Algoritmi e Strutture Dati (Mod. B)

Grafi

Grafi

I grafi sono uno *strumento di rappresentazione* (modellazione) di problemi.

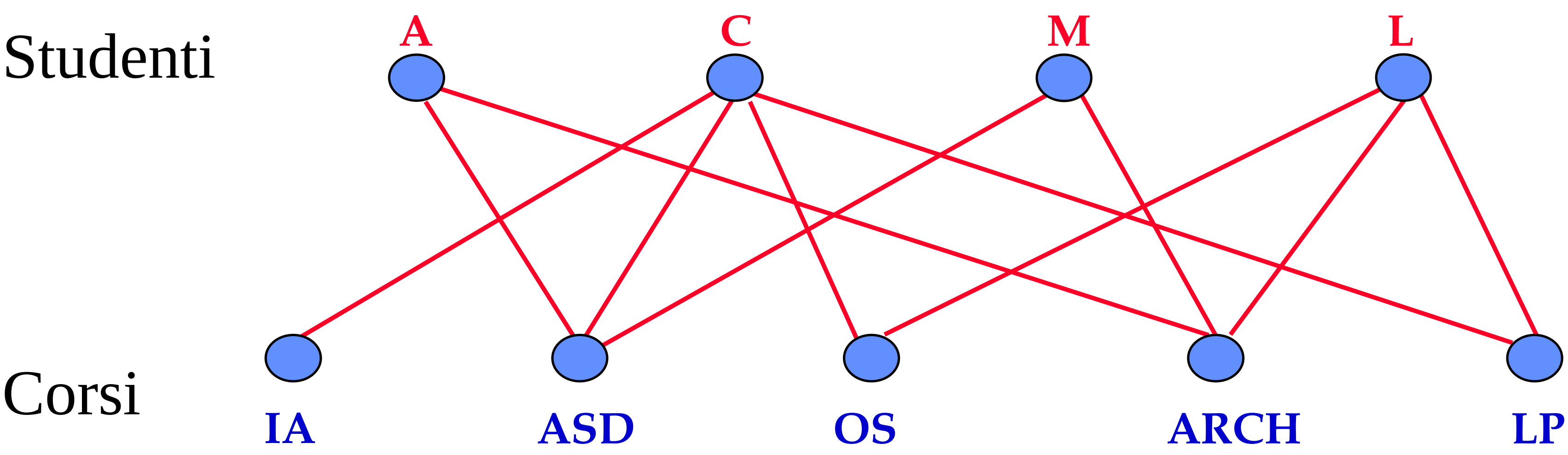
La soluzione di molti problemi può essere ricondotta alla soluzione di opportuni problemi su grafi.

- ***Introduzione ai grafi***
  - **Definizioni e rappresentazione di grafi**
  - **Algoritmi di visita di grafi**
    - **Visita in ampiezza (*BFS*)**
    - **Visita in profondità (*DFS*)**
  - **Applicazioni: Ordinamento Topologico, Componenti Fortemente Connesse,…**

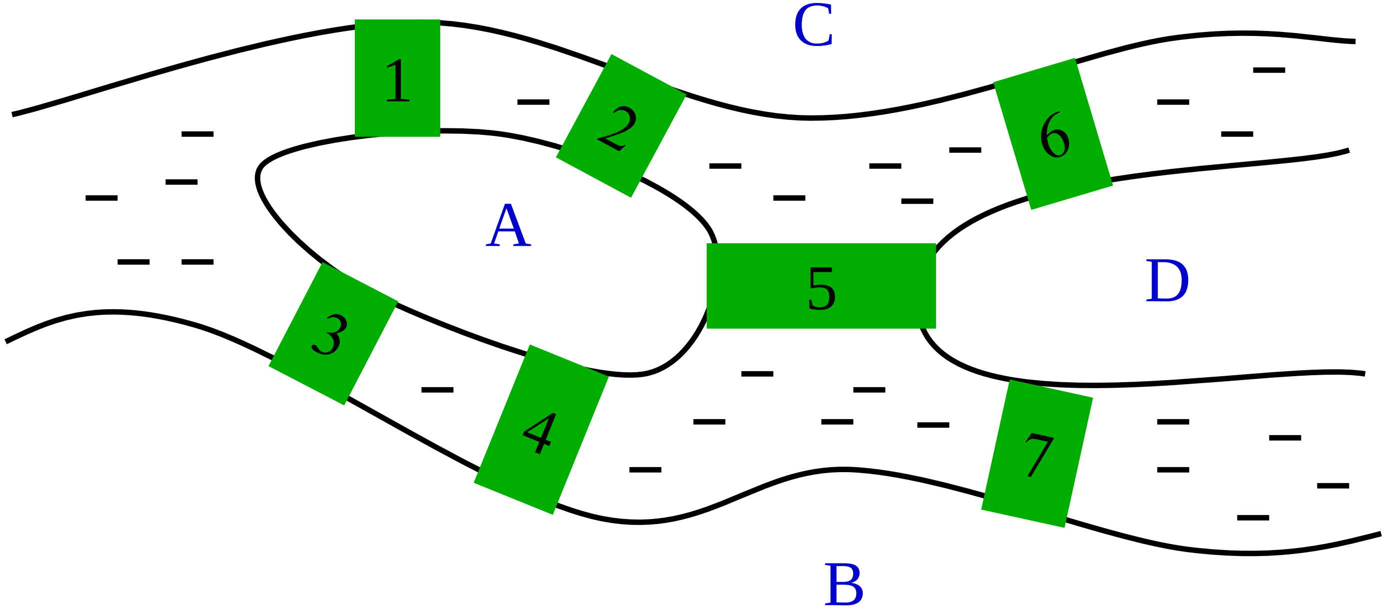
Cos'è un grafo

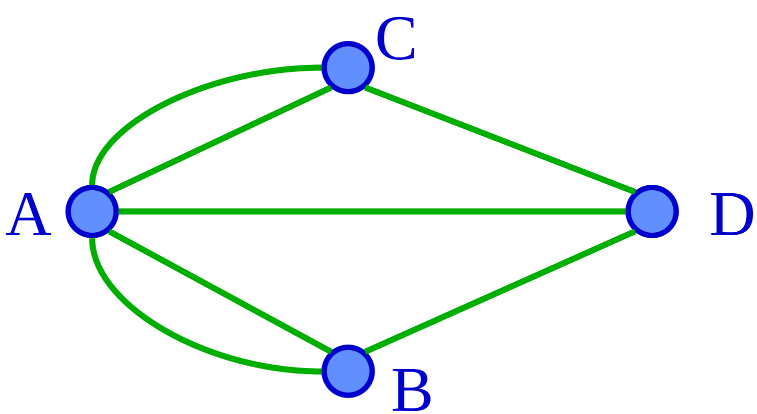
Esempio:

Studenti	Corsi
Marco	ASD, ARCH
Carla	IA, ASD, OS, LP
Andrea	ASD, ARCH
Laura	OS, ARCH, LP



I ponti di Königsberg



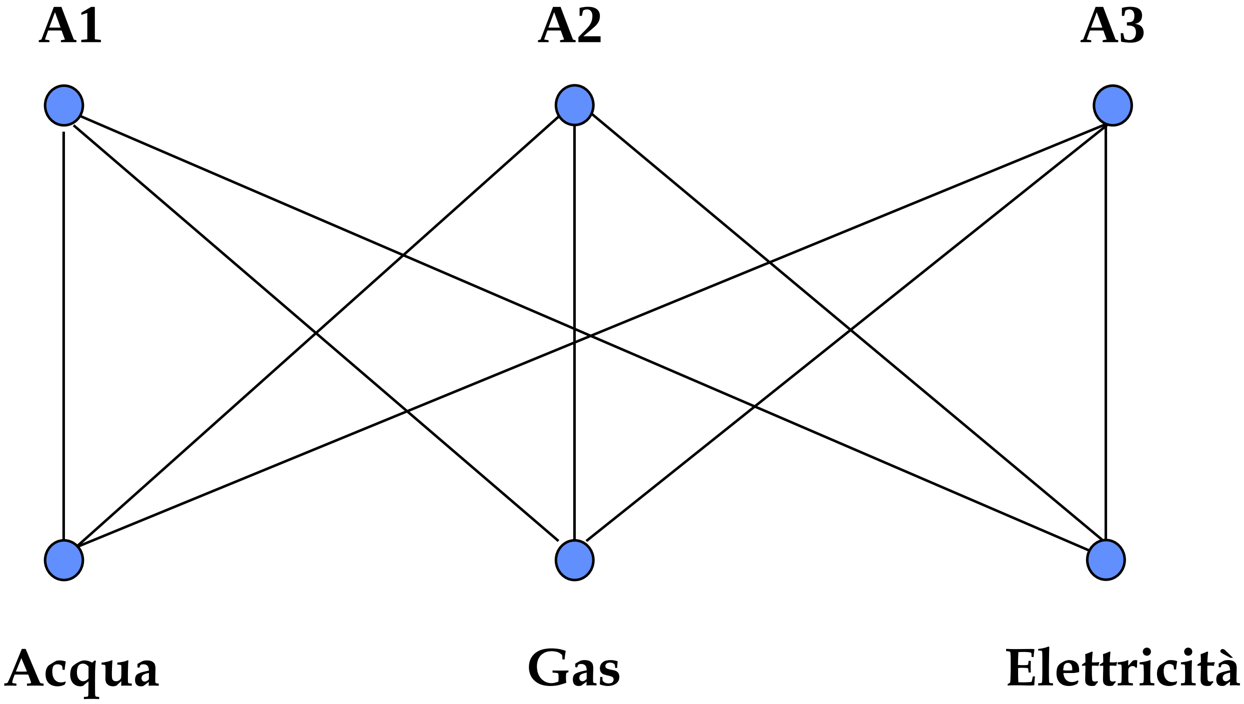


È possibile attraversare tutti i ponti esattamente una sola volta?

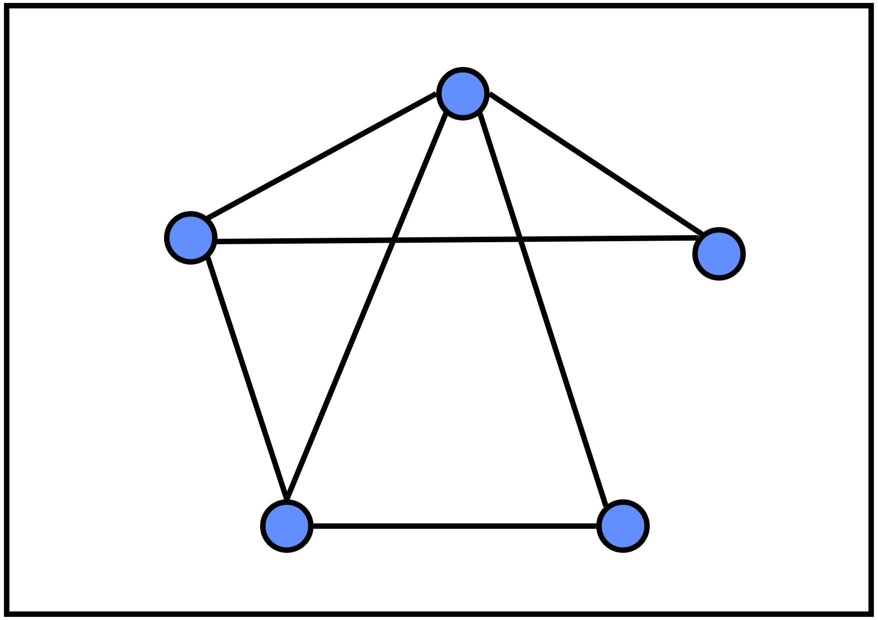
Rappresentazione a grafi di problemi

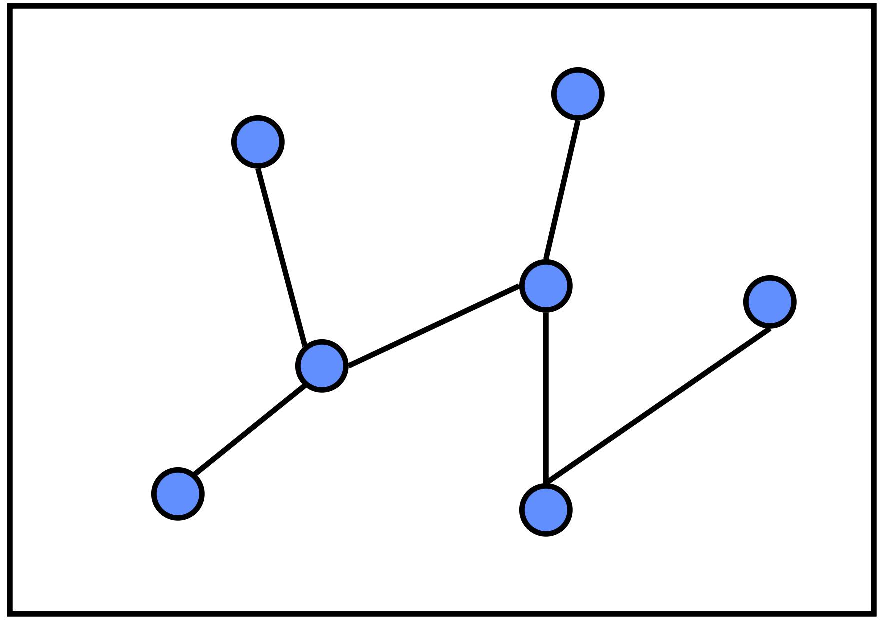
Problema: **Supponiamo dover connettere tre abitazioni A1, A2 e A3 tramite tubature per fornile di Acqua, Gas ed Elettricità.**

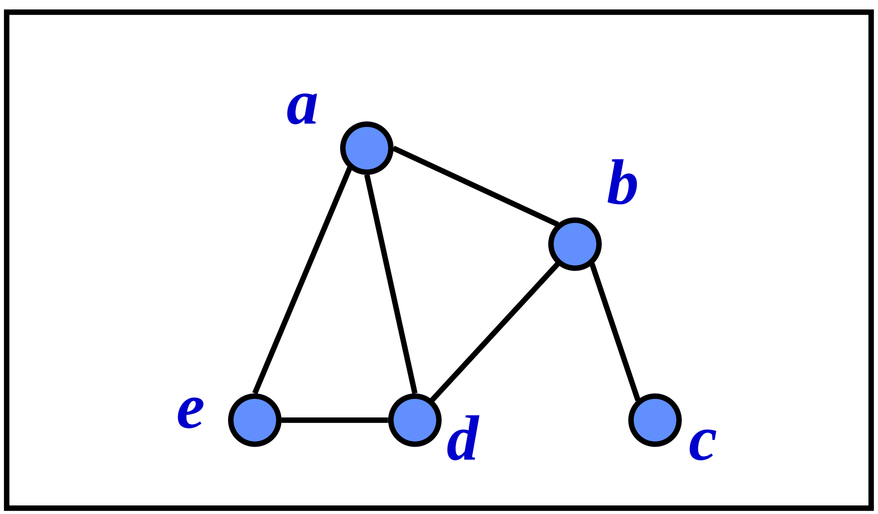
Se però assumiamo che le tubature vadano posizionate alla stessa profondità, è possibile offire la fornitura a tutte le abitazioni senza far incrociare le tubature?

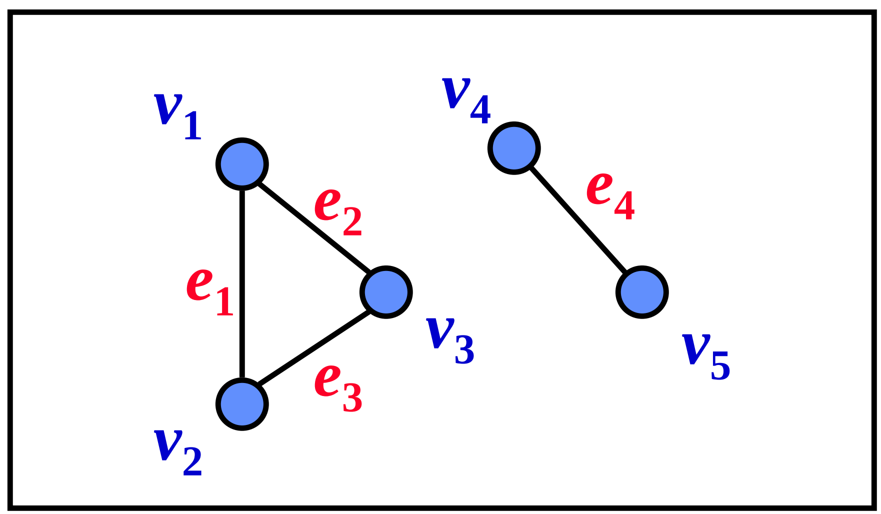


Esempi di grafi









Definizione di grafo

Un **grafo** ***G*** è una coppia di elementi **(*V*, *E*)** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di **coppie di vertici** detto insieme degli **archi**

Definizione di grafo

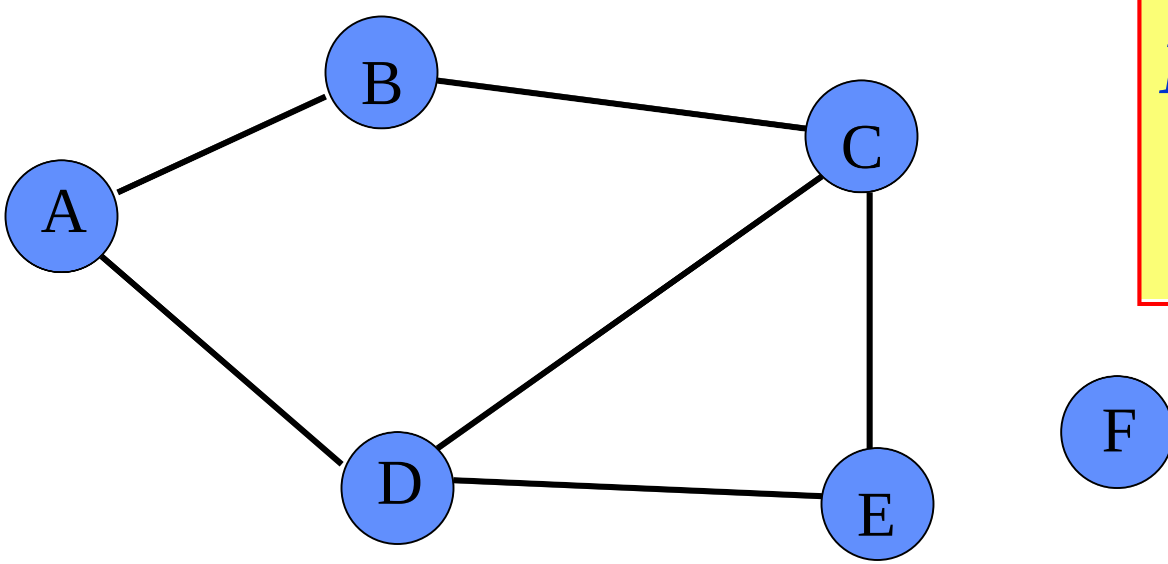
Un **grafo *G*** è una coppia di elementi **(*V*, *E*)** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di **coppie di vertici** detto insieme degli **archi**

V = {A, B, C, D, E, F}

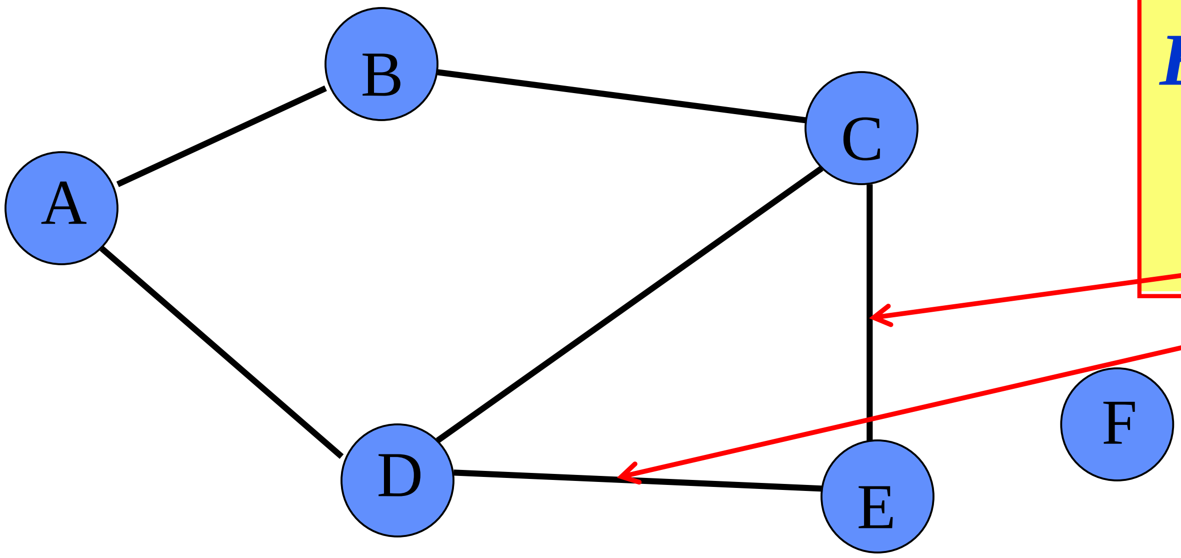
E = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}



Definizione di grafo

Un **arco** è una coppia ***(v,w)*** di vertici in ***V***, cioè

- $v \in V$ e $w \in V$



V = {A, B, C, D, E, F}

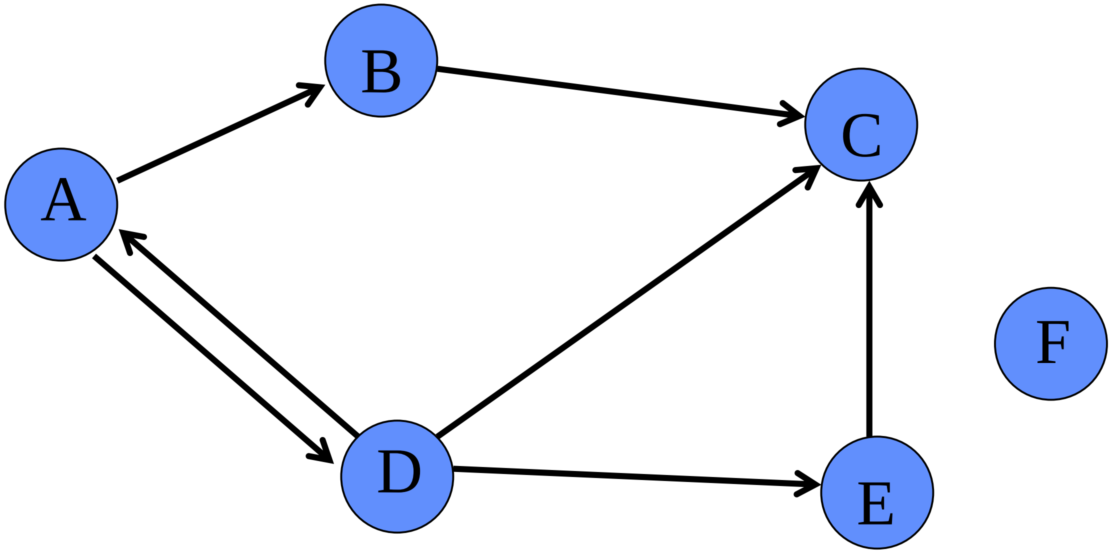
E = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}

Tipi di grafi: grafi orientati

Un **grafo orientato *G*** è una coppia **(*V*, *E*)** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è una ***relazione binaria*** tra vertici detta insieme degli **archi** (cioè, $E \subseteq V \times V$)



ipi di grafi: grafi orientati

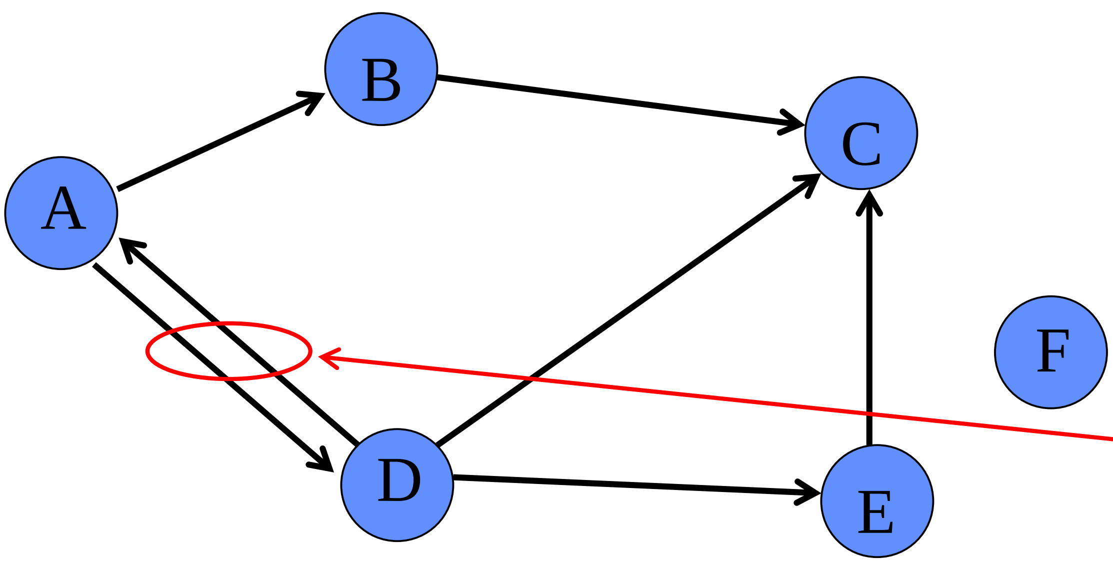
Un **grafo orientato *G*** è una coppia ***(V, E)*** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è una ***relazione binaria*** tra vertici detta insieme degli **archi** (cioè, $E \subseteq V \times V$)

V = {A, B, C, D, E, F}

E ={(A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C),(D,E), (D,A)}



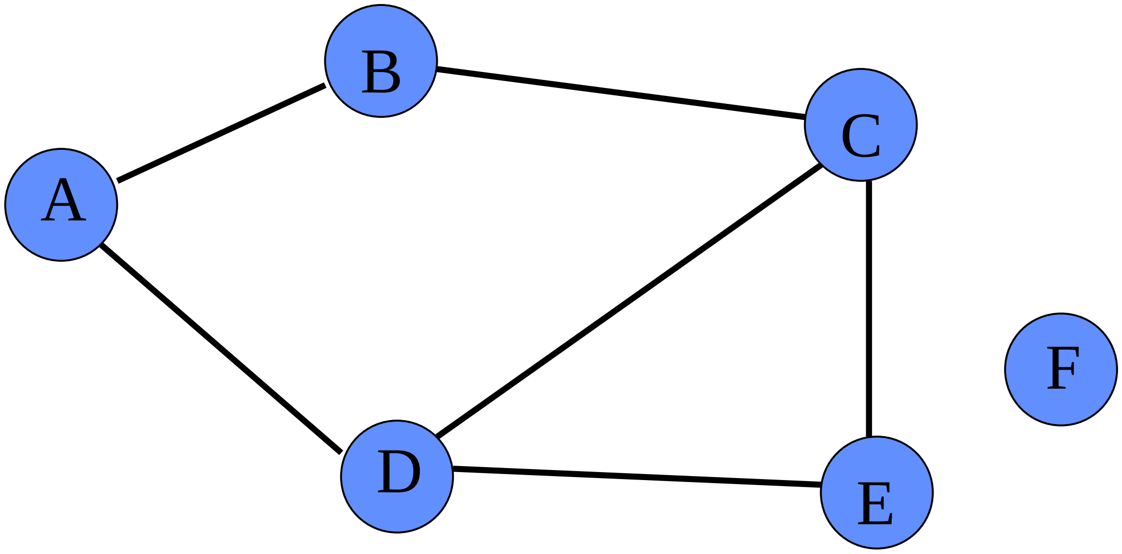
(A,D) *e* (D,A) denotano due archi diversi

Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato** ***G*** è una coppia **(*V*, *E*)** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di coppie ***non ordinate*** di vertici detto insieme degli **archi** (cioè, $E \subseteq V \times V$)



V **= {A, B, C, D, E, F}**

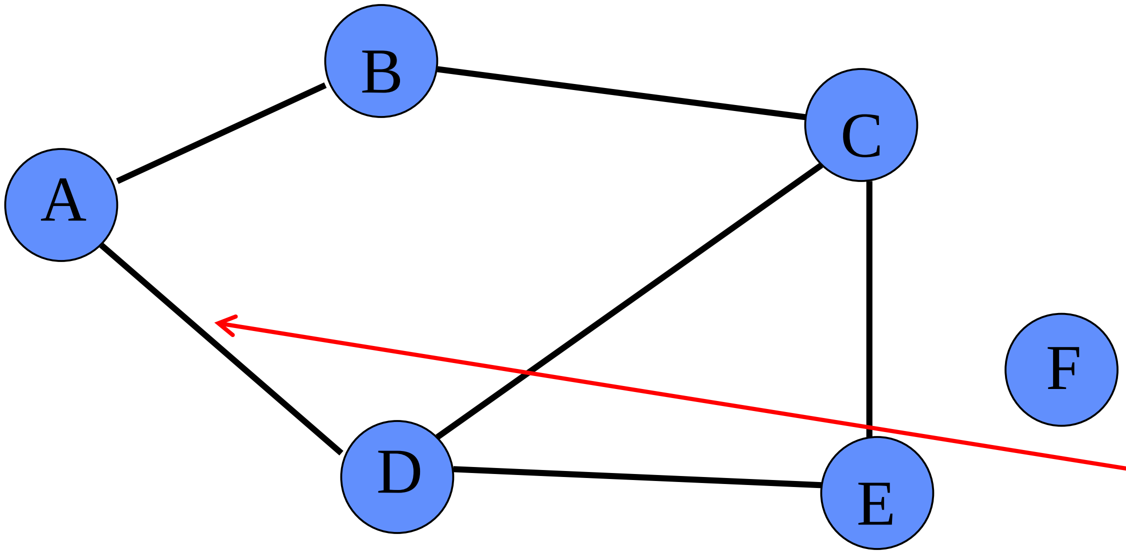
E **= {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}**

Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato *G*** è una coppia **(*V*, *E*)** dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di coppie ***non ordinate*** di vertici detto insieme degli **archi** (cioè, $E \subseteq V \times V$)



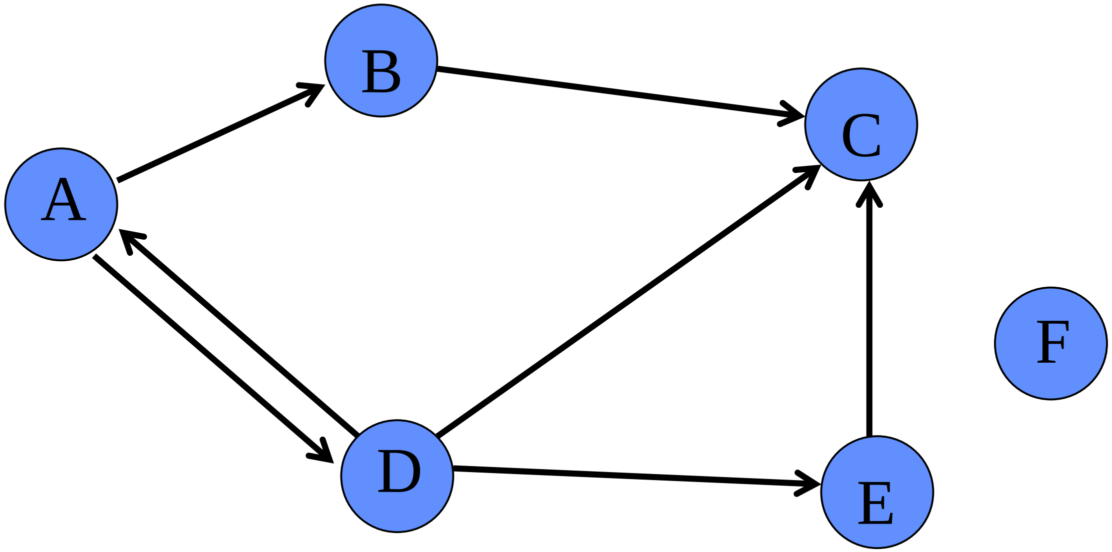
V = {A, B, C, D, E, F}

E = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}

(A,D) *e* (D,A) denotano lo stesso arco

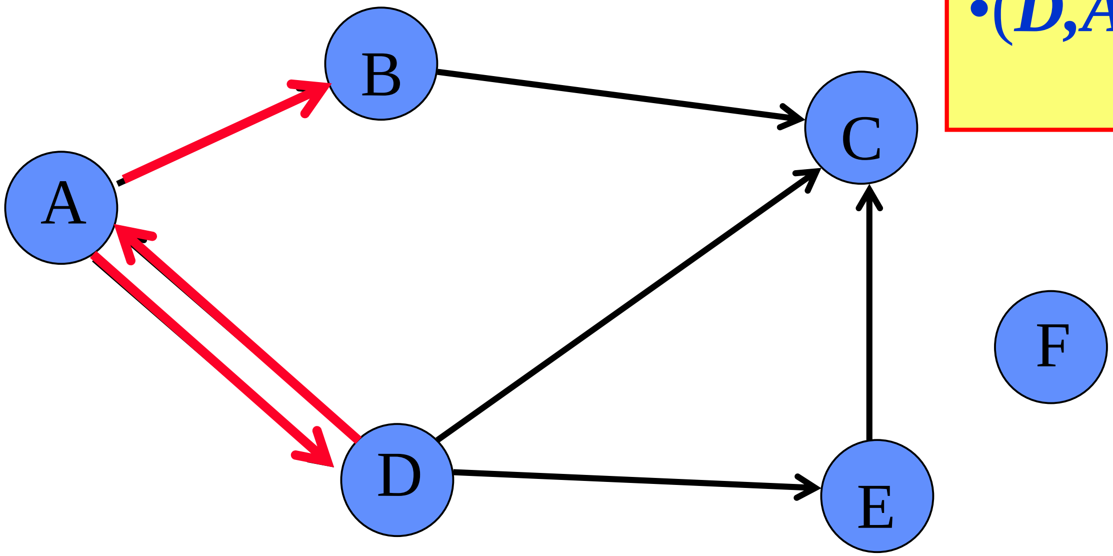
Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco **$(w,v) \in E$** si dice ***incidente*** da ***w*** in ***v***



Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco $(w,v) \in E$ si dice ***incidente*** da w in v



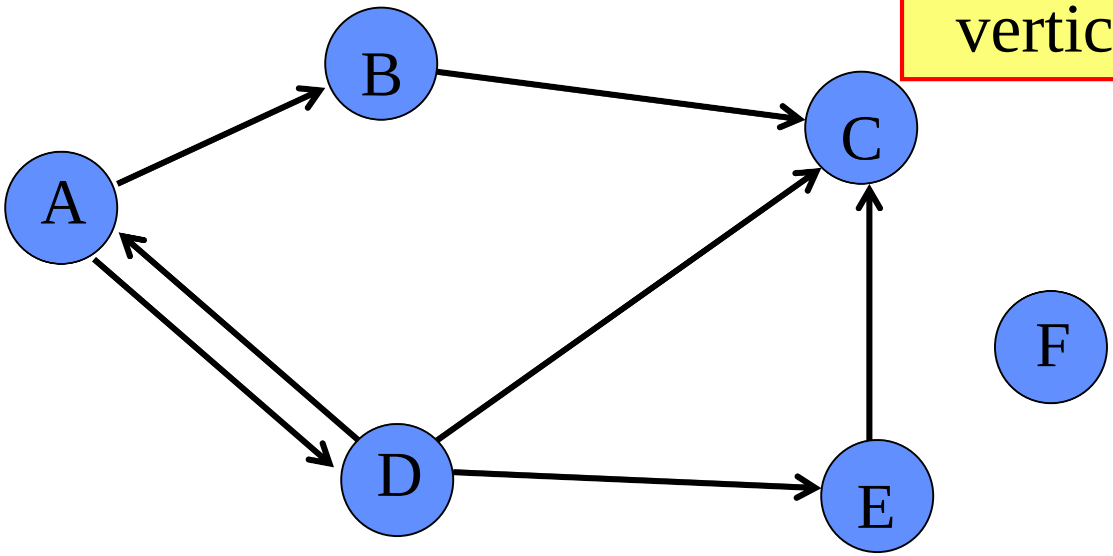
- (A,B) è ***incidente*** da A a B
- (A,D) è ***incidente*** da A a D
- (D,A) è ***incidente*** da D a A

Definizioni sui grafi

Un vertice ***w*** si dice ***adiacente*** a ***v*** se e solo se

- **(*v*, *w*) ∈ *E*.**

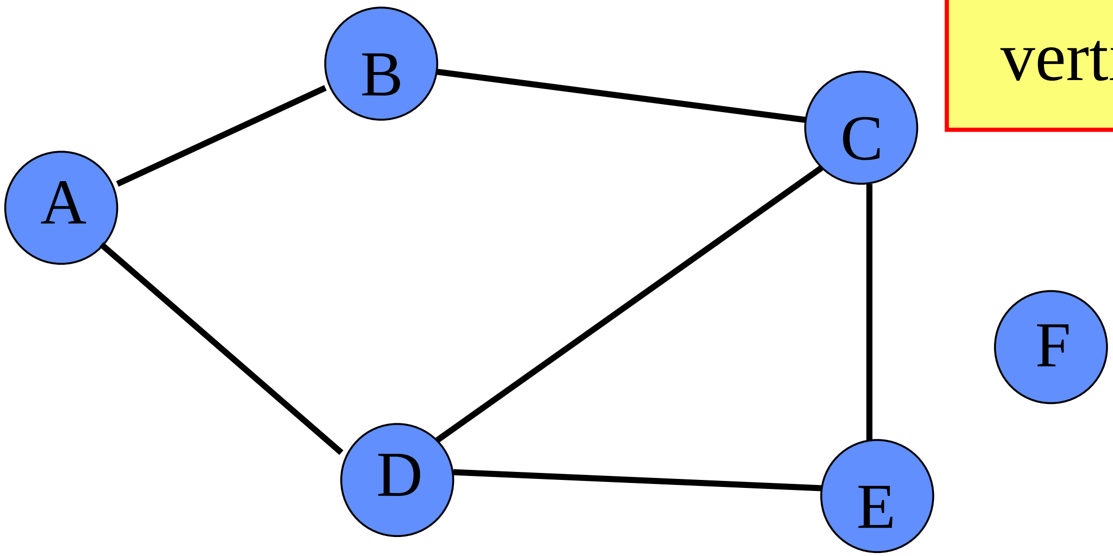
- ***B*** è ***adiacente*** ad ***A***
- ***C*** è ***adiacente*** a ***B*** e a ***D***
- ***A*** è ***adiacente*** a ***D*** e vice versa
- ***B NON*** è ***adiacente*** a ***D NÉ*** a ***C***
- ***F NON*** è ***adiacente*** ad alcun vertice



Definizioni sui grafi

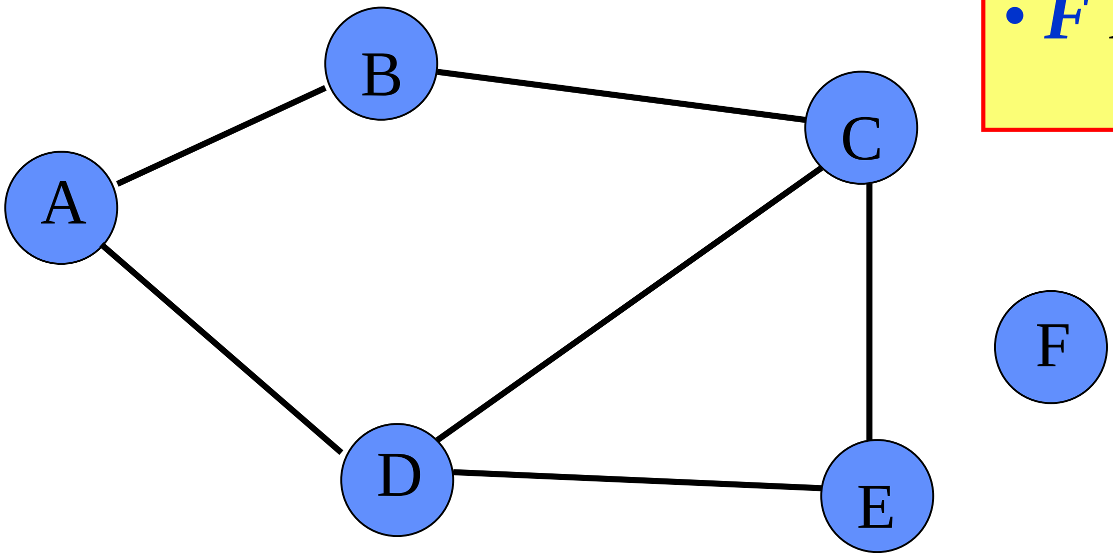
In un ***grafo non orientato*** la relazione di ***adiacenza*** tra vertici è ***simmetrica***

- ***A*** è ***adiacente*** a ***D*** e vice versa
- ***B*** è ***adiacente*** a ***A*** e vice versa
- ***F NON*** è ***adiacente*** ad alcun vertice



Definizioni sui grafi

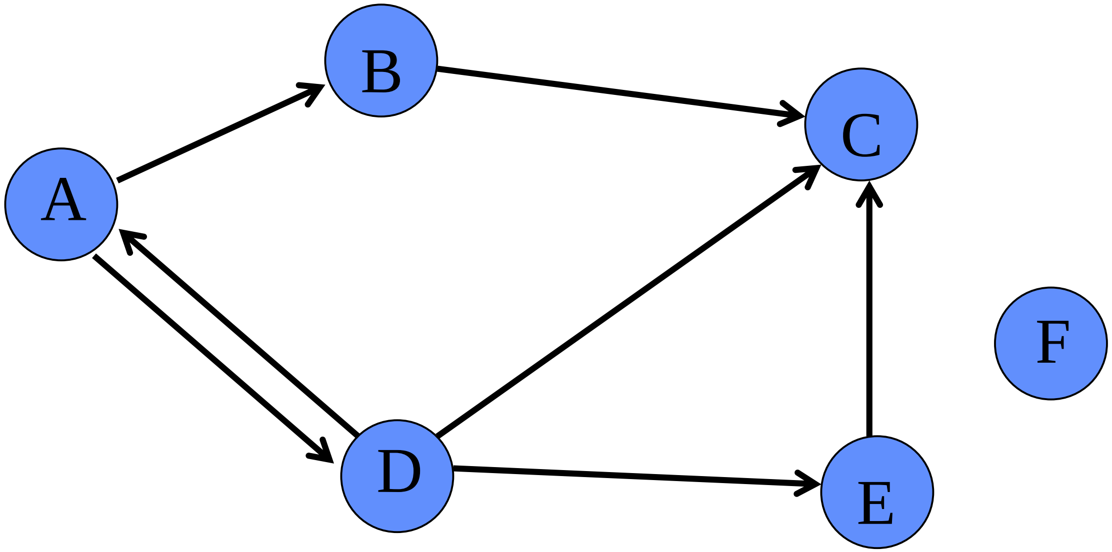
In un ***grafo non orientato*** il ***grado*** di un ***vertice*** è il ***numero di archi*** che da esso si dipartono



- ***A***, ***B*** ed ***E*** hanno ***grado*** **2**
- ***C*** e ***D*** hanno ***grado*** **3**
- ***F*** ha ***grado*** **0**

Definizioni sui grafi

In un ***grafo orientato*** il ***grado entrante (uscente)*** di un ***vertice*** è il ***numero di archi incidenti in (uscenti da)*** esso

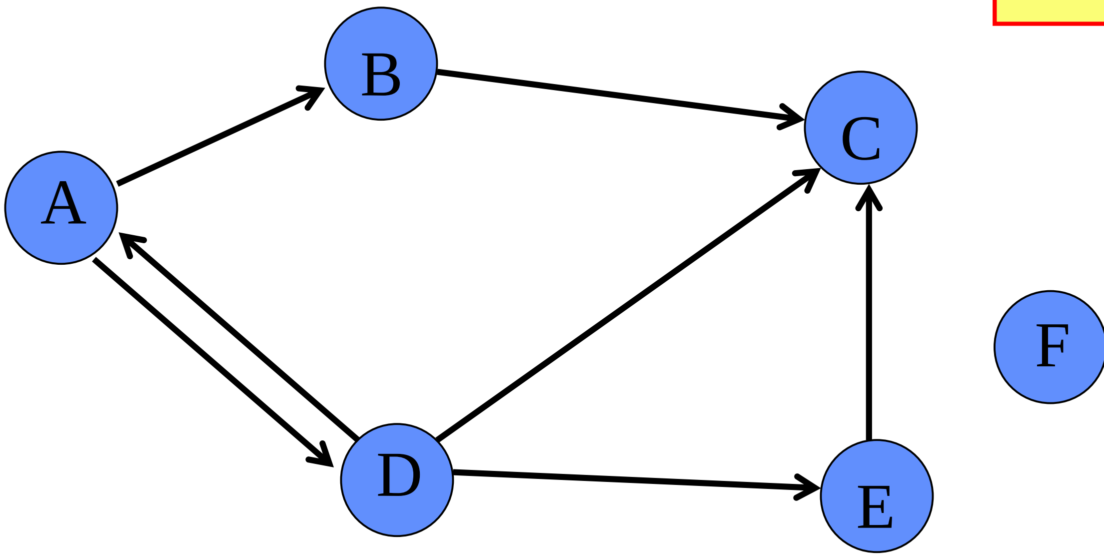


- ***A*** ha ***grado uscente*** **2** e ***grado entrante*** **1**
- ***B*** ha ***grado uscente*** **1** e ***grado entrante*** **1**
- ***C*** ha ***grado uscente*** **0** e ***grado entrante*** **3**
- ***D*** ha ***grado uscente*** **3** e ***grado entrante*** **1**

Definizioni sui grafi

In un ***grafo orientato*** il ***grado*** di un ***vertice*** è la somma del suo ***grado entrante*** e del suo ***grado uscente***

- ***A*** e ***C*** hanno ***grado*** **3**
- ***B*** ha ***grado*** **2**
- ***D*** ha ***grado*** **4**

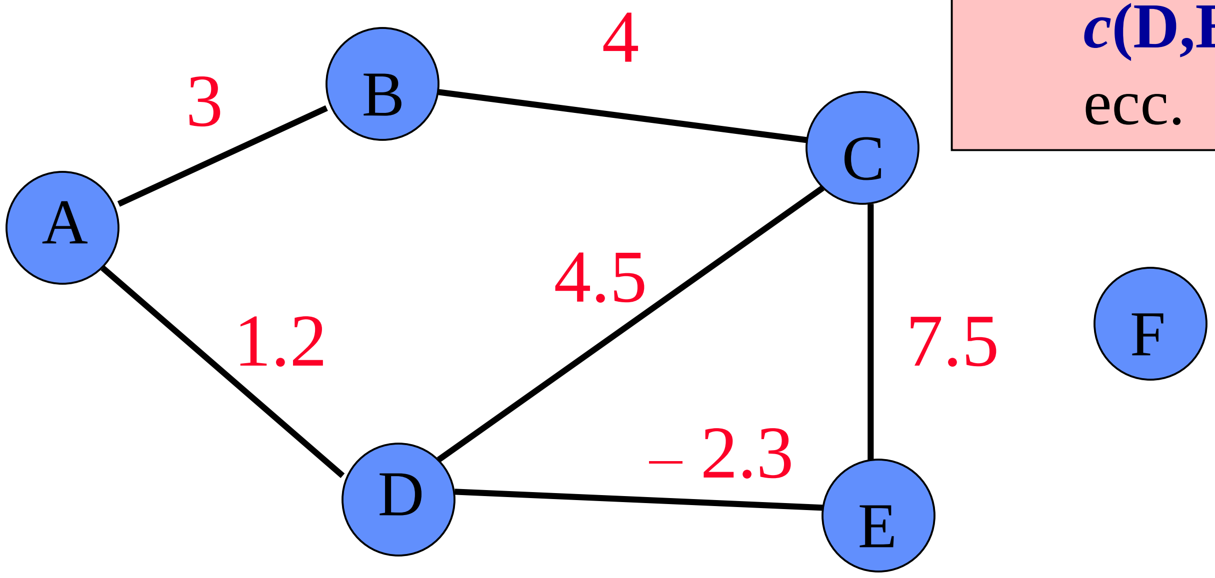


Definizioni sui grafi

In alcuni casi, gli archi hanno un ***peso*** (o ***costo***) associato.

Il costo può essere rappresentato da una **funzione di costo**, ***c*: *E* → R**, dove **R** è l'insieme dei numeri reali (o interi).

Es., ***c*(A, B) = 3,**
***c*(D,E) = – 2.3**,
ecc.

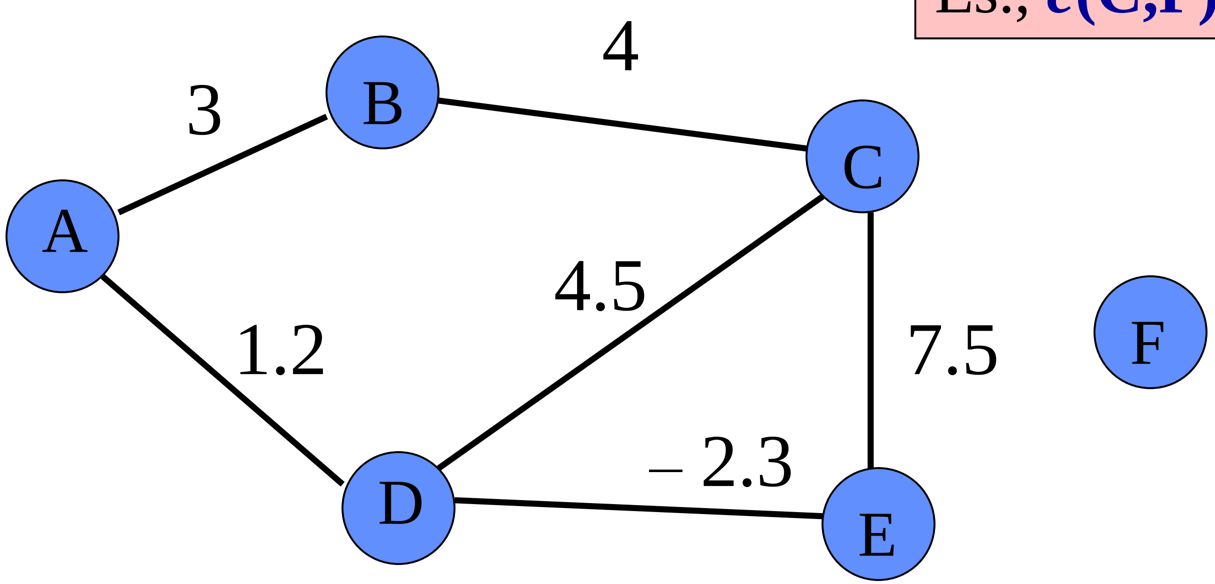


Definizioni sui grafi

In alcuni casi, gli archi hanno un ***peso*** (o ***costo***) associato.

Quando tra due vertici ***non esiste*** un arco, si dice che il costo è ***infinito***.

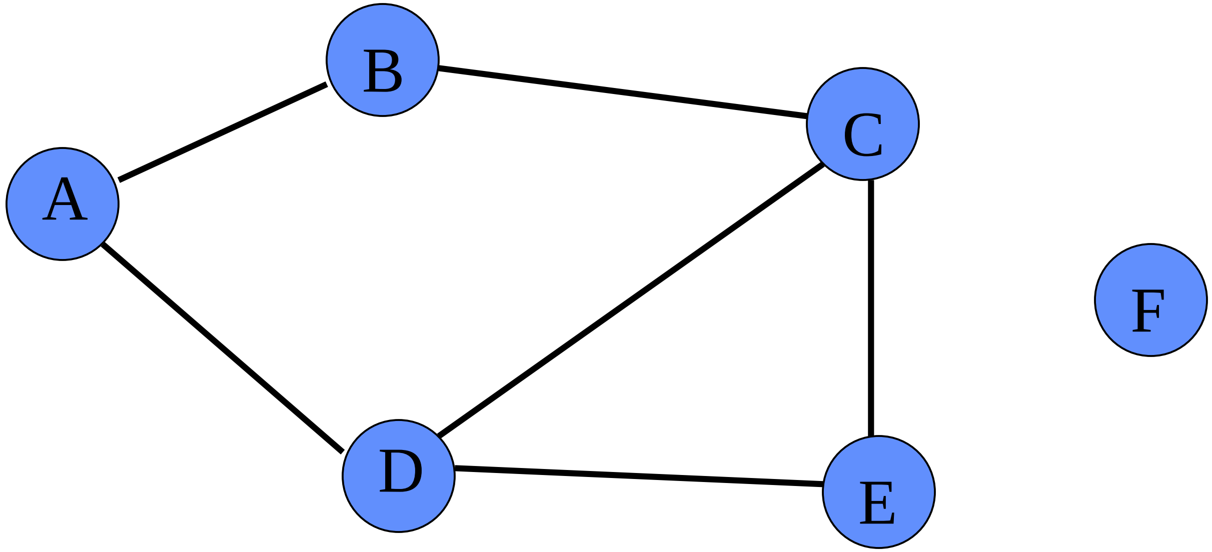
Es., ***c*(C,F) = ∞**



Definizioni sui grafi

Sia $\boldsymbol{G = (V, E)}$ un grafo.

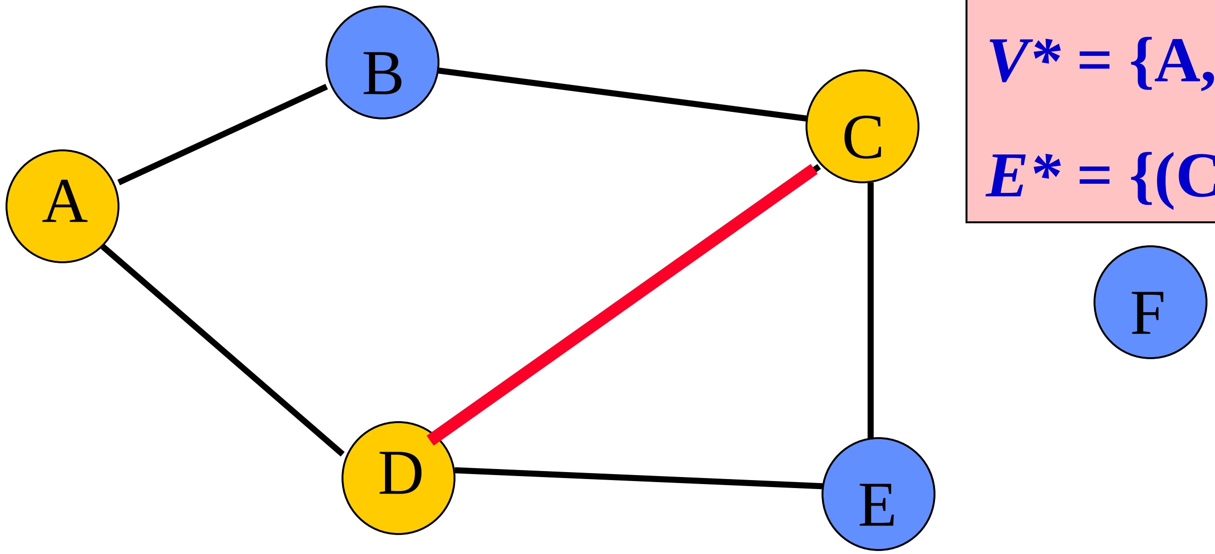
Un ***sottografo*** di $\boldsymbol{G}$ è un grafo $\boldsymbol{H = (V^*, E^*)}$ tale che $\boldsymbol{V^* \subseteq V}$ e $\boldsymbol{E^* \subseteq E}$. (e poiché $\boldsymbol{H}$ è un grafo, deve valere che $\boldsymbol{E^* \subseteq V^* \times V^*}$.)



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un ***sottografo*** di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



Es.,

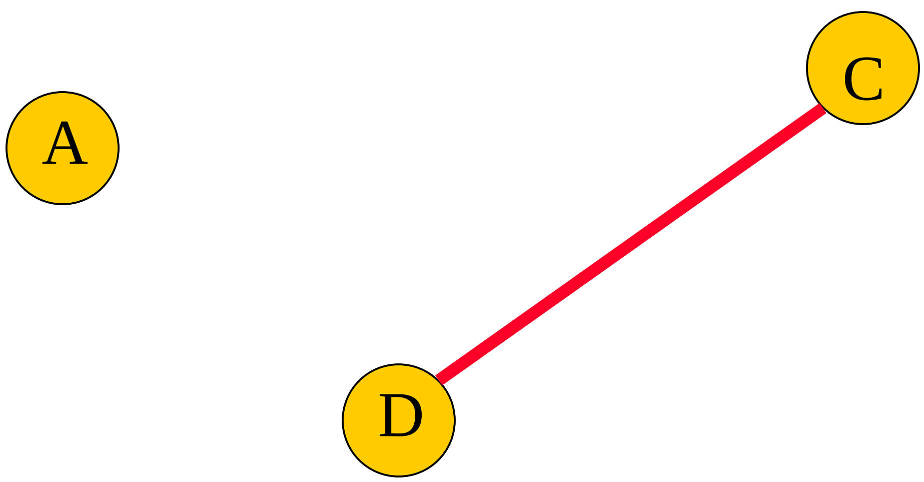
$V^* = \{A, C, D\}$,

$E^* = \{(C, D)\}$.

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un ***sottografo*** di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



Es.,

$V^* = \{A, C, D\}$,

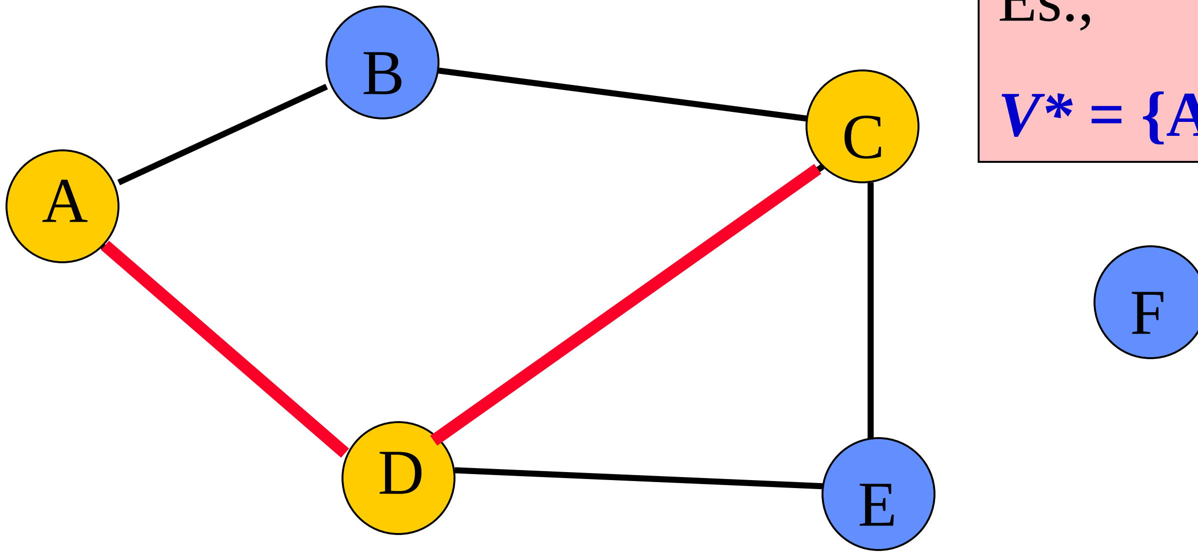
$E^* = \{(C, D)\}$.

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo e $V^* \subseteq V$ un insieme di vertici.

Il ***sottografo*** di G ***indotto*** da V^* è il grafo $H=(V^*, E^*)$ tale che:

$$E^* = \{(w,v) \in E \mid w,v \in V^*\} = E^* = E \cap (V^* \times V^*)$$



Es.,

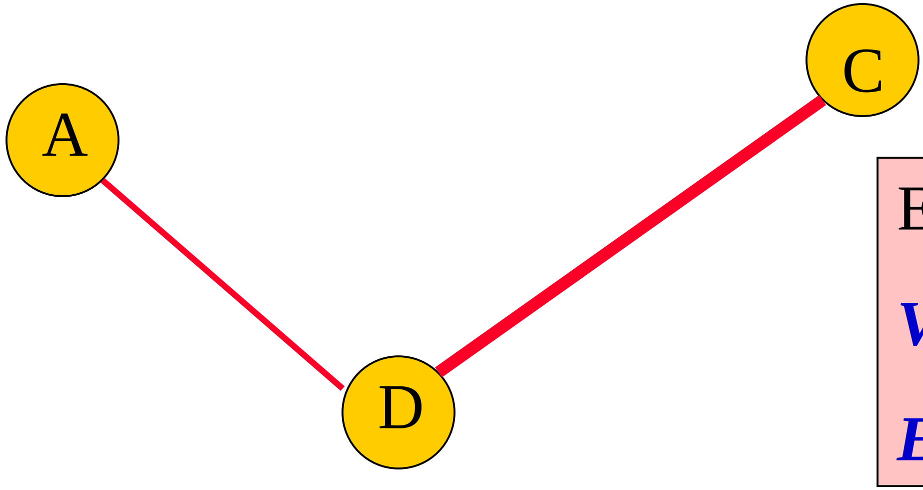
$V^* = \{A, C, D\}$

Definizioni sui grafi

Sia $\boldsymbol{G = (V, E)}$ un grafo e $\boldsymbol{V^* \subseteq V}$ un insieme di vertici.

Il ***sottografo*** di ***G*** ***indotto*** da $\boldsymbol{V^*}$ è il grafo $\boldsymbol{H=(V^*, E^*)}$ tale che:

$$E^* = E \cap (V^* \times V^*)$$



Es.,

$\boldsymbol{V^* = \{A, C, D\}}$,

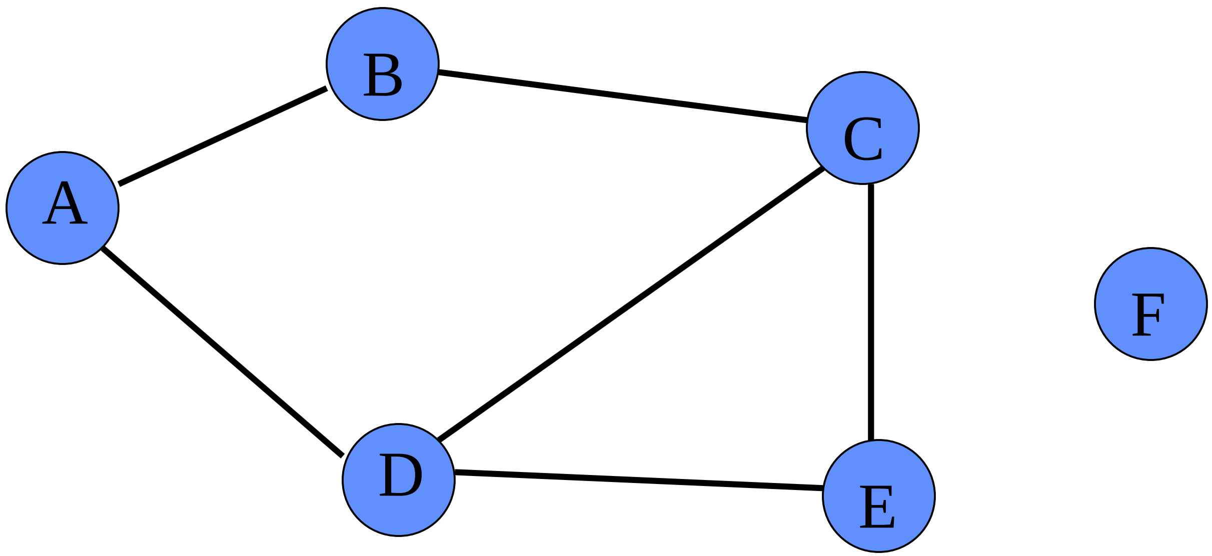
$\boldsymbol{E^* = \{(C, D), (A,D)\}}$.

Definizioni sui grafi

Sia ***G* = (*V*, *E*)** un grafo.

Un ***sottografo H*=(*V**, *E**)** di ***G*** è detto ***di supporto*** se:

$$V^* = V$$

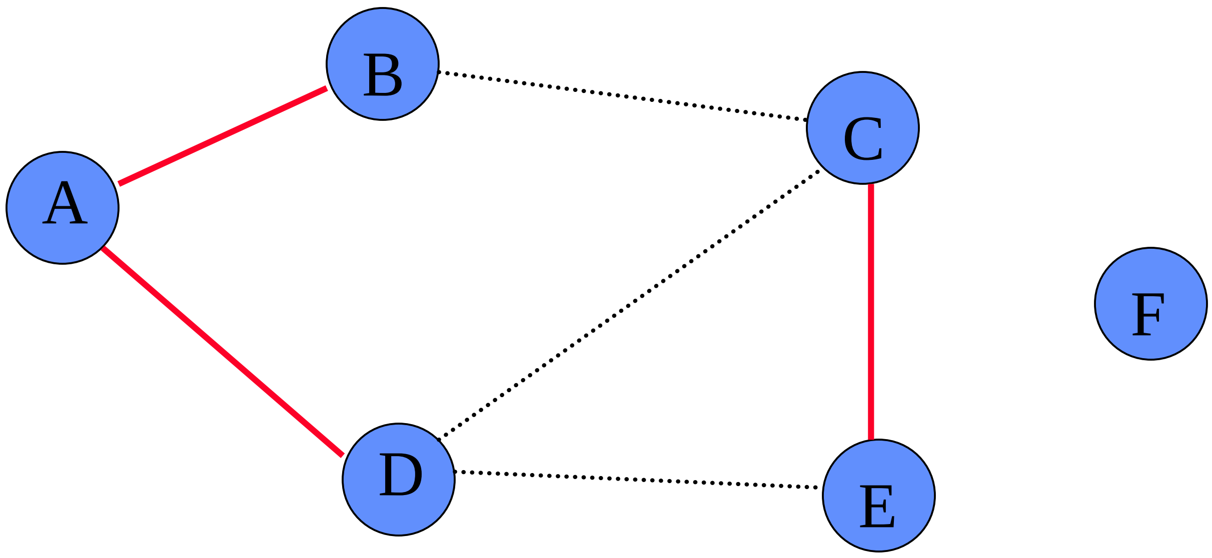


Definizioni sui grafi

Sia ***G* = (*V*, *E*)** un grafo.

Un ***sottografo H=(V*, E*)*** di ***G*** è detto ***di supporto*** se:

$$V^* = V$$

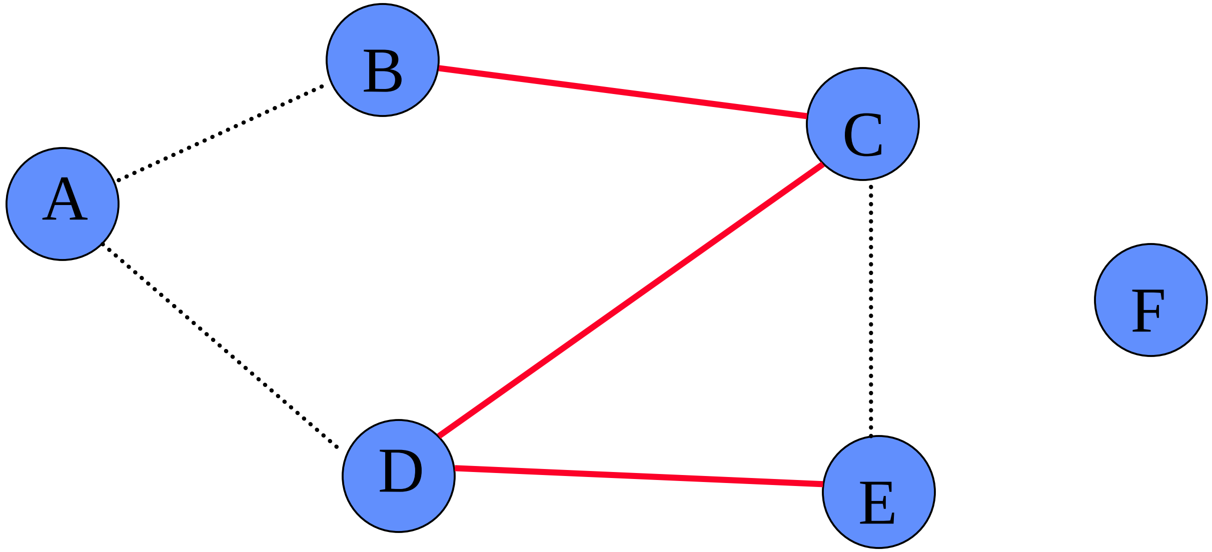


Definizioni sui grafi

Sia ***G* = (*V*, *E*)** un grafo.

Un ***sottografo H=(V*, E*)*** di ***G*** è detto ***di supporto*** se:

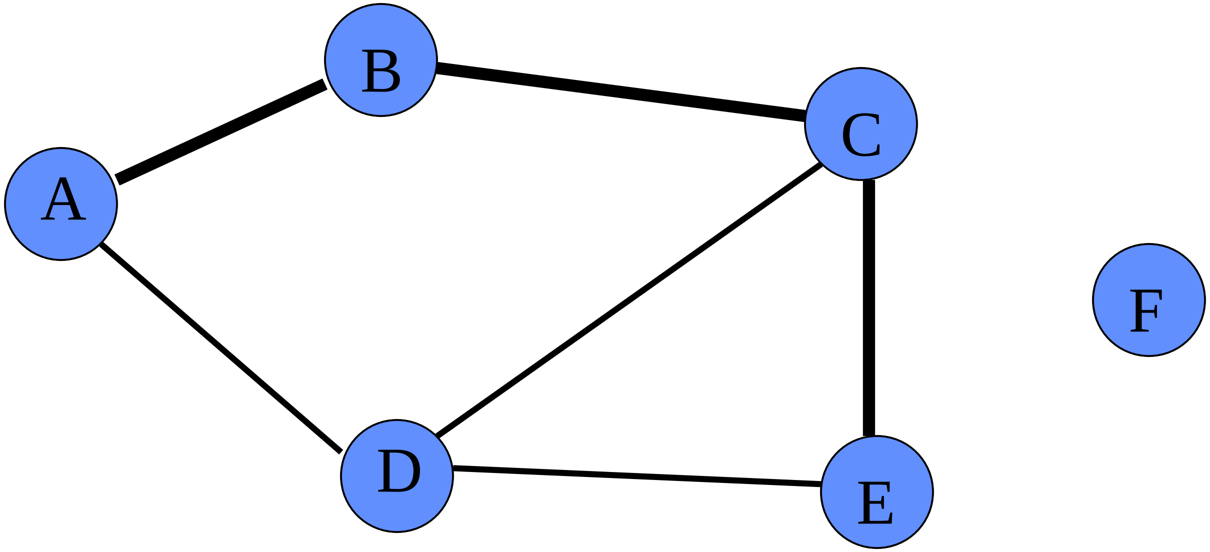
$$V^* = V$$



Definizioni sui grafi

Sia $\boldsymbol{G = (V, E)}$ un grafo.

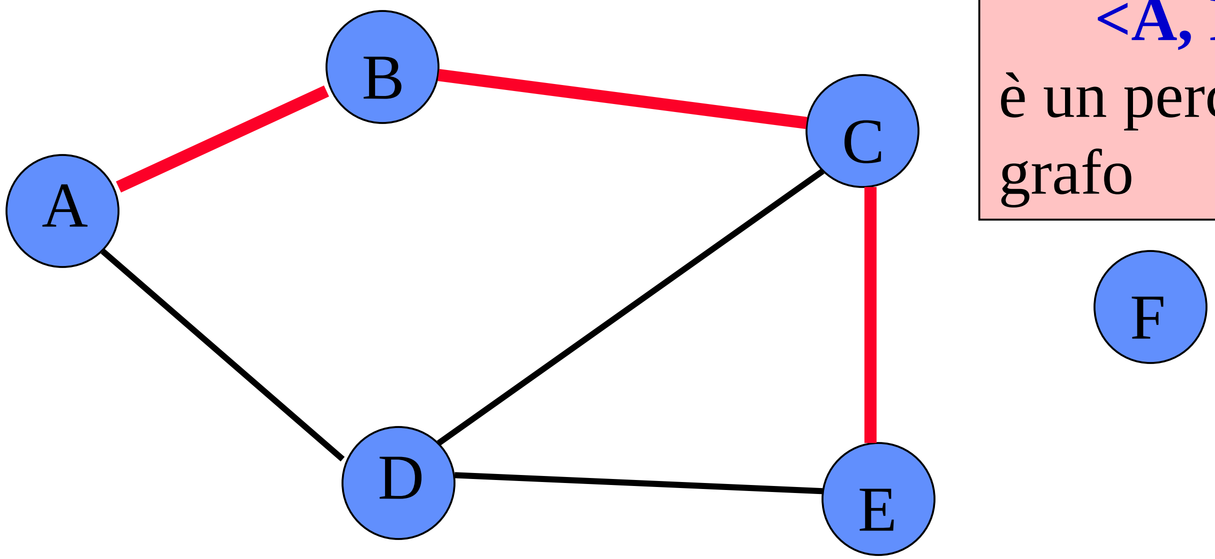
Un ***percorso*** nel grafo è una sequenza di vertici $\boldsymbol{<w_1, w_2, ..., w_n>}$ tale che $\boldsymbol{(w_i, w_{i+1}) \in E}$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Definizioni sui grafi

Sia $\mathbf{G = (V, E)}$ un grafo.

Un ***percorso*** nel grafo è una sequenza di vertici $<w_1, w_2, ..., w_n>$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Es.,

<A, B, C, E>

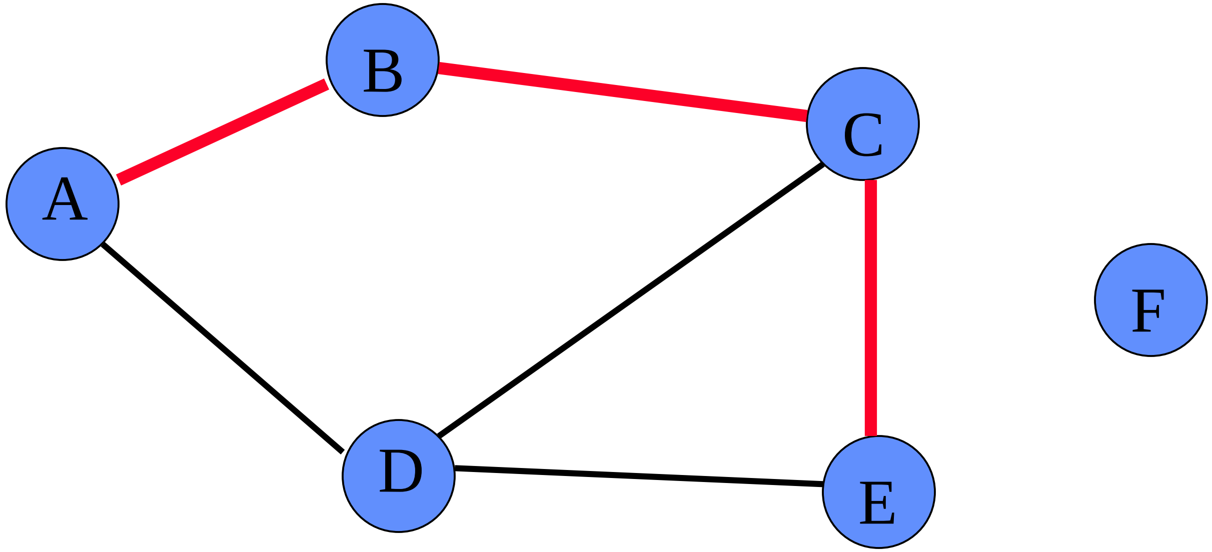
è un percorso nel grafo

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un ***percorso*** nel grafo è una sequenza di vertici $<w_1, w_2, ..., w_n>$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.

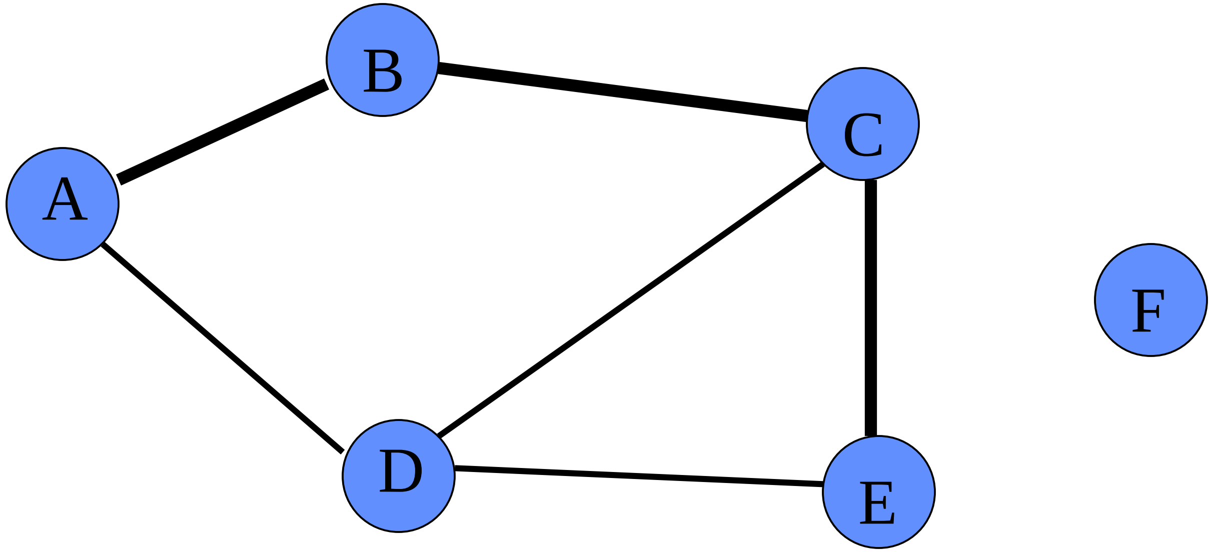
Il ***percorso*** $<w_1, w_2, ..., w_n>$ si dice che ***contiene*** i vertici $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e gli archi (w_1, w_2) (w_2, w_3) $\ldots(w_{n-1}, w_n)$



Definizioni sui grafi

Sia **$<w_1, w_2, \ldots, w_n>$** un ***percorso***.

La ***lunghezza*** del percorso è il ***numero totale di archi*** che connettono i vertici nell'ordine della sequenza (se il numero di vertici nella sequenza è ***n***, il numero di archi sarà ***n*–1**).

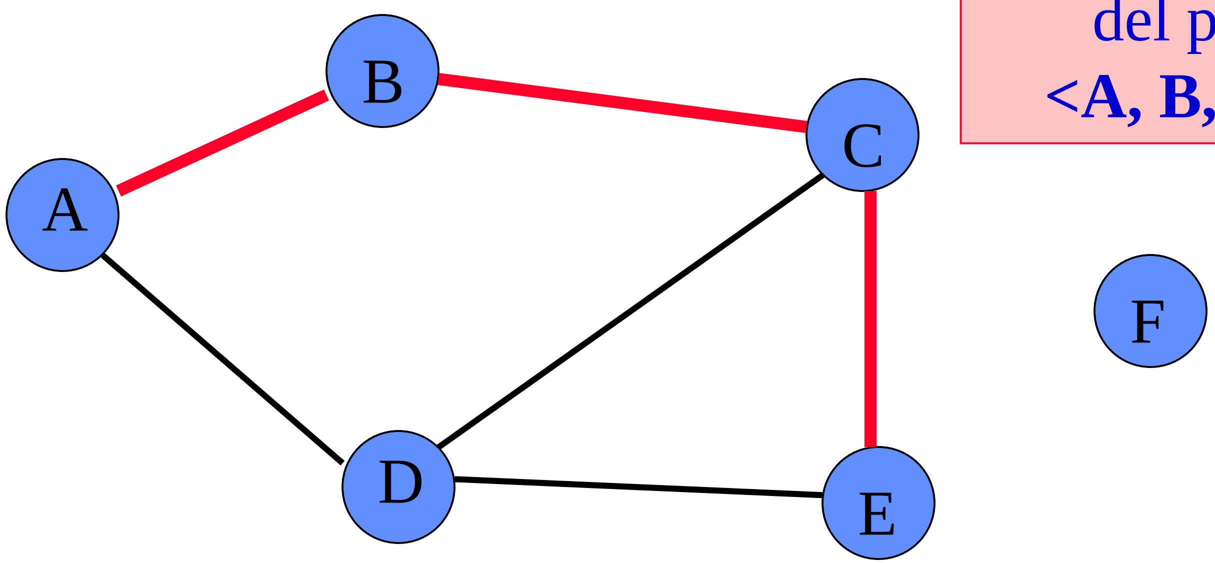


Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$ un ***percorso***.

La ***lunghezza*** del percorso è il ***numero totale di archi*** che connettono i vertici nell'ordine della sequenza (se il numero di vertici nella sequenza è n, il numero di archi sarà $n-1$).

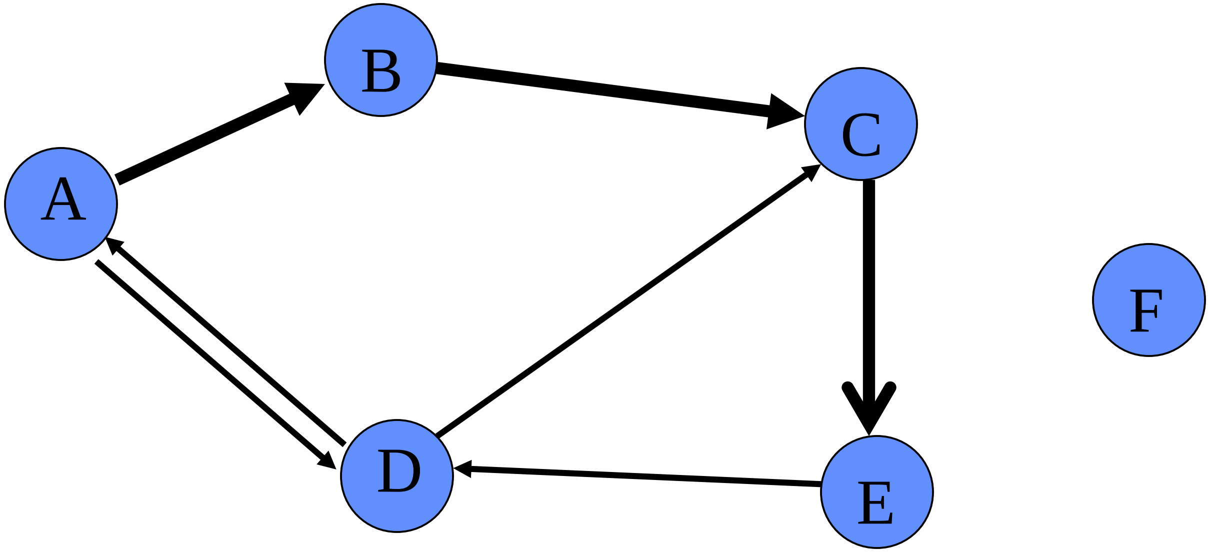
Es., la lunghezza del percorso **<A, B, C, E>** è **3**.



Definizioni sui grafi

Sia ***<w_1, w_2, . . . , w_n>*** un ***percorso*** in un ***grafo orientato***.

Poiché ***ogni arco (w_i, w_{i+1})*** nel percorso è una ***coppia ordinata di vertici***, gli ***archi*** del percorso sono sempre ***orientati lungo il percorso***.

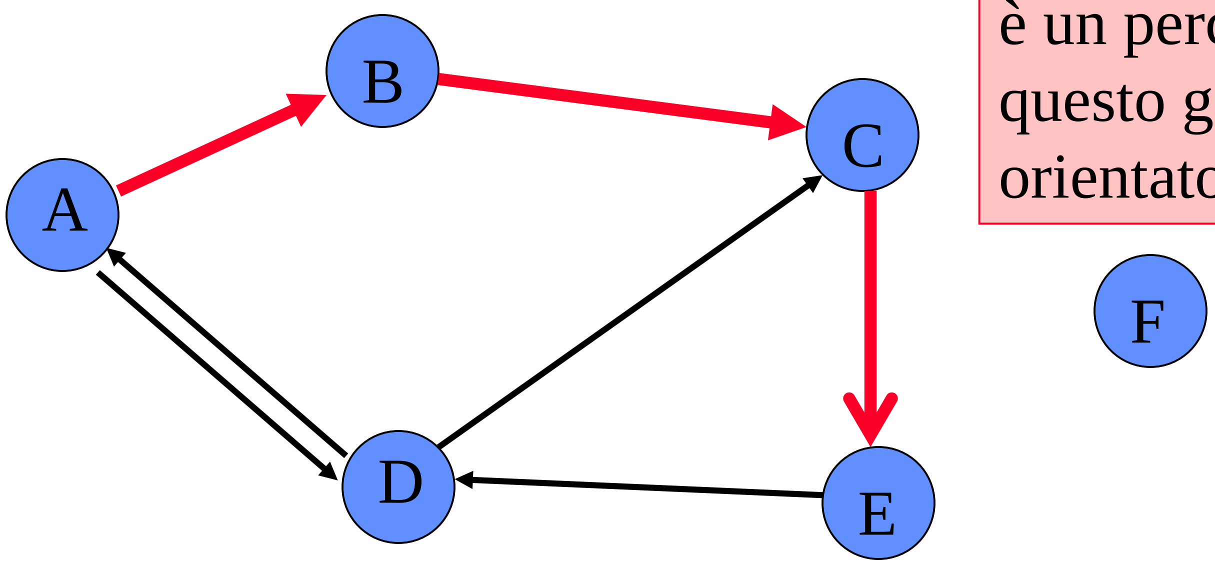


Definizioni sui grafi

Sia $<w_1, w_2, \ldots, w_n>$ un ***percorso*** in un ***grafo orientato***.

Poiché ***ogni arco*** (w_i, w_{i+1}) nel percorso è una ***coppia ordinata di vertici***, gli ***archi*** del percorso sono sempre ***orientati lungo il percorso***.

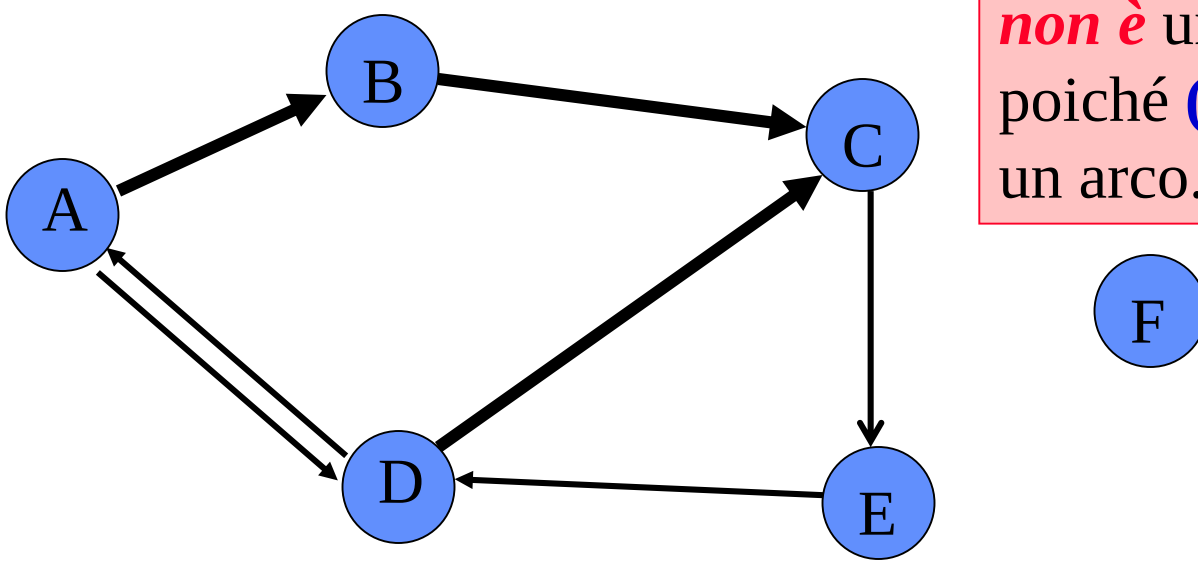
Es., <A, B, C, E> è un percorso in questo grafo orientato, ma ...



Definizioni sui grafi

Sia $<w_1, w_2, \ldots, w_n>$ un ***percorso*** in un ***grafo orientato***.

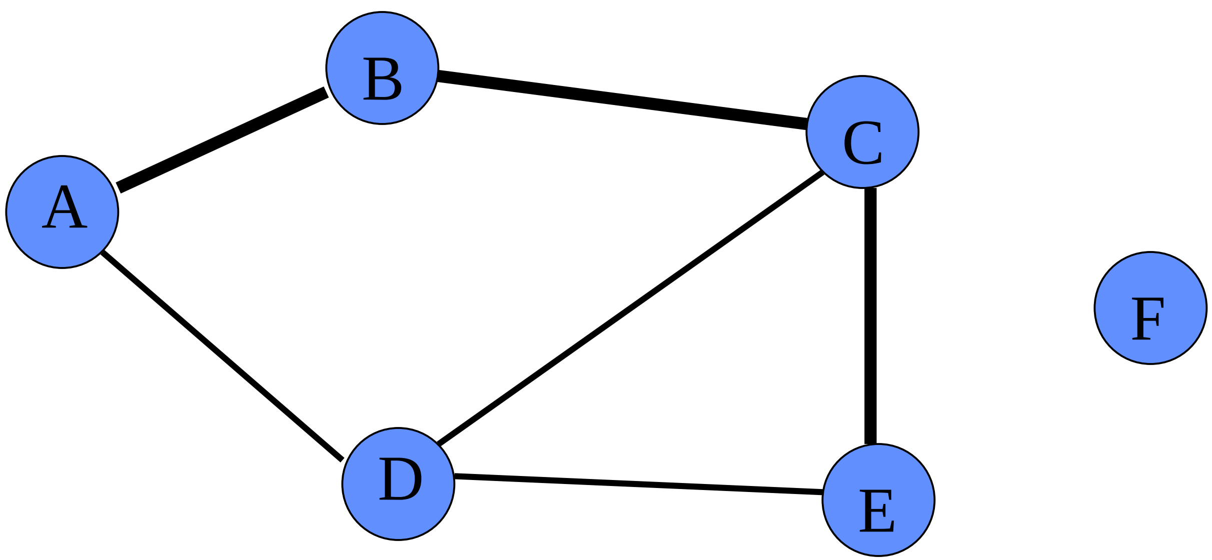
Poiché ***ogni arco (**w_i, w_{i+1}**)*** nel percorso è una ***coppia ordinata di vertici***, gli ***archi*** del percorso sono sempre ***orientati lungo il percorso***.



... ma **<A, B, C, D>** ***non è*** un percorso, poiché **(C, D)** non è un arco.

Definizioni sui grafi

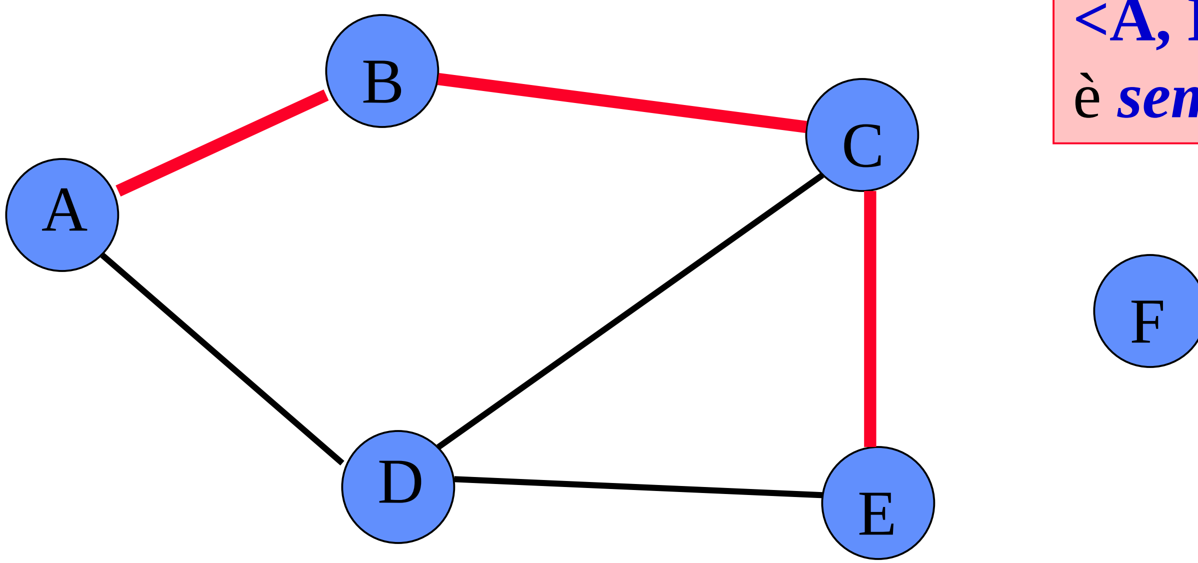
Un percorso si dice ***semplice*** se tutti i ***suoi vertici sono distinti*** (compaiono una sola volta nella sequenza), ***eccetto*** al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.



Definizioni sui grafi

Un percorso si dice ***semplice*** se tutti i ***suoi vertici sono distinti*** (compaiono una sola volta nella sequenza), ***eccetto*** al più il primo e l’ultimo che possono coincidere.

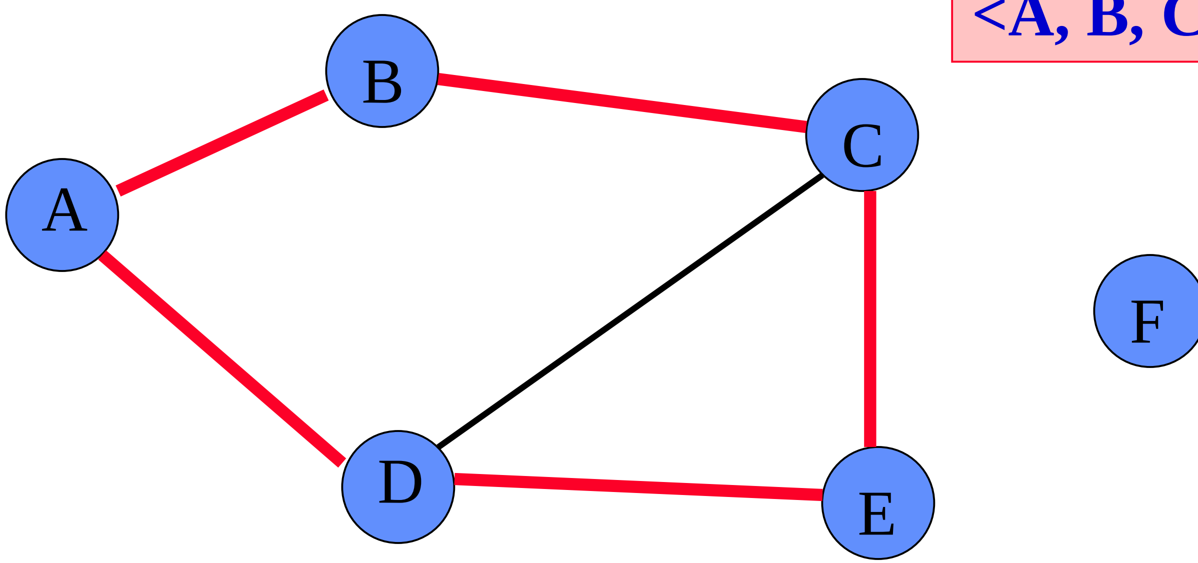
Es., il percorso
<A, B, C, E>
è ***semplice*** ...



Definizioni sui grafi

Un percorso si dice ***semplice*** se tutti i ***suoi vertici sono distinti*** (compaiono una sola volta nella sequenza), ***eccetto*** al più il primo e l’ultimo che possono coincidere.

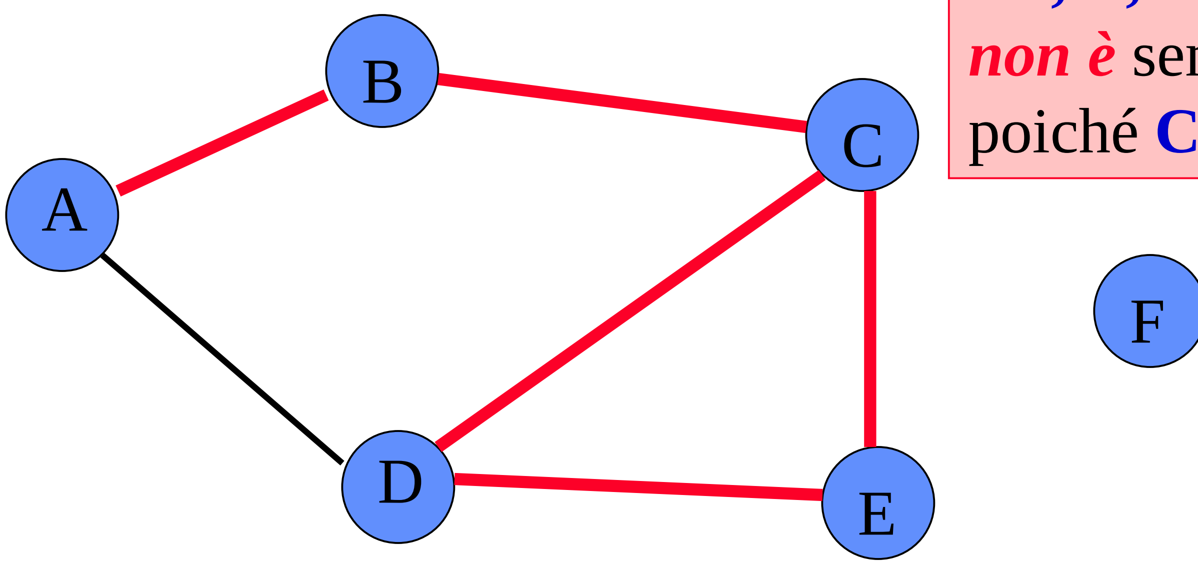
... così come anche **<A, B, C, E, D, A>**.



Definizioni sui grafi

Un percorso si dice ***semplice*** se tutti i ***suoi vertici sono distinti*** (compaiono una sola volta nella sequenza), ***eccetto*** al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.

... ma il percorso **<A, B, C, E, D, C >** ***non è*** semplice, poiché **C** è ripetuto.

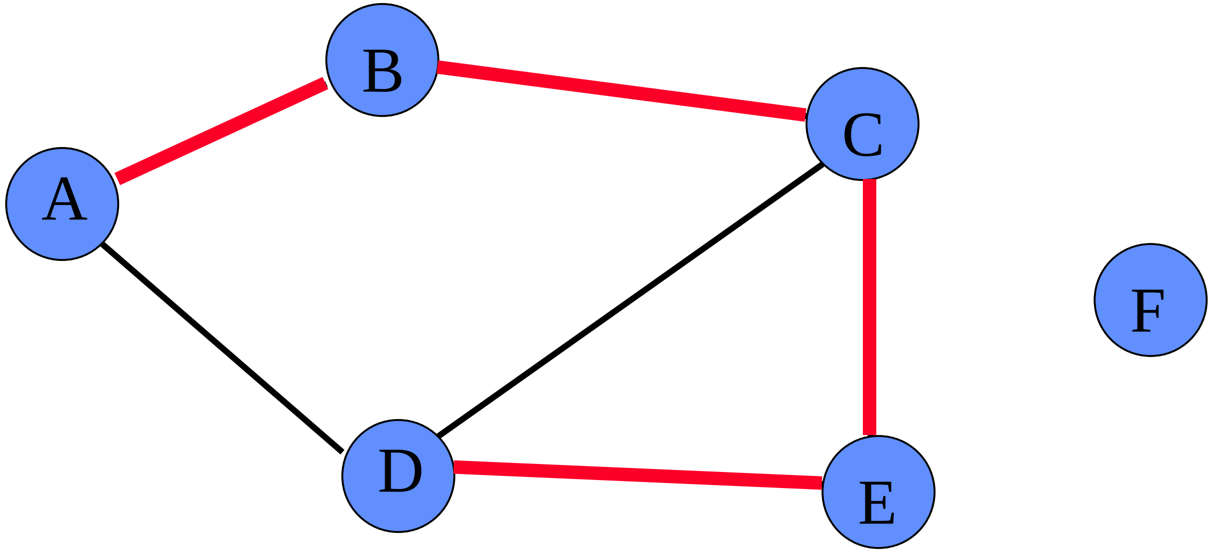


Definizioni sui grafi

Se esiste un percorso ***p*** tra i vertici ***v*** e ***w***, si dice che ***w*** ***è raggiungibile da*** ***v*** tramite ***p***

$$v \xrightarrow[p]{} w$$

Es.: ***A*** è ***raggiungibile*** da ***D*** e vice versa

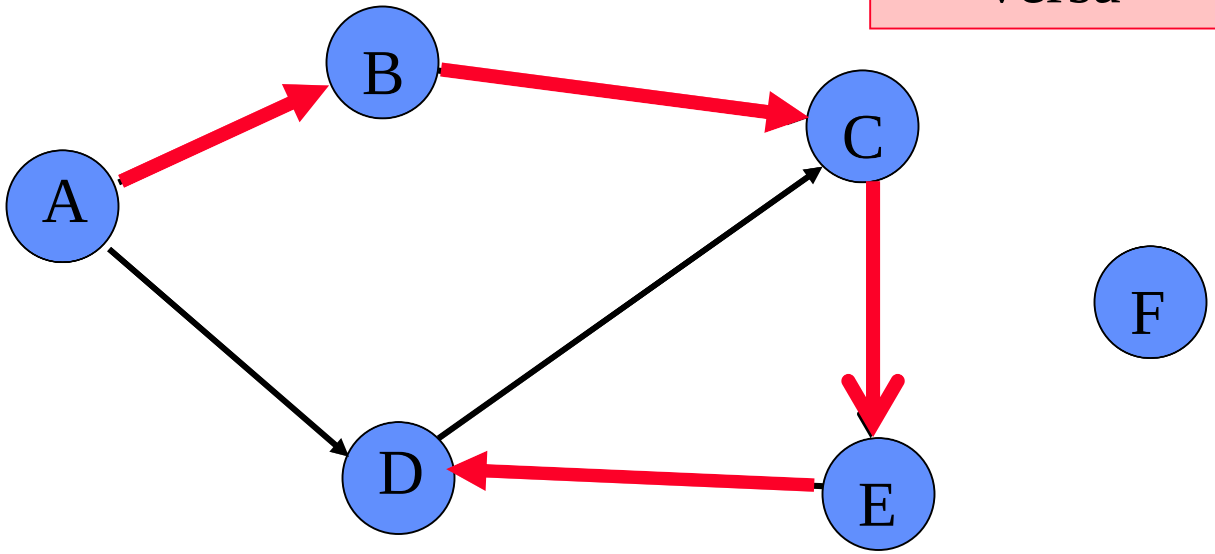


Definizioni sui grafi

Se esiste un percorso ***p*** tra i vertici ***v*** e ***w***, si dice che ***w*** ***è raggiungibile da*** ***v*** tramite ***p***

$$v \xrightarrow[p]{} w$$

Es.: ***A*** è ***raggiungibile*** da ***D*** ma non vice versa

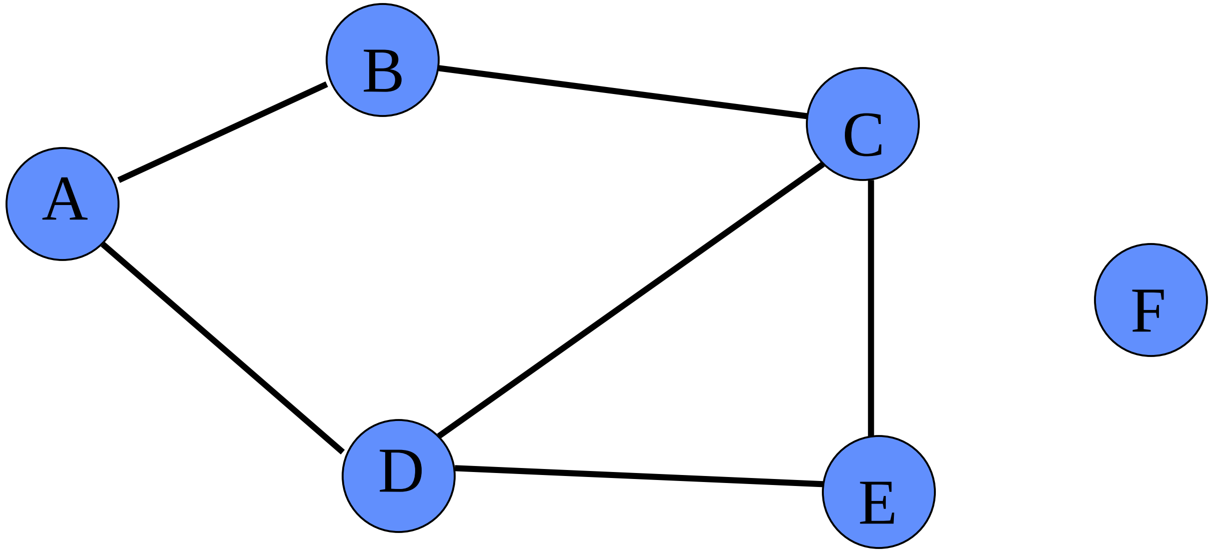


Definizioni sui grafi

Se ***G*** è un ***grafo non orientato***, diciamo che ***G*** è ***connesso*** se esiste un ***percorso*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Un grafo non orientato *non connesso* si dice *sconnesso*.

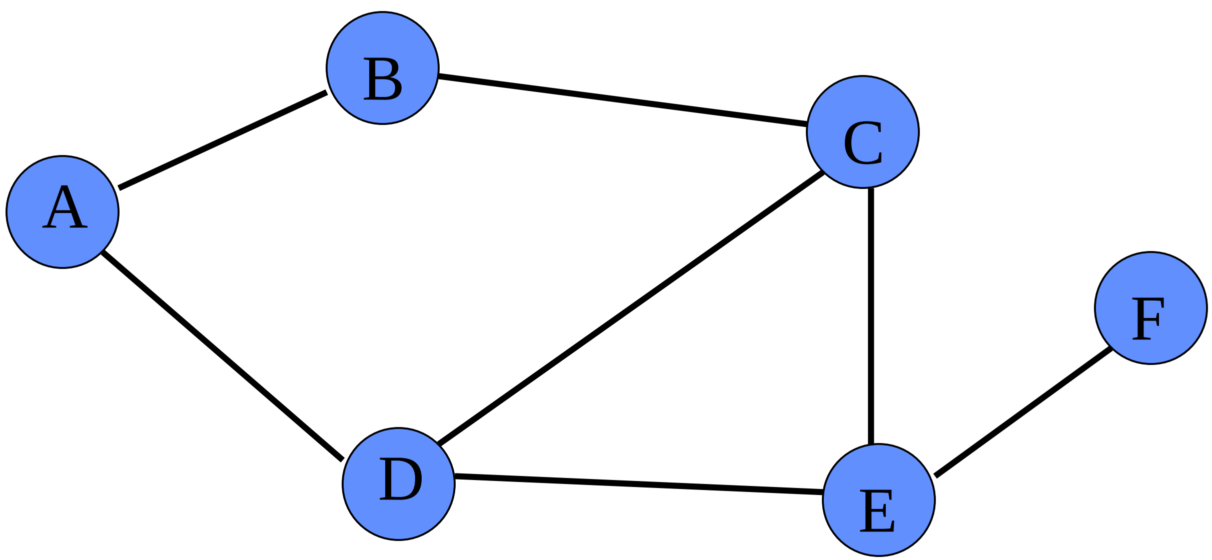
Questo grafo non orientato *non è connesso*.



Definizioni sui grafi

Se ***G*** è un ***grafo non orientato***, diciamo che ***G*** è ***connesso*** se esiste un ***percorso*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

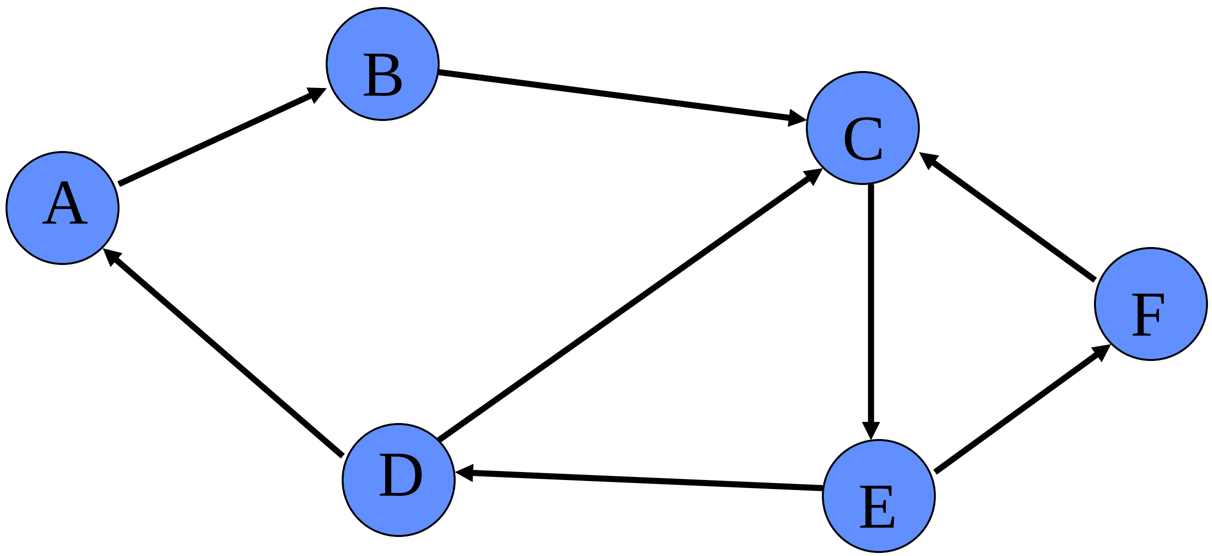
Questo ***è connesso***.



Definizioni sui grafi

Se ***G*** è un ***grafo orientato***, diciamo che ***G*** è ***fortemente connesso*** se esiste un ***percorso*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

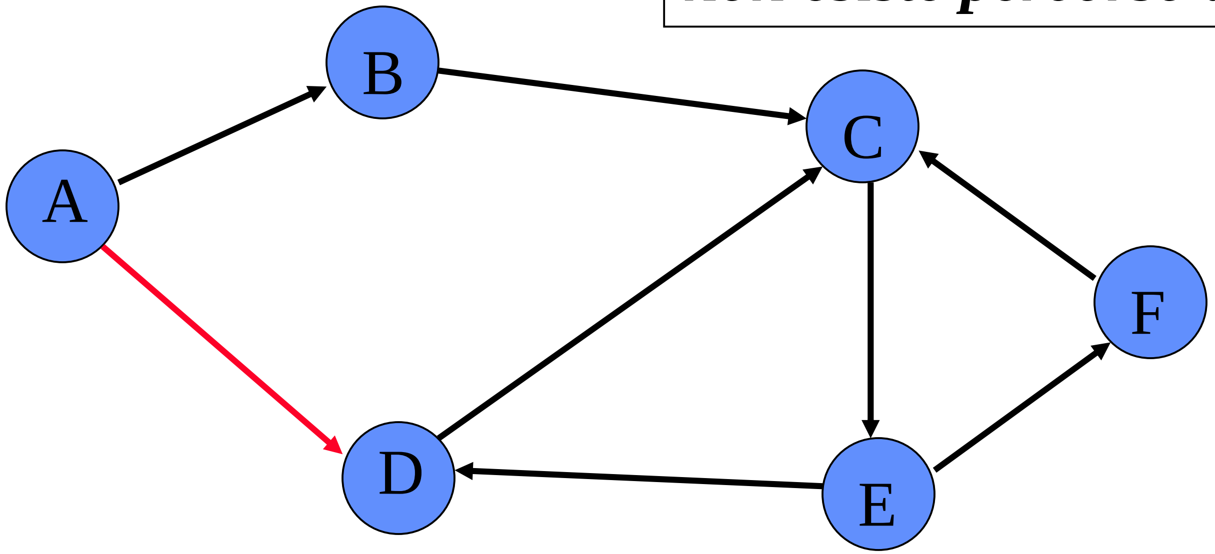
Questo grafo orientato ***è fortemente connesso*****.**



Definizioni sui grafi

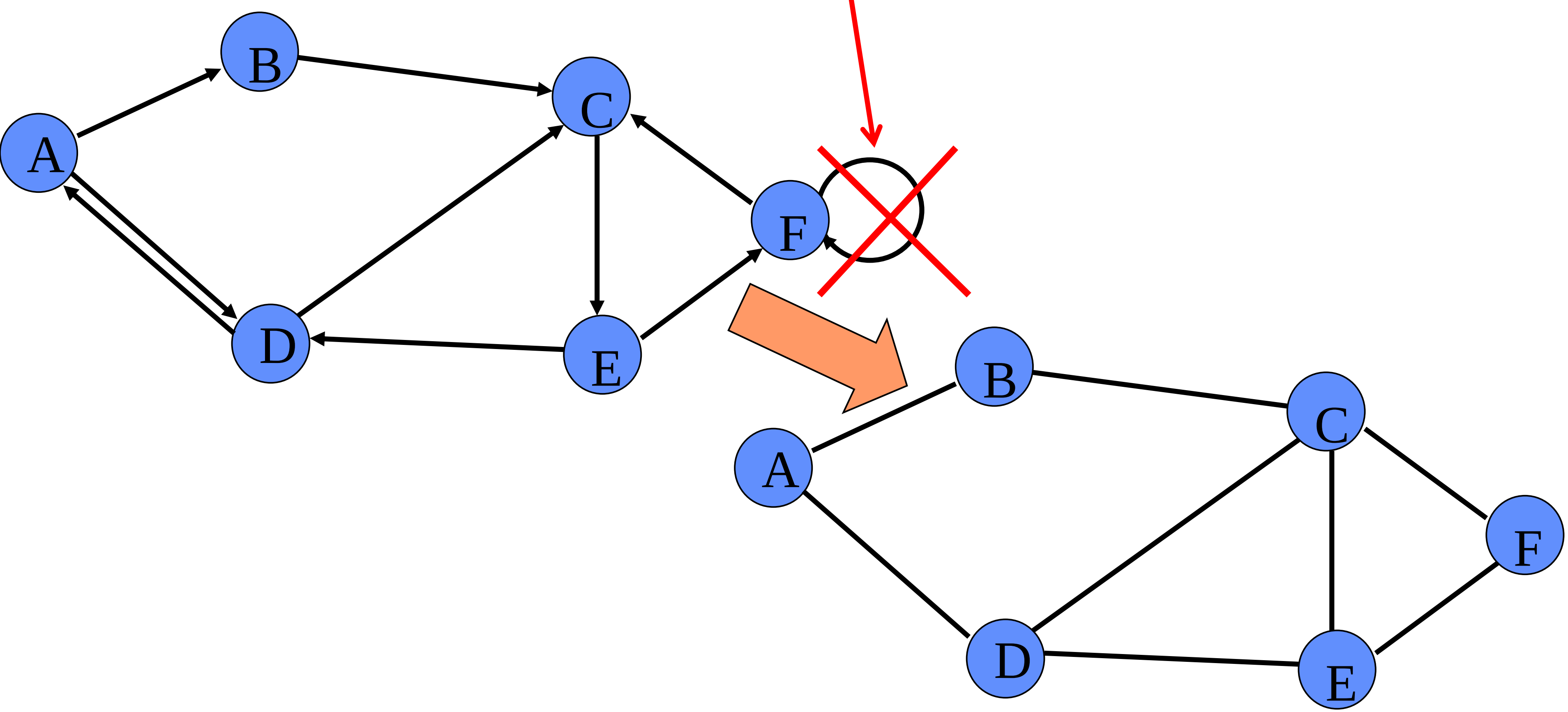
Se ***G*** è un ***grafo orientato***, diciamo che ***G*** è ***fortemente connesso*** se esiste un ***percorso*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Questo grafo orientato **non è** ***fortemente connesso*****; ad es.,** ***non esiste percorso da*** **D** ***a*** **A**.



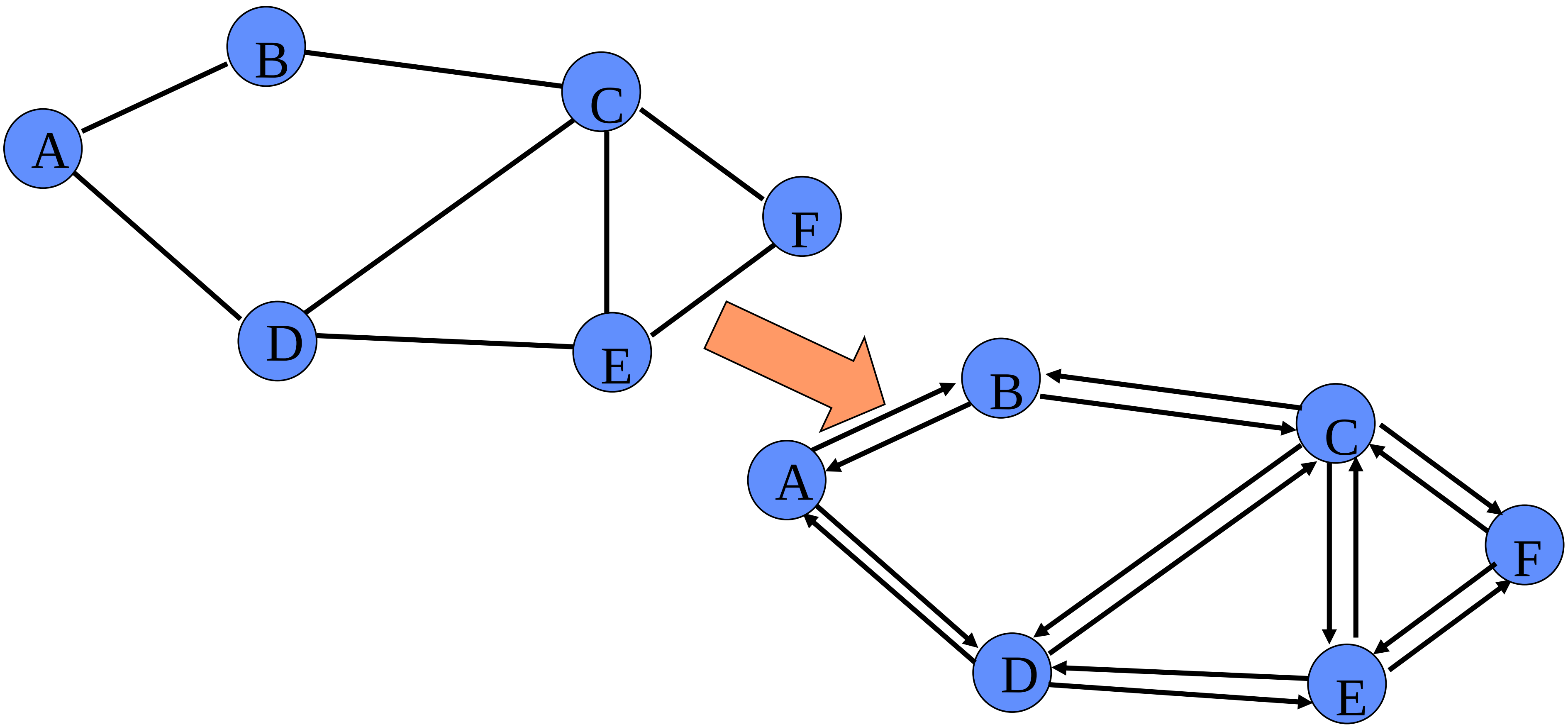
Definizioni sui grafi

Se ***G*** è un ***grafo orientato***, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e i ***archi ciclici*** è detto il ***grafo non orientato sottostante*** o anche ***versione non orientata di G***.



Definizioni sui grafi

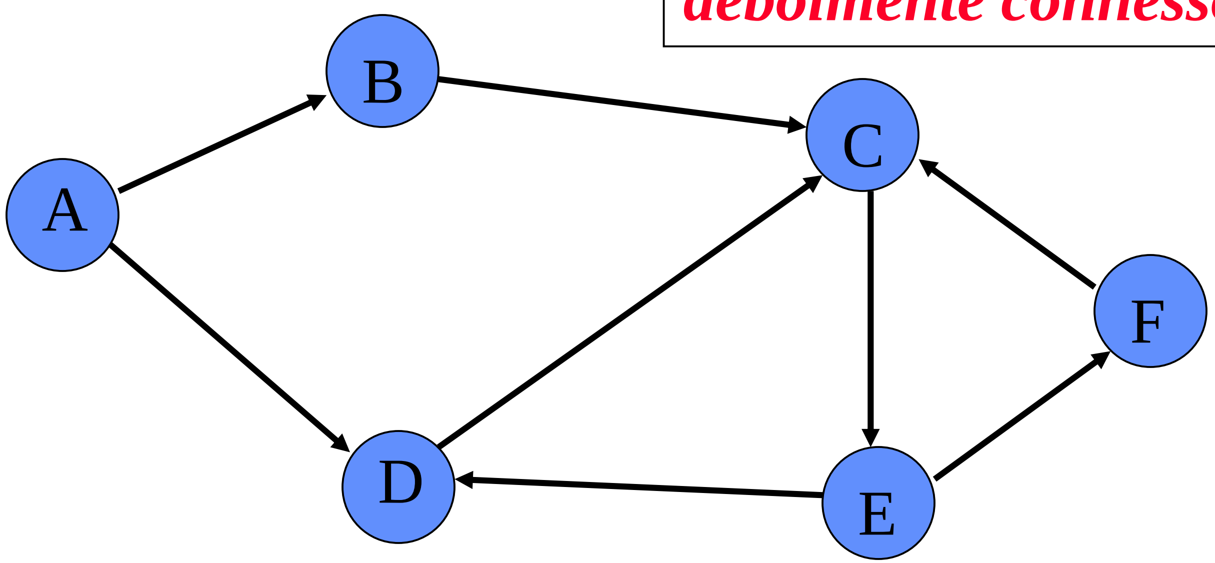
Se ***G*** è un ***grafo non orientato***, il grafo ottenuto inserendo due archi orietati per ogni arco non orientato del grafo è detto il ***versione orientata di G***.



Definizioni sui grafi

Se ***G*** è un ***grafo orientato non fortemente connesso***, ma se il ***grafo non orientato sottostante*** (cioè senza la direzione degli archi) è ***connesso***, diciamo che ***G*** è ***debolmente connesso***.

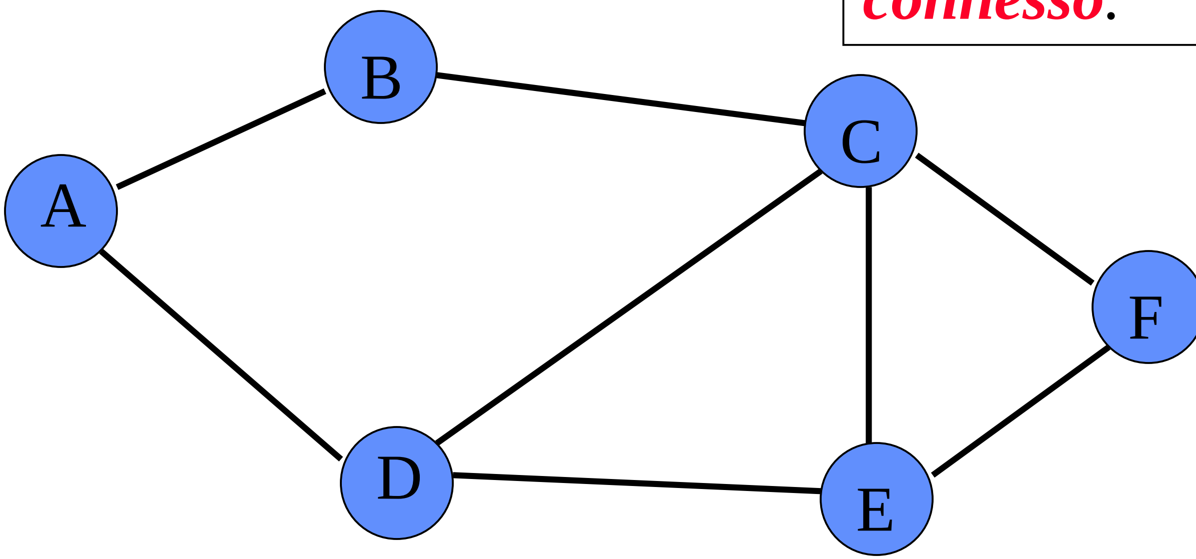
Questo grafo orientato ***non è fortemente connesso***, ma ***è debolmente connesso***, poiché...



Definizioni sui grafi

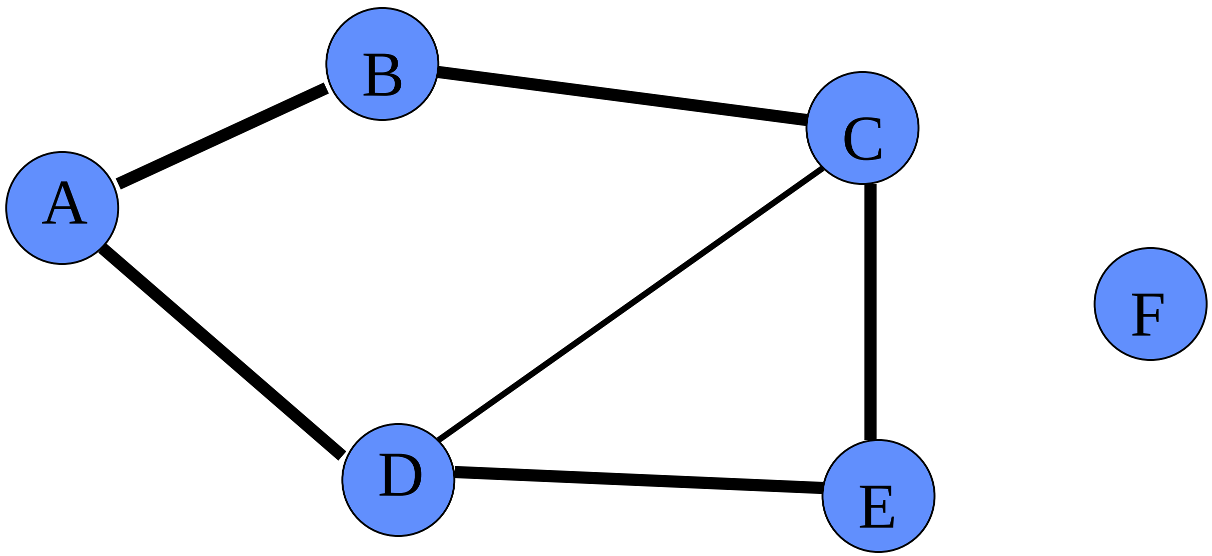
Se ***G*** è un ***grafo orientato non fortemente connesso***, ma se il ***grafo non orientato sottostante*** (cioè senza la direzione degli archi) è ***connesso***, diciamo che ***G*** è ***debolmente connesso***.

... poiché il ***grafo*** non orientato ***sottostante è connesso***.



Definizioni sui grafi

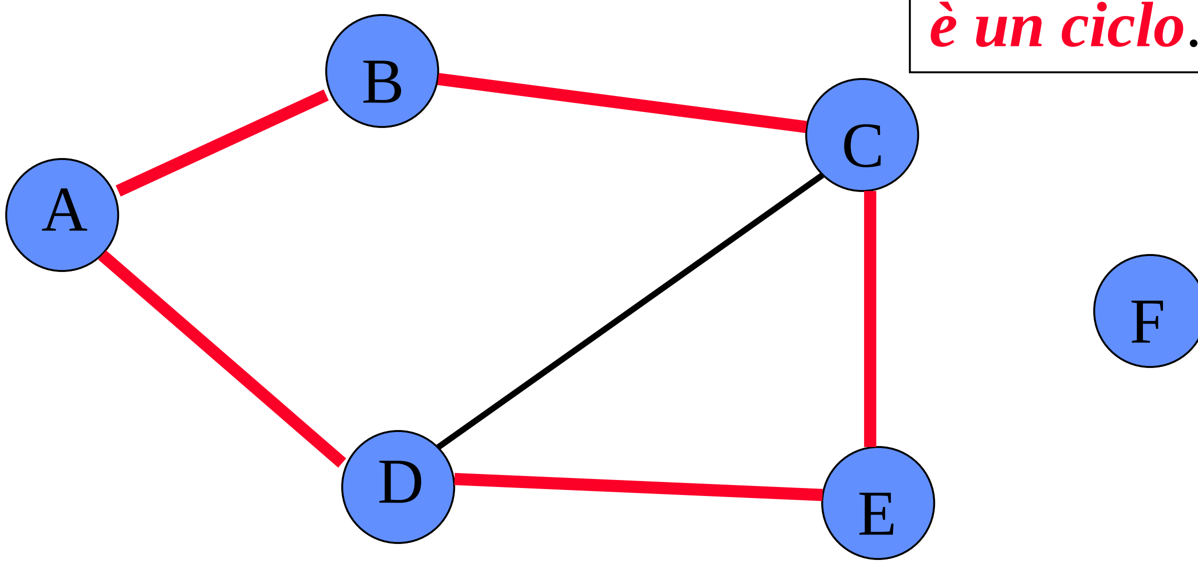
Un ***ciclo*** in un grafo è un percorso **$<w_1, w_2, \ldots, w_n>$** di lunghezza almeno 1, tale che **$w_1 = w_n$**.



Definizioni sui grafi

Un ***ciclo*** in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.

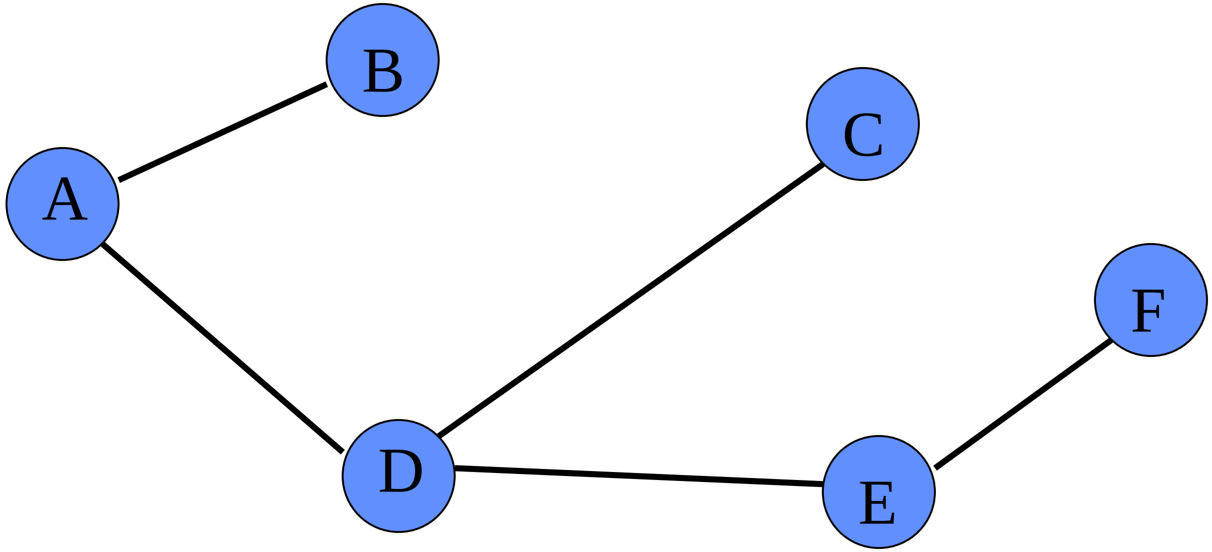
Es.: il percorso **<A, B, C, E, D, A>** ***è un ciclo***.



Definizioni sui grafi

Un ***grafo senza cicli*** è detto ***aciclico***.

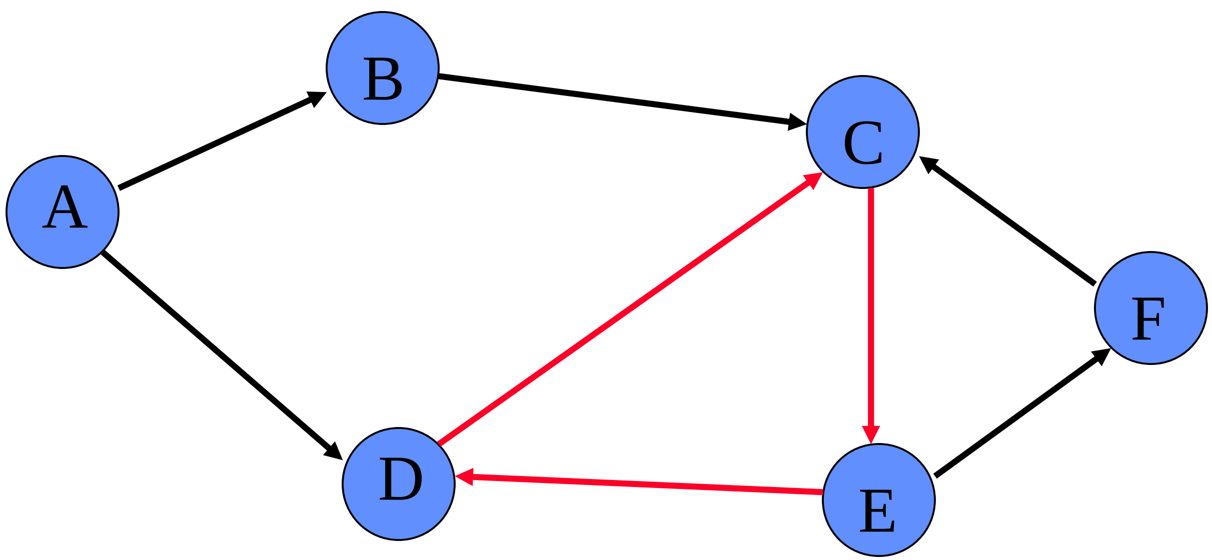
Questo grafo ***è aciclico***.



Definizioni sui grafi

Un ***grafo senza cicli*** è detto ***aciclico***.

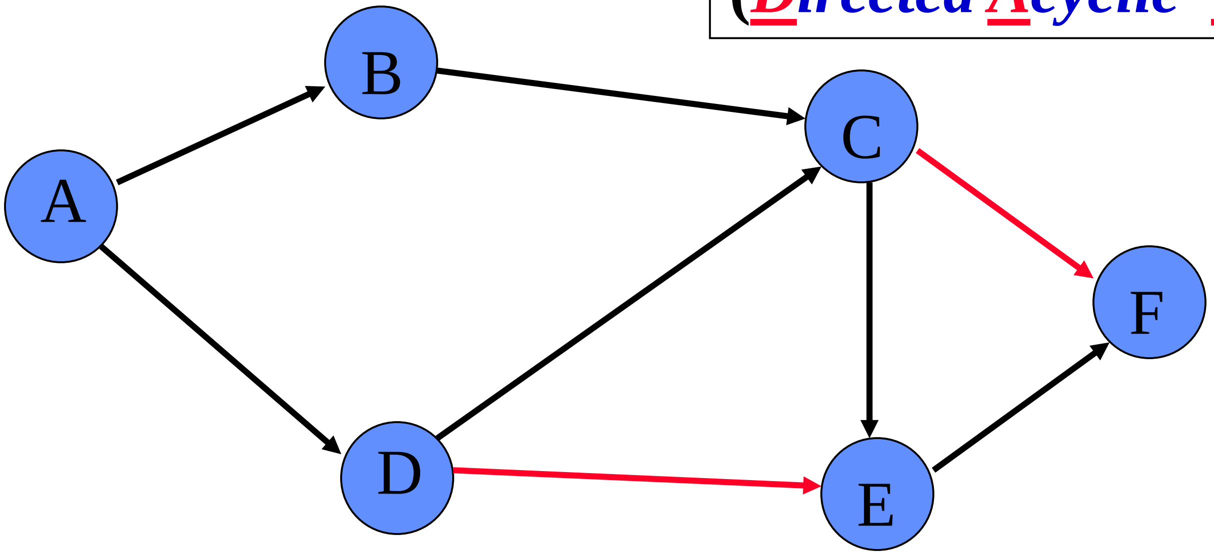
Questo grafo orientato ***non è aciclico***, ...



Definizioni sui grafi

Un ***grafo senza cicli*** è detto ***aciclico***.

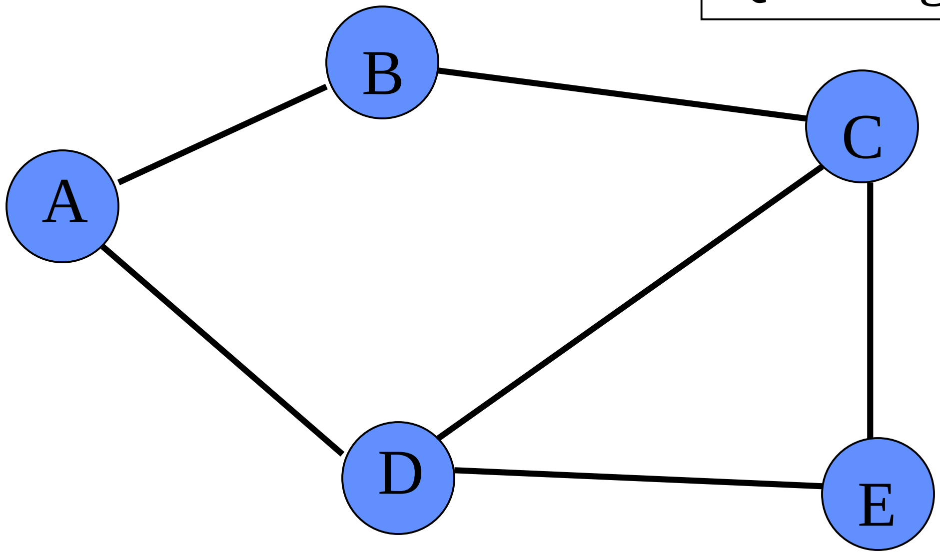
... ma questo lo è.
Un ***grafo orientato aciclico*** è spesso chiamato **DAG** (***Directed Acyclic Graph***).



Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

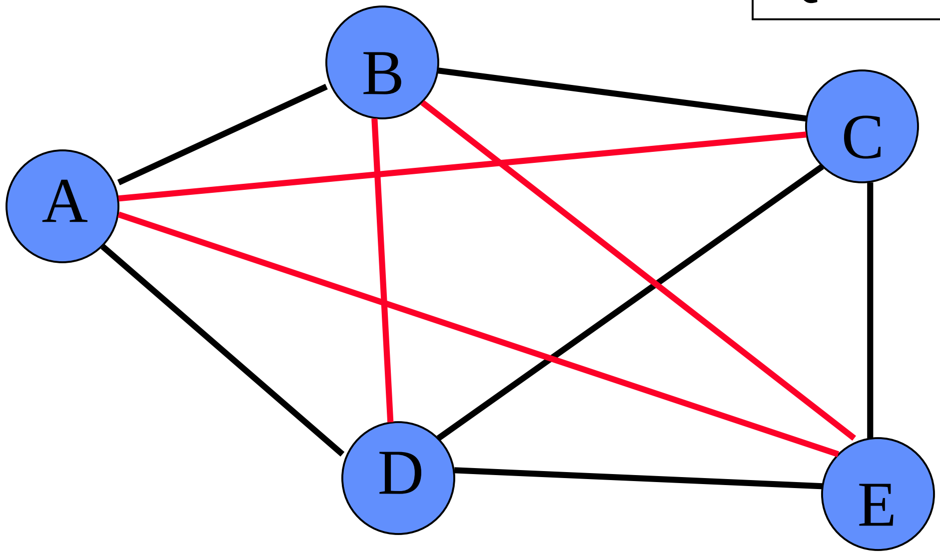
Questo grafo ***non è completo***



Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Questo grafo ***è completo***



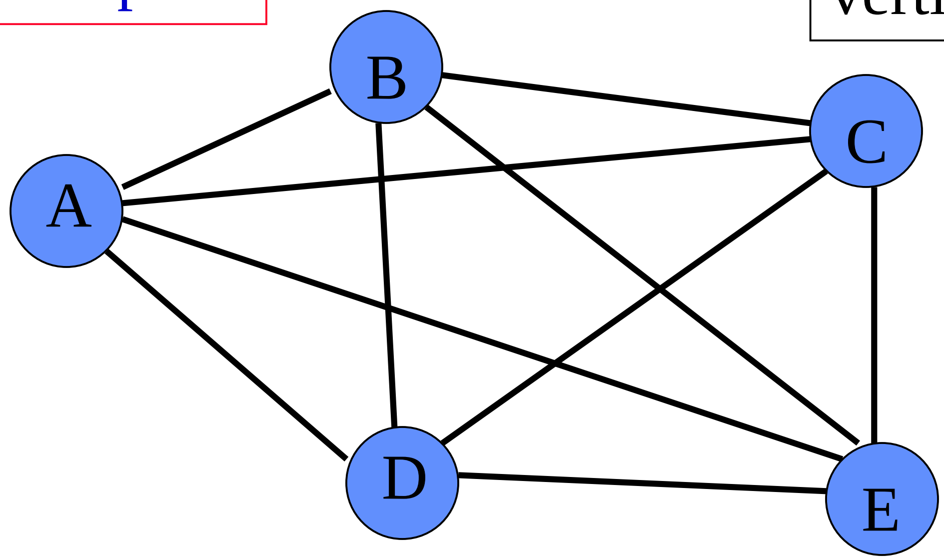
Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che ***G* = (*V*, *E*)** sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo completo

Questo grafo ha $|V| = 5$ vertici e $|E| = 10$ archi.

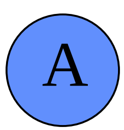


Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $\boldsymbol{G = (V, E)}$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



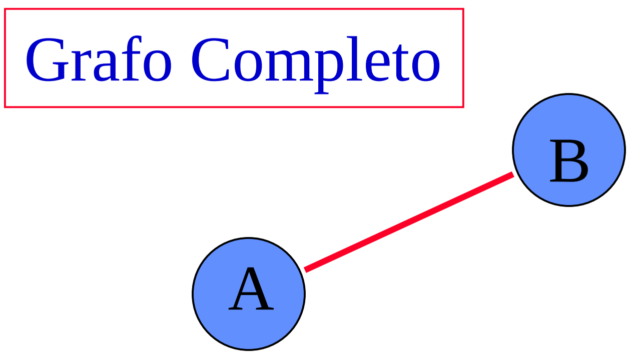
Usiamo una Tabella:

$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$
1	**0**

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $\boldsymbol{G = (V, E)}$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?



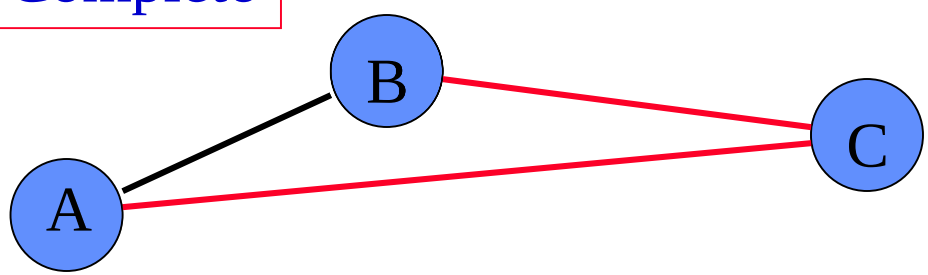
$\|V\|$	$\|E\|$
1	**0**
2	**1**

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $G = (V, E)$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



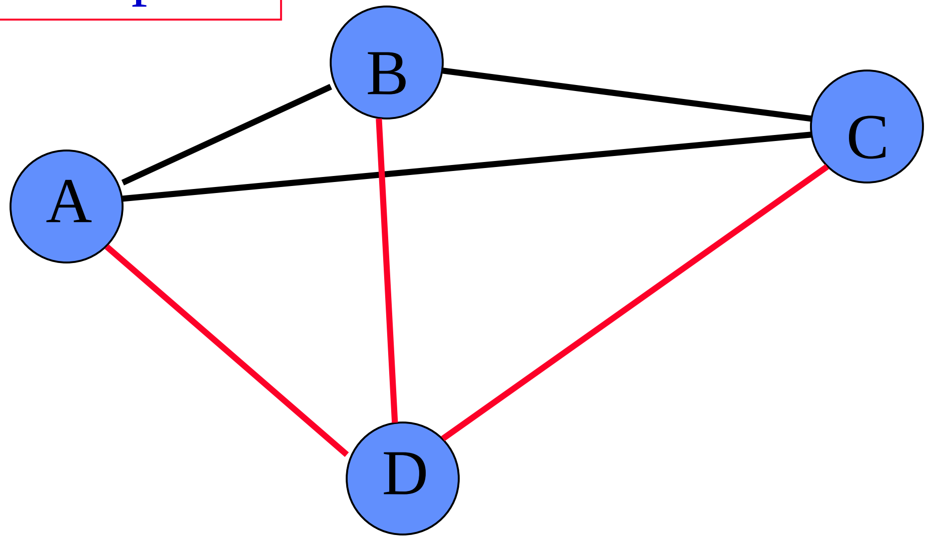
$\|V\|$	$\|E\|$
1	0
2	1
3	3

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $G = (V, E)$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



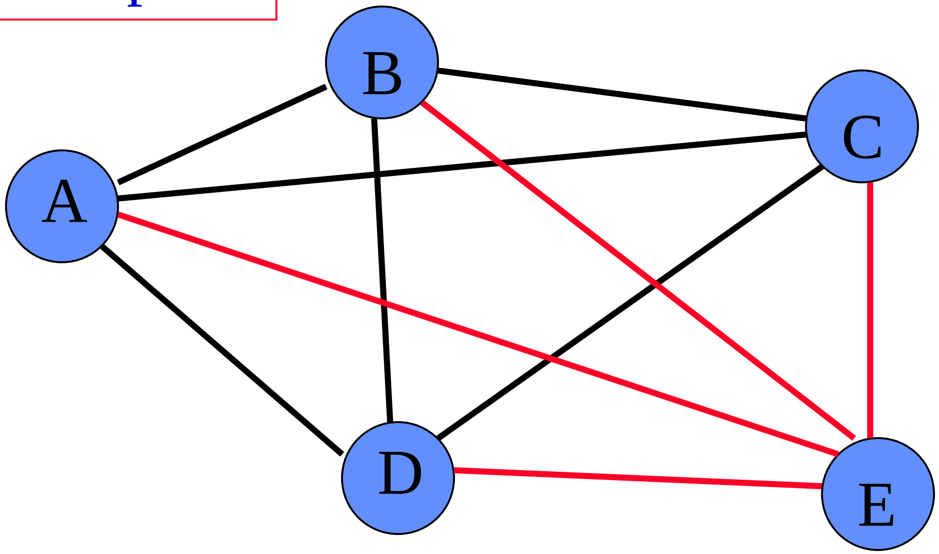
$\|V\|$	$\|E\|$
1	0
2	1
3	3
4	6

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che ***G = (V, E)*** sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo

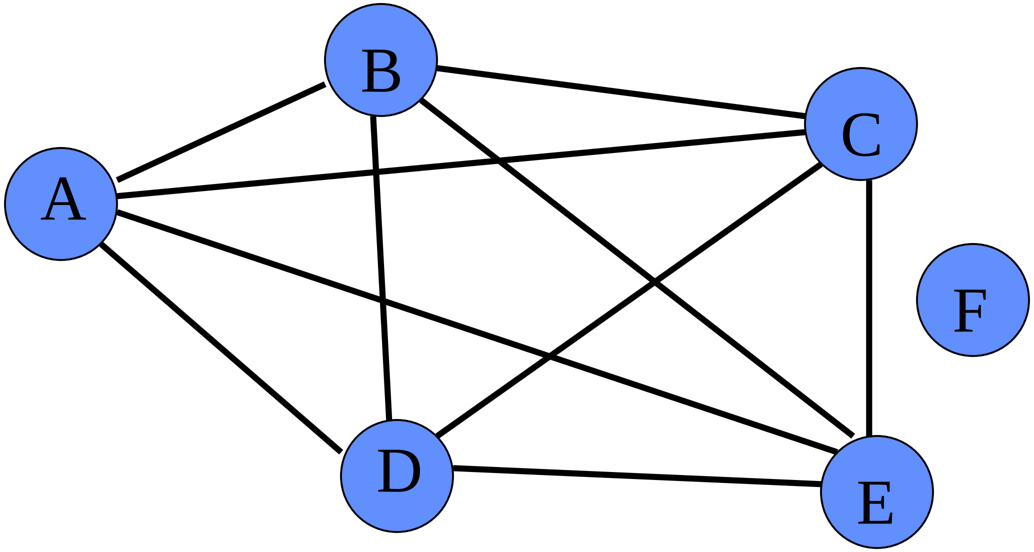


$\|V\|$	$\|E\|$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	**10**

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $G = (V, E)$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

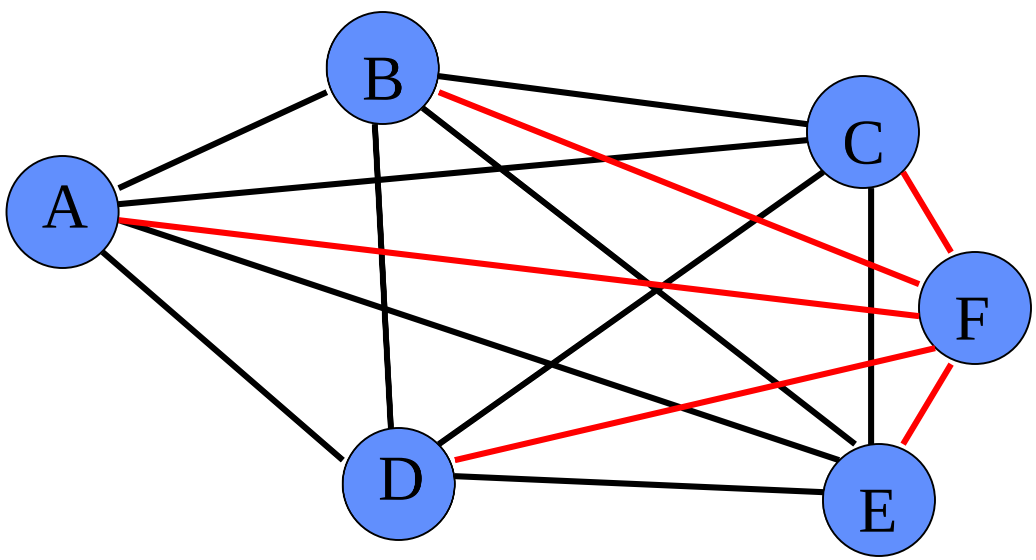


$\|V\|$	$\|E\|$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	?

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $G = (V, E)$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?



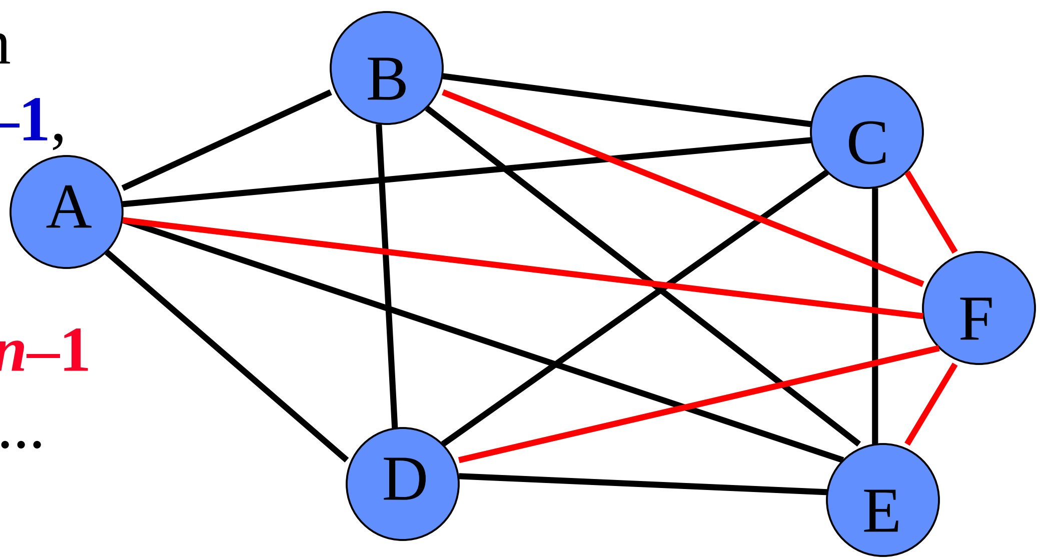
$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Per ottenere un grafo con n vertici da un grafo con $n–1$, si devono aggiungere $n–1$ nuovi archi ...



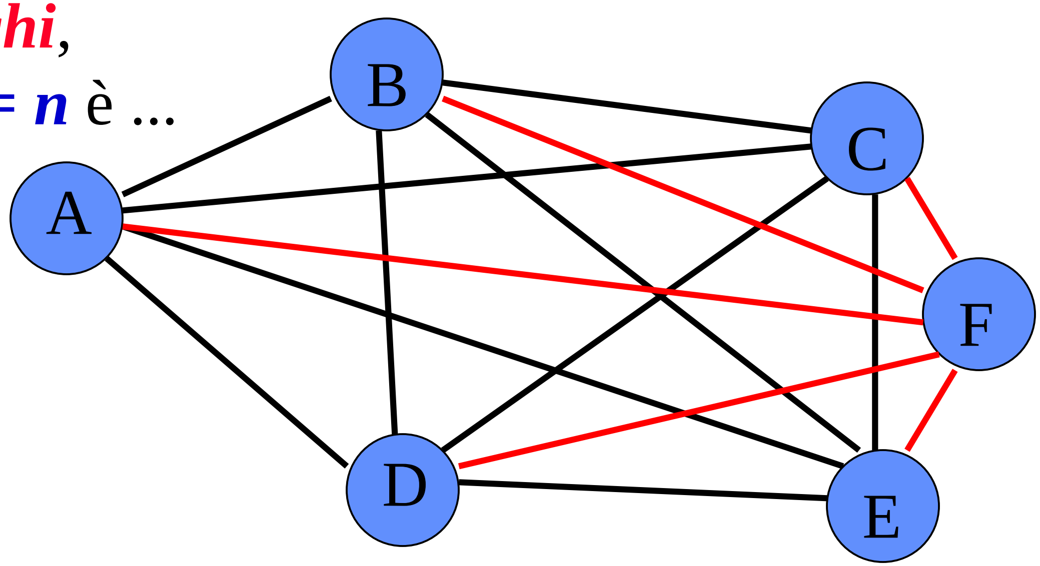
$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	
1	0	
2	1	+1
3	3	+2
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Suppomiano che $\boldsymbol{G = (V, E)}$ sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

…quindi il ***numero totale di archi***, quando $|V| = n$ è ...



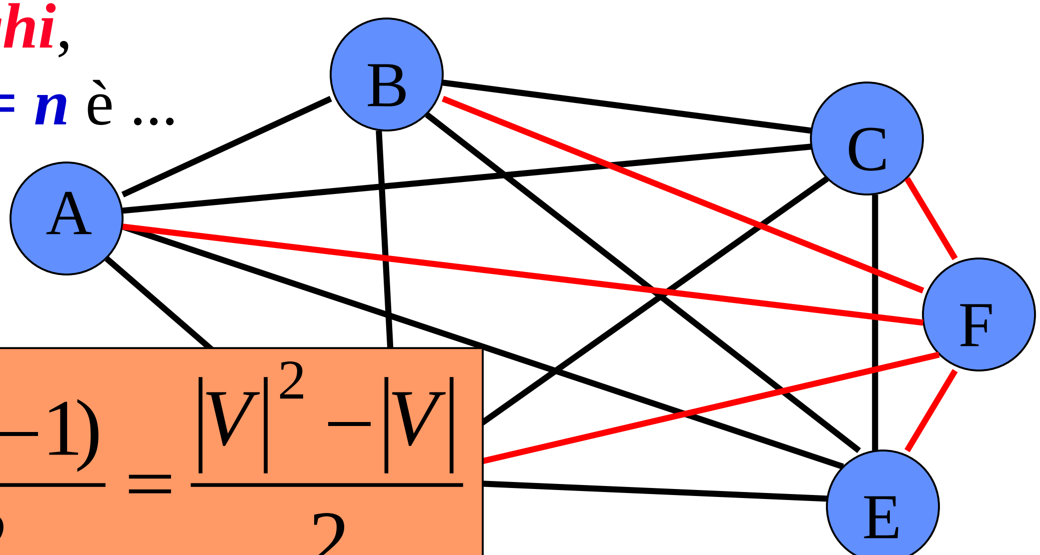
$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$	
1	0	
2	1	+1
3	3	+2
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5

Definizioni sui grafi

Un ***grafo completo*** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Supponiamo che ***G* = (*V*, *E*)** sia ***completo***. In questo caso è possibile esprimere |***E***| come funzione di |***V***|?

…quindi il ***numero totale di archi***, quando |***V***| **=** ***n*** è ...



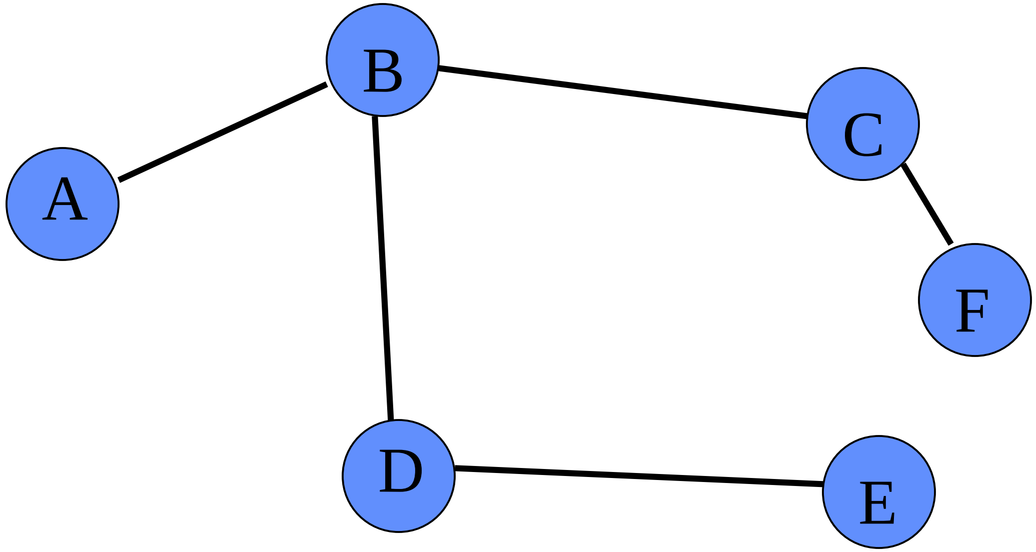
$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

$\|V\|$	$\|E\|$	
1	0	
		+1
2	1	
		+2
3	3	
		+3
4	6	
		+4
5	10	
		+5
6	15	

Definizioni sui grafi

Un ***albero libero*** è un ***grafo non orientato connesso, aciclico***.

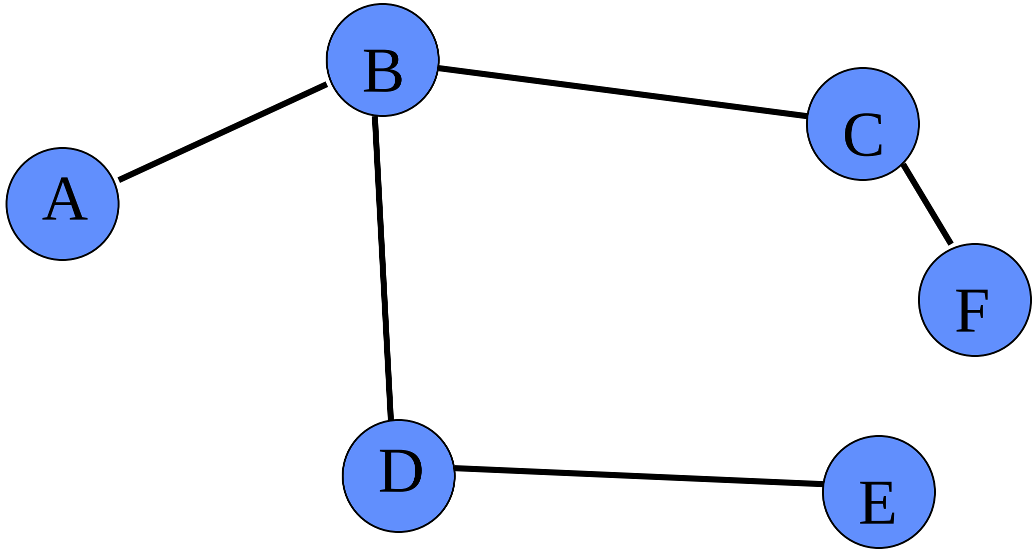
Questo è un ***albero libero***



Definizioni sui grafi

Un ***albero libero*** è un ***grafo non orientato connesso, aciclico***.

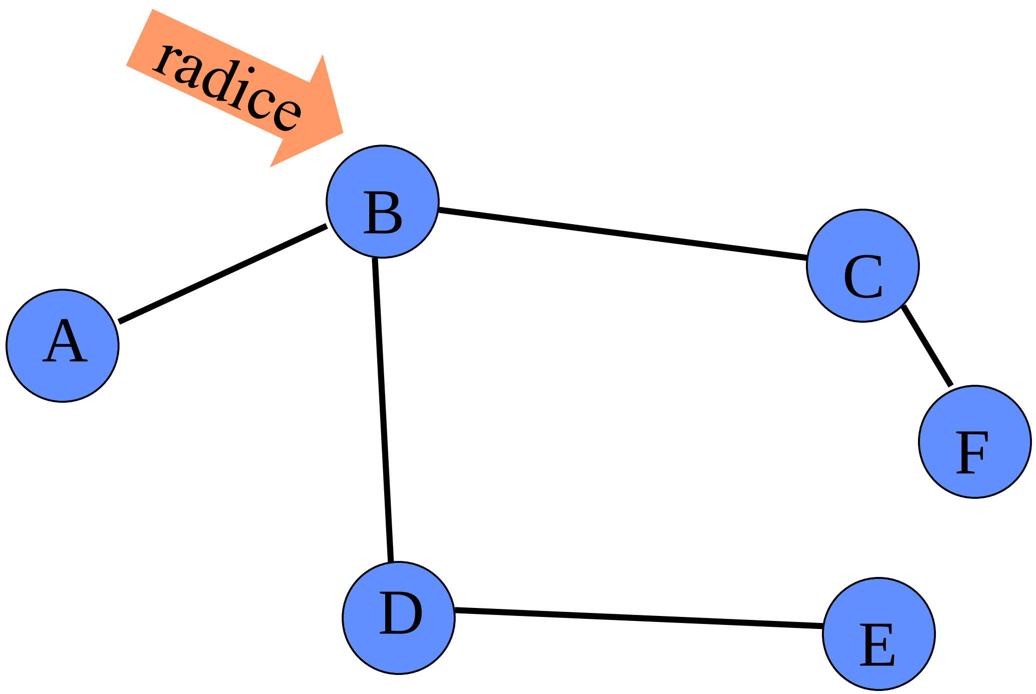
"***libero***" si riferisce al fatto che non esiste un vertice designato ad essere la "***radice***"



Definizioni sui grafi

Un ***albero libero*** è un ***grafo non orientato connesso, aciclico***.

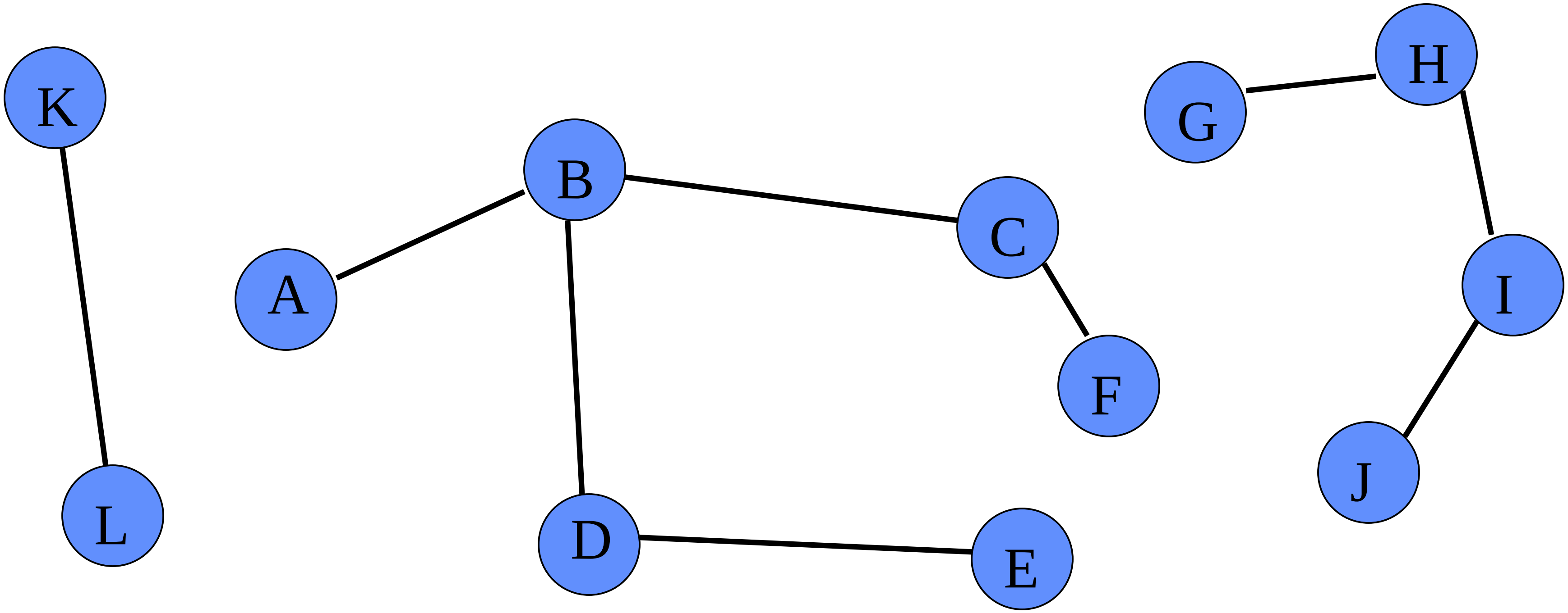
Se qualche ***vertice*** è designato ad essere la ***radice***, otteniamo un ***albero radicato***.



Definizioni sui grafi

Se un ***grafo non orientato*** è ***aciclico*** ma ***sconnesso***, prende il nome di ***foresta***.

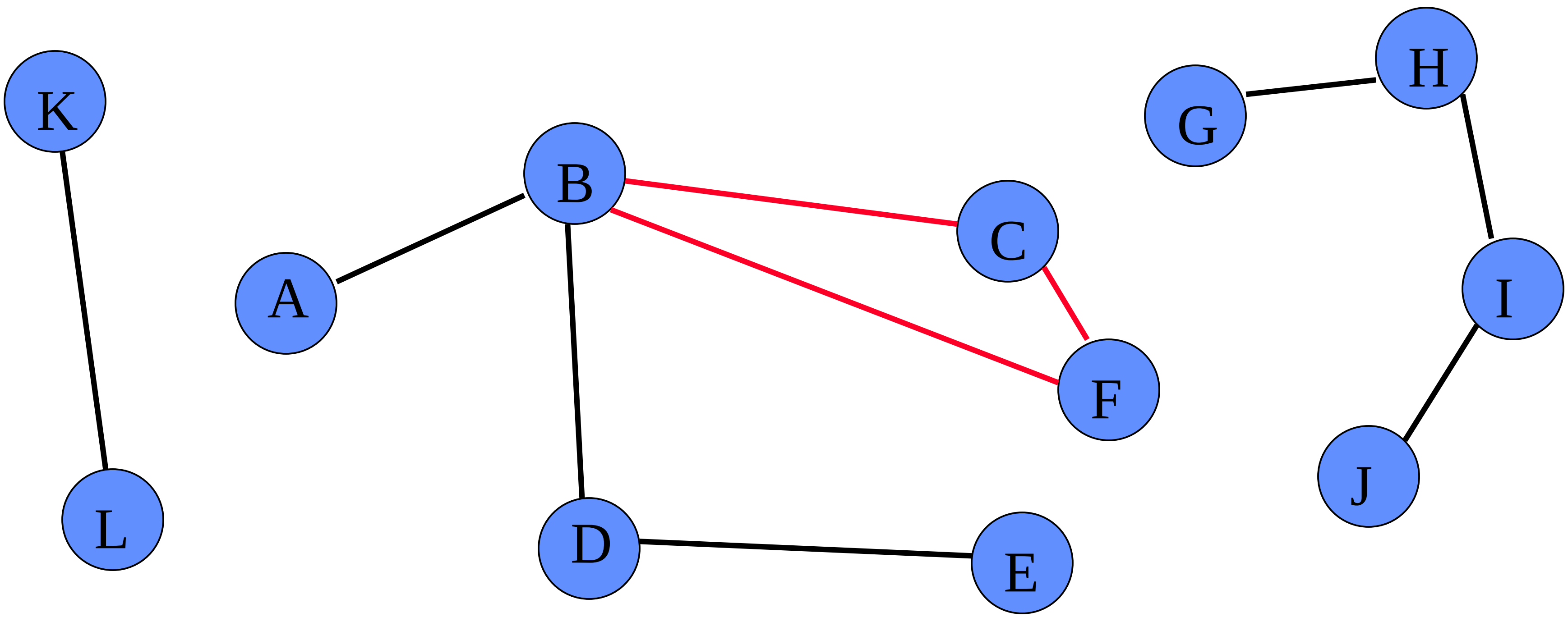
Questa è una ***foresta***. Contiene tre alberi liberi.



Definizioni sui grafi

Se un ***grafo non orientato*** è ***aciclico*** ma ***sconnesso***, prende il nome di ***foresta***.

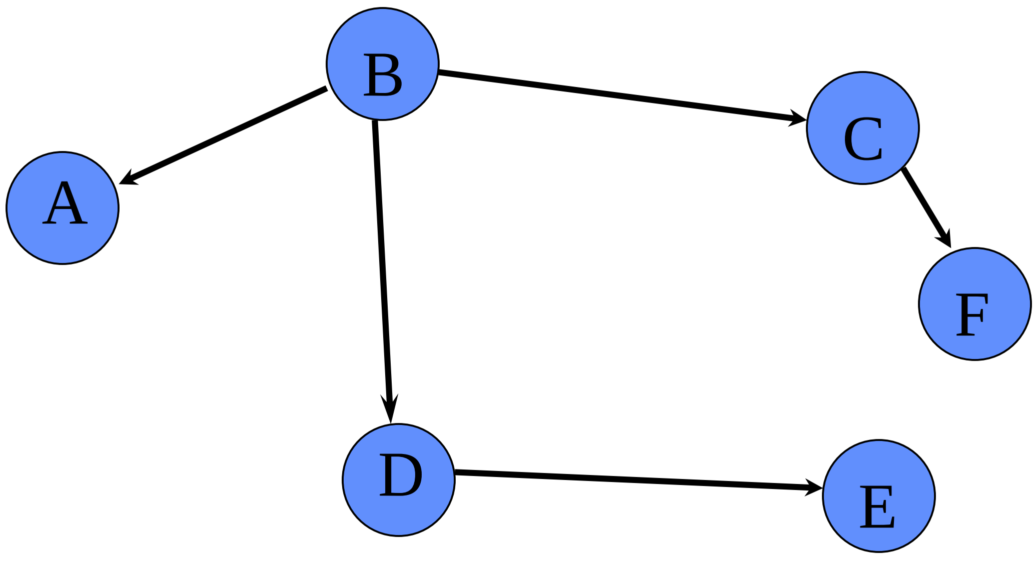
Questo ***grafo contiene un ciclo***. Perciò ***non é*** un ***né albero libero né*** una ***foresta***.



Definizioni sui grafi

Un ***albero orientato*** è un ***grafo orientato aciclico*** in cui

1. esiste solo nodo con grado entrante zero (la radice) e
2. ogni altro vertice ha grado entrante 1.



Rappresentazone di grafi

Ci sono due tipi di rappresentazione *standard* per grafi in un computer:

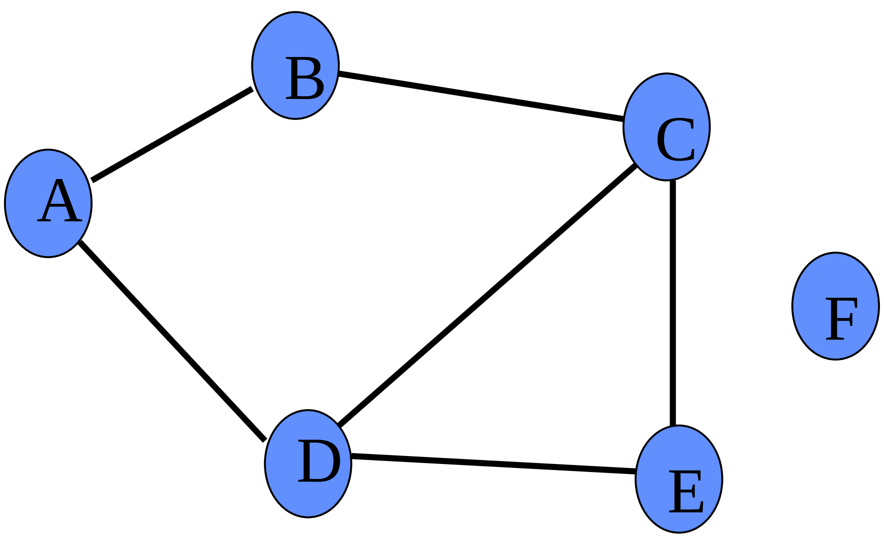
- **Rappresentazione a *matrice di adiacenza***
- **Rappresentazione a *liste di adiacenza***

Rappresentazone di grafi non orientati

Rappresentazione a ***matrice di adiacenza***:

$$M(v, w) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (v, w) \in E \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spazio: $|V|^2$

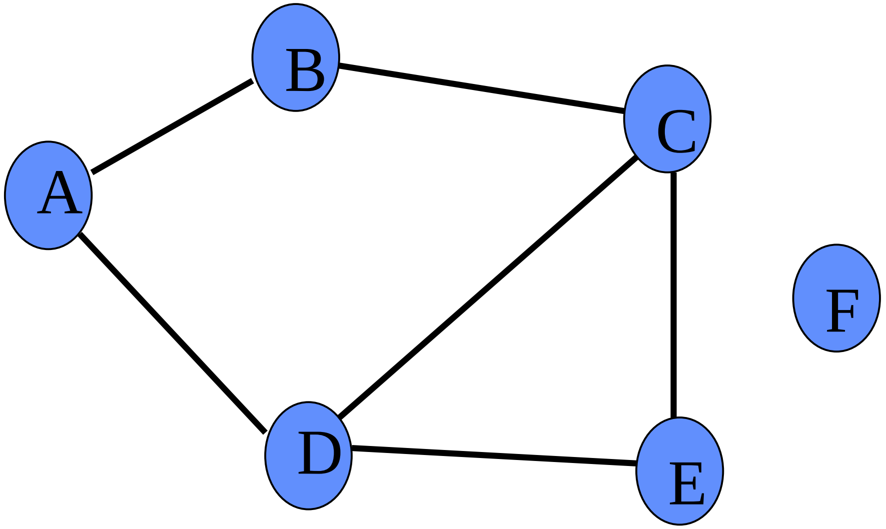


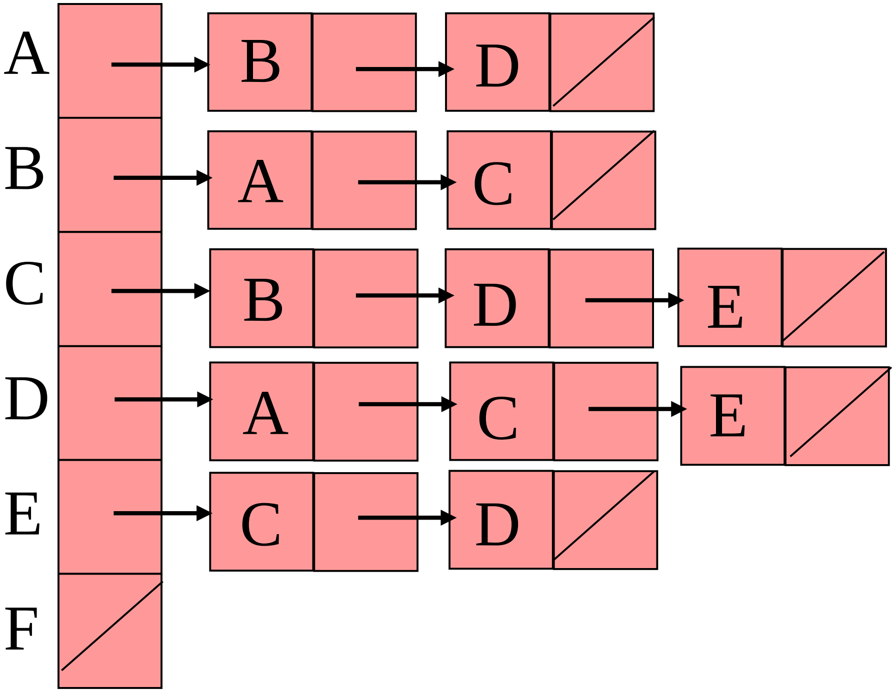
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rappresentazone di grafi non orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza***:

$\boldsymbol{L(v)}$ = lista di $\boldsymbol{w}$, tale che $\boldsymbol{(v, w) \in E}$,
per $\boldsymbol{v \in V}$



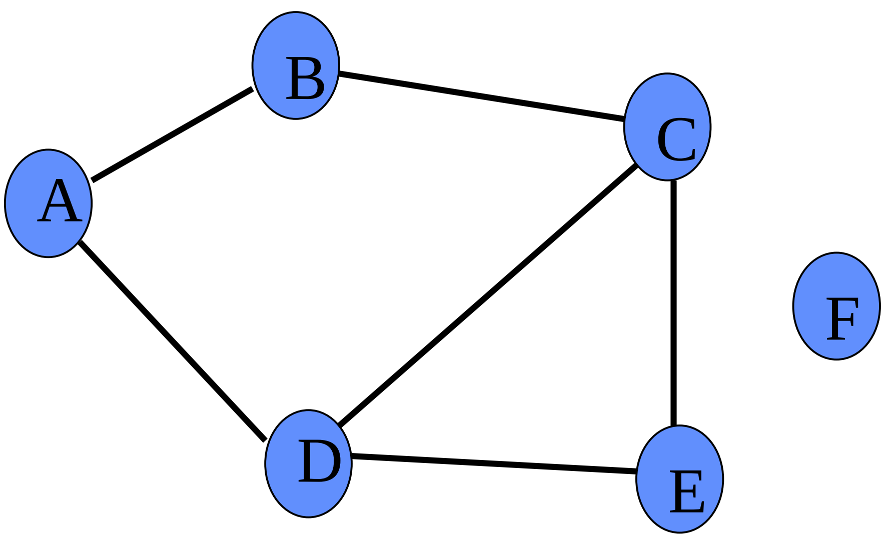


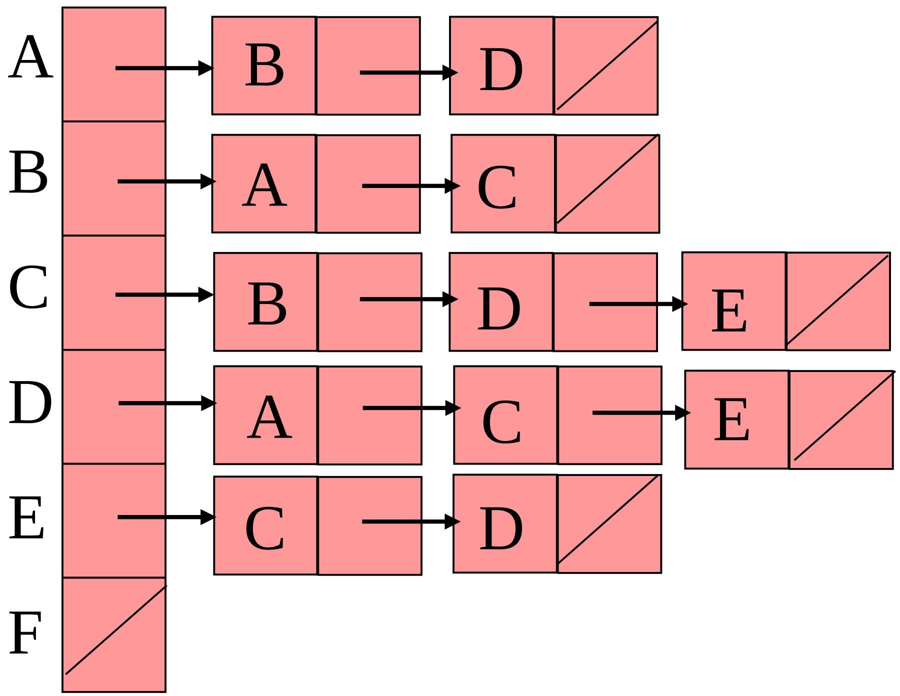
Rappresentazone di grafi non orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza***:

$L(v)$ = lista di w, tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

Quanto spazio ?



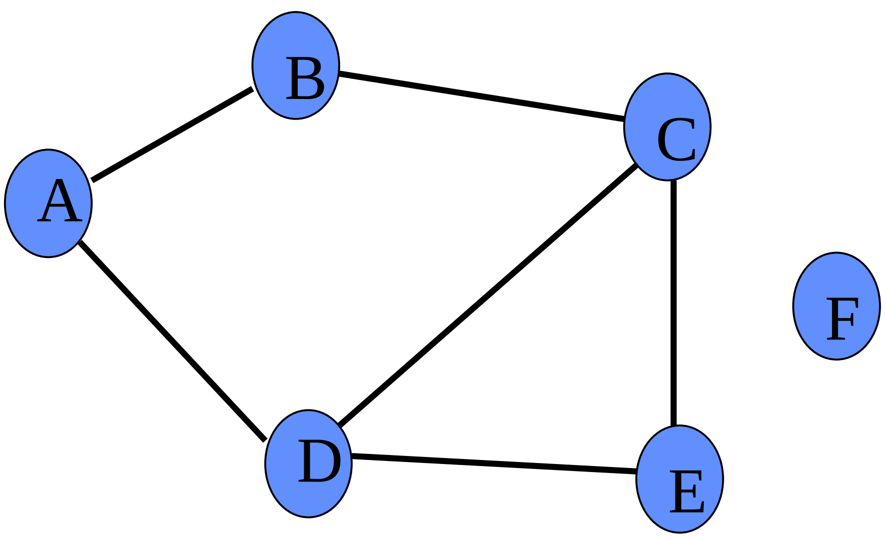


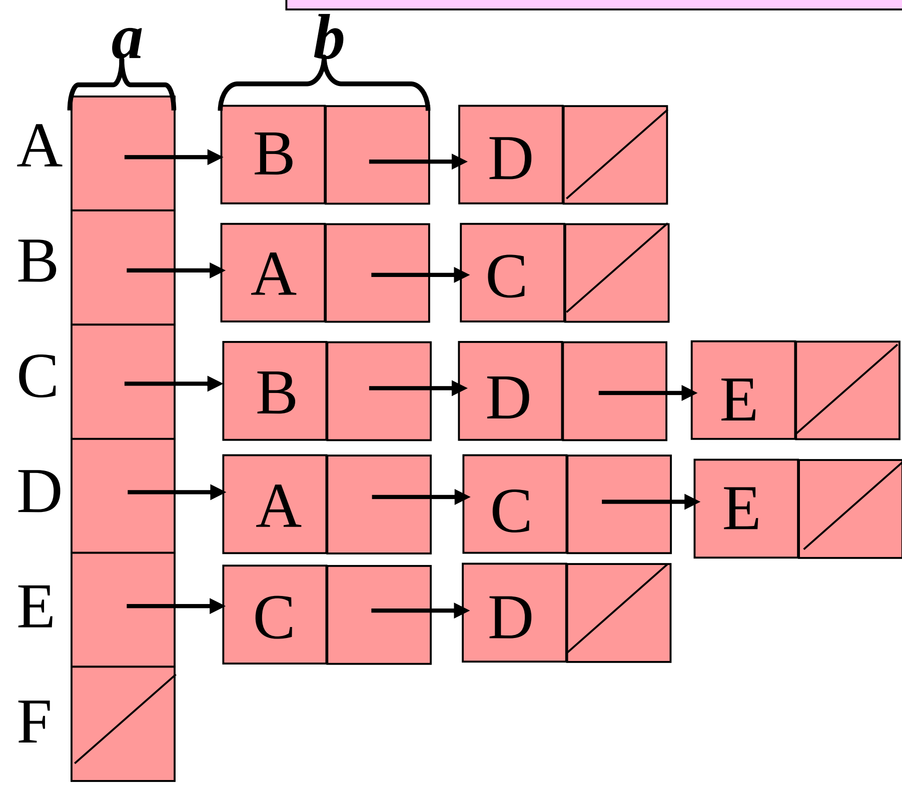
Rappresentazone di grafi non orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza***:

$L(v)$ = lista di w, tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

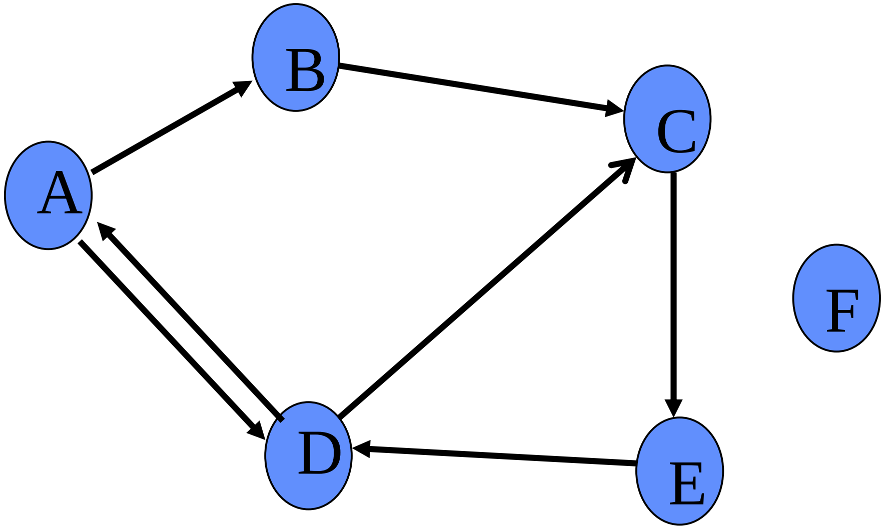
Spazio: a |V| + 2 b |E|





Rappresentazone di grafi orientati

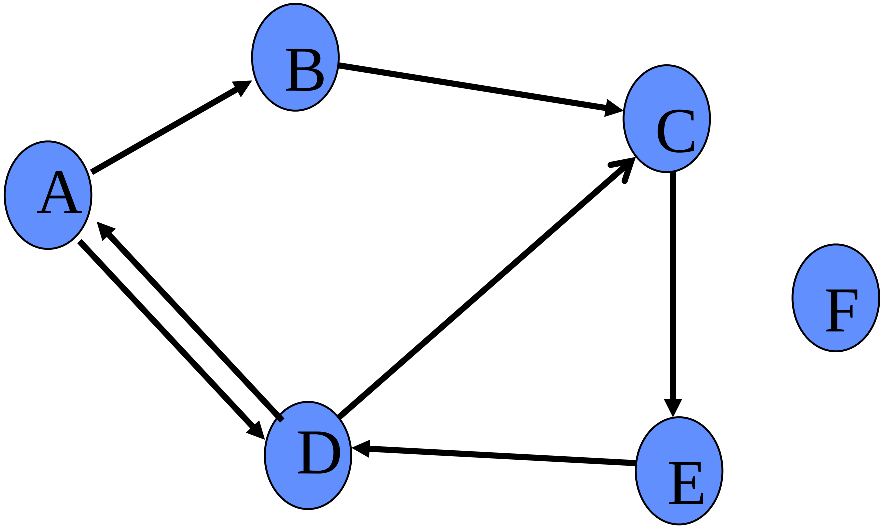
Rappresentazione a ***matrice di adiacenza*** questa volta per rapresentare un ***grafo orientato***.

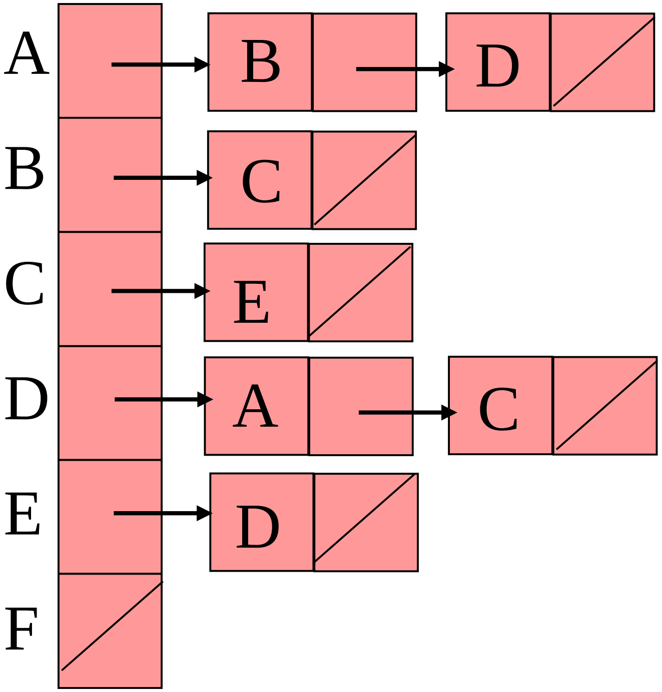


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Rappresentazone di grafi orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza*** questa volta per rapresentare un ***grafo orientato***.

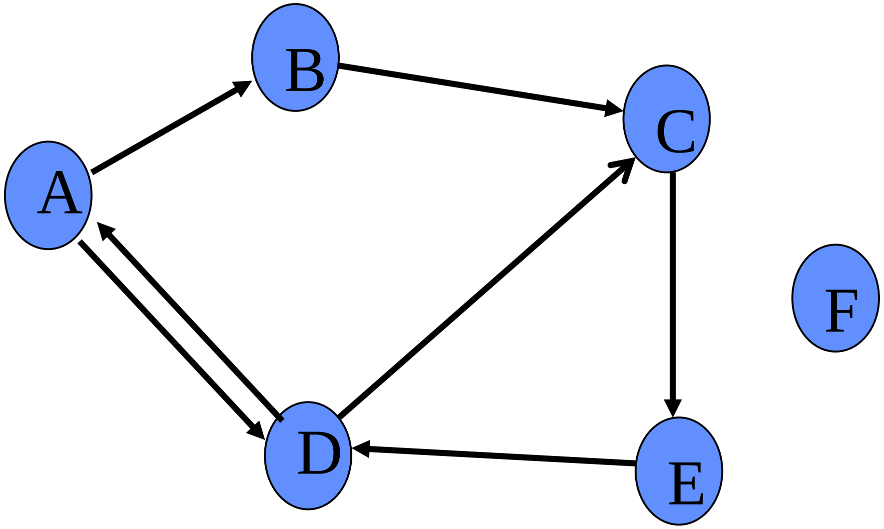


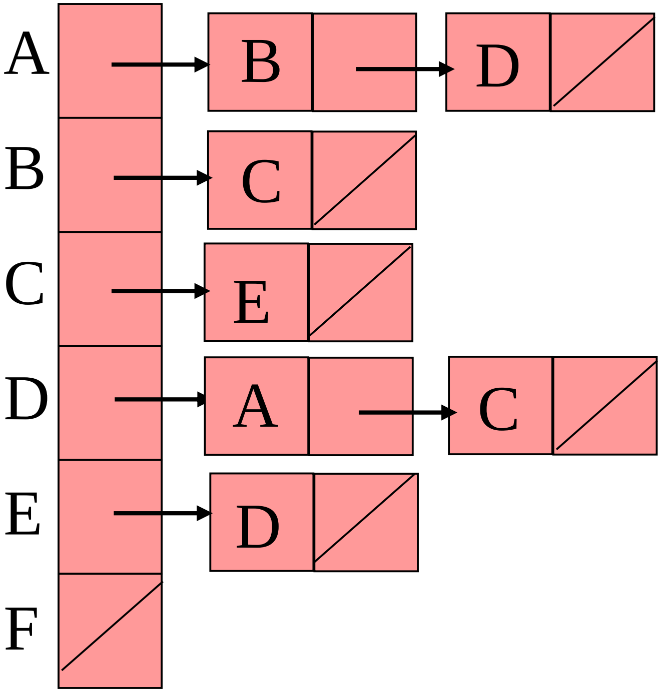


Rappresentazone di grafi orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza*** questa volta per rapresentare un ***grafo orientato***.

Quanto spazio?

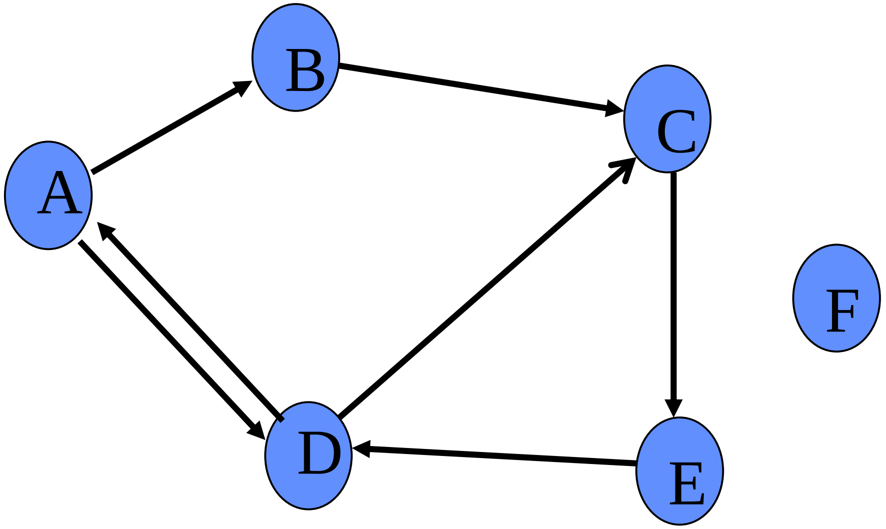


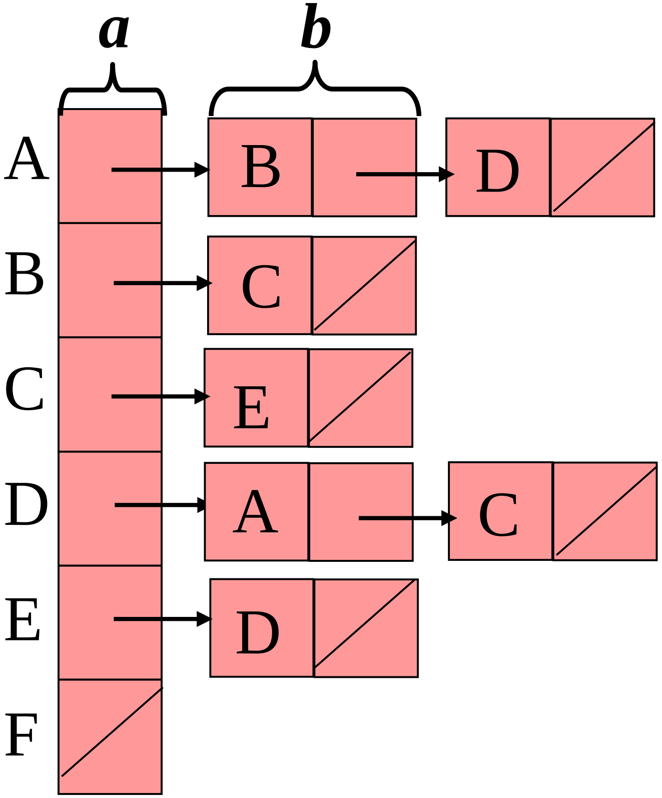


Rappresentazone di grafi orientati

Rappresentazione a ***liste di adiacenza*** questa volta per rapresentare un ***grafo orientato***.

Spazio: *a* |V| + *b* |E|





Rappresentazone di grafi

- **Matrice di adiacenza**
  - **Spazio richiesto $O(|V|^2)$**
  - **Verificare se i vertici *u* e *v* sono adiacenti richiede tempo $O(1)$.**
  - **Molti 0 nel caso di *grafi sparsi***

- **Liste di adiacenza**
  - **Spazio richiesto $O(|E|+|V|)$**
  - **Verificare se i vertici *u* e *v* sono adiacenti richiede tempo $O(|V|)$.**