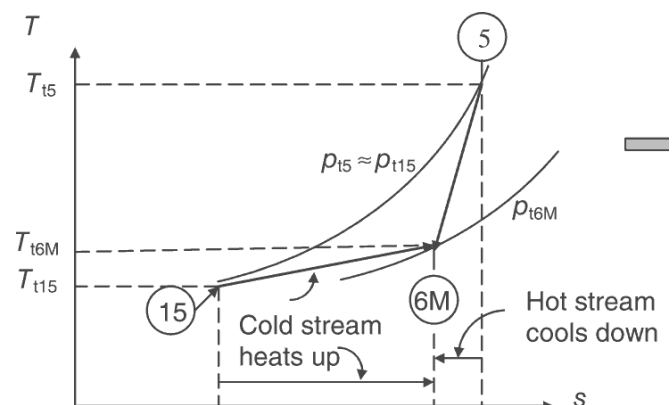
$$p_{t5} = p_{t15}$$

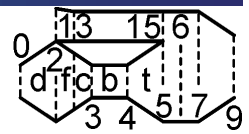
Che in forma adimensionale comporta:

$$\frac{p_{t5}}{p_{t2}} = \pi_t \pi_b \pi_c = \pi_{fd} \pi_f = \frac{p_{t15}}{p_{t2}}$$

dove π_{fd} è legato alle eventuali **perdite** nel condotto. Supponendo che π_f sia noto, l'equazione precedente permette di valutare il rapporto di pressioni nella turbina:

$$\pi_t = \frac{\pi_{fd} \pi_f}{\pi_b \pi_c} \rightarrow \tau_t = \pi_t^{ke_t}$$





Dal **bilancio di energia** sull'albero si può ricavare α :

$$\eta_m \dot{m}_0 (1 + f)(h_{t4} - h_{t5}) = \dot{m}_0 (h_{t3} - h_{t2}) + \alpha \dot{m}_0 (h_{t13} - h_{t2})$$

Ovvero in forma adimensionale:

$$\eta_m (1 + f)(h_{t4} - h_{t5})/h_0 = (h_{t3} - h_{t2})/h_0 + \alpha (h_{t13} - h_{t2})/h_0$$

$$\eta_m (1 + f)(1 - \tau_t)\tau_\lambda = \tau_r [(\tau_c - 1) + \alpha(\tau_f - 1)]$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\eta_m (1 + f)(1 - \tau_t)\tau_\lambda - \tau_r(\tau_c - 1)}{\tau_r(\tau_f - 1)}$$

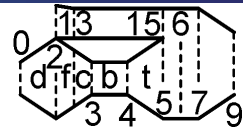
La determinazione della pressione di ristagno a valle del mixer può essere, in prima approssimazione valutata con un ulteriore parametro:

$$\pi_M = \frac{p_{t6}}{p_{t5}} = \frac{p_{t6}}{p_{t15}}$$

In realtà π_M è il **prodotto** di due contributi, uno **ideale** che può essere determinato analiticamente ed un secondo legato alle **perdite** di carico.



Turbofan a flussi miscelati



Il **bilancio di energia** nel post bruciatore diventa:

$$(\dot{m}_6 + \dot{m}_{f.AB})h_{t7} - \dot{m}_6 h_{t6} = \dot{m}_{f.AB} Q_{R.AB} \eta_{AB}$$

dove, come già detto: $\dot{m}_6 = (1 + \alpha + f)\dot{m}_0$

Normalizzando la portata di combustibile rispetto alla **portata d'aria complessiva** $\dot{m}_{air} = \dot{m}_0(1 + \alpha)$ si ha con $f_{AB} = \dot{m}_{f.AB}/\dot{m}_{air}$:

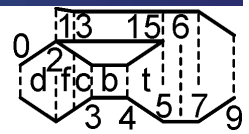
$$\frac{1 + \alpha + f}{1 + \alpha} (h_{t7} - h_{t6}) = f_{AB} (Q_{R.AB} \eta_{AB} - h_{t7})$$

risolvendo

$$f_{AB} = \frac{1 + \alpha + f}{1 + \alpha} \frac{h_{t7} - h_{t6}}{Q_{R.AB} \eta_{AB} - h_{t7}} = \left(1 + \frac{f}{1 + \alpha} \right) \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_M \tau_t \tau_\lambda}{\frac{Q_{R.AB} \eta_{AB}}{c_p T_0} - \tau_{\lambda AB}}$$

dove $\tau_{\lambda AB} = \frac{h_{t7}}{h_0}$.





$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_0} \quad f_{AB} = \frac{\dot{m}_{f.AB}}{\dot{m}_{air}} = \frac{\dot{m}_{f.AB}}{\dot{m}_0(1 + \alpha)}$$

La portata usata per normalizzare la portata di combustibile è maggiore nel caso del post bruciatore. La **portata totale di combustibile** è:

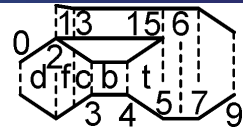
$$\dot{m}_{f.tot} = \dot{m}_f + \dot{m}_{f.AB} = \dot{m}_0(f + f_{AB}(1 + \alpha)) = \dot{m}_{air} \left(\frac{f}{1 + \alpha} + f_{AB} \right)$$

definendo il rapporto complessivo delle portate di carburante rispetto alla portata d'aria si ha:

$$f_{tot} = \frac{\dot{m}_{f.tot}}{\dot{m}_{air}} = \frac{f}{1 + \alpha} + f_{AB}$$



Turbofan a flussi miscelati



L'equazione della spinta **senza** post bruciatore diventa:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = (1 + f_{tot}) \frac{V_{9.e}}{a_0} - M_0 \quad \frac{V_{9.e}}{a_0} = \frac{V_9}{a_0} \left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right)$$

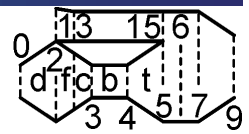
dove:

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{\frac{Q_R \eta_b}{c_p T_0} - \tau_\lambda} \quad f_{tot} = \frac{f}{(1 + \alpha)}$$

~~$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{\frac{\gamma_9 R_9 T_9}{\gamma R T_0}} \quad M_9^2 = \frac{2}{\gamma_9 - 1} \left[\left(\frac{p_{t9}}{p_9} \right)^{\frac{\gamma_9}{\gamma_9 - 1}} - 1 \right]$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\tau_M \tau_t \tau_\lambda c_p / c_{pt}}{(p_{t9}/p_9)^{k_9}} \quad \frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_M \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9}$$~~





Con il **post bruciatore** acceso:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = (1 + f_{tot}) \frac{V_{9.e}}{a_0} - M_0 \quad \frac{V_{9.e}}{a_0} = \frac{V_9}{a_0} \left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right)$$

dove:

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{\frac{Q_R \eta_b}{c_p T_0} - \tau_\lambda} \quad f_{AB} = \left(1 + \frac{f}{1 + \alpha} \right) \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_M \tau_t \tau_\lambda}{\frac{Q_{R,AB} \eta_{AB}}{c_p T_0} - \tau_{\lambda,AB}}$$

$$f_{tot} = \frac{f}{(1 + \alpha)} + f_{AB}$$

$$\frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{\frac{\gamma_9 R_9 T_9}{\gamma R T_0}} \quad M_9^2 = \frac{2}{\gamma_9 - 1} \left[\left(\frac{p_{t9}}{p_9} \right)^{k_9} - 1 \right]$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{T_9}{T_{t9}} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{\tau_{\lambda,AB} c_p / c_{p,AB}}{(p_{t9}/p_9)^{k_9}} \quad \frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_{AB} \pi_M \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9}$$



Post Bruciatore

Infine i rendimenti:

$$TSFC = \frac{\dot{m}_{f,tot}}{F_u} = \frac{f_{tot}}{F_u / \dot{m}_{air}} \quad f_{tot} = \frac{\dot{m}_{f,tot}}{\dot{m}_{air}}$$

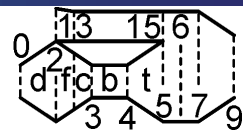
$$\eta_{th} = \frac{\Delta K \dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{\dot{m}_{air} [(1 + f_{tot}) V_{9.e}^2 - V_0^2] / 2}{\dot{m}_{f,tot} Q_R} = \frac{(1 + f_{tot}) V_{9.e}^2 - V_0^2}{2 f_{tot} Q_R}$$

$$= \frac{a_0^2 [(1 + f_{tot}) (V_{9.e}/a_0)^2 - M_0^2]}{2 f_{tot} Q_R}$$

$$\eta_p = \frac{F_t V_0}{\Delta K \dot{E}} = \frac{2 F_u V_0 / \dot{m}_{air}}{a_0^2 [(1 + f_{tot}) (V_{9.e}/a_0)^2 - M_0^2]}$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale** come già visto:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \frac{V_{9,e}}{a_0} - M_0 \quad \frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{T_9/T_0}$$

dove:

$$\frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_{AB} \pi_M \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9} = \tau_t^{\frac{1}{\gamma}} \tau_c^{\frac{1}{\gamma}} \tau_r^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$M_9^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_{t9}}{p_9} \right)^k - 1 \right] = 2 \frac{\tau_t \tau_c \tau_r - 1}{\gamma - 1} \quad \tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_c \tau_r}$$

La condizione sulle pressioni di ristagno diventa:

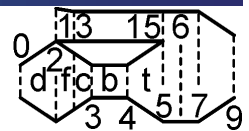
$$\pi_t = \frac{\pi_{fd} \pi_f}{\pi_b \pi_c} \rightarrow \tau_t = \frac{\tau_f}{\tau_c}$$

Evidentemente $\tau_t < 1$ si deve avere $\tau_c > \tau_f$. Sostituendo

$$M_9^2 = 2 \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale** come già visto:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \frac{V_{9,e}}{a_0} - M_0 \quad \frac{V_9}{a_0} = \frac{M_9 a_9}{a_0} = M_9 \sqrt{T_9/T_0}$$

dove:

$$M_9^2 = 2 \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1} \quad \tau_t = \frac{\tau_f}{\tau_c}$$

mentre (a destra con PB):

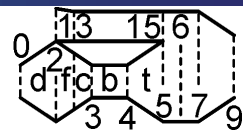
$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{\tau_M \tau_t \tau_\lambda}{(p_{t9}/p_9)^k} = \frac{\tau_M \tau_t \tau_\lambda}{\tau_t \tau_c \tau_r} = \frac{\tau_M \tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} = \tau_M \tau_b \quad \frac{T_9}{T_0} = \frac{\tau_{\lambda,AB}}{(p_{t9}/p_9)^k} = \frac{\tau_{\lambda,AB}}{\tau_t \tau_c \tau_r} = \frac{\tau_{\lambda,AB}}{\tau_f \tau_r}$$

Quindi il **numero di Mach** all'uscita del motore **non dipende dal rapporto di compressione** e di conseguenza senza PB la spinta è una funzione decrescente di τ_c mentre con PB la spinta è costante.

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_M \tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0 \quad \frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_{\lambda,AB}}{\tau_f \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale**:

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_M \tau_\lambda \tau_f \tau_r - 1}{\tau_c \tau_r (\gamma - 1)}} - M_0 \quad \frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_{\lambda,AB} \tau_f \tau_r - 1}{\tau_f \tau_r (\gamma - 1)}} - M_0$$

Il rapporto di bypass diventa:

$$\alpha = \frac{\eta_m (1 + f) (1 - \tau_t) \tau_\lambda - \tau_r (\tau_c - 1)}{\tau_r (\tau_f - 1)} = \frac{(1 - \tau_t) \tau_\lambda - \tau_r (\tau_c - 1)}{\tau_r (\tau_f - 1)}$$

Dove il primo termine a numeratore è positivo mentre il secondo aumenta con M_0 . Esiste un numero di Mach per cui $\alpha = 0$ ($\tau_t = \tau_f / \tau_c$):

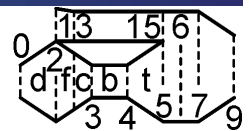
$$\alpha = 0 \rightarrow (1 - \tau_t) \tau_\lambda = \tau_r (\tau_c - 1) \rightarrow \tau_r = \frac{1 - \tau_t}{\tau_c - 1} \tau_\lambda = \frac{\tau_c - \tau_f}{\tau_c - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c}$$

Ricordando che:

$$\tau_r = \psi_0 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \rightarrow M_{0,lim} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\tau_c - \tau_f}{\tau_c - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} - 1 \right)}$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale** ($\tau_t = \tau_f / \tau_c$):

$$\alpha = \frac{(1 - \tau_t) \tau_\lambda - \tau_r (\tau_c - 1)}{\tau_r (\tau_f - 1)} = \frac{(\tau_c - \tau_f) \tau_\lambda - \tau_r \tau_c (\tau_c - 1)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}$$

$$1 + \alpha = \frac{(\tau_c - \tau_f) \tau_\lambda - \tau_c \tau_r (\tau_c - 1) + \tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}$$

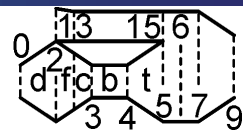
$$= \frac{(\tau_c - \tau_f) \tau_\lambda - \tau_r \tau_c (\tau_c - \tau_f)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)} = \frac{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c) (\tau_c - \tau_f)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}$$

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{(\tau_c - \tau_f) \tau_\lambda - \tau_r \tau_c (\tau_c - 1)}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c) (\tau_c - \tau_f)}$$

$$\tau_M = \frac{\alpha \tau_f \tau_r / \tau_t \tau_\lambda + (1 + f)}{1 + \alpha + f} = \frac{\alpha \tau_c \tau_r / \tau_\lambda + 1}{1 + \alpha}$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale** ($\tau_t = \tau_f/\tau_c$):

$$1 + \alpha = \frac{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}$$

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{(\tau_c - \tau_f)\tau_\lambda - \tau_r \tau_c (\tau_c - 1)}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)}$$

$$f_{AB} = \left(1 + \frac{f}{1 + \alpha}\right) \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_M \tau_t \tau_\lambda}{\frac{Q_{R,AB} \eta_{AB}}{c_p T_0} - \tau_{\lambda AB}} = \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_M \tau_t \tau_\lambda}{\frac{Q_R}{c_p T_0}} \quad \tau_M = \frac{\alpha \tau_c \tau_r / \tau_\lambda + 1}{1 + \alpha}$$

$$\tau_M \tau_t \tau_\lambda = \frac{\alpha \tau_f \tau_r + \tau_\lambda \tau_f / \tau_c}{1 + \alpha} =$$

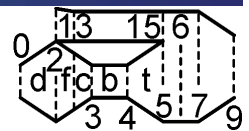
$$= \frac{[(\tau_c - \tau_f)\tau_\lambda - \tau_r \tau_c (\tau_c - 1)] \tau_f \tau_r}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)} + \frac{\tau_\lambda \tau_f \tau_r (\tau_f - 1)}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)} =$$

$$= \frac{\tau_f \tau_r [\tau_\lambda (\tau_c - 1) - \tau_r \tau_c (\tau_c - 1)]}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)} = \frac{\tau_f \tau_r (\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - 1)}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)} =$$

$$= \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f)} \rightarrow f_{AB} = \frac{\tau_{\lambda AB}}{Q_R / (c_p T_0)} - \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)}$$



Turbofan a flussi miscelati



Nel caso **ideale** ($\tau_t = \tau_f/\tau_c$):

$$1 + \alpha = \frac{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)}{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)}$$

$$f_{AB} = \frac{\tau_{\lambda AB}}{Q_R / (c_p T_0)} - \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)}$$

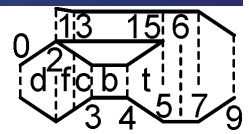
$$f_{tot} = \frac{f}{(1 + \alpha)} + f_{AB} \quad f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{\frac{Q_R \eta_b}{c_p T_0} - \tau_\lambda} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{tot} = \frac{\frac{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1)(\tau_\lambda - \tau_c \tau_r)}{(\tau_\lambda - \tau_r \tau_c)(\tau_c - \tau_f)} + \tau_{\lambda AB} - \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f)}}{Q_R / (c_p T_0)} =$$

$$= \frac{\tau_{\lambda AB}}{Q_R / (c_p T_0)} + \frac{\tau_c \tau_r (\tau_f - 1) - \tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)} = \frac{(\tau_{\lambda AB} + \tau_r)(\tau_c - \tau_f)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{tot} = \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$





Riassumendo nel caso **ideale** ($\tau_t = \tau_f/\tau_c$):

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_M \tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0$$

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_{\lambda,AB}}{\tau_f \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0$$

$$M_{0,lim} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\tau_c - \tau_f}{\tau_c - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} - 1 \right)}$$

$$\alpha = \frac{(1 - \tau_t) \tau_\lambda - \tau_r (\tau_c - 1)}{\tau_r (\tau_f - 1)}$$

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{AB} = \frac{\tau_{\lambda,AB}}{Q_R / (c_p T_0)} - \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{tot} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{tot} = \frac{\tau_{\lambda,AB} - \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$

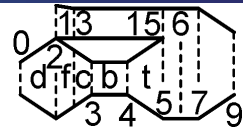
$$TSFC = \frac{f_{tot}}{F_u / \dot{m}_{air}}$$

$$\eta_{th} = \frac{a_0^2 [(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}{2 f_{tot} Q_R}$$

$$\eta_p = \frac{2 F_u V_0 / \dot{m}_{air}}{a_0^2 [(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}$$



Turbofan a flussi miscelati



Riassumendo nel caso **ideale** ($\tau_t = \tau_f/\tau_c$):

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_M \tau_\lambda}{\tau_c \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0$$

$$\frac{F_u}{\dot{m}_{air} a_0} = \sqrt{2 \frac{\tau_{\lambda,AB}}{\tau_f \tau_r} \frac{\tau_f \tau_r - 1}{\gamma - 1}} - M_0$$

- Il numero di Mach all'uscita del motore non dipende dal rapporto di compressione;

Senza post bruciatore la spinta:

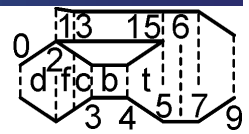
- diminuisce con τ_c ;
- aumenta con $\tau_b = \tau_\lambda / (\tau_c \tau_r)$;
- aumenta con τ_f ;
- diminuisce con M_0 .

Con post bruciatore la spinta:

- non dipende da τ_c nè da τ_λ ;
- aumenta con $\tau_{\lambda,AB}$;
- aumenta con τ_f ;
- diminuisce con M_0 .



Turbofan a flussi miscelati



Riassumendo nel caso **ideale**:

$$M_{0.lim} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\tau_c - \tau_f}{\tau_c - 1} \frac{\tau_\lambda}{\tau_c} - 1 \right)} \quad \alpha = \frac{(1 - \tau_t)\tau_\lambda - \tau_r(\tau_c - 1)}{\tau_r(\tau_f - 1)}$$

Esiste un $M_{0.lim}$ a cui il rapporto di bypass tende a zero.

$$f = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)} \quad f_{AB} = \frac{\tau_{\lambda AB}}{Q_R / (c_p T_0)} - \frac{\tau_f \tau_r (\tau_c - 1)}{(\tau_c - \tau_f) Q_R / (c_p T_0)}$$

$$f_{tot} = \frac{\tau_\lambda - \tau_c \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)} \quad f_{tot} = \frac{\tau_{\lambda AB} - \tau_r}{Q_R / (c_p T_0)}$$

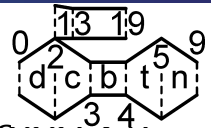
Con post bruciatore f_{tot} non dipende dal rapporto di compressione.

$$TSFC = \frac{f_{tot}}{F_u / \dot{m}_{air}} \quad \eta_{th} = \frac{a_0^2 [(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}{2 f_{tot} Q_R} \quad \eta_p = \frac{2 F_u V_0 / \dot{m}_{air}}{a_0^2 [(V_9/a_0)^2 - M_0^2]}$$

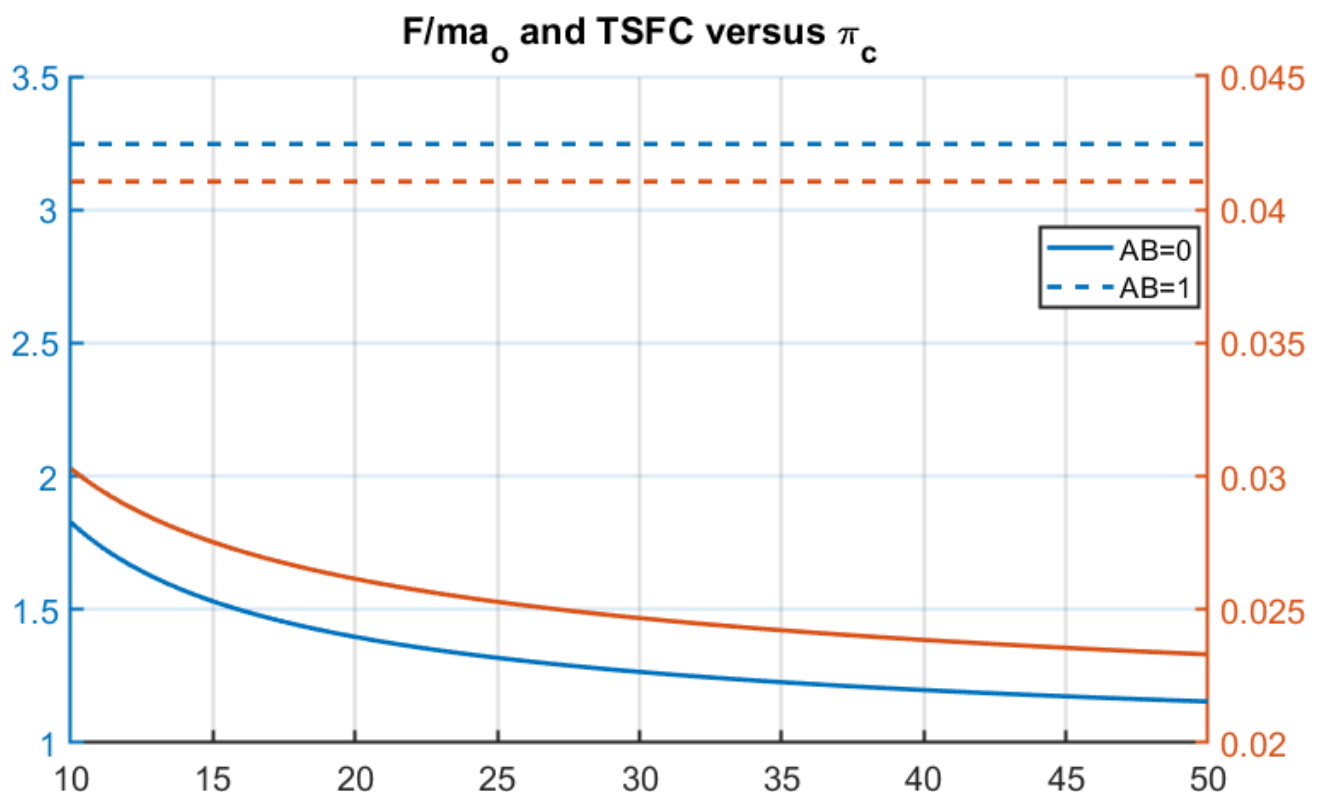
Con post bruciatore il consumo specifico non dipende dal rapporto di compressione.



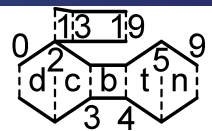
Turbofan a flussi miscelati



$$M_0 = 2, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, T_{t4} = 2250, \pi_f = 3.5, Q_R = 42,800 kJ/kg$$

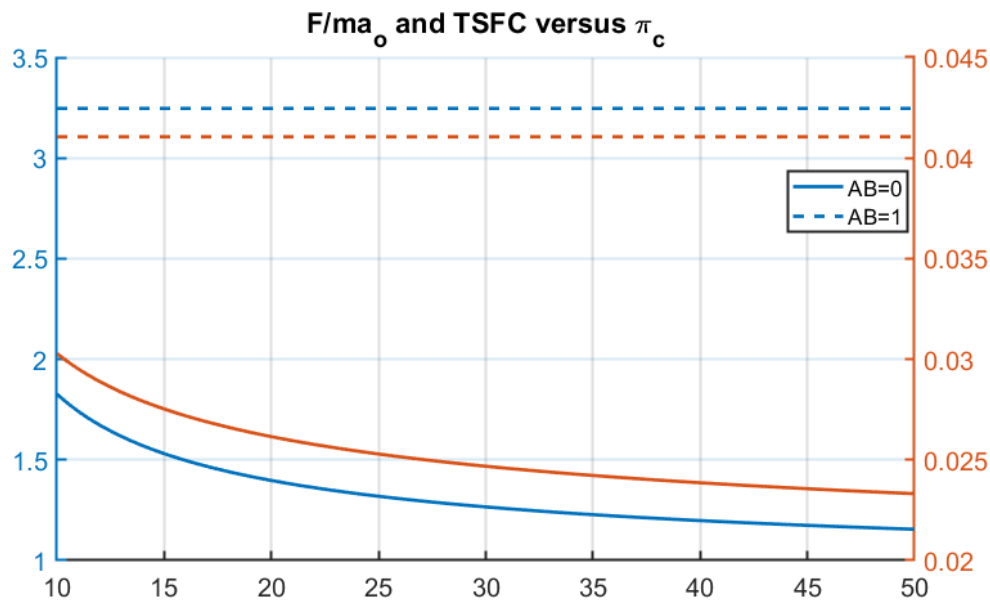


Turbofan a flussi miscelati

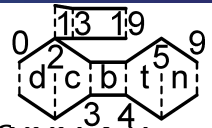


Accendendo il post bruciatore si nota:

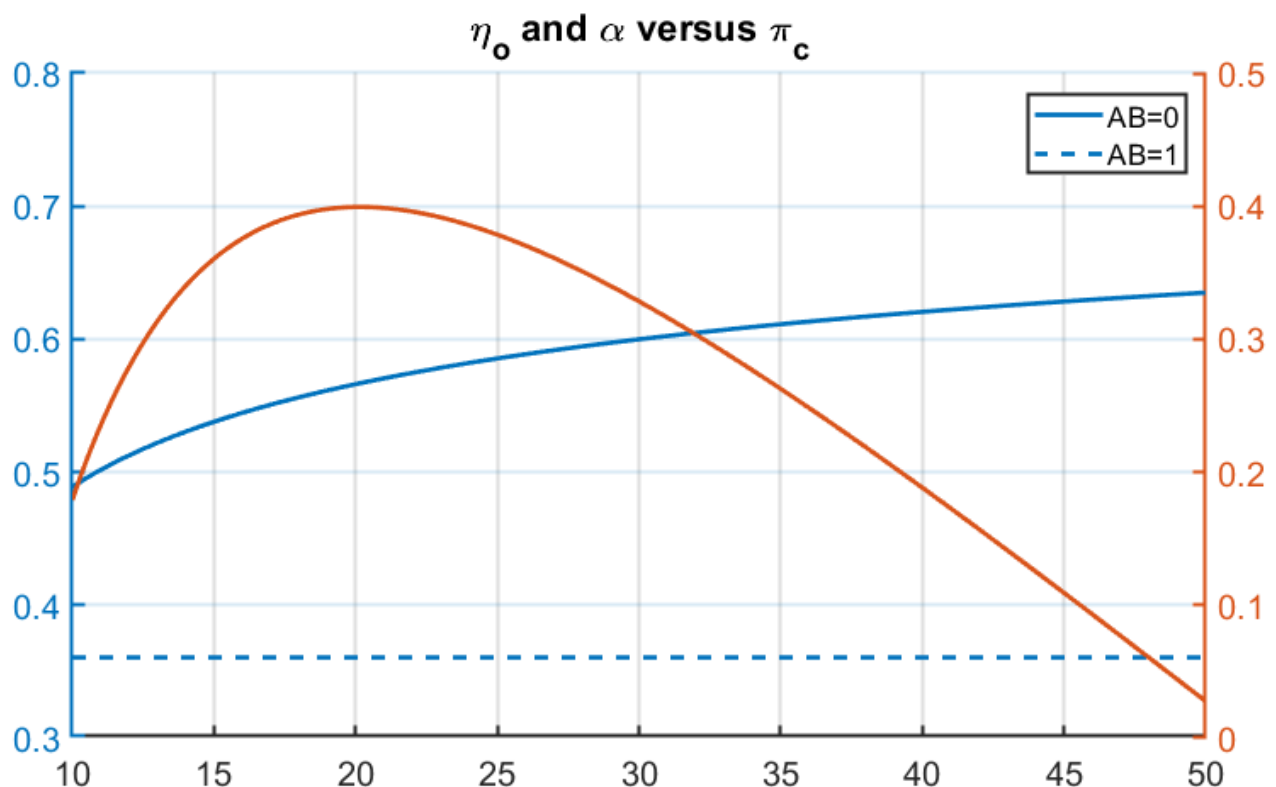
- L'aumento della spinta è maggiore di quello che si ha con un turbogetto mentre quello del consumo specifico è inferiore;
- La spinta ed il consumo specifici sono costanti.



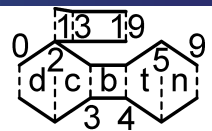
Turbofan a flussi miscelati



$$M_0 = 2, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, T_{t4} = 2250, \pi_f = 3.5, Q_R = 42,800 kJ/kg$$



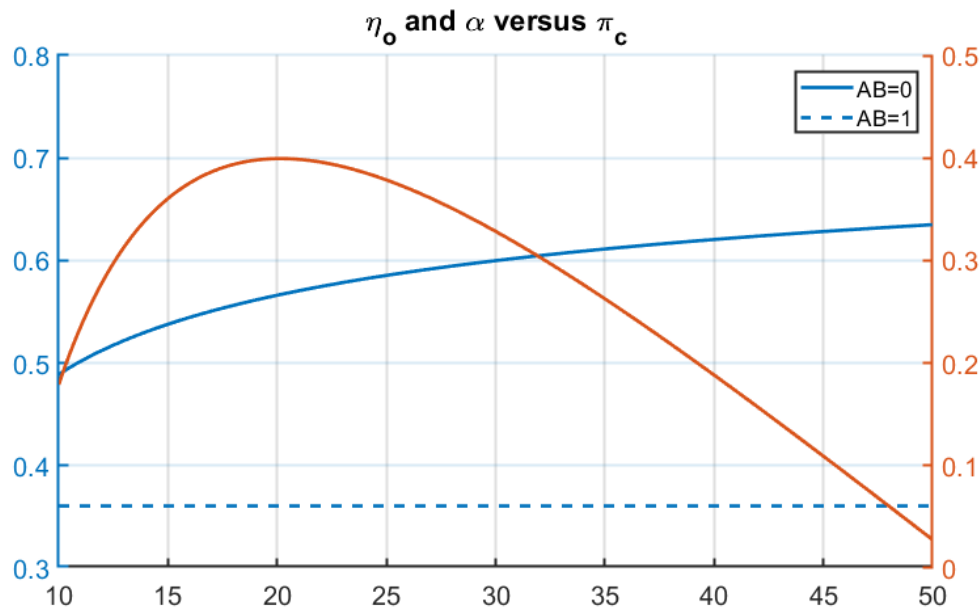
Turbofan a flussi miscelati



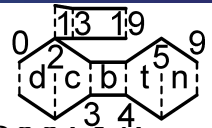
Accendendo il post bruciatore si nota:

- Una diminuzione del rendimento, che rimane costante al variare del rapporto di compressione.

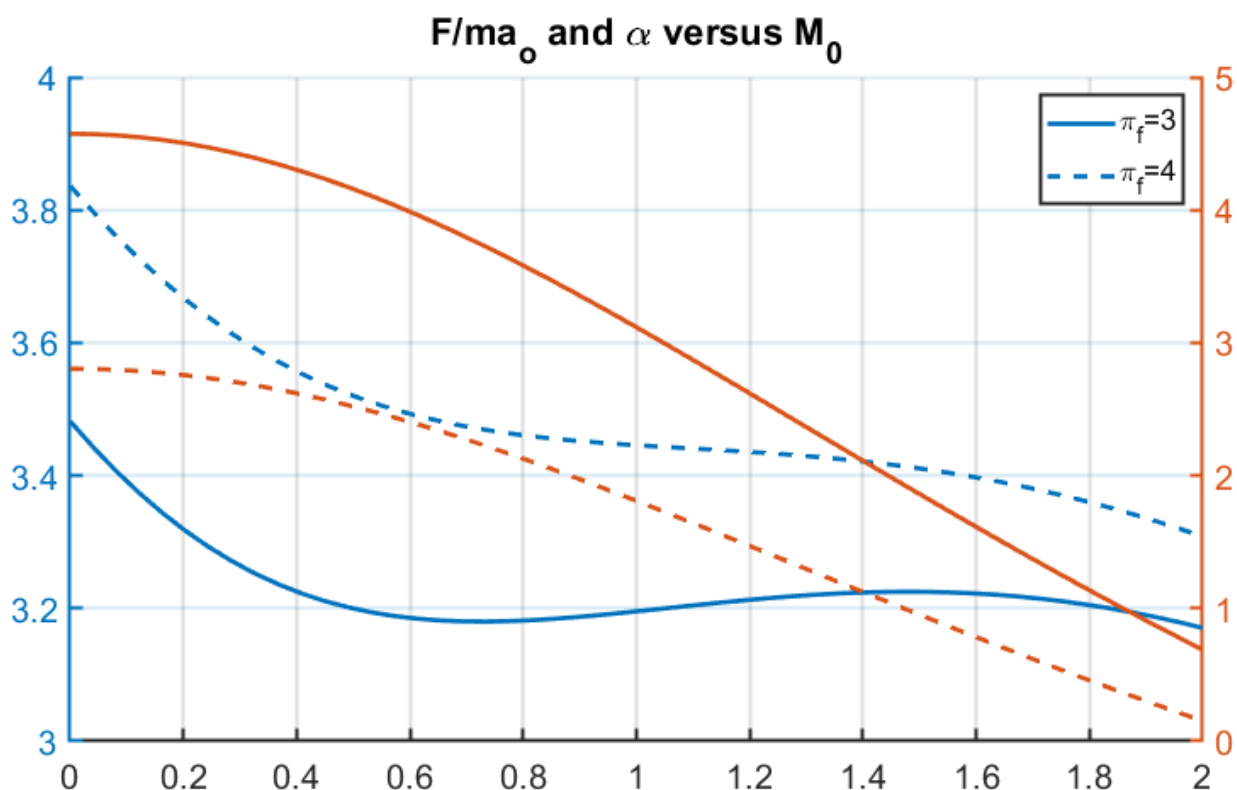
In entrambi i casi il rapporto di bypass ha un massimo.



Turbofan a flussi miscelati

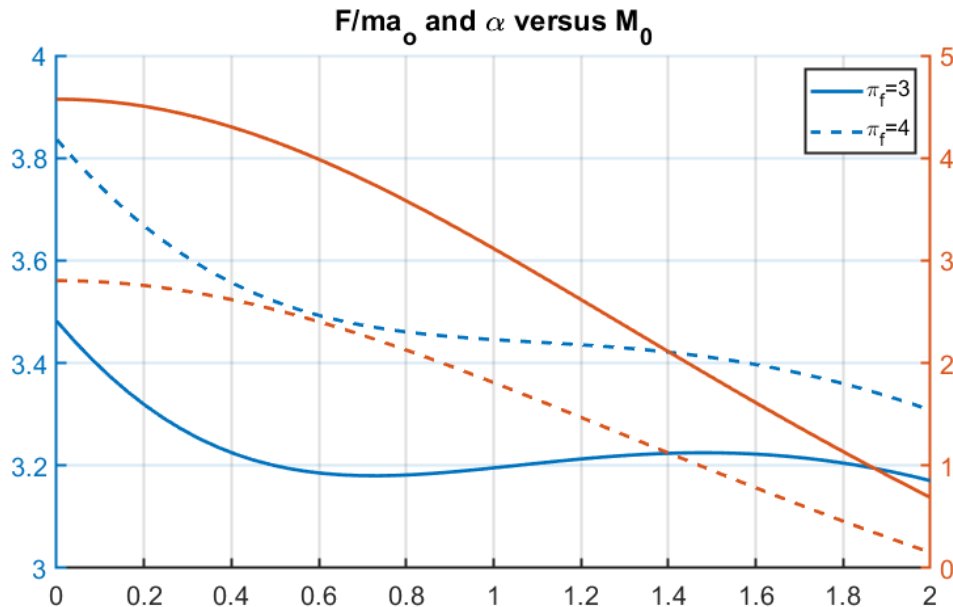


$$AB = 1, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, T_{t4} = 2250, \pi_c = 26, Q_R = 42,800 \text{ kJ/kg}$$



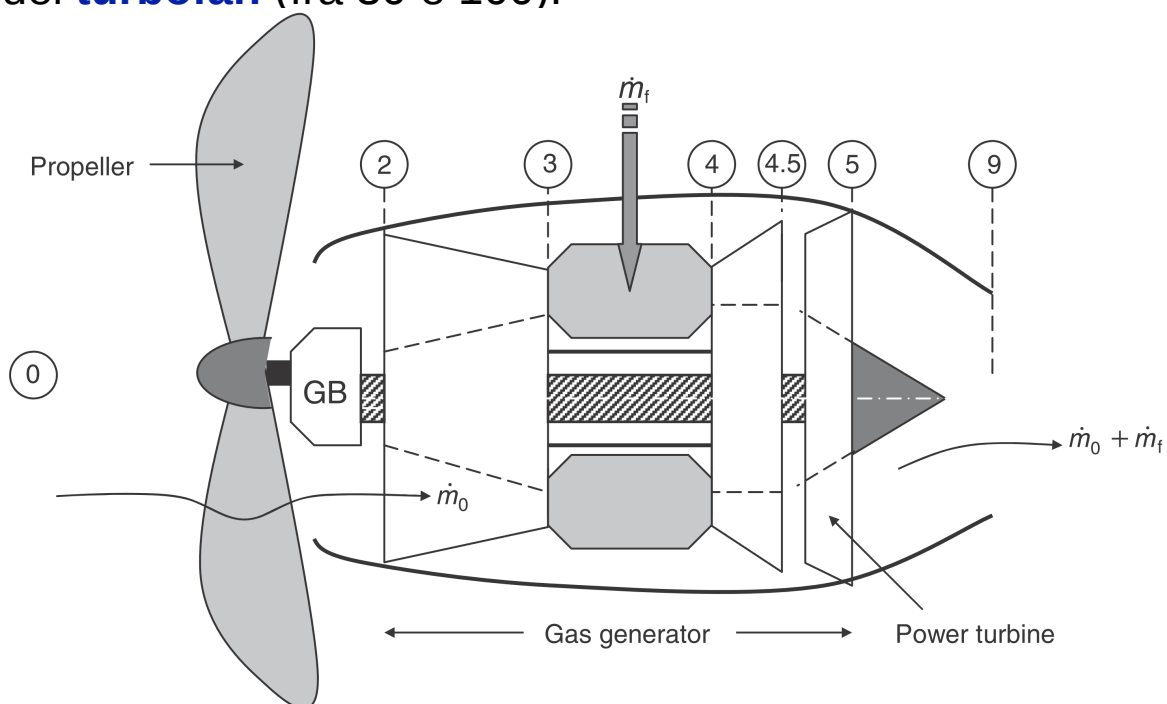
L'aumento del numero di Mach provoca una diminuzione della spinta e del rapporto di bypass.

La spinta aumenta con π_f mentre il rapporto di bypass diminuisce.



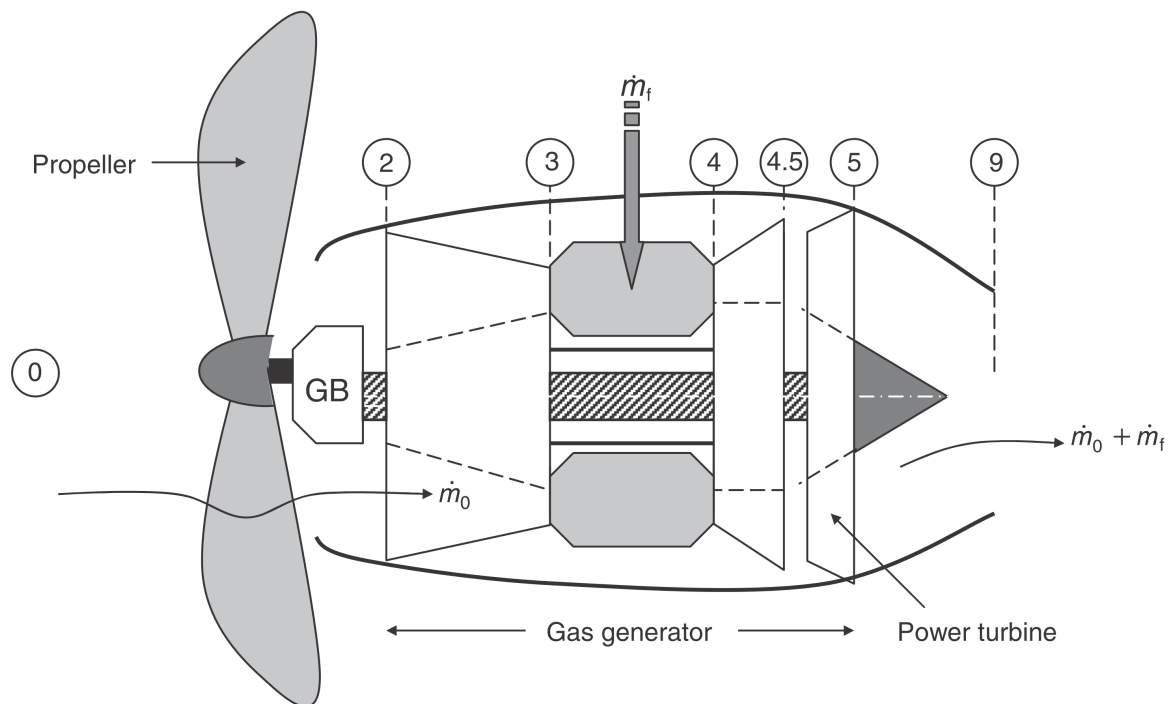
Turboprop

Anche nel caso dei **turboprop** l'elica, avendo un diametro significativamente maggiore, è collegata all'albero tramite un riduttore meccanico. Il **rapporto di bypass** è significativamente maggiore di quello dei **turbofan** (fra 30 e 100).



Turboprop

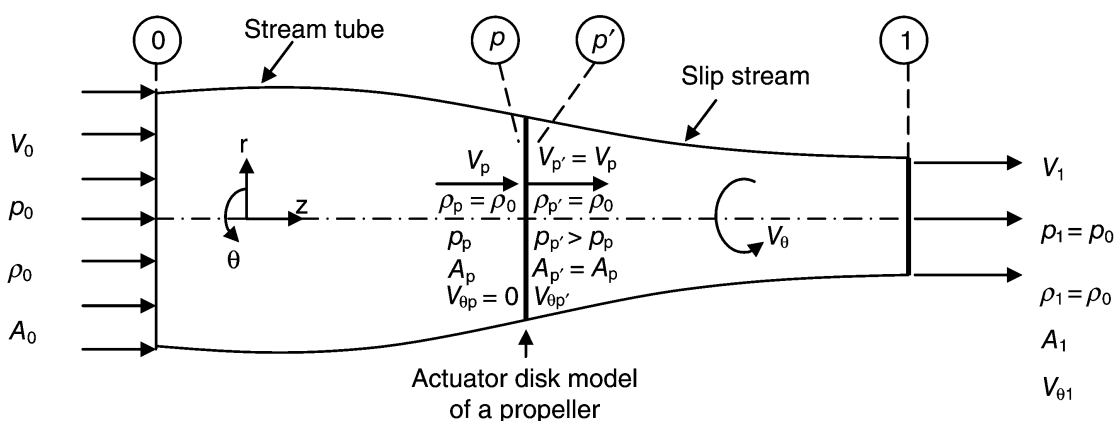
Si deve notare che però per limitare il numero di Mach all'estremità dell'elica i turboprop possono essere utilizzati per numeri di **Mach** di crociera **relativamente bassi**.



Elementi di teoria dell'elica

Le eliche (propeller) vengono utilizzate per convertire energia meccanica in spinta propulsiva. Esistono **due** approcci alla **teoria dell'eliche**:

- La **teoria impulsiva** o del **disco attuatore** è stata introdotta da Rankine e Froude alla fine del 900. Si rimpiazza l'elica con un disco attuatore che impone un **salto di quantità di moto** (aumento della **pressione**) e del **momento** della quantità di moto (aumento dello **swirl**). Si considera inoltre il flusso **incompressibile** e si **trascurano** gli effetti **viscosi**.
- La **teoria dell'elemento di pala** si basa sulla teoria dell'ala e dei profili alari.

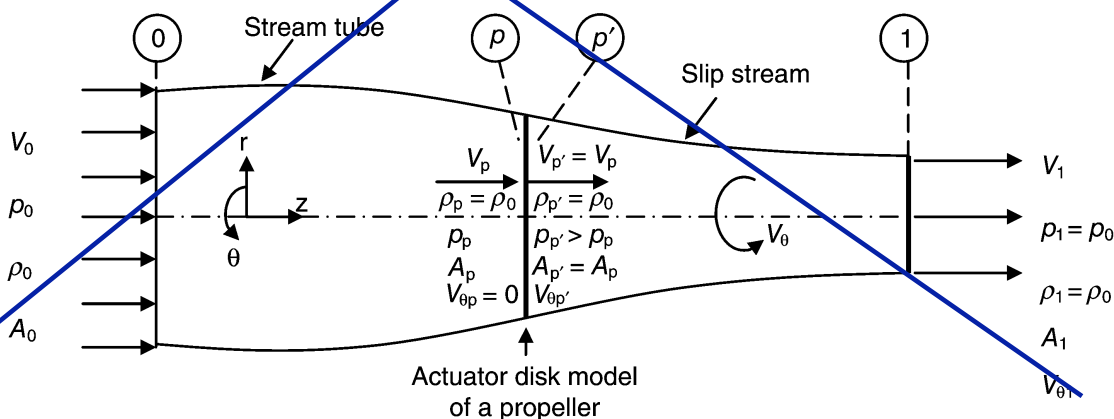


Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Lo schema della **teoria impulsiva** è mostrato in figura. Il tubo di flusso mostra che l'aria catturata dall'elica viene convogliata nel disco attuatore che ne aumenta la pressione e la **componente azimutale** (di swirl) della velocità.

Le condizioni a monte, del disco attuatore (il pedice indica quelle a valle) e a valle sono individuate dai pedici 0, p e 1.

Come già detto la densità rimane costante attraverso il disco attuatore mentre V_θ e p aumentano discontinuamente.

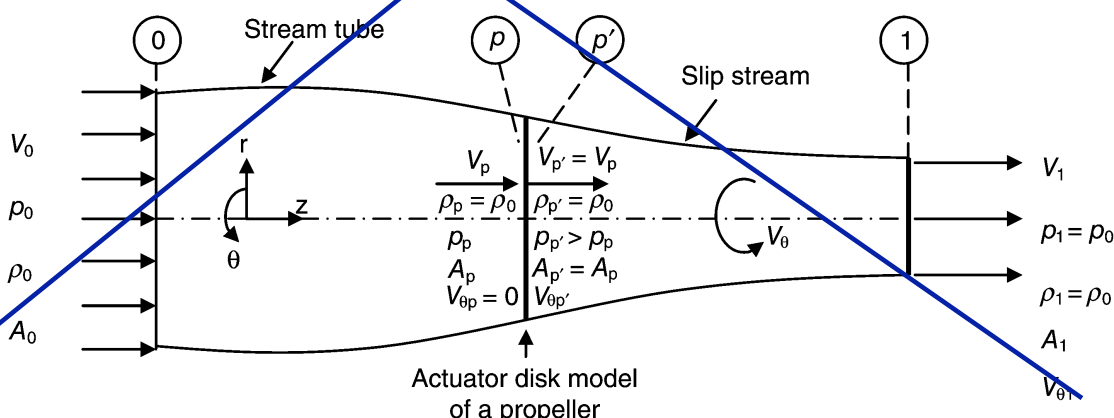


Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

A valle si recupera il valore di pressione a monte mentre le componenti delle velocità aumentano. Le grandezze note sono:

- Le condizioni di volo: V_0, p_0 e ρ_0 ;
- Il diametro dell'elica e di conseguenza l'area del disco attuatore: A_p ;
- La potenza all'albero: $\mathcal{P}_s$;
- La velocità angolare dell'albero: ω .

Mentre le incognite sono: $A_0, A_1, V_p, V_{\theta p}, V_1, V_{\theta 1}, p_p, p_{p'}$.



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Dalla **conservazione della massa** e dall'equazione di **Bernoulli**, trascurando la componente radiale della velocità:

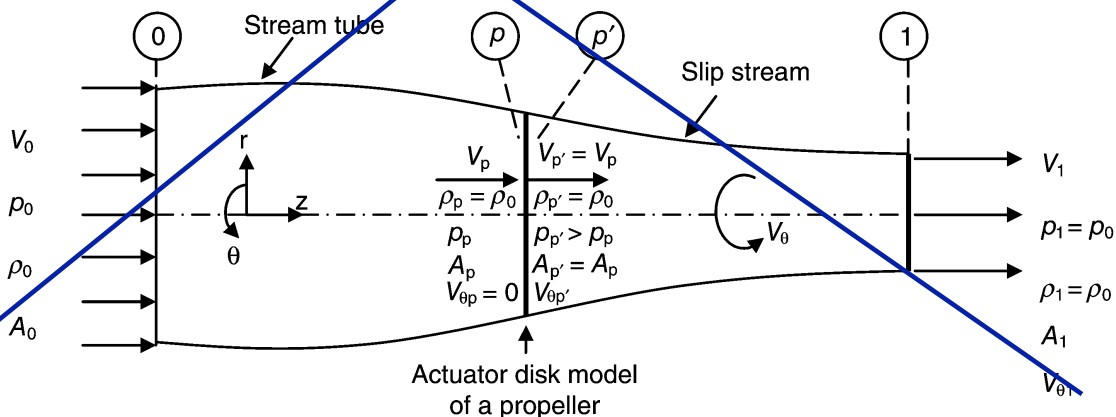
$$V_0 A_0 = V_p A_p = V_1 A_1$$

$$p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = p_p + \rho \frac{V_p^2}{2}$$

$$p_{p'} + \rho \frac{V_p^2 + V_{\theta p'}^2}{2} = p_0 + \rho \frac{V_1^2 + V_{\theta 1}^2}{2}$$

sommando le ultime due si ha:

$$p_{p'} + \rho (V_0^2 + V_{\theta p'}^2) / 2 = p_p + \rho (V_1^2 + V_{\theta 1}^2) / 2$$



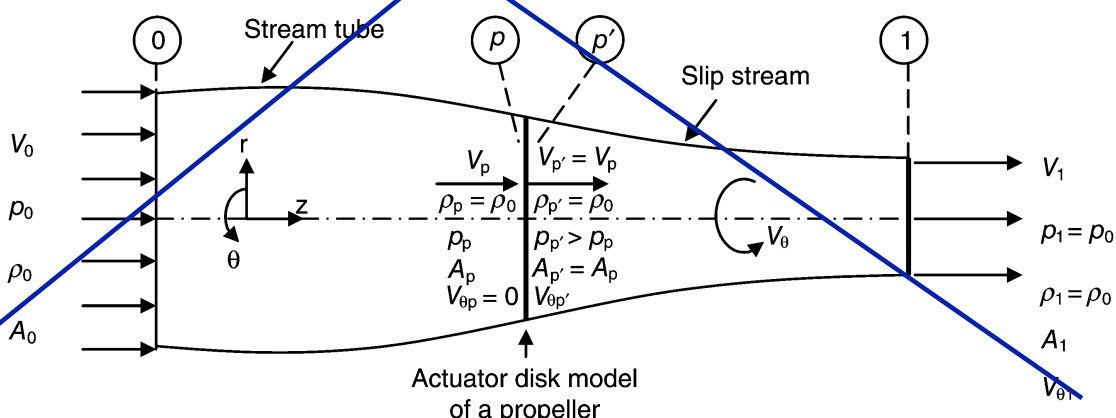
Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Dal **bilancio della QM** in direzione **assiale**, trascurando i contributi di pressione, si può determinare la spinta:

$$F_p = A_p (p_{p'} - p_p) \approx \dot{m}_p (V_1 - V_0) = \rho V_p A_p (V_1 - V_0)$$

La potenza all'albero bilancia l'aumento di energia cinetica e le ulteriori perdite:

$$\mathcal{P}_s \approx \dot{m}_p (V_1^2 + V_{\theta 1}^2 - V_0^2) / 2$$



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Le **equazioni** si **semplificano** in modo significativo **trascurando** le componenti **azimutali** della velocità. In particolare **sommando** le **due** equazioni di **Bernoulli** e considerando l'equazione per la spinta:

$$p_{p'} + \rho (V_0^2 + V_{\theta p'}^2) / 2 = p_p + \rho (V_1^2 + V_{\theta 1}^2) / 2$$

$$F_p = A_p (p_{p'} - p_p) \approx \rho V_p A_p (V_1 - V_0)$$

$$p_{p'} - p_p = \rho (V_1^2 - V_0^2) / 2 = F_p / A_p \approx \rho V_p (V_1 - V_0) \quad \rightarrow \quad V_p \approx \frac{V_1 + V_0}{2}$$

Dal bilancio della massa si ottiene anche:

$$A_p = \frac{V_0}{V_p} A_0 = \frac{2V_0}{V_1 + V_0} A_0 = \frac{2}{1 + V_1/V_0} A_0$$

Dall'equazione per la spinta e per la potenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &\approx \dot{m}_p (V_1^2 + V_{\theta 1}^2 - V_0^2) / 2 \approx \rho A_p V_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right) = \rho A_p V_p (V_1 - V_0) \frac{V_1 + V_0}{2} \\ &= F_p V_p \end{aligned}$$



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

$$\mathcal{P}_s \approx \rho A_p V_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right)$$

$$\text{sostituendo } V_p \approx \frac{V_1 + V_0}{2}$$

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\frac{1}{2} \rho V_0^3 A_p} = C_P \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_1}{V_0} + 1 \right) \left(\frac{V_1^2}{V_0^2} - 1 \right)$$

Supponendo che il termine a sinistra (il **coefficiente di potenza**) sia noto la precedente equazione può essere risolta in $\frac{V_1}{V_0}$.

Il **coefficiente di spinta** è definito come

$$C_T = \frac{F_p}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 A_p} = \frac{\rho V_p A_p (V_1 - V_0)}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 A_p} = \frac{V_1^2}{V_0^2} - 1$$



Il **rendimento dell'elica** è:

$$\eta_{prop} = \frac{F_p V_0}{\mathcal{P}_s} = \frac{F_p V_0}{\dot{m}_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right)} \frac{\dot{m}_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right)}{\mathcal{P}_s} = \eta_p \eta_L$$

Chiaramente il **rendimento propulsivo** η_p , già introdotto in precedenza, è un **limite superiore** che potrebbe essere raggiunto solo se l'elica fosse capace di **convertire tutta la potenza all'albero** in potenza propulsiva. In particolare il rendimento propulsivo nelle ipotesi fatte diventa:

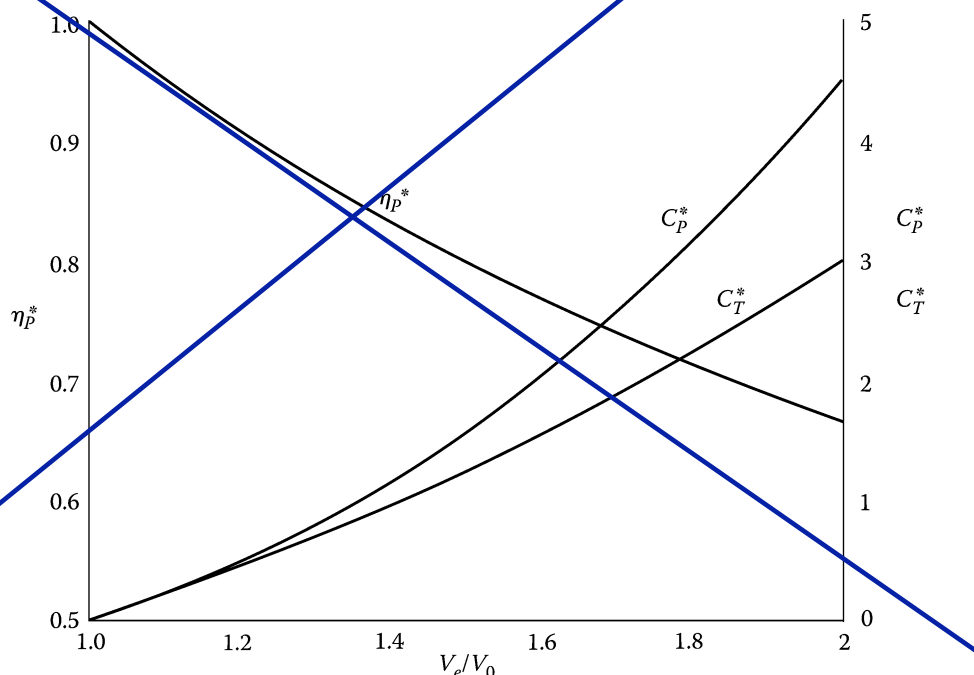
$$\eta_p = \frac{F_p V_0}{\dot{m}_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right)} = \frac{\rho V_p A_p (V_1 - V_0) V_0}{\dot{m}_p \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right)} = \frac{2V_0}{V_1 + V_0} = \frac{A_p}{A_0}$$



Elementi di teoria dell'elica – teoria impulsiva

Si ha anche:

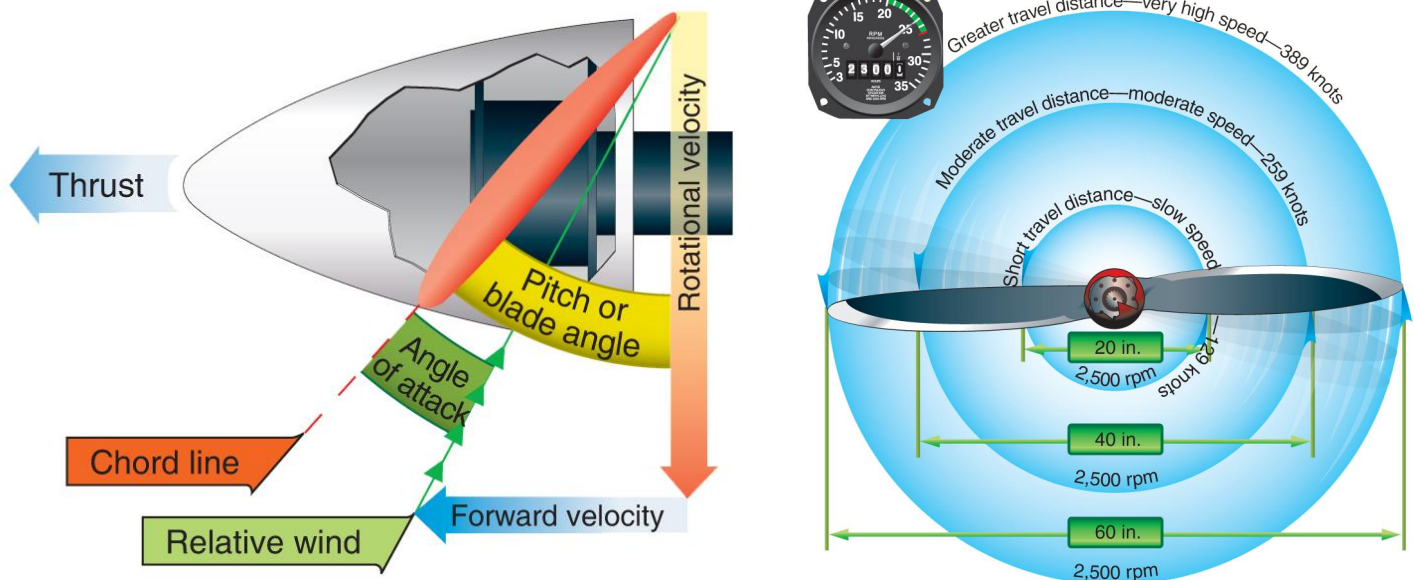
$$\eta_p = \frac{2}{\frac{V_1}{V_0} + 1} \rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \frac{2 - \eta_p}{\eta_p} \rightarrow C_T = \frac{4(1 - \eta_p)}{\eta_p^2} \rightarrow C_p = \frac{C_T}{\eta_p}$$



Elementi di teoria dell'elica – teoria dell'elemento di pala

L'elica è un ala che ruota rispetto ad un asse. Evidentemente la **velocità** periferica rotazionale ωr **aumenta all'aumentare del raggio** mentre V_0 rimane costante; per mantenere l'angolo d'attacco costante è necessario che **l'elica sia svergolata**.

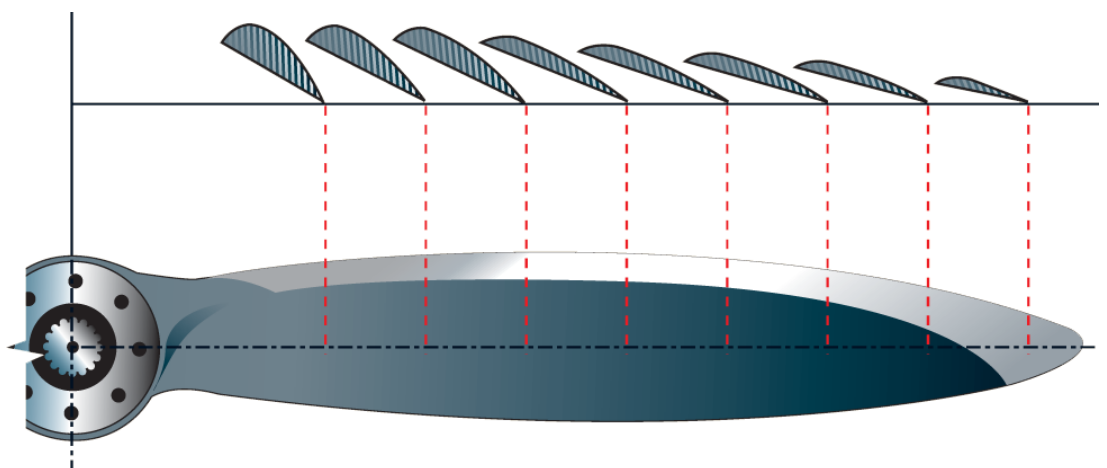
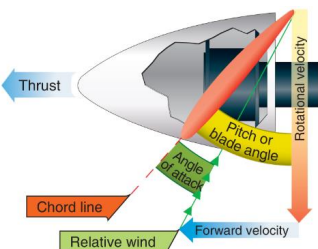
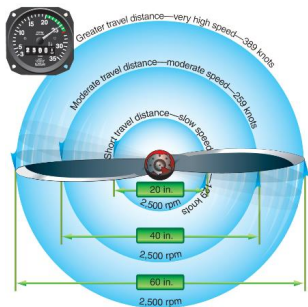
Ad ogni stazione **varia** anche il modulo della velocità relativa e con esso il numero di **Reynolds**.



Elementi di teoria dell'elica – teoria dell'elemento di pala

L'elica è un ala che ruota rispetto ad un asse. Evidentemente la **velocità** periferica rotazionale ωr **aumenta all'aumentare del raggio** mentre V_0 rimane costante; per mantenere l'angolo d'attacco costante è necessario che **l'elica sia svergolata**.

Ad ogni stazione **varia** anche il modulo della velocità relativa e con esso il numero di **Reynolds**.



Elementi di teoria dell'elica – teoria dell'elemento di pala

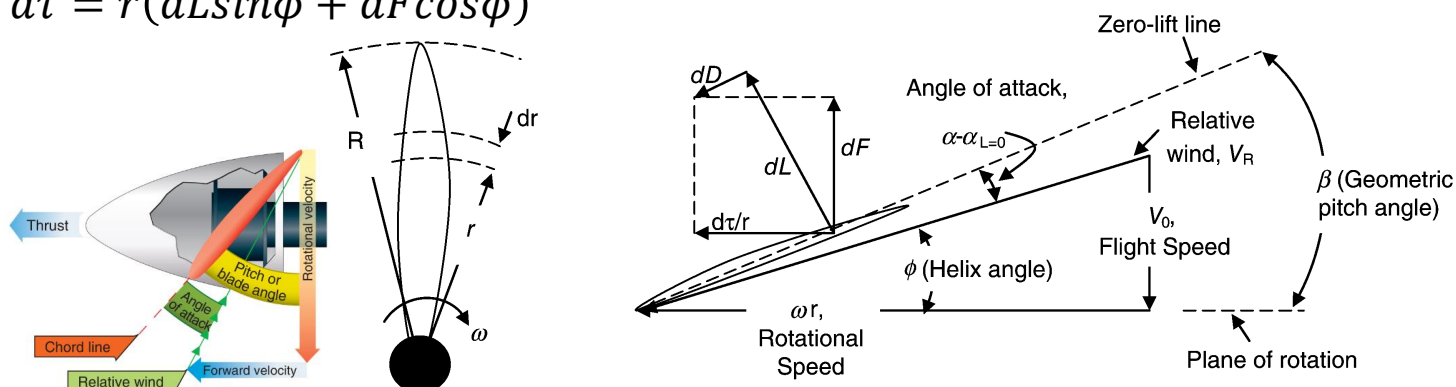
La velocità relativa è data dalla composizione dei due moti:

$$\underline{V}_R = \underline{V}_0 - \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

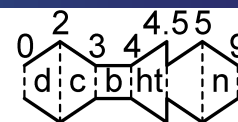
L'angolo formato con il piano di rotazione viene chiamato **angolo d'elica** ϕ . Trascurando l'induzione vorticoso l'angolo d'attacco α è dato dalla differenza fra l'**angolo di calettatura** β (pitch) e quello d'elica. Portanza e resistenza vengono proiettati negli assi del velivolo per ottenere il contributo alla spinta dF ed al momento resistente $d\tau$:

$$dF = dL \cos \phi - dD \sin \phi$$

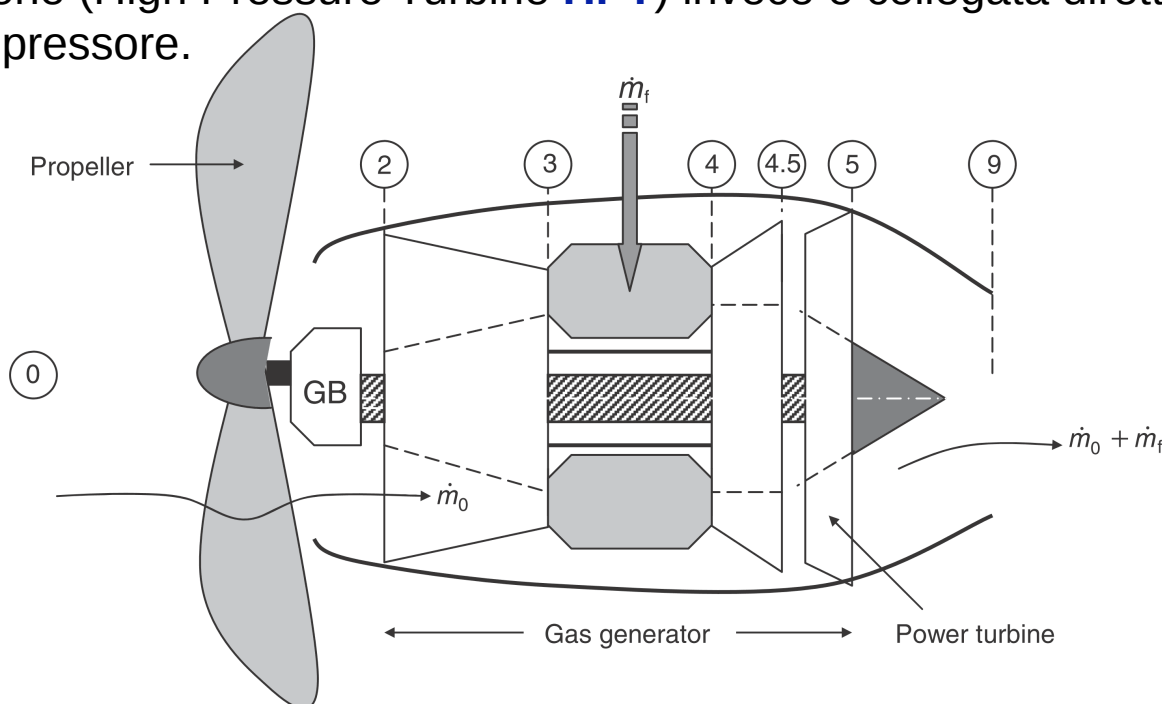
$$d\tau = r(dL \sin \phi + dF \cos \phi)$$



Turboprop



In figura è mostrato un turboprop a due alberi. In questo caso La turbina di bassa pressione (Low Pressure Turbine **LPT**) è collegata attraverso un **riduttore**, meccanico (gearbox) all'elica. La turbina di alta pressione (High Pressure Turbine **HPT**) invece è collegata direttamente al compressore.

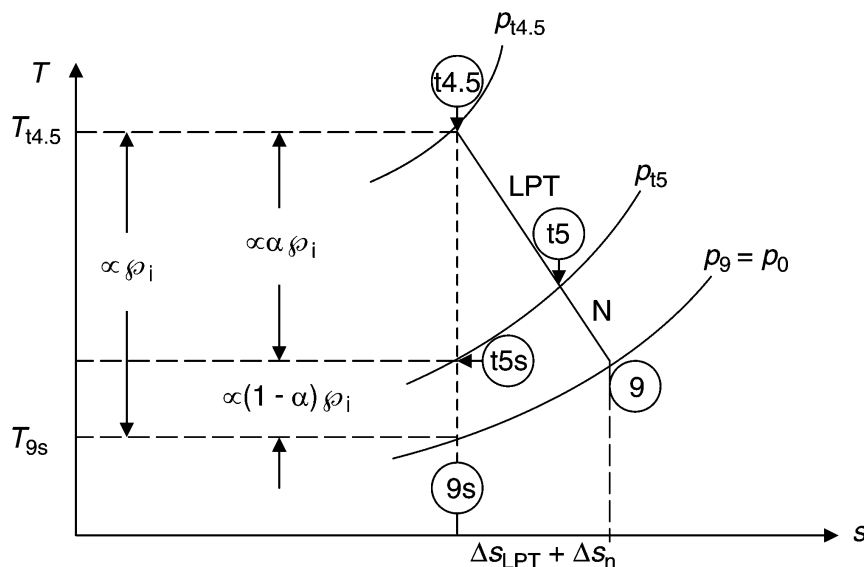


I nuovi parametri che **caratterizzano il turboprop** sono:

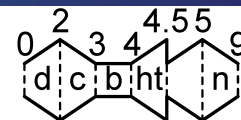
- il **rendimento** del riduttore meccanico (gearbox) e quello meccanico $\eta_{m_{tL}} \eta_{gb} = \mathcal{P}_s / \mathcal{P}_{LPT}$ dove $\mathcal{P}_{LPT}$ è la potenza fornita dalla turbina di bassa pressione;
- il rendimento complessivo d'elica: η_{prop} ;
- il rapporto di pressione o di temperatura della LPT ed il suo rendimento politropico: τ_{tL}, e_{tL} .

Quest'ultimo parametro influenza il **rapporto** fra la spinta prodotta dal **getto** e quella **dell'elica**.

In alternativa si può fornire il **rapporto fra le due potenze** ideali utilizzata e disponibile alla turbina di bassa pressione α_p :



Turboprop



Dalla figura si nota che il **rapporto di divisione delle potenze** è dato da:

$$\alpha_p = \frac{\mathcal{P}_{i.LPT}}{\mathcal{P}_{i.tot}} = \frac{\frac{\mathcal{P}_{LPT}}{\eta_{tL}}}{\mathcal{P}_{i.tot}} = \frac{h_{t45} - h_{t5s}}{h_{t45} - h_{9s}}$$

questa equazione può essere risolta per trovare il rapporto di entalpie totali nella turbina:

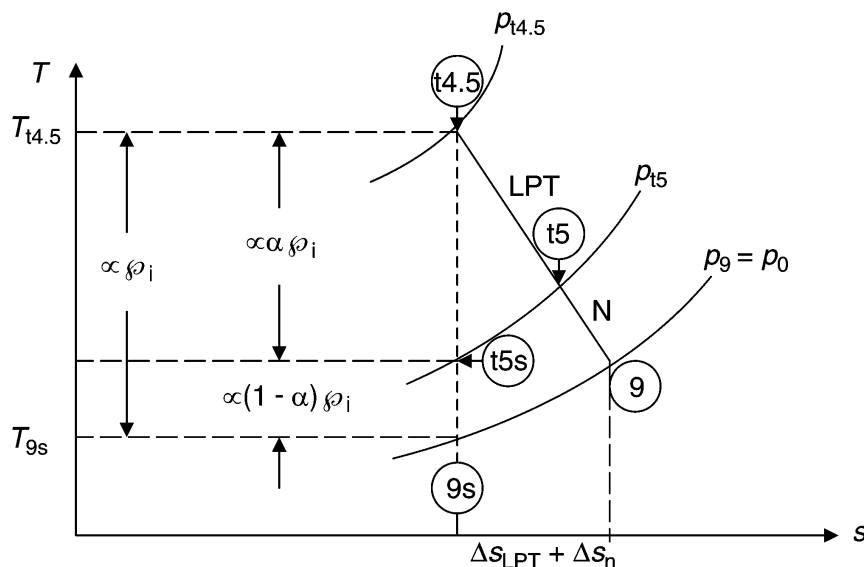
$$\tau_{tL} = \frac{h_{t5}}{h_{t45}}$$

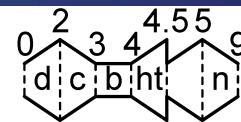
ricordando che:

$$\eta_{tL} = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{t5s}}$$

si ha:

$$\eta_{tL} \alpha_p = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{9s}}$$





$$\alpha_p = \frac{\mathcal{P}_{i.LPT}}{\mathcal{P}_{i.tot}} = \frac{h_{t45} - h_{t5s}}{h_{t45} - h_{9s}} \quad \tau_{tL} = \frac{h_{t5}}{h_{t45}} \quad \eta_{tL} = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{t5s}}$$

Esplicitando i vari termini della relazione precedente si ha:

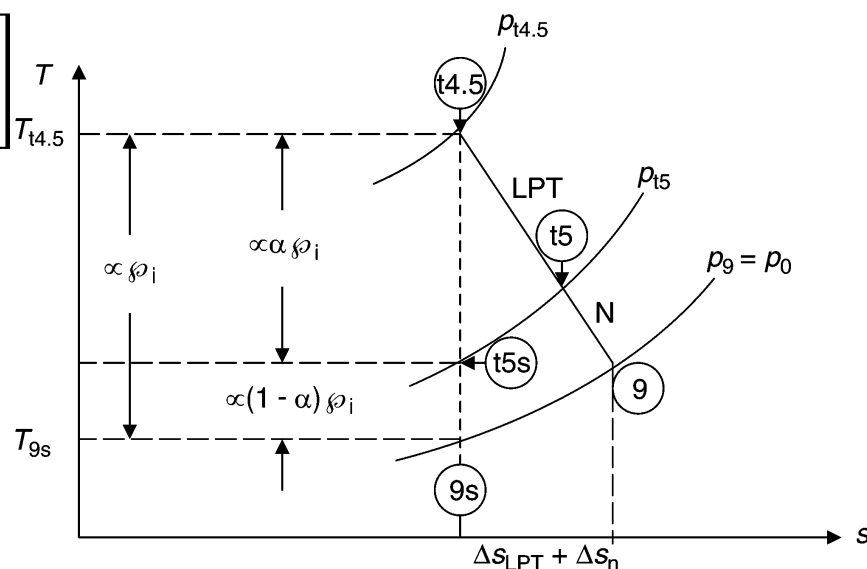
$$\eta_{tL} \alpha_p = \frac{h_{t45} - h_{t5}}{h_{t45} - h_{9s}} \rightarrow \frac{1 - \tau_{tL}}{\eta_{tL} \alpha_p} = 1 - \frac{h_{9s}}{h_{t45}} = 1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}} \right)^{k_9}$$

$$\tau_{tL} = 1 - \eta_{tL} \alpha_p \left[1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}} \right)^{k_9} \right]$$

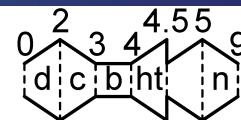
dove, in generale, essendo:

$$\eta_{tL} = \frac{1 - \tau_{tL}}{1 - \pi_{\tau L}^{k_9}} = \frac{1 - \tau_{tL}}{1 - \tau_{\tau L}^{\frac{1}{e_{tL}}}}$$

è necessario un approccio iterativo.



Turboprop



Il rapporto $\frac{p_9}{p_{t45}}$ può essere calcolato come:

$$\frac{p_{9s}}{p_{t45}} = \frac{p_9}{p_{t45}} = \frac{p_9}{p_0} \frac{p_0}{p_{t0}} \frac{p_{t0}}{p_{t2}} \frac{p_{t2}}{p_{t3}} \frac{p_{t3}}{p_{t4}} \frac{p_{t4}}{p_{t4.5}} = \frac{p_9}{p_0} \frac{1}{\pi_r \pi_d \pi_c \pi_b \pi_{tH}}$$

La potenza all'albero può essere calcolata come:

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0} = \eta_{gb} \eta_{m_{tL}} \frac{\mathcal{P}_{LPT}}{\dot{m}_0} = \eta_{gb} \eta_{m_{tL}} \frac{\dot{m}_9}{\dot{m}_0} (h_{t45} - h_{t5})$$

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0} = (1 + f) \eta_{gb} \eta_{m_{tL}} (1 - \tau_{tL}) \frac{h_{t45}}{h_{t4}} \frac{h_{t4}}{h_0} h_0$$

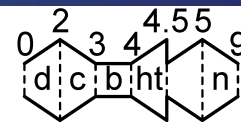
Chiaramente $h_{t45} = c_{p45} T_{t45}$ oppure con $\tau_{tH} = \frac{h_{t45}}{h_{t4}}$, $\tau_\lambda = \frac{h_{t4}}{h_0}$ si ha:

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\dot{m}_0} = (1 + f) \eta_{gb} \eta_{m_{tL}} (1 - \tau_{tL}) \tau_{tH} \tau_\lambda c_p T_0$$

Infine ricordando la definizione del rendimento d'elica:

$$\eta_{prop} = \frac{F_p V_0}{\mathcal{P}_s} \rightarrow \frac{F_p}{\dot{m}_0} = \frac{\eta_{prop} \mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0}$$





Evidentemente la spinta è data dalla **somma delle spinte** prodotte dal getto e dall'elica (core):

$$F = F_p + F_{core}$$

Come già detto:

$$\frac{F_{core}}{\dot{m}_0 a_0} = (1 + f) \frac{V_9}{a_0} \left(1 + \frac{1 - \frac{p_0}{p_9}}{\gamma_9 M_9^2} \right) - M_0 \quad \frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop} \mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0 a_0}$$

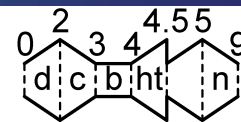
Normalmente per un turboprop, l'ugello segue un funzionamento corretto. Le varie grandezze sono calcolate nello stesso modo di un normale turbogetto. Chiaramente nel calcolo dei rapporti si deve considerare anche sia il contributo della turbina di alta che di bassa pressione. Per esempio nella:

$$\frac{p_{t9}}{p_9} = \pi_n \pi_t \pi_b \pi_c \pi_d \pi_r \frac{p_0}{p_9}$$

Si deve considerare $\pi_t = \pi_{tH} \pi_{tL}$



Turboprop



La spinta generata dall'elica è:

$$\frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop} \mathcal{P}_s}{\dot{m}_0 V_0 a_0} = \frac{\eta_{prop} (1 + f) \eta_{gb} \eta_{m_{tL}} (1 - \tau_{tL}) \tau_{tH} \tau_{\lambda} c_p T_0}{V_0 a_0}$$

I rendimenti diventano:

$$\eta_{th} = \frac{\Delta K \dot{E}}{\mathcal{P}_t} = \frac{a_0^2 [(1 + f) (V_{9,e}/a_0)^2 - M_0^2] + 2 \mathcal{P}_s / \dot{m}_0}{2 f Q_R}$$

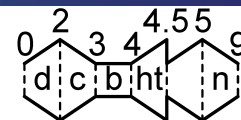
$$\eta_p = \frac{F_i V_0}{\Delta K \dot{E}} \approx \frac{2 (F_p + F_{core}) V_0 / \dot{m}_0}{a_0^2 [(1 + f) (V_{9,e}/a_0)^2 - M_0^2] + 2 \mathcal{P}_s / \dot{m}_0}$$

$$TSFC = \frac{f}{(F_p + F_{core}) / \dot{m}_0}$$

Oppure si può introdurre il **rapporto tra la portata di combustibile** è la **potenza propulsiva**:

$$PSFC = \frac{\dot{m}_0 f}{\Delta K \dot{E}} = \frac{1}{Q_R \eta_{th}}$$





Ha senso interrogarsi sulla possibilità di avere un α_p **ottimale** (che massimizza la spinta), mantenendo costanti gli altri parametri. Nell'ipotesi di funzionamento ideale si ha:

$$\frac{F_{core}}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{V_9}{a_0} - M_0 \quad \frac{F_p}{\dot{m}_0 a_0} = \frac{\eta_{prop}(1 - \tau_{tL})\tau_{tH}\tau_{\lambda}c_p T_0}{V_0 a_0}$$

Definendo il coefficiente di potenza come:

$$C_{tot} = \frac{F_p + F_{core}}{\dot{m}_0 c_p T_0} V_0 = \left(\frac{V_9}{a_0} - M_0 \right) \frac{kV_0 a_0}{RT_0} + \eta_{prop}(1 - \tau_{tL})\tau_{tH}\tau_{\lambda}$$

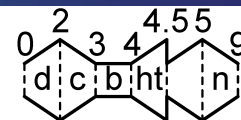
ricordando che: $\frac{V_9}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_c \tau_r} (\tau_t \tau_c \tau_r - 1)} = \sqrt{A\tau_{tL} - B}$

$$C_{tot} = (\sqrt{A\tau_{tL} - B} - M_0)(\gamma - 1)M_0 + C(1 - \tau_{tL})$$

dove $A = \frac{2}{\gamma-1} \tau_{tH}\tau_{\lambda}$, $B = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_c \tau_r} = \frac{2}{\gamma-1} \tau_b$, $C = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_{\lambda}$.



Turboprop



$$C_{tot} = (\sqrt{A\tau_{tL} - B} - M_0)(\gamma - 1)M_0 + C(1 - \tau_{tL})$$

dove $A = \frac{2}{\gamma-1} \tau_{tH}\tau_{\lambda}$, $B = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_c \tau_r} = \frac{2}{\gamma-1} \tau_b$, $C = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_{\lambda}$.

Derivando:

$$\frac{\partial C_{tot}}{\partial \tau_{tL}} = (\gamma - 1)M_0 \frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{A\tau_{tL} - B}} - C$$

Uguagliando a zero per ottenere un massimo:

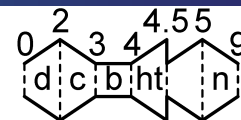
$$(\gamma - 1)M_0 \frac{1}{2} \frac{2}{\gamma - 1} \tau_{tH}\tau_{\lambda} = \eta_{prop}\tau_{tH}\tau_{\lambda} \sqrt{A\tau_{tL} - B} \rightarrow M_0 = \eta_{prop} \sqrt{A\tau_{tL} - B}$$

Ricordando che $\frac{V_9}{a_0} = \sqrt{A\tau_{tL} - B}$ la relazione precedente comporta:

$$\frac{M_0}{\eta_{prop}} = \frac{V_9}{a_0} \quad \tau_{tL}^* = \frac{B}{A} + \frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2} = \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_{\lambda}} + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M_0^2}{\tau_{tH}\tau_{\lambda}\eta_{prop}^2}$$

Per $\eta_{prop} = 1$ la **massima spinta** si ha quando $V_9 = V_0 \rightarrow F_{core} = 0$.





$$\tau_{tL}^* = \frac{B}{A} + \frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2} = \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda} + \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}$$

Ricordando che:

$$\frac{1 - \tau_{tL}}{\eta_{tL}\alpha_p} = 1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^{k_9} \quad \alpha_p = \frac{1 - \tau_{tL}}{1 - \left(\frac{p_9}{p_{t45}}\right)^k}$$

$$\tau_b = \frac{\tau_\lambda}{\tau_r\tau_c}$$

$$\frac{p_9}{p_{t45}} = \frac{p_9}{p_0} \frac{1}{\pi_{tH}\pi_b\pi_c\pi_d\pi_r} = \left(\frac{1}{\tau_{tH}\tau_r\tau_c}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}\right)^{\frac{1}{k}}$$

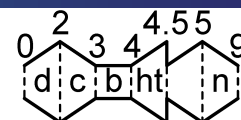
$$\tau_r = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_0^2$$

da cui:

$$\alpha_p^* = \frac{1 - \tau_{tL}^*}{1 - \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}} = \frac{1 - \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}}{1 - \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}} - \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{1 - \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda}} = 1 - \frac{(\tau_r - 1)/\eta_{prop}^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda - \tau_b}$$



Turboprop



$$\tau_{tL}^* = \frac{B}{A} + \frac{M_0^2}{A\eta_{prop}^2} = \frac{\tau_b}{\tau_{tH}\tau_\lambda} + \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda\eta_{prop}^2}$$

$$\alpha_p^* = 1 - \frac{(\tau_r - 1)/\eta_{prop}^2}{\tau_{tH}\tau_\lambda - \tau_b}$$

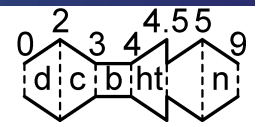
Queste due relazioni corrispondono a:

$$\frac{M_0}{\eta_{prop}} = \frac{V_9}{a_0}$$

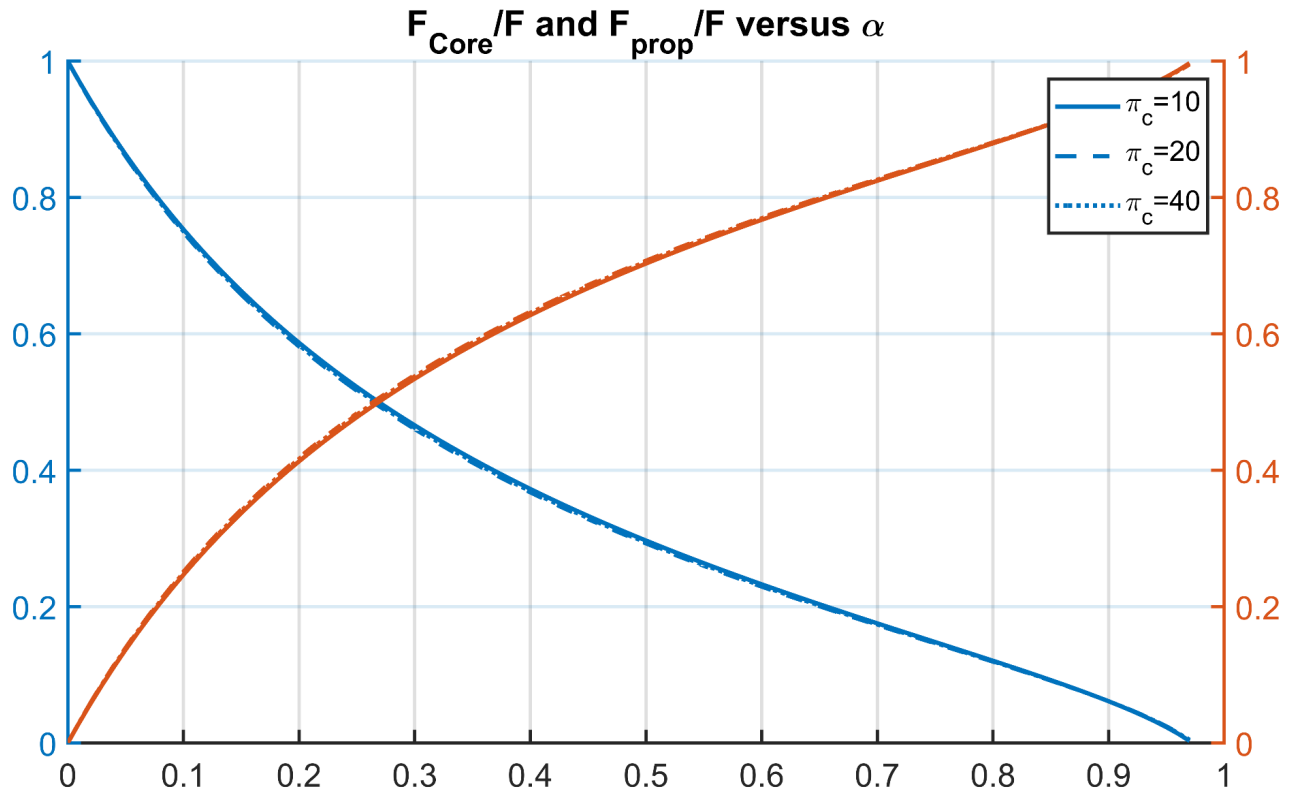
Per $\eta_{prop} = 1$ la **massima spinta** si ha quando $V_9 = V_0 \rightarrow F_{core} = 0$. Questa condizione corrisponde a $\alpha_p^* = 1$ solo quando $M_0 = 0$ ovvero a $\tau_r = 1$.



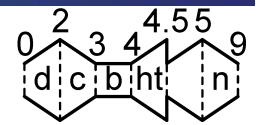
TurboProp



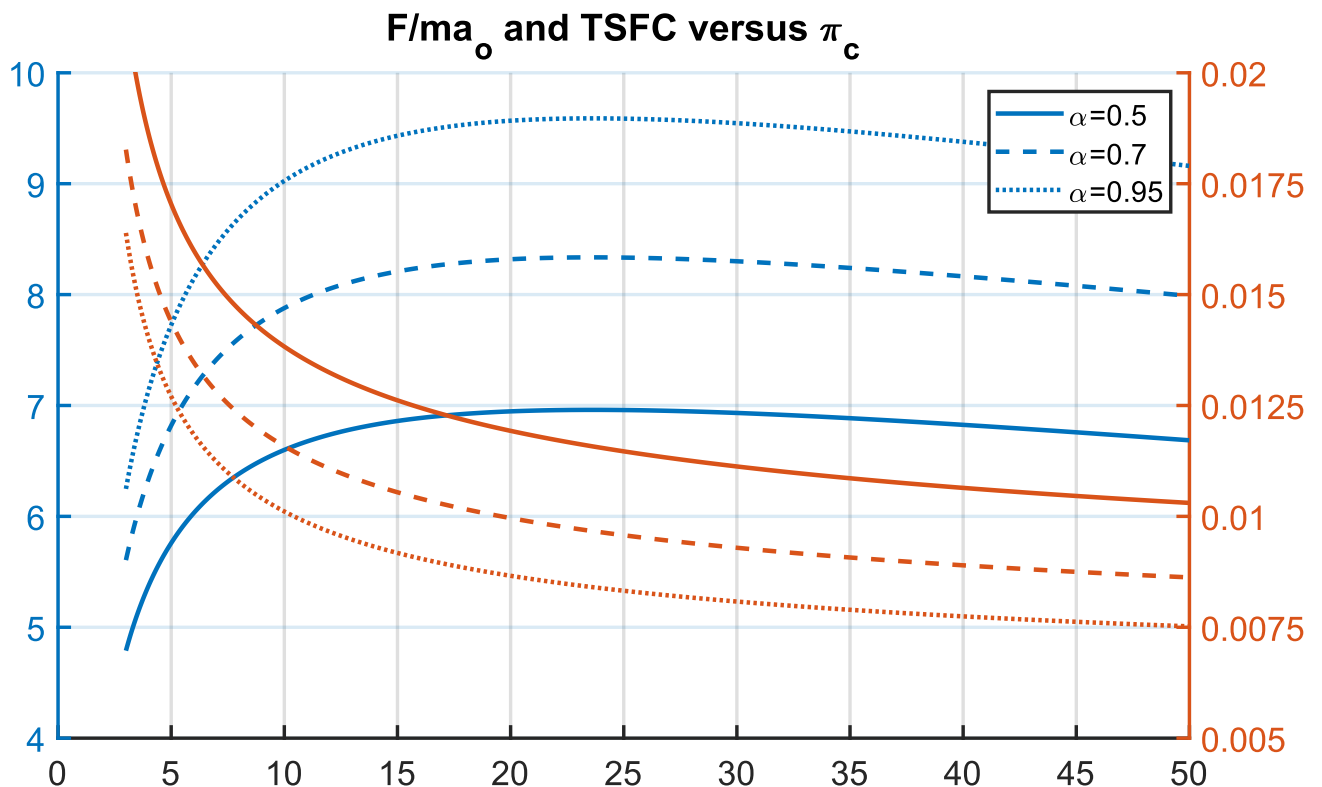
$$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42,800kJ/kg$$

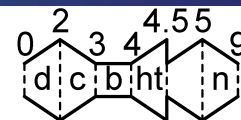


TurboProp



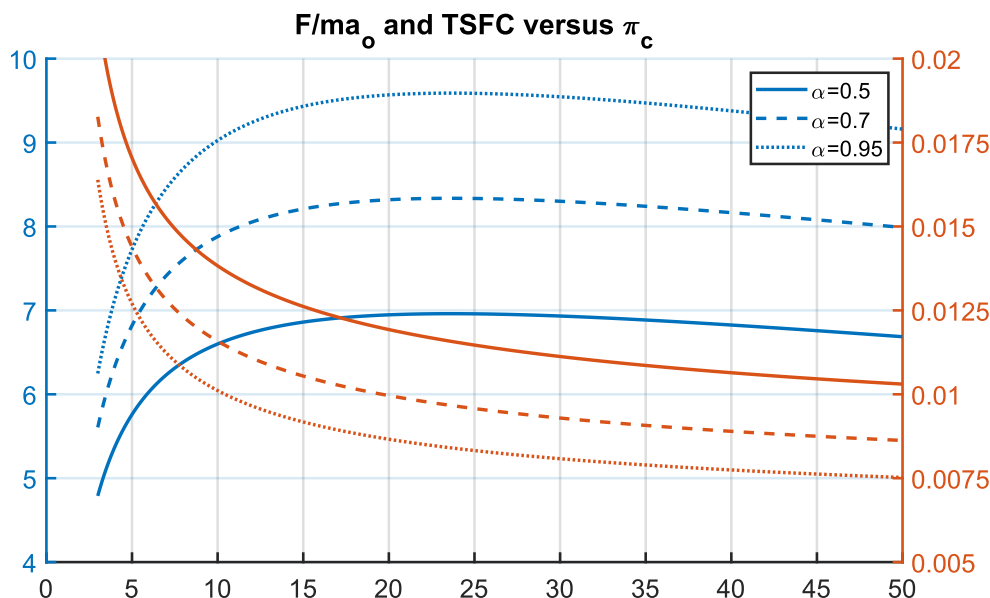
$$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42,800kJ/kg$$



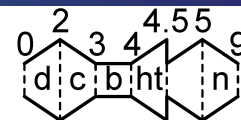


Dalla figura si nota:

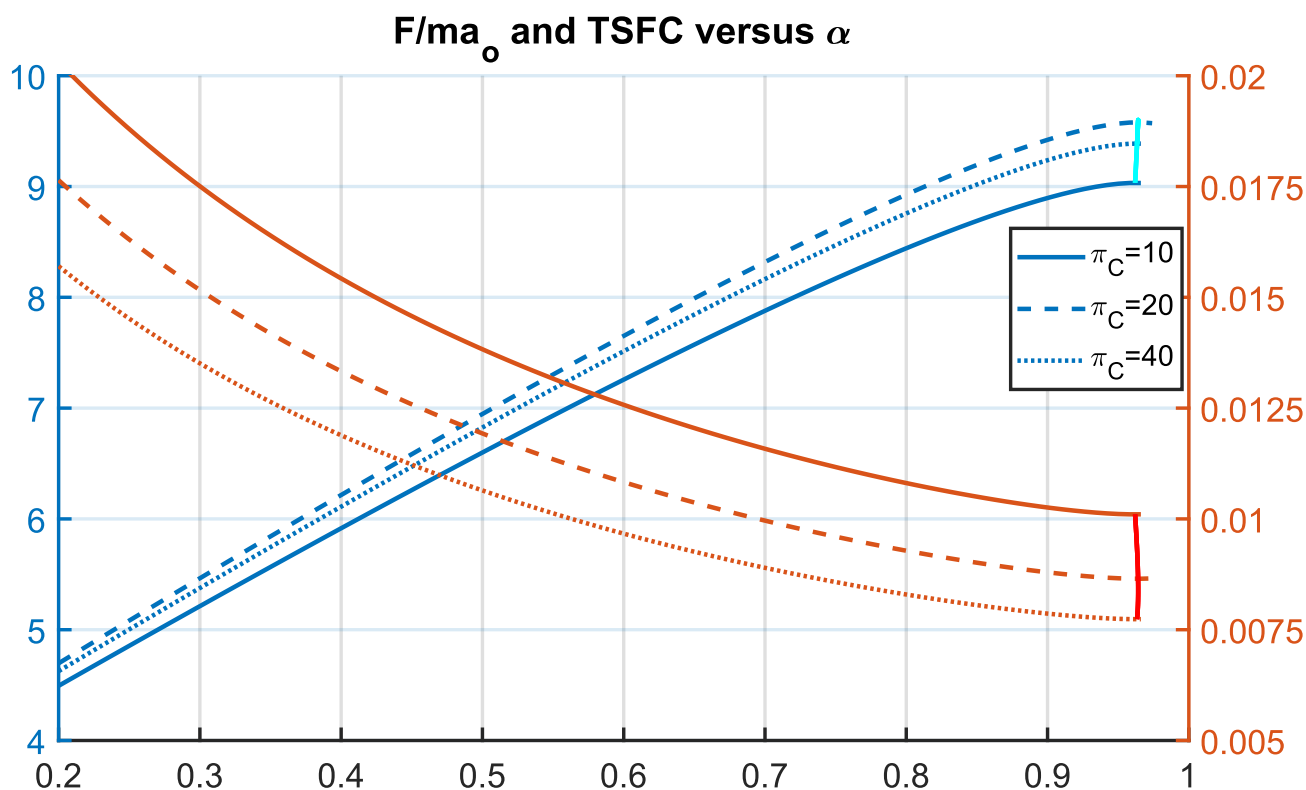
- Anche in questo caso esiste un valore di π_c che massimizza la spinta;
- Il consumo diminuisce con π_c ;
- Un comportamento simile si ha anche all'aumentare di α (per un aumento del rendimento propulsivo).



TurboProp



$$M_0 = 0.60, T_0 = 250K, T_{t4} = 1750K, Q_R = 42,800kJ/kg$$



In rosso e ciano sono mostrate le curve relative a α_p^* . Le prestazioni aumentano significativamente per alti valori del rapporto di ripartizione della potenza.

