Algoritmi e Strutture Dati

Valutazione del tempo di esecuzione degli algoritmi

Stima del limite asintotico superiore

- **Nelle prossimi lucidi definiremo un semplice metodo per *stimare il limite asintotico superiore O(.)* del tempo di esecuzione di *algoritmo iterativi*.**
  - **Stabilire il limite superiore per le operazioni elementari**
  - **Stabilire il limite superiore per le strutture di controllo**

- **Ci da un limite superiore che funge da stima, *non garantisce* di trovare la *funzione precisa* del *tempo di esecuzione*.**

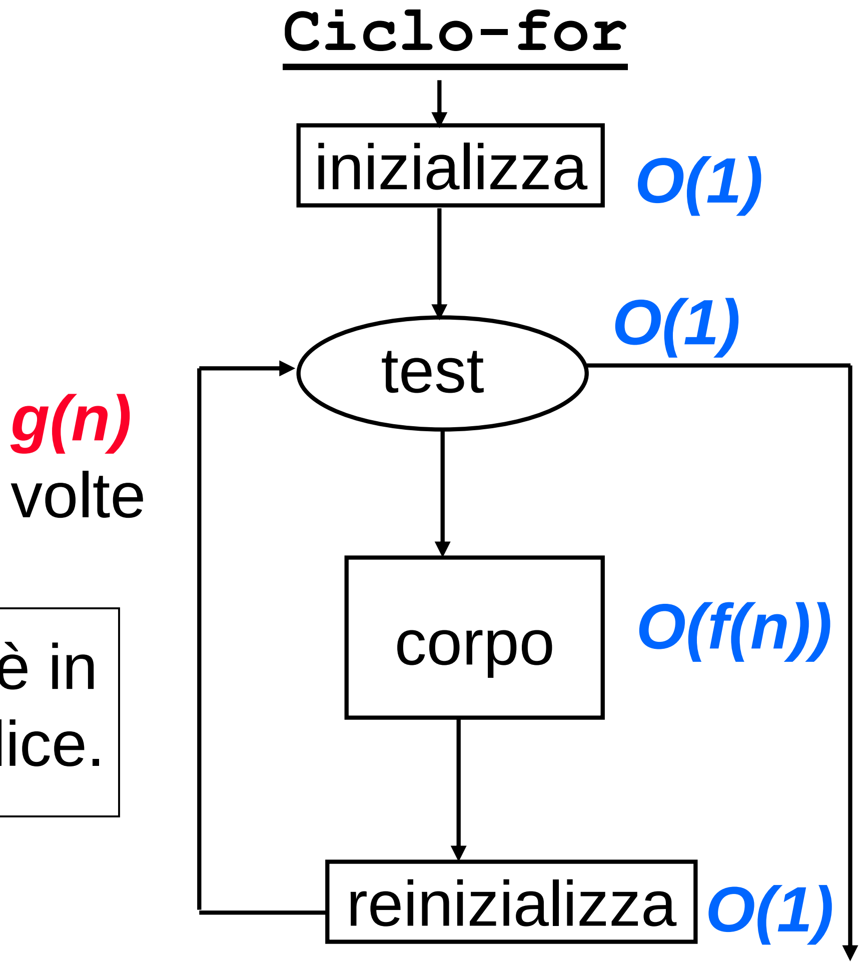
Tempo di esecuzione: operazioni semplici

Operazioni Semplici

- *operazioni aritmetiche (+,*,…)*
- *operazioni logiche(&&, ||,….)*
- *confronti ($\leq$,$\geq$, = ,…)*
- *assegnamenti* (`a = b`) **senza chiamate di funzione**
- *operazioni di lettura (`read`)*
- *operaioni di controllo* (`break, continue, return`)

$$T(n) = \Theta\ (1) \Rightarrow T(n) = O(1)$$

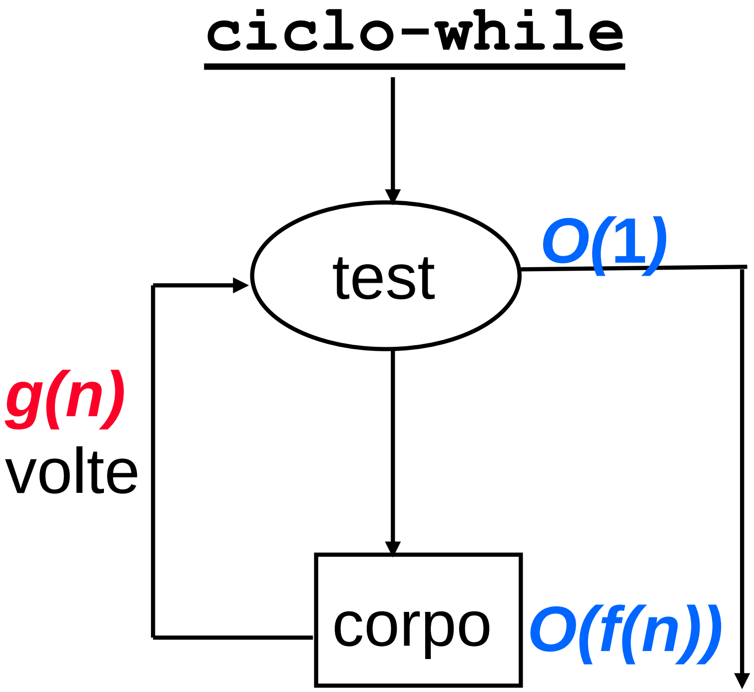
Tempo di esecuzione: ciclo for



stabilire ***g(n)*** è in genere semplice.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Tempo di esecuzione: ciclo while



Bisogna stabilire un limite per il numero di iterazioni del ciclo, ***g(n)***.

Può essere necessaria una prova induttiva per ***g(n)***.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Ciclo while: esempio

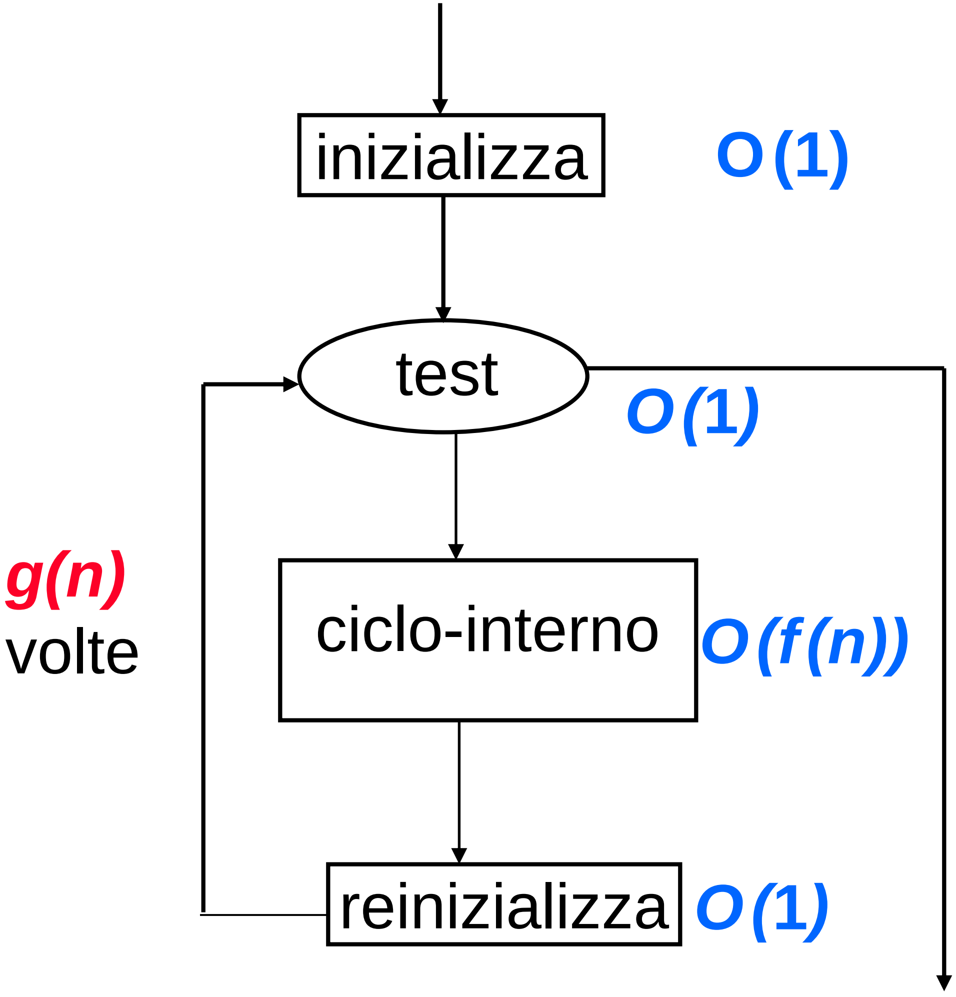
Ricerca dell'elemento x all'interno di un array $A[1...n]$:

```
i = 1                          (1)
while (x ≠ A[i] && i≤n)        (2)
    i = i+1                    (3)
```

(1)	$O(1)$
test in (2)	$O(1)$
(3)	$O(1)$
iterazioni	massimo n

$O(\text{ciclo-while}) = O(1) + n\ O(1) = O(n)$

Tempo di esecuzione: cicli innestati



$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Cicli annidati: esempio

```
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        k = i + j
```

$$\left.\begin{array}{l}\texttt{for } i = 1 \texttt{ to } n\\ \left.\begin{array}{l}\quad\texttt{for } j = 1 \texttt{ to } n\\ \qquad k = i + j\end{array}\right\} = O(n)\end{array}\right\} = O(n^2)$$

$$T(n) = O(n \times n) = O(n^2)$$

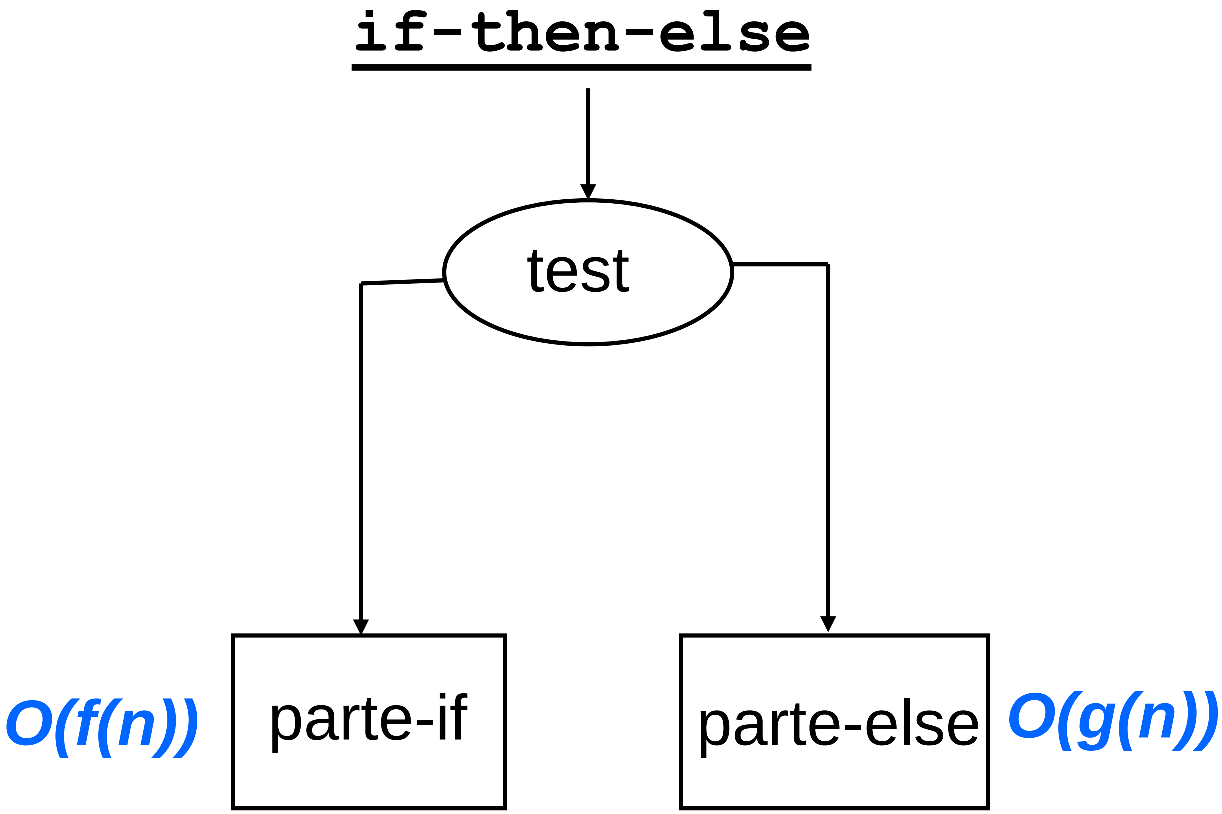
Cicli annidati: esempio

```
for i = 1 to n
    for j = i to n
        k = i + j
```

$$\left.\begin{array}{l}\text{for } i = 1 \text{ to } n \\ \left.\begin{array}{l}\text{for } j = i \text{ to } n \\ \quad k = i + j\end{array}\right\} = O(n - i)\end{array}\right\} = O(n^2)$$

$T(n) = O(n \times n) = O(n^2)$

Tempo di esecuzione: If-Then-Else



$$\boxed{O(max(f(n),g(n)))}$$

If-Then-Else: esempio

```
if A[1][i] = 0 then
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
        a[i][j] = 0
else
    for i = 1 to n
        A[i][i] = 1
```

$$= O(n)$$

$$= O(n^2)$$

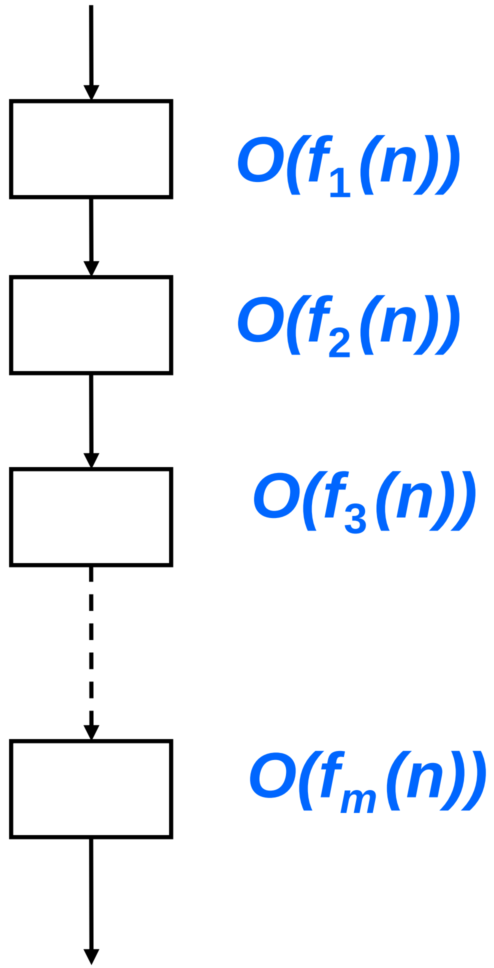
$$= O(n)$$

if: $T(n) = O(n^2)$

else : $T(n) = O(n)$

$$T(n) = \max\left(O(n^2), O(n)\right) = O(n^2)$$

Tempo di esecuzione: blocchi sequenziali



$$O(f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_m(n))$$

$$\boxed{O(\max_{i \in \{1 \ldots m\}} \{ f_i(n) \})}$$

Blocchi sequenziali: esempio

$$\left.\begin{array}{l}\texttt{for } i \texttt{ = 1 to } n \\ \quad A\texttt{[1] = 0}\end{array}\right\} = O(n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\texttt{for } i \texttt{ = 1 to } n \\ \left.\begin{array}{l}\quad \texttt{for } j \texttt{ = 1 to } n \\ \quad\quad A[i] \texttt{ = } A[i] \texttt{ + } A[i]\end{array}\right\} = O(n)\end{array}\right\} = O(n^2)$$

$T(n) = O(\max(f(\text{ciclo-1}), f(\text{ciclo-2})))$

$= O(\max(n, n^2))$

$= O(n^2)$

Esempio: Insert Sort

$O(n^2) =$

```
InsertSort(array A[1…n])
   for j = 2 to n
      key = A[j]                         = O(1)
      i = j - 1                          = O(1)
      while i > 0 and A[i] > key  ⎫
           A[i+1] = A[i]          ⎬ = O(n)
           i = i - 1              ⎭
      A[i+1] = key                       = O(1)
```

$$T(n) = O(g(n) \times max(1, 1, n, 1))$$

$$= O(n \times n)$$

$$= O(n^2)$$

Tempo di esecuzione di algoritmi ricorsivi

- ***E per gli algoritmi ricorsivi?***
  - **Il tempo di esecuzione è espresso tramite una *equazione di ricorrenza*.**

  Esempio:

Merge Sort: $$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

  - **Sono necessarie *tecniche specifiche* per risolvere le equazioni di ricorrenza**

Algoritmi e Strutture Dati

Tempo di esecuzione di algoritmi ricorsivi

Tempo di esecuzione per algoritmi ricorsivi

Esempio: Fattoriale

```
fact(int n)
      if n <= 1 then
        return 1                /* Caso Base
      else
        return n*fact(n-1) /* Passo Induttivo
```

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{se } n = 1 \\ O(1) + T(n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Soluzione di equazioni di ricorrenza

- ***Esistono molto metodi*. Ne mostreremo tre:**
  - ***Il Metodo Iterativo***
    - **Si itera la regola induttiva di *T(n)* in termini di *n* e del caso base.**
    - **Richiede manipolazione delle somme**
  - ***Il Metodo di Sostituzione***
    - **Si ipotizza una possibile soluzione**
    - **Si sostituisce l'ipotetica soluzione nei casi base e induttivo**
    - **Si dimostra la correttezza della ipotesi tramite induzione matematica**
  - ***Il Metodo Principale***

Il Metodo Iterativo

Base:	$T(1) = a$
Induzione:	$T(n) = b + T(n-1)$

I. Sostituire ad m i valori n, n-1, n-2 … finché si ottiene il caso base

1)	$T(n) = b + T(n-1)$	*sostituire **m** con **n***
2)	$T(n-1) = b + T(n-2)$	*sostituire **m** con **n**-1*
3)	$T(n-2) = b + T(n-3)$	*sostituire **m** con **n**-2*
…..		
n-1).	$T(2) = b + T(1)$	*sostituire **m** con 2*
	$T(1) = a$	*noto*

Il Metodo Iterativo

II. *Sostituire T(n-1), T(n-2)... fino al caso base e sostituirlo.*

$$
\begin{aligned}
T(n) = \quad & b + T(n-1) && = \\
& b + b + T(n-2) && = 2*b + T(n-2) \quad = \\
& b + b + b + T(n-3) && = 3*b + T(n-3) \quad = \\
& b + b + b + b + T(n-4) && = 4*b + T(n-4) \quad = \\
& \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$T(n) = \boxed{\sum_{i=1}^{n-1} b + T(1)} \quad = (n-1) \cdot b + T(1)$$

Inserire il caso base

$T(n) = (n-1) \cdot b + a$

III. *Valutare l'espressione O-grande associata*

$$\boxed{T(n) = b*n - b + a = O(n)}$$

Il Metodo iterativo: Fattoriale

Esempio: Fattoriale

```
fact(int n)
     if n <= 1 then
       return 1                /* Caso Base
     else
       return n*fact(n-1) /* Passo Induttivo
```

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{se } n = 1 \\ O(1) + T(n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Equazione di ricorrenza

Base: $T(1) = a$

Induzione: $T(m) = b + T(m-1)$

Il Metodo iterativo: Fattoriale

Analisi di fact

Caso Base: $T(0) = O(1),$
$T(1) = O(1)$

Passo Induttivo: $O(1) + max(O(1), T(n-1))$
$O(1) + T(n-1),$ *per* ***n>1***

Per il fattorale, l'analisi risulta $\boxed{T(n) = O(n)}$

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) = 3\,T(n/4) + n$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(n/4) + n = \\
&= 3\,(3\,T(n/16) + n/4) + n
\end{aligned}
$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(n/4) + n = \\
&= 3\,(3\,T(n/16) + n/4) + n = \\
&= 9\,T(n/16) + 3\,n/4 + n
\end{aligned}
$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(n/4) + n = \\
&= 3\,(3\,T(n/16) + n/4) + n = \\
&= 9\,T(n/16) + 3\,n/4 + n = \\
&= 27\,T(n/64) + 9\,n/16 + 3\,n/4 + n
\end{aligned}
$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(n/4) + n = \\
&= 3\,(3\,T(n/16) + n/4) + n = \\
&= 9\,T(n/16) + 3\,n/4 + n = \\
&= 27\,T(n/64) + 9\,n/16 + 3\,n/4 + n = \\
&\quad \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Quando ci si ferma?

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) = 3\,T(n/4) + n =$$
$$= 3\,(3\,T(n/16) + n/4) + n =$$
$$= 9\,T(n/16) + 3\,n/4 + n =$$
$$= 27\,T(n/64) + 9\,n/16 + 3\,n/4 + n =$$

....

Quando ci si ferma?

quando $n/(4^i) = 1$

cioè quando $i > \log_4 n$

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

Contiene una serie geometrica, che è del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

Contiene una serie geometrica, che è del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

quando **|x|<1** converge a $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i = \frac{1}{1-3/4} = 4$$

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$$

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

Contiene una serie geometrica, che è del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

quando **|x|<1** converge a $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i = \frac{1}{1-3/4} = 4$$

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) = 4\,n + o(n)$$

$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ e $\log_4 3 < 1$

Il Metodo iterativo: esempio

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

Contiene una serie geometrica, che è del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

quando **|x|<1** converge a $$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i = \frac{1}{1-3/4} = 4$$

$$T(n) < n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64) + \ldots + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty} (3/4)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) = 4\,n + o(n)$$

$$= O(n)$$

$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ e $\log_4 3 < 1$

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Gli *alberi di ricorrenza* rappresentano un modo conveniente per visualizzare i passi di sostituzione necessari per risolvere una ricorrenza col *Metodo Iterativo*.

- **Utili per semplificare i calcoli ed evidenziare le *condizioni limite* della ricorrenza.**

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

$$n^2$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \qquad\qquad T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

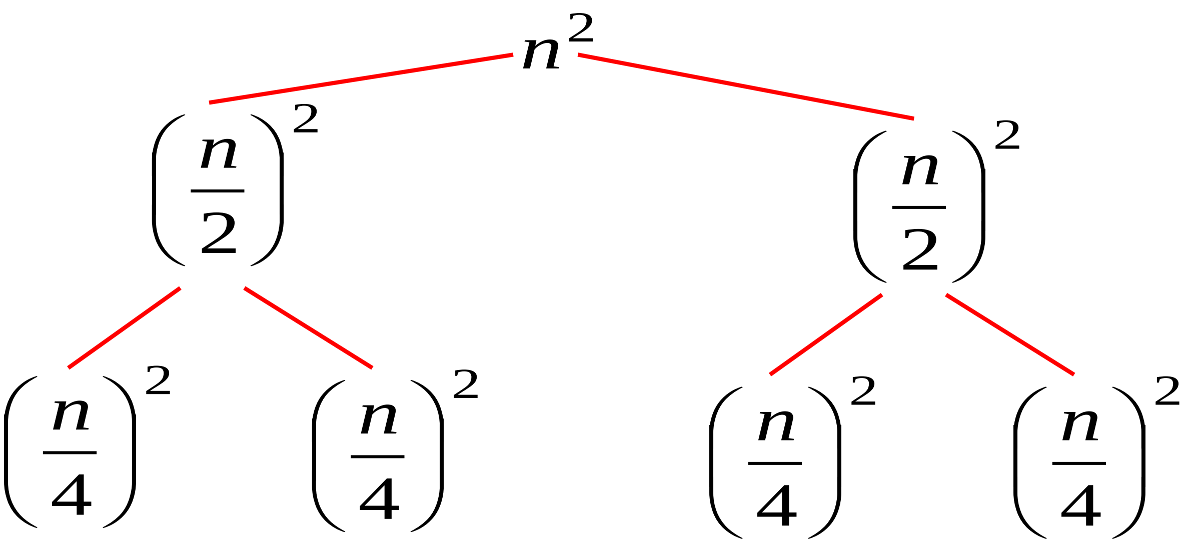
$$n^2$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 \qquad\qquad \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) \quad T\left(\frac{n}{4}\right) \qquad\qquad T\left(\frac{n}{4}\right) \quad T\left(\frac{n}{4}\right)$$

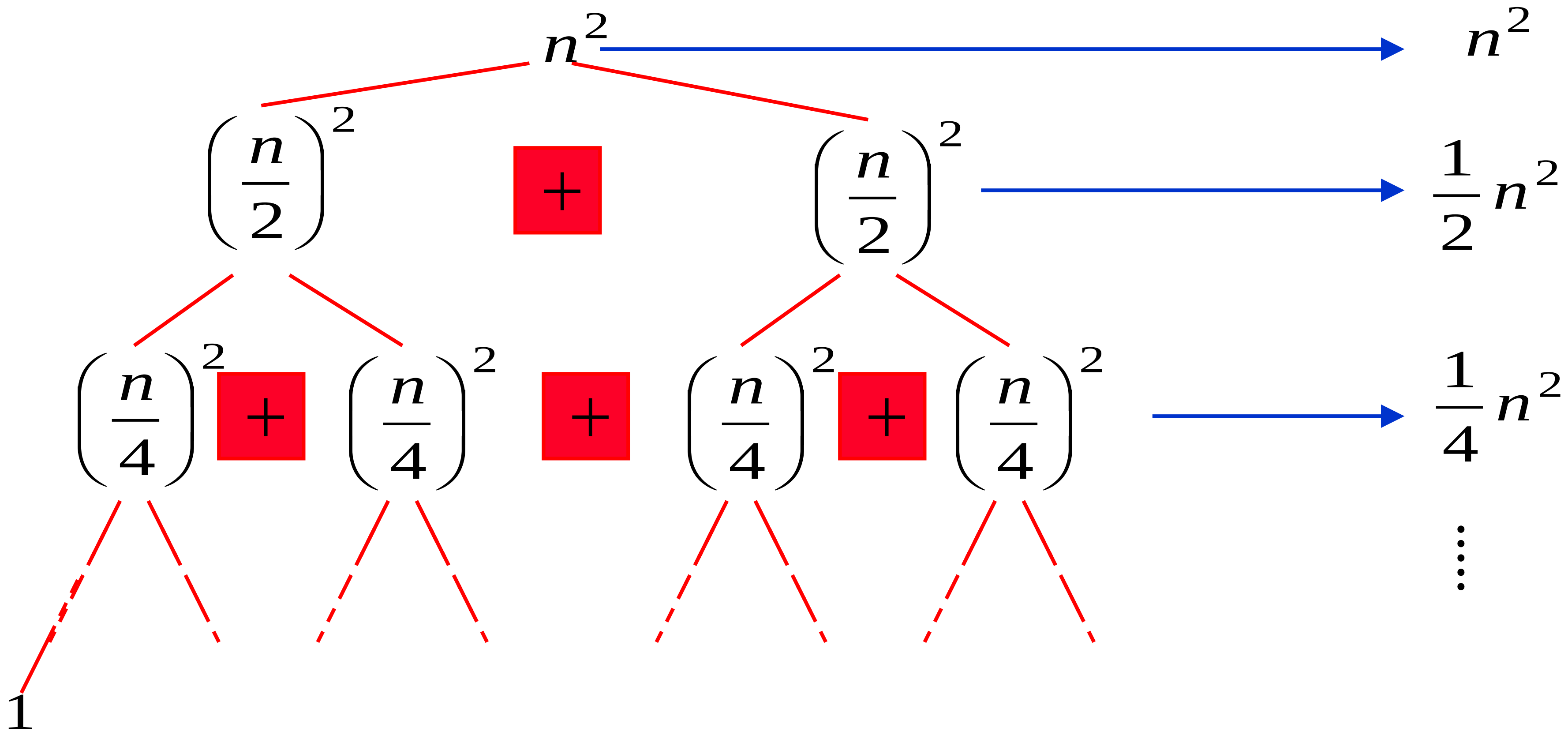
Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



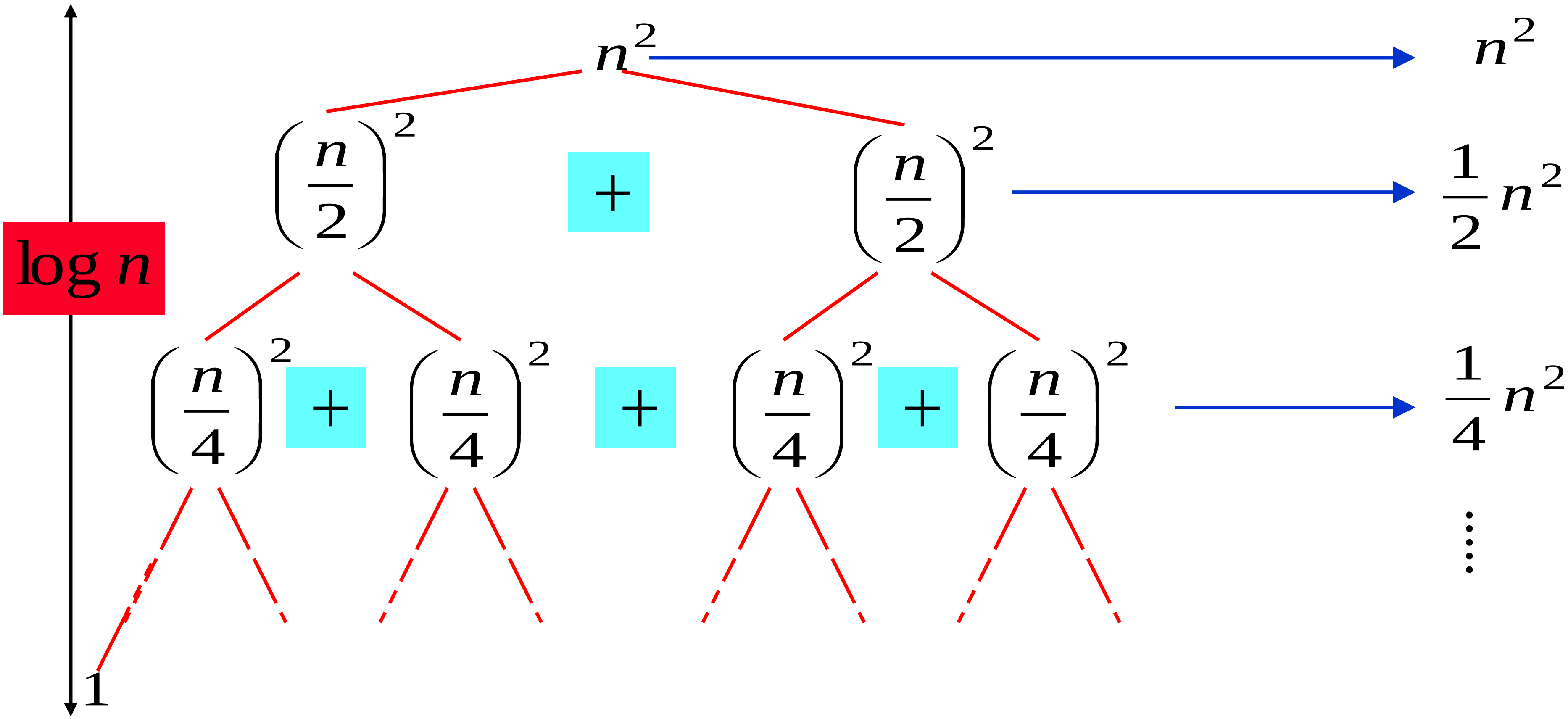
Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



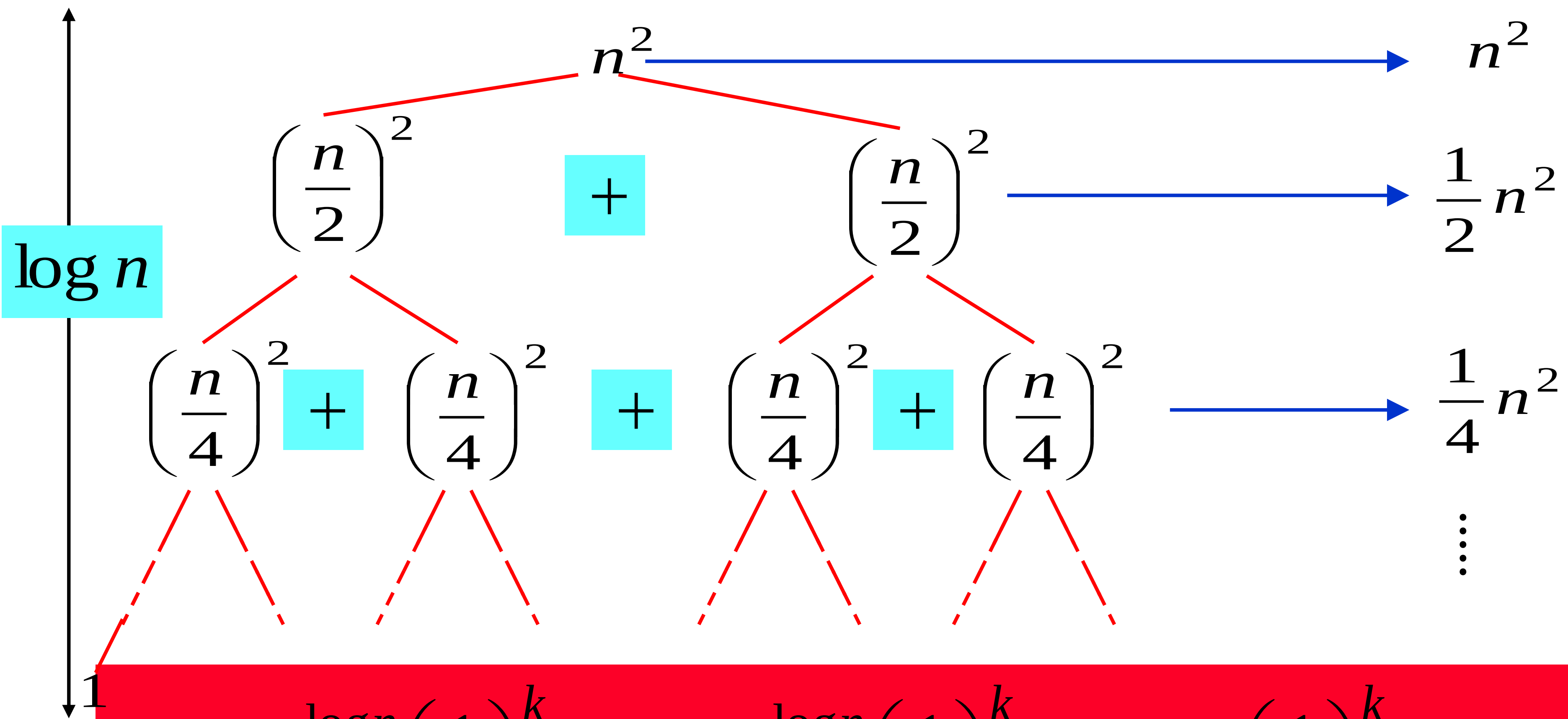
Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

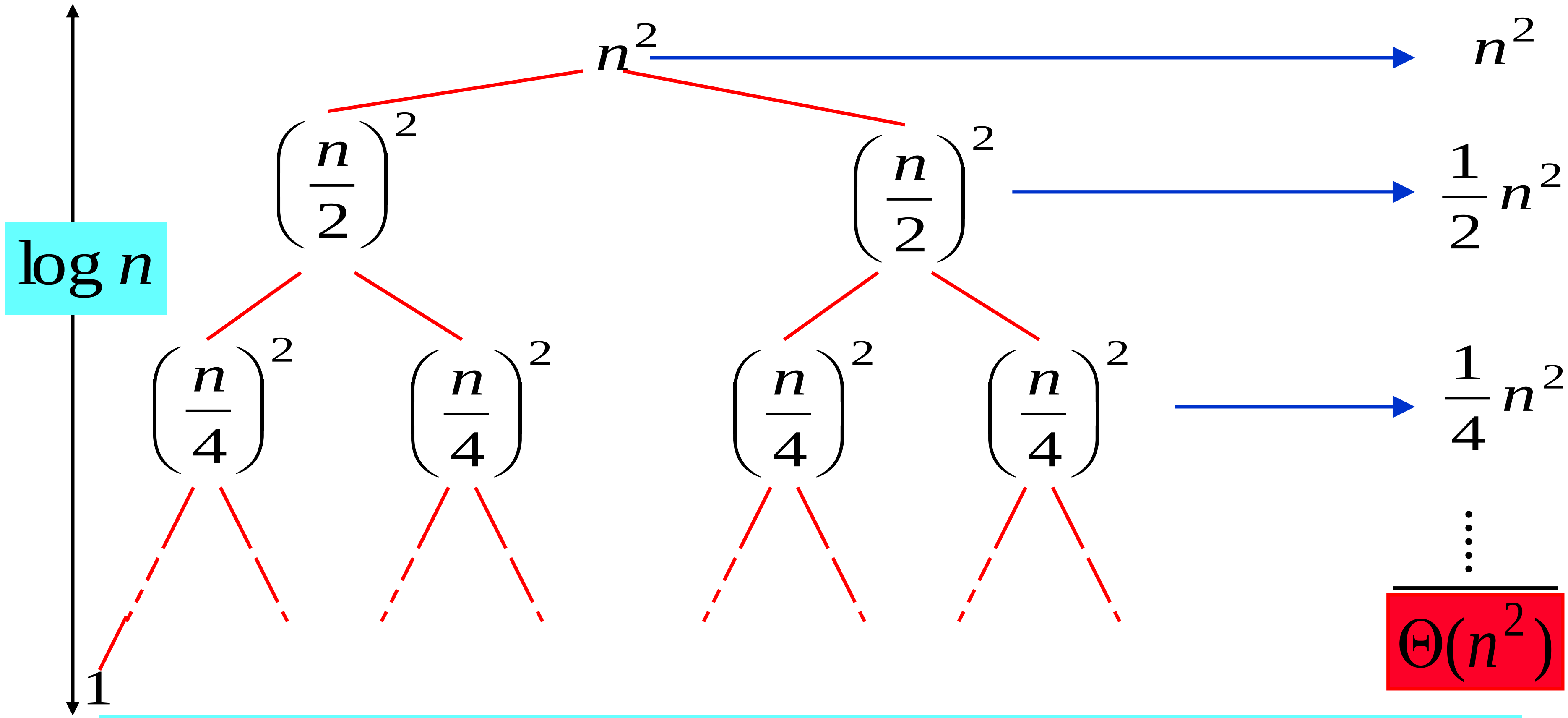
Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2n^2$$

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

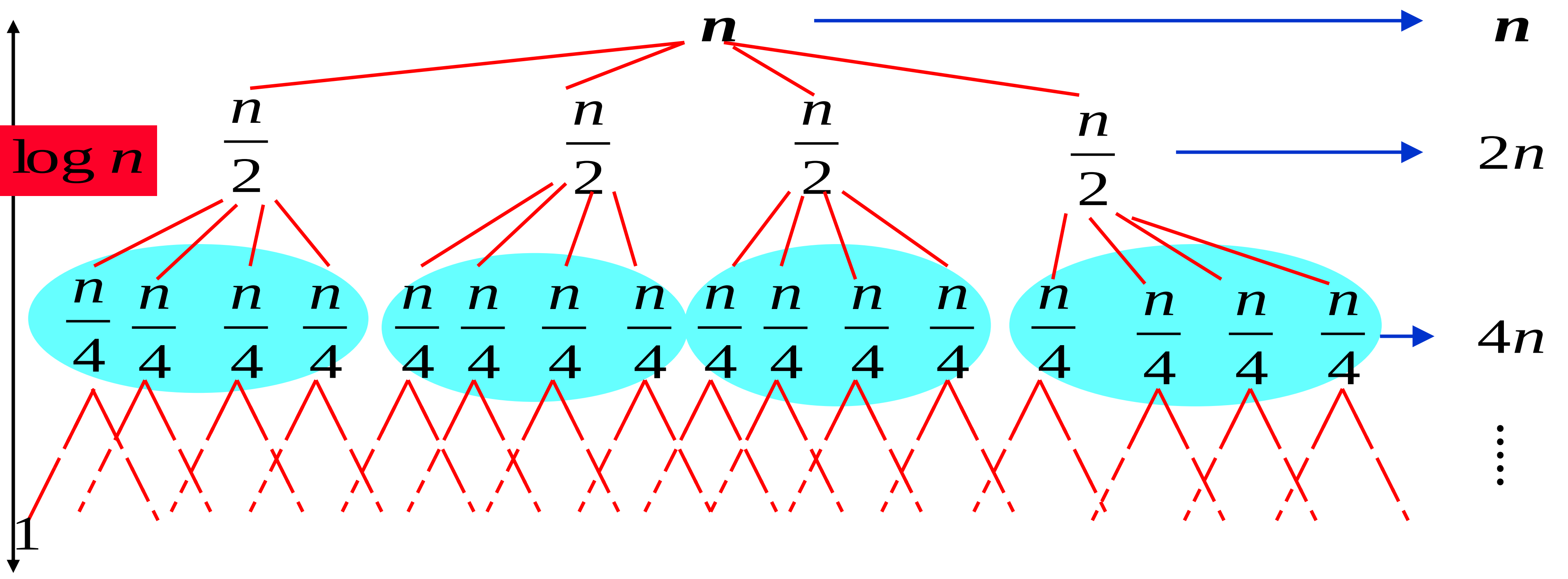
Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \le n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2n^2$$

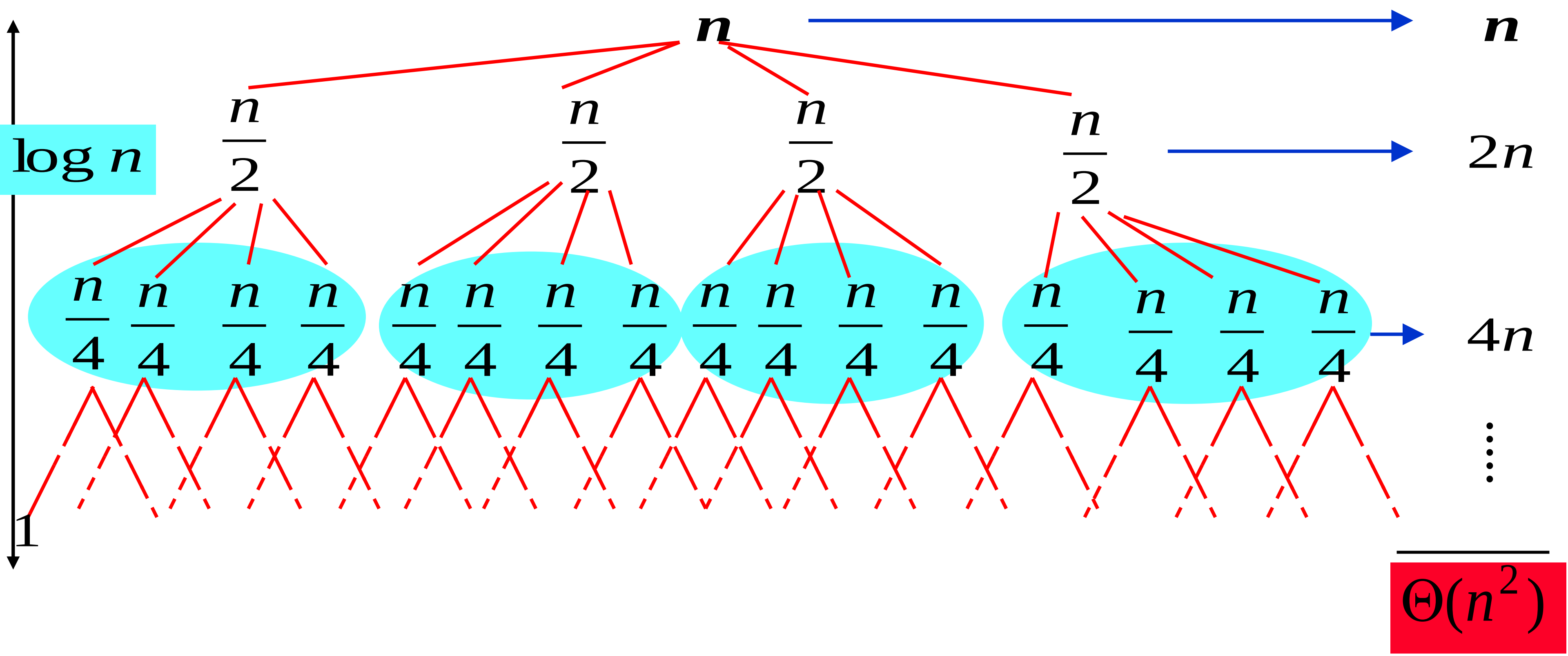
Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n$



Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

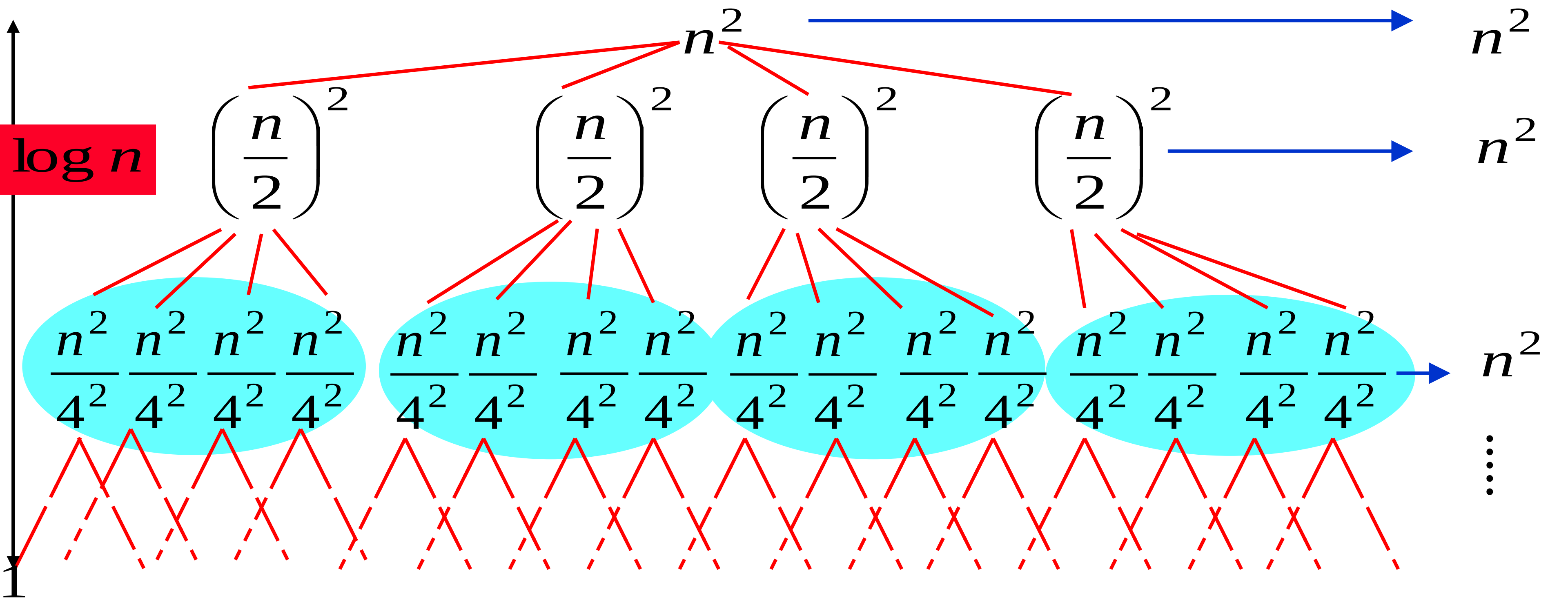
Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} n2^k = n\sum_{k=0}^{\log n} 2^k = \frac{2^{\log n+1}-1}{2-1}n = (2n-1)n = 2n^2 - 1$$

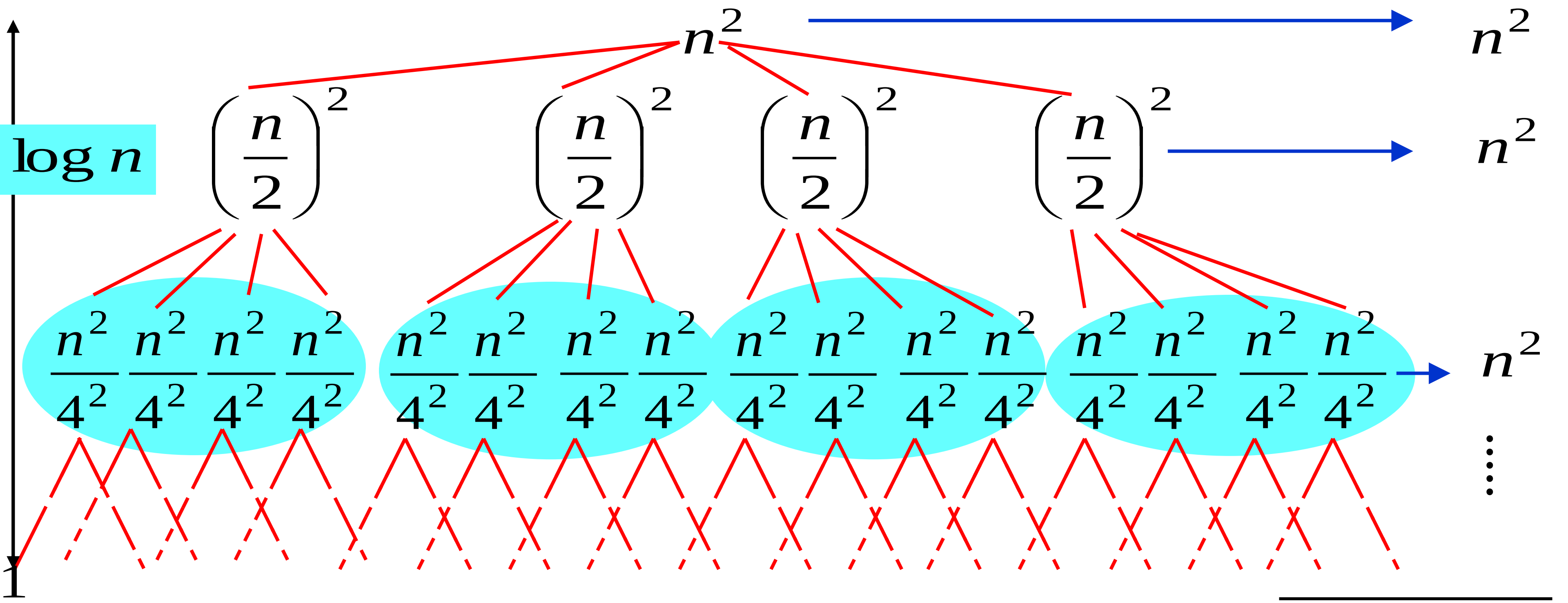
Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n^2$



Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

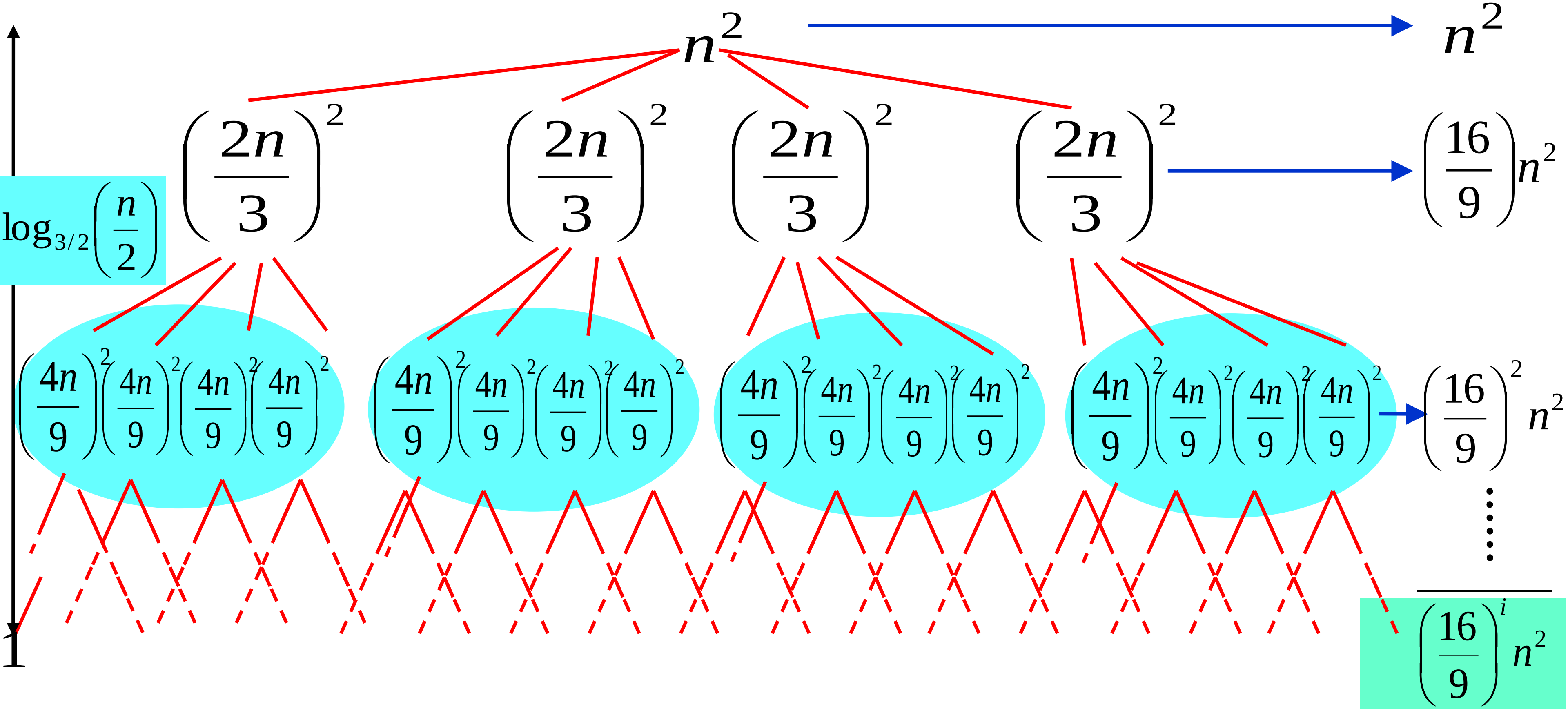


$\Theta(n^2 \log n)$

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\log n} n^2 = n^2 \sum_{k=1}^{\log n} 1 = n^2 \log n$$

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(2\cdot n/3) + n^2$



$$T(n)=\sum_{k=0}^{\log_{3/2}(n/2)}\left(\frac{16}{9}\right)^k n^2 = n^2\,\frac{\left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{16}{9}\right)^{\log_{3/2}(n/2)}-1}{\frac{7}{9}} = \frac{16}{7}n^2\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_{3/2}(16/9)} - \left(\frac{9n^2}{7}\right) = \Theta\left(n^{\log_{3/2}4}\right)$$

Metodo iterativo: alberi di Ricorrenza

Importante focalizzarsi su due parametri

- **il numero di volte in cui la ricorrenza deve essere iterata prima di giungere alla condizione limite (o base)**

- **la somma dei termini che compaiono ad ogni livello della iterazione.**