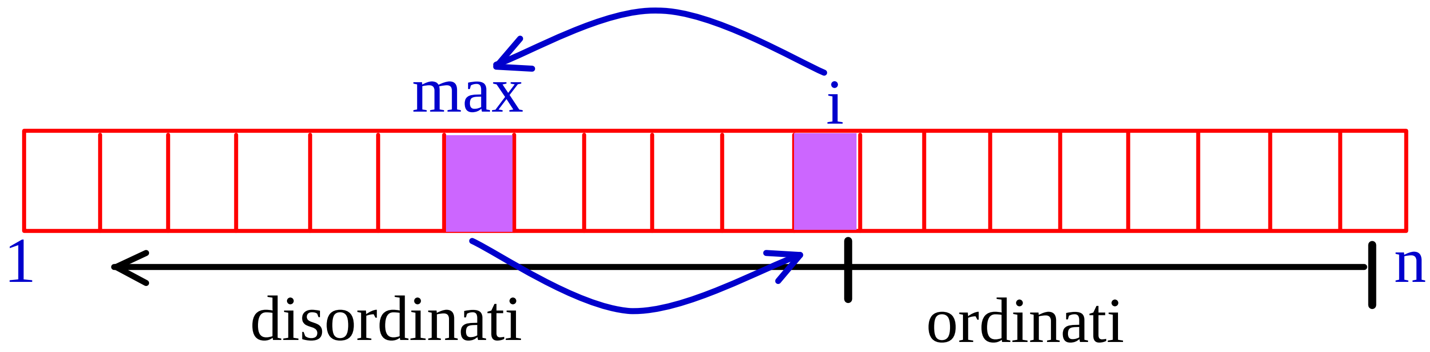
Algoritmi e Strutture Dati

HeapSort

Selection Sort: intuizioni

L'algoritmo Selection-Sort

- **scandisce tutti gli elementi dell'array a partire dall'ultimo elemento fino all'inizio e ad ogni iterazione:**
  - **Viene cercato l'elemento massimo nella parte di array che precede l'elemento corrente**
  - **l'elemento massimo viene scambiato con l'elemento corrente**



Select Sort

```
Selection-Sort(A)
   FOR i = length[A] DOWNTO 2
      DO  max = Findmax(A,i)
         “scambia A[max] e A[i]”
```

```
Findmax(A,x)
   max = 1
   FOR i = 2 to x
      DO IF A[max] < A[i] THEN
               max = i
   return max
```

Heap Sort

L'algoritmo Heap-Sort:

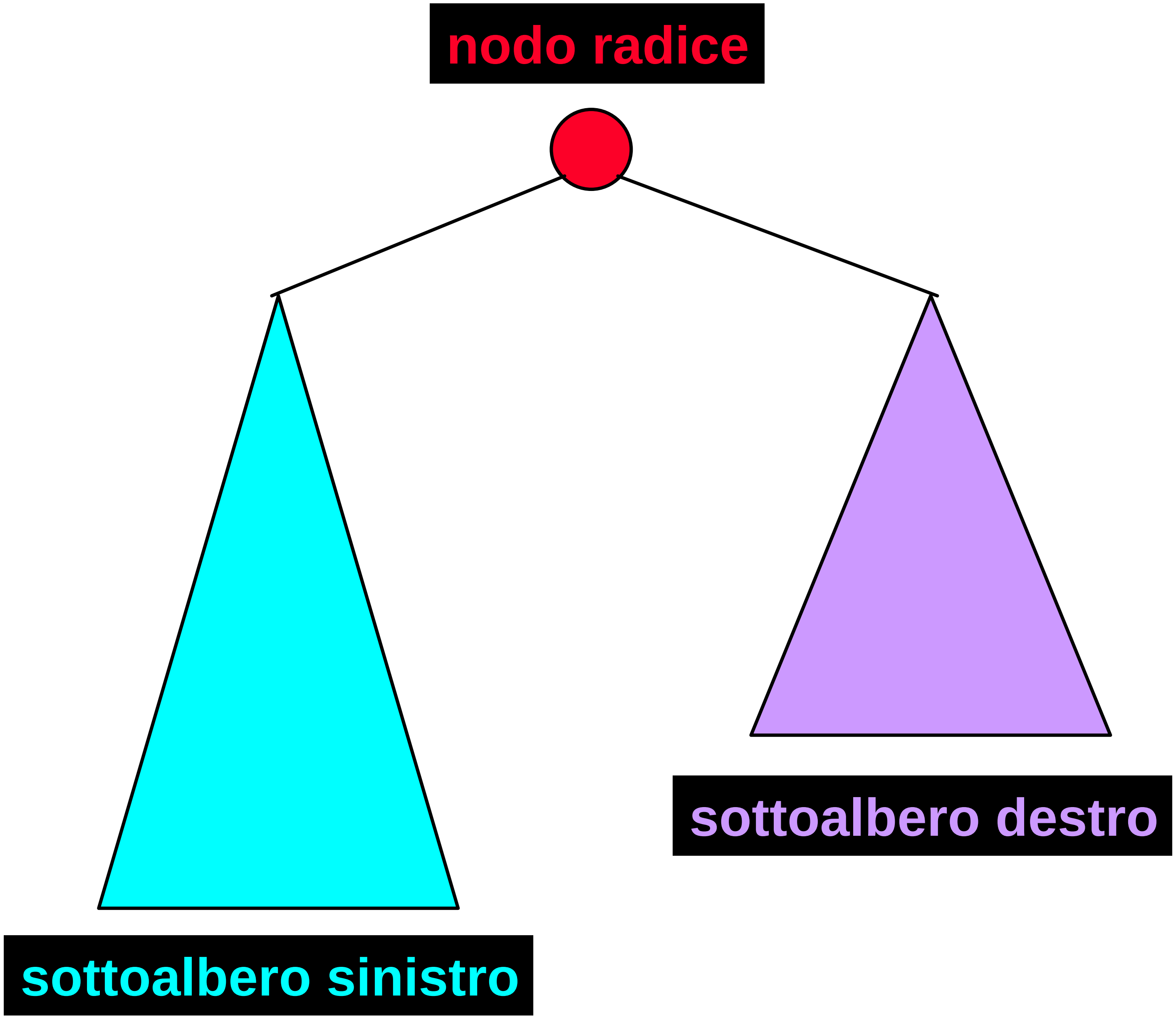
- **è una variazione di Selection-sort in cui la ricerca dell'elemento massimo è facilitata dall'utilizzo di una opportuna struttura dati**
- **la struttura dati è chiamata *heap***
- **lo *heap* è una variante della struttura dati *albero binario***
- **in uno *heap* si può accedere all'*elemento massimo* in *tempo costante***
- **si può ricostruire la struttura *heap* in *tempo sublineare*.**

Alberi binari

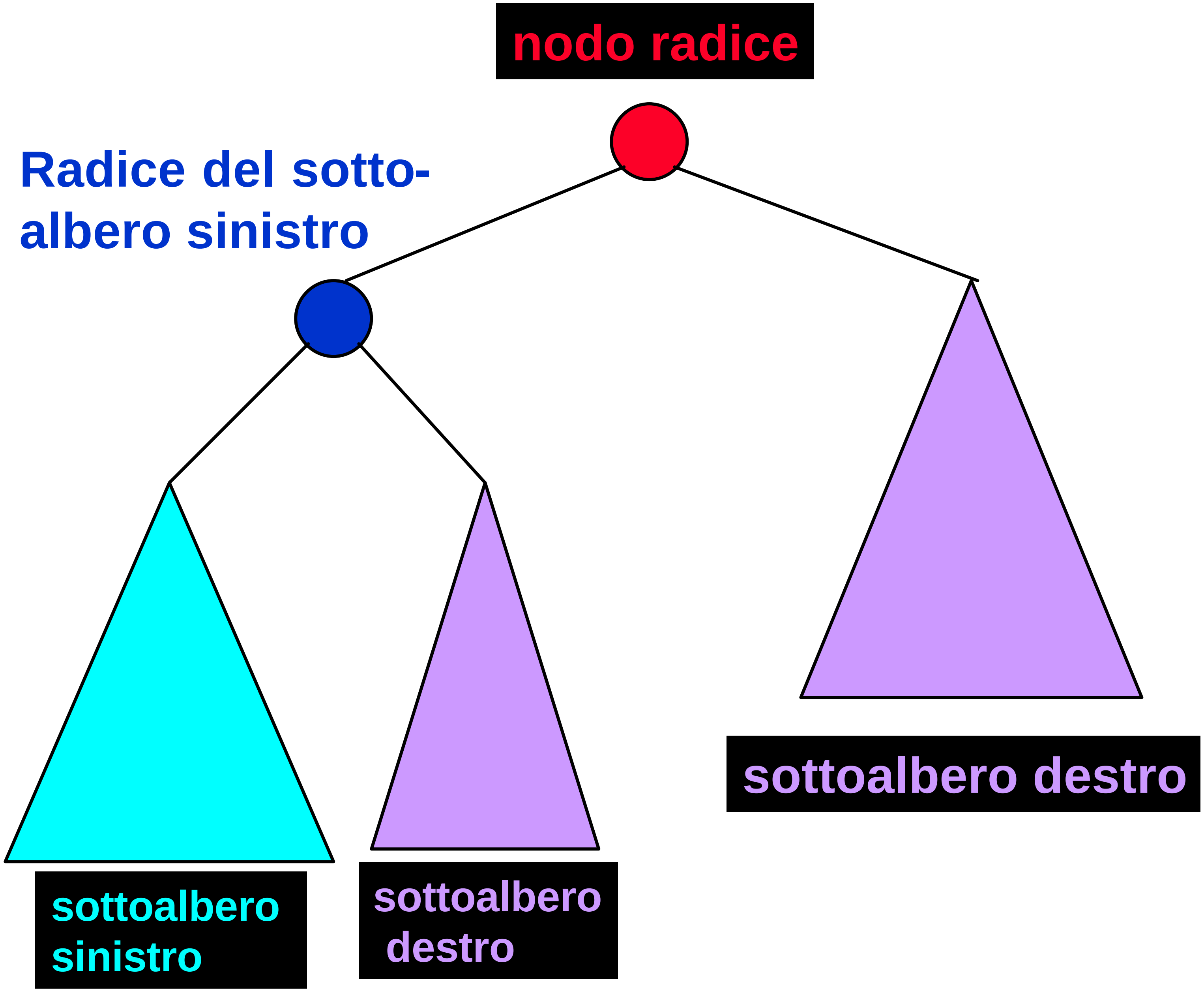
Un *albero binario* è una struttura dati *astratta* definita come un *insieme finito di nodi* che

- **è *vuoto* oppure**
- **è composto da *tre insiemi disgiunti* di nodi:**
    - **un *nodo radice***
    - **un albero binario detto *sottoalbero sinistro***
    - **un albero binario detto *sottoalbero destro***

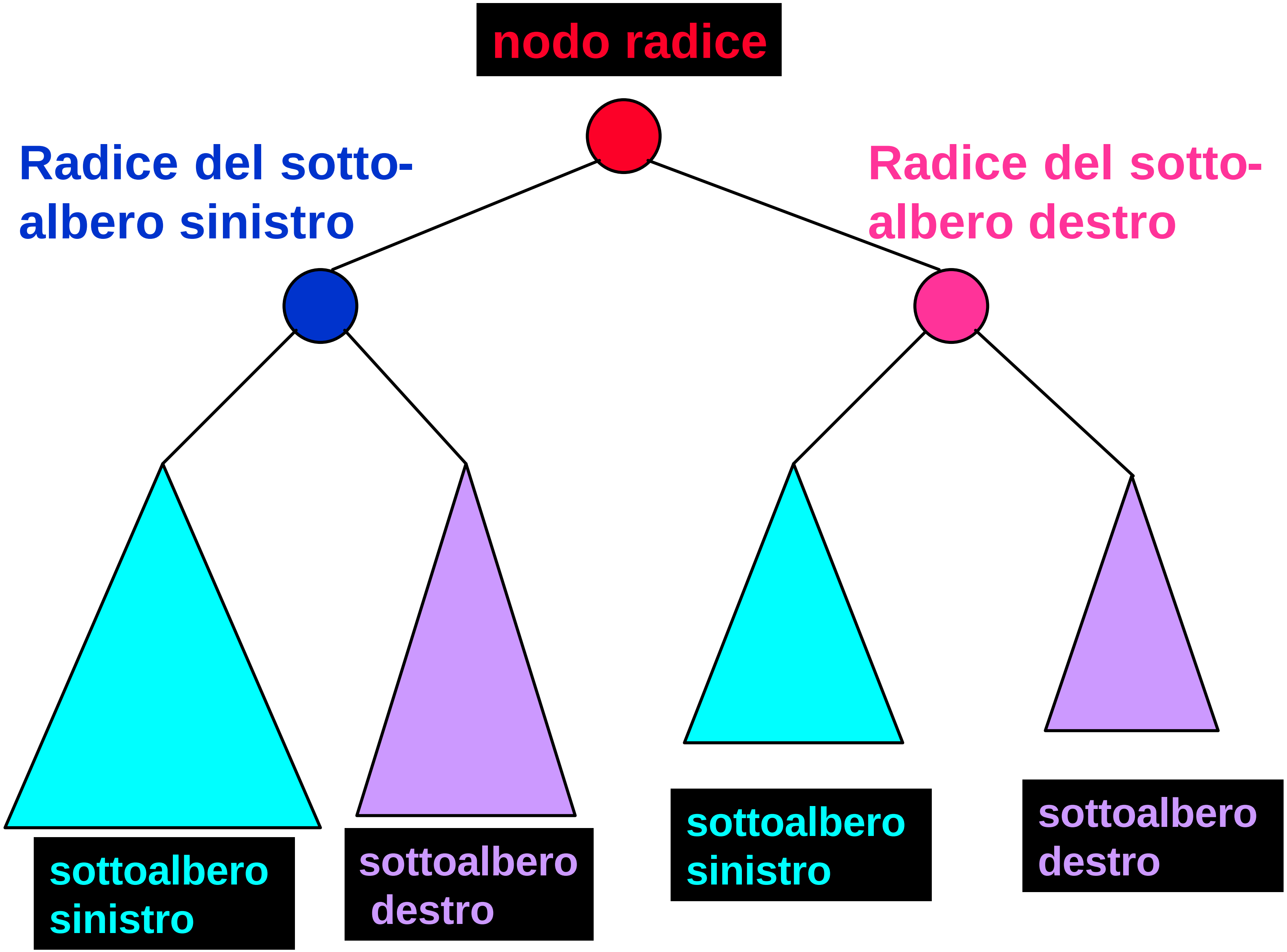
Alberi binari



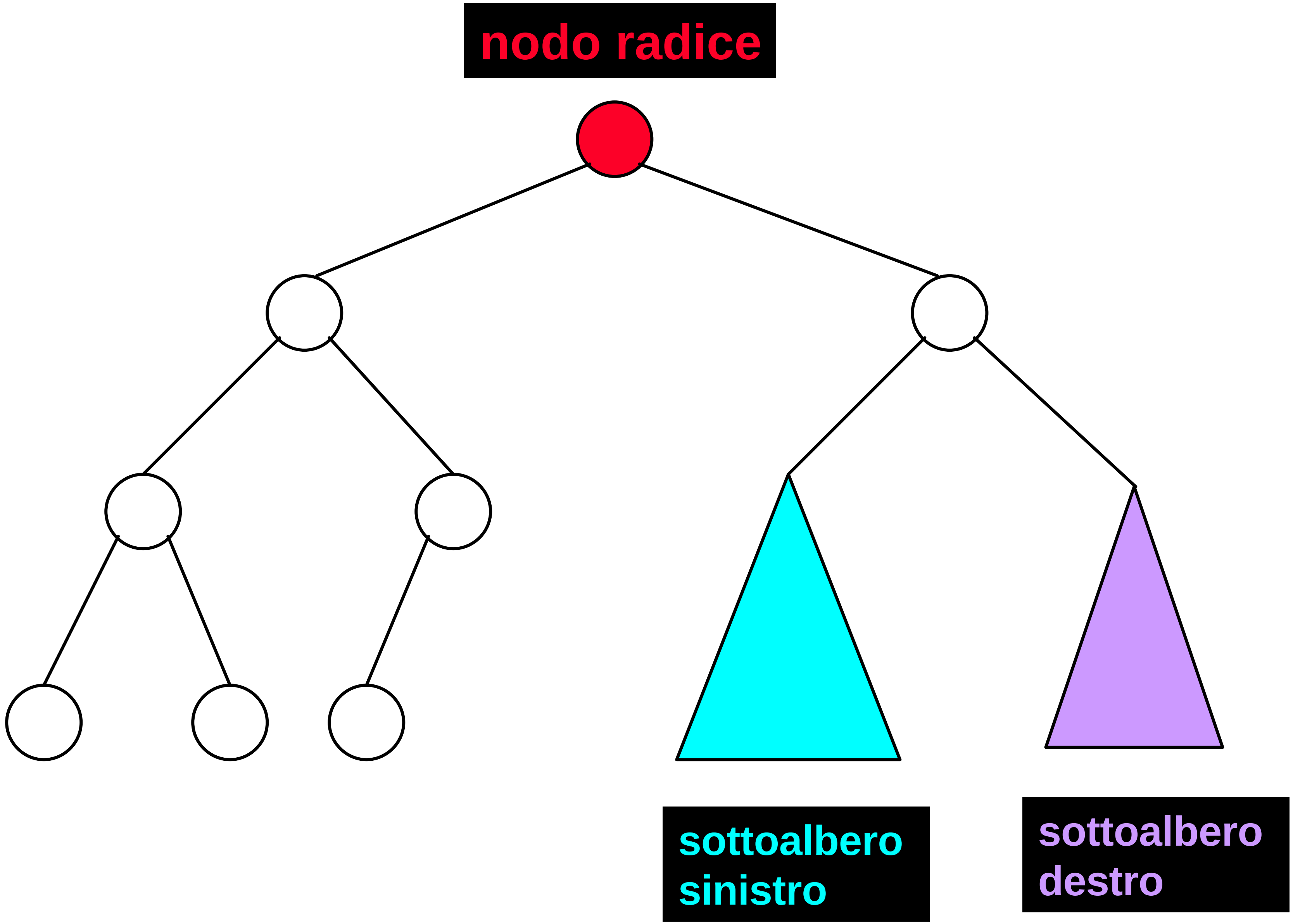
Alberi binari



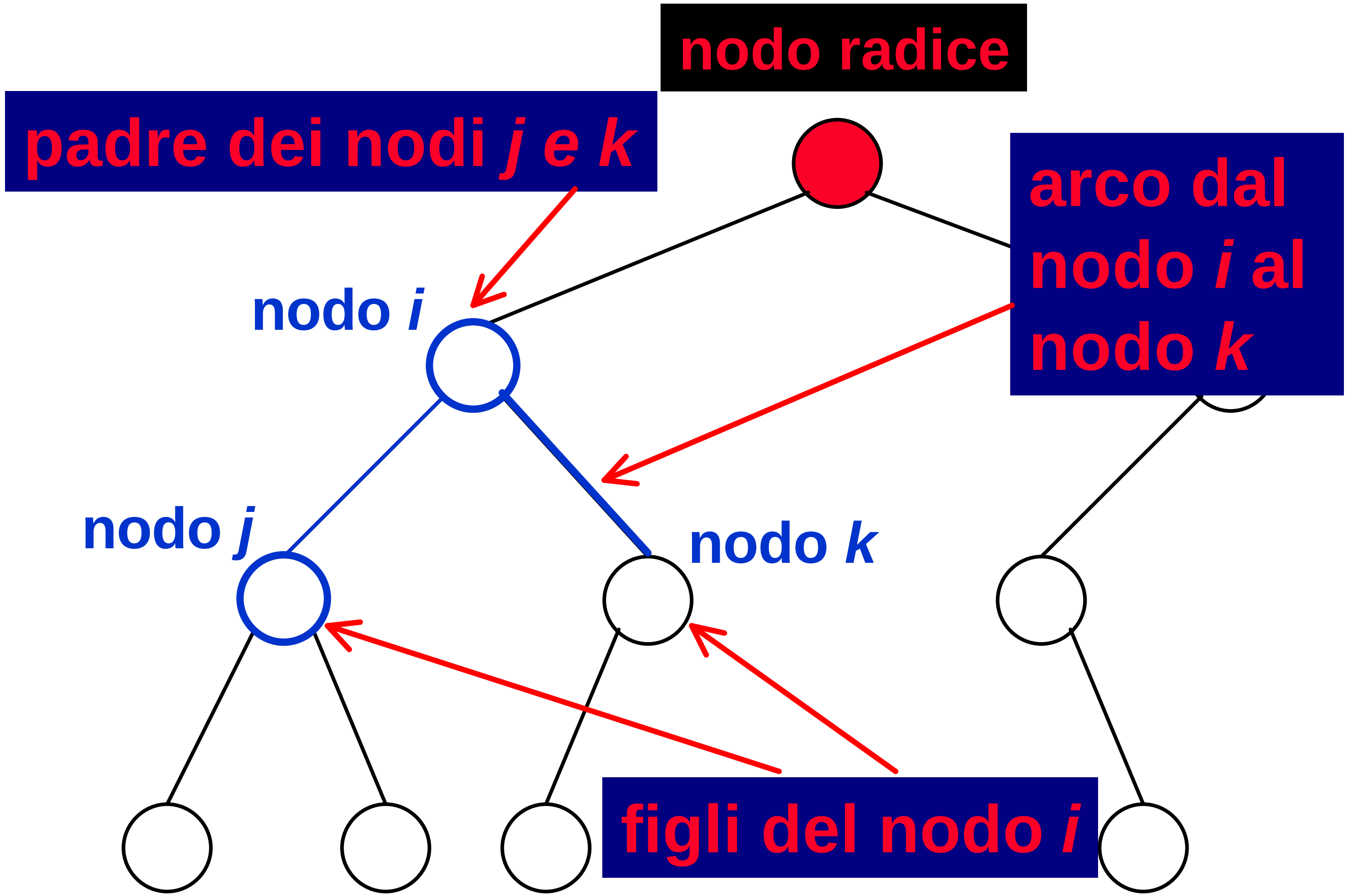
Alberi binari



Alberi binari



Alberi binari



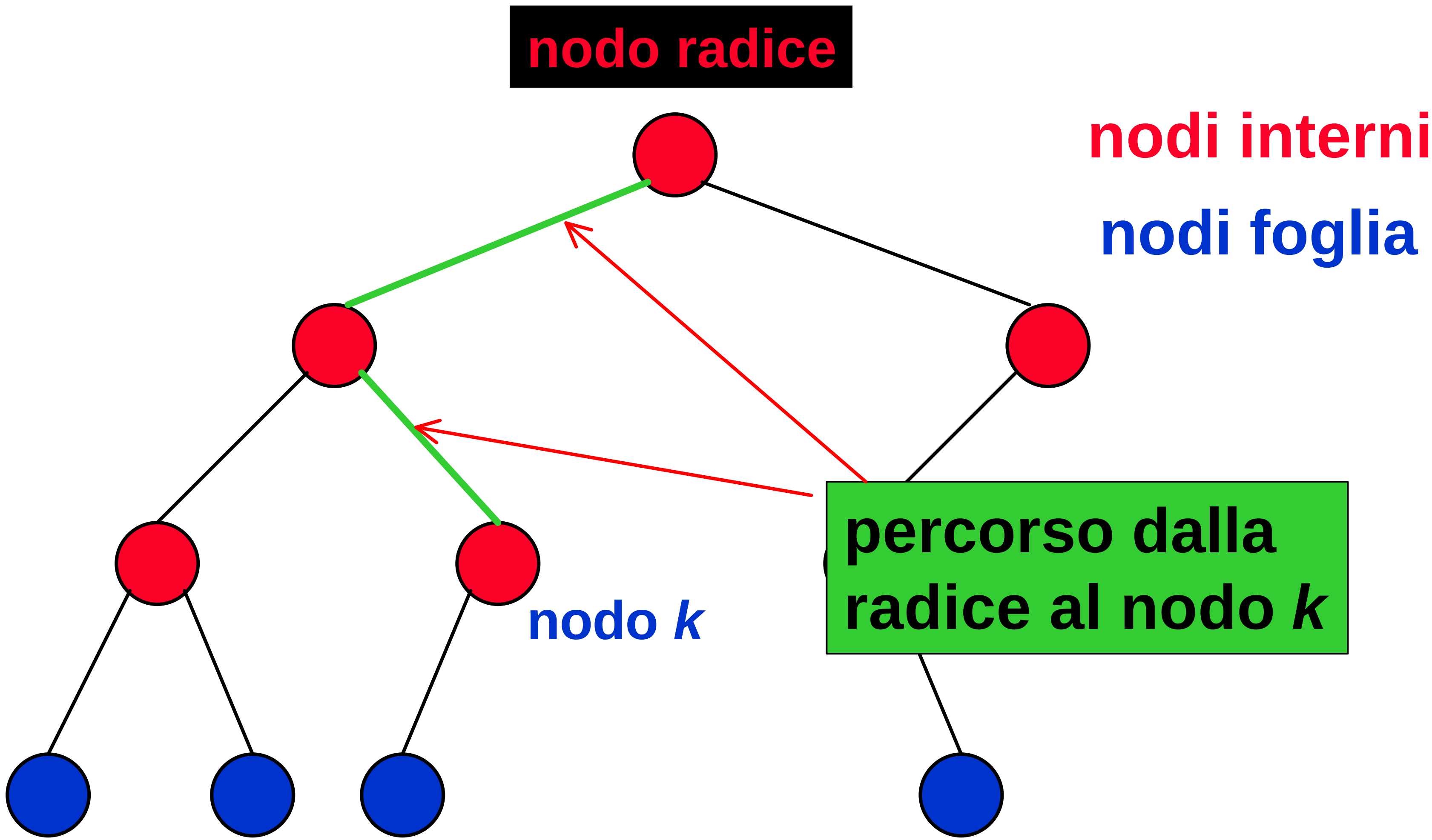
Alberi binari

- **In nodo di un albero binario si dice *nodo foglia* (o solo *foglia*) se non ha *figli* (cioè se entrambi i sottoalberi di cui è radice sono vuoti)**

- **Un nodo si dice *nodo interno* se ha *almeno un figlio***

- **Un *percorso* dal *nodo i* al *nodo j* è la *sequenza di archi* che devono essere attraversati per raggiungere il *nodo j* dal *nodo i***

Alberi binari



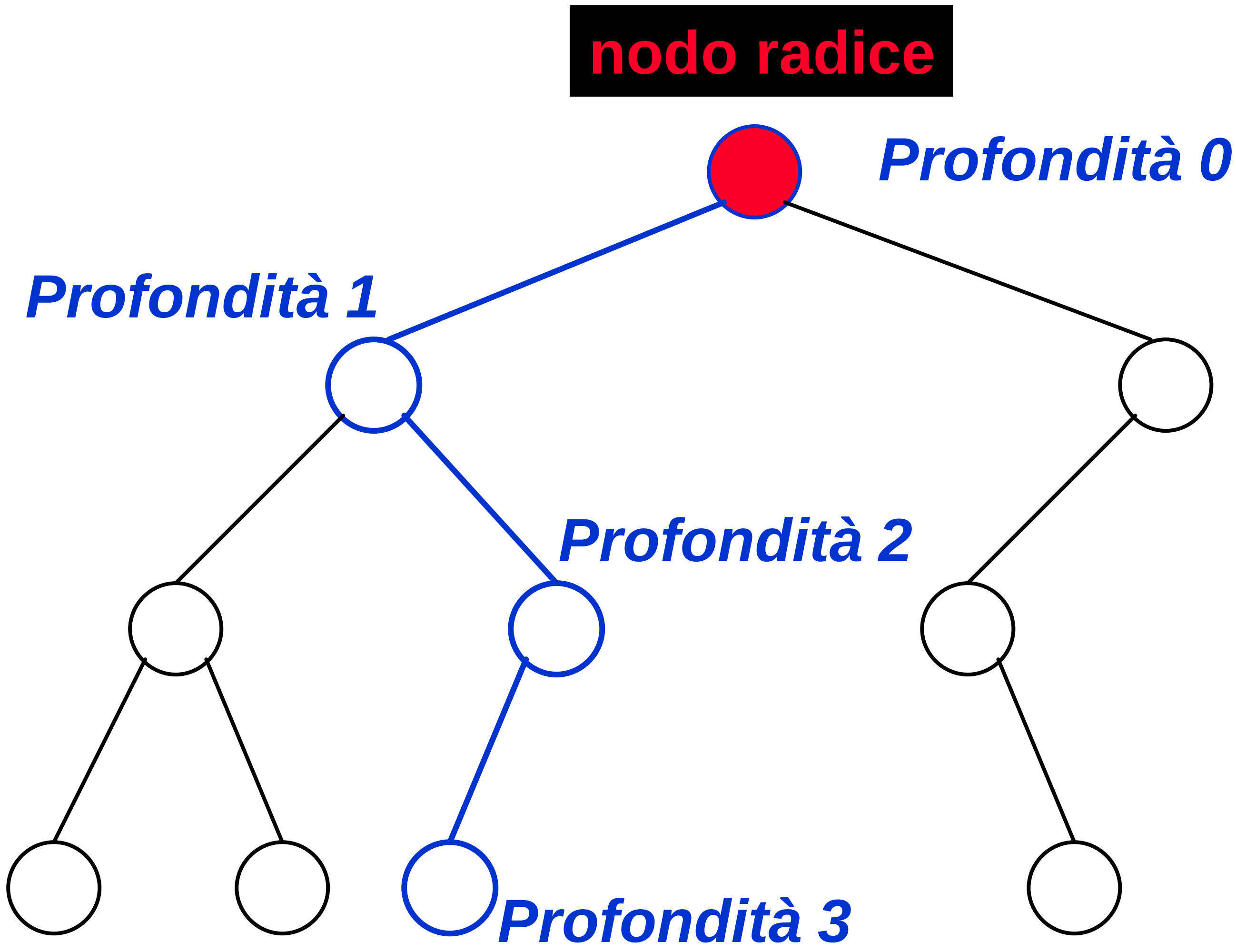
Alberi binari

- **In un *albero binario* la *profondità* di un *nodo* è la *lunghezza del percorso* dalla *radice* al *nodo* (cioè il numero di archi tra la radice e il nodo)**

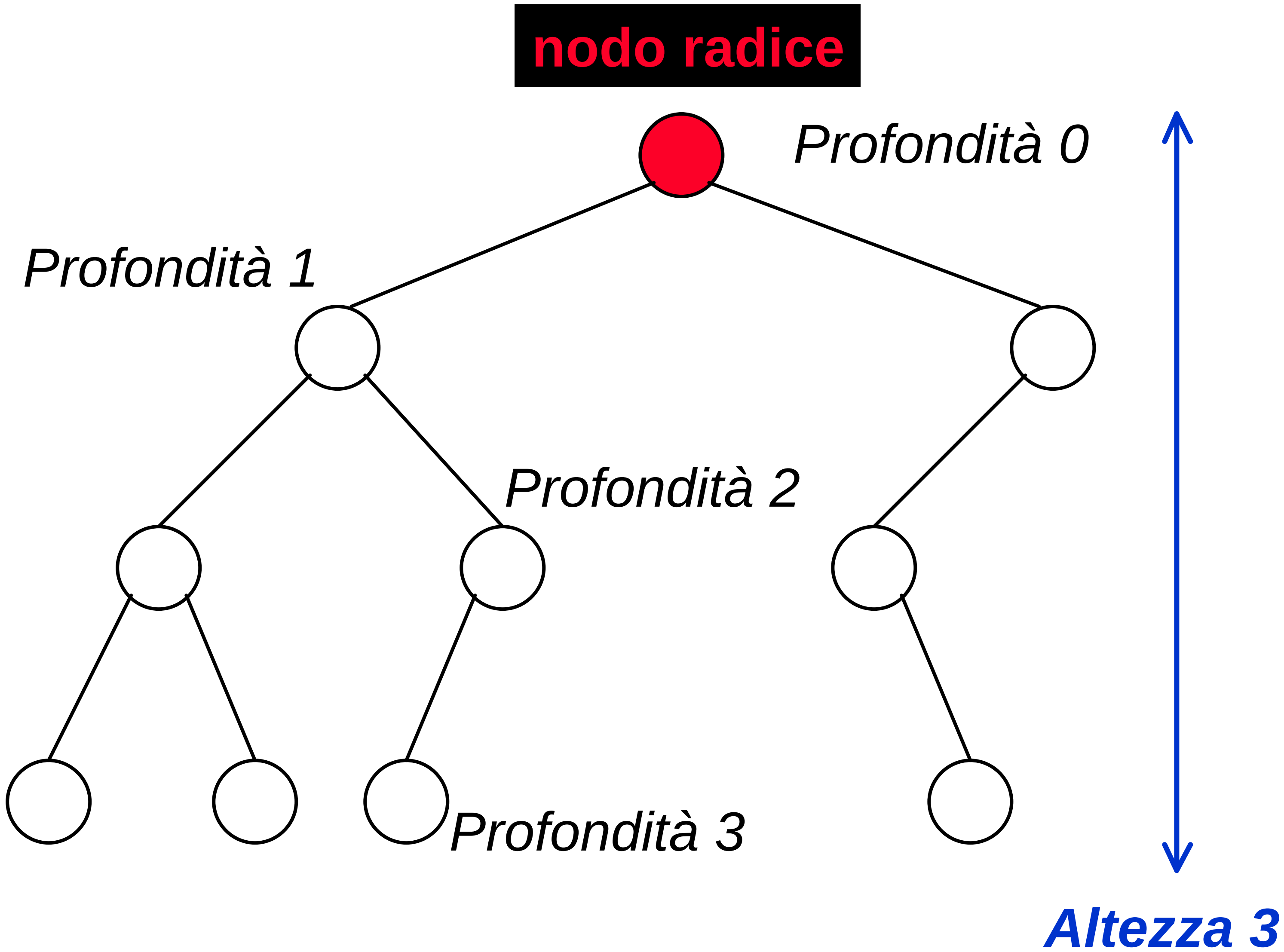
- **La *profondità massima* di un *nodo* all'interno di un albero è l'*altezza dell'albero*.**

- **Il *grado* di un *nodo* è il *numero di figli* di quel nodo.**

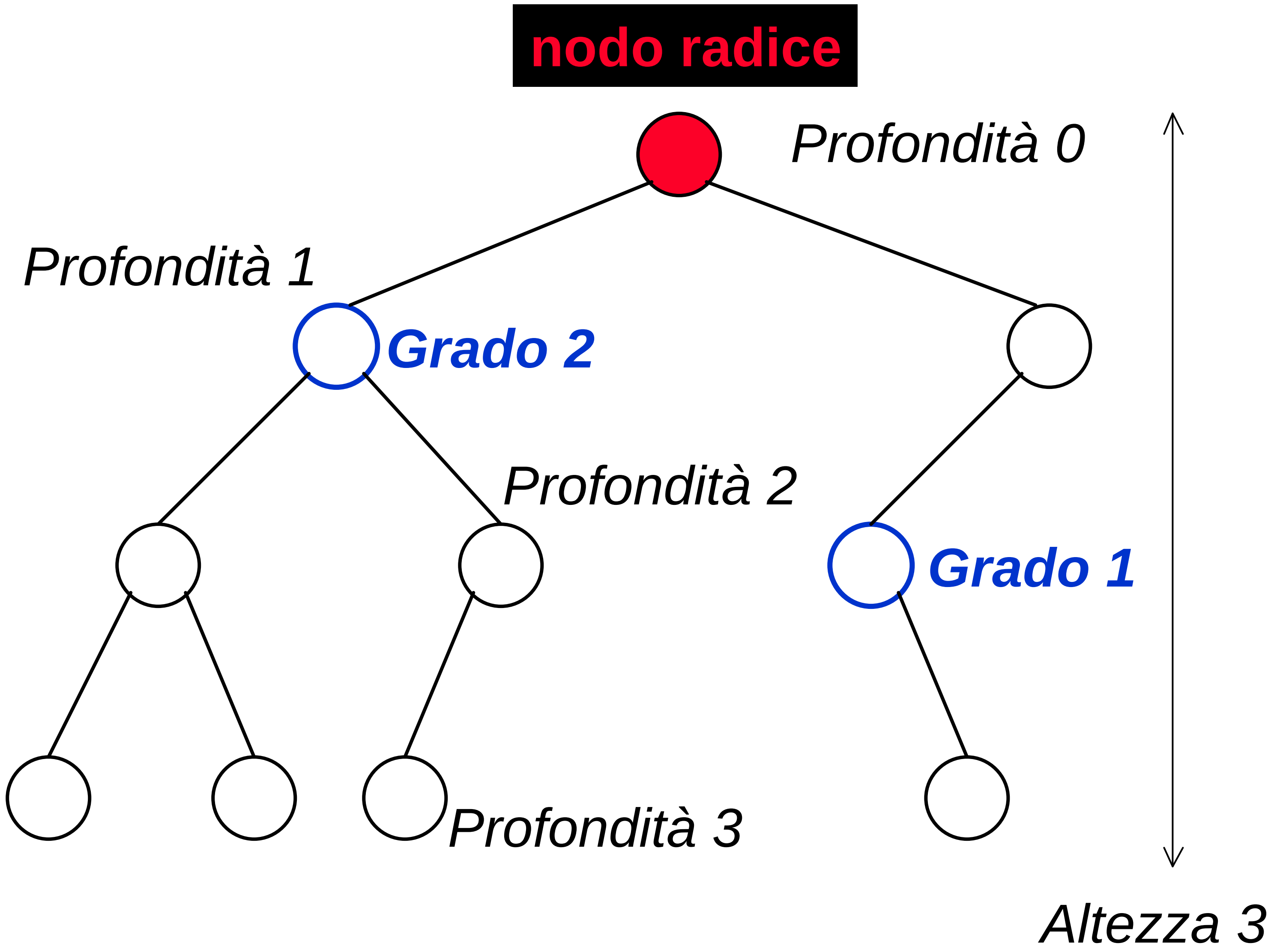
Alberi binari



Alberi binari



Alberi binari



Albero binaro pieno

Un *albero binario* si dice *pieno* se

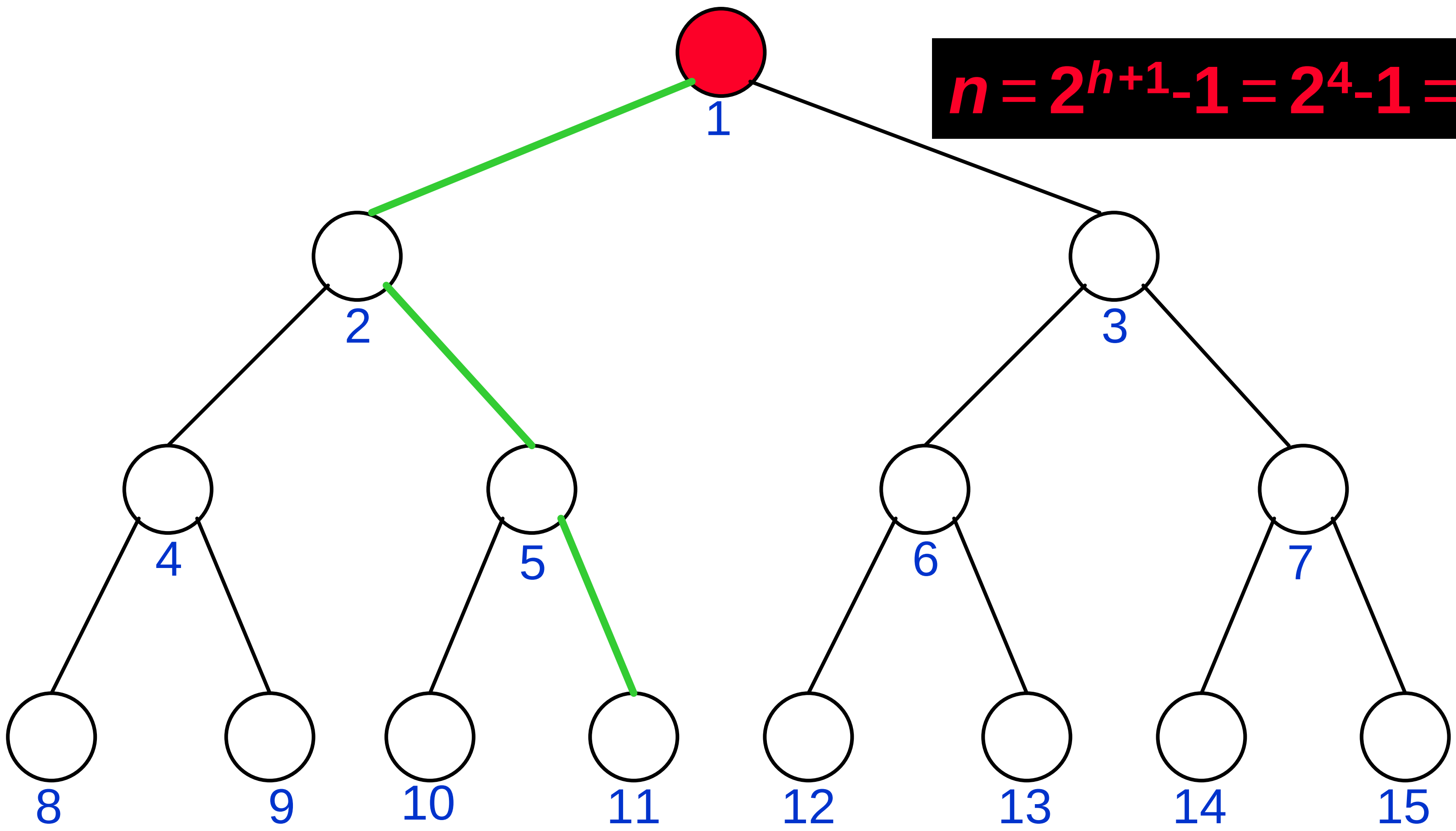
❶ tutte le *foglie* hanno la stessa *profondità h*

❷ tutti i *nodi interni* hanno *grado* 2

- **Un albero pieno con *n nodi* ha altezza esattamente $\lfloor \log_2 n \rfloor$.**

- **Un albero pieno di altezza *h* ha esattamente $2^{h+1}-1$ *nodi*.**

Albero binaro pieno



$$n = 2^{h+1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

n = **15** e ***altezza*** $h = \lfloor \log_2 n \rfloor = 3$

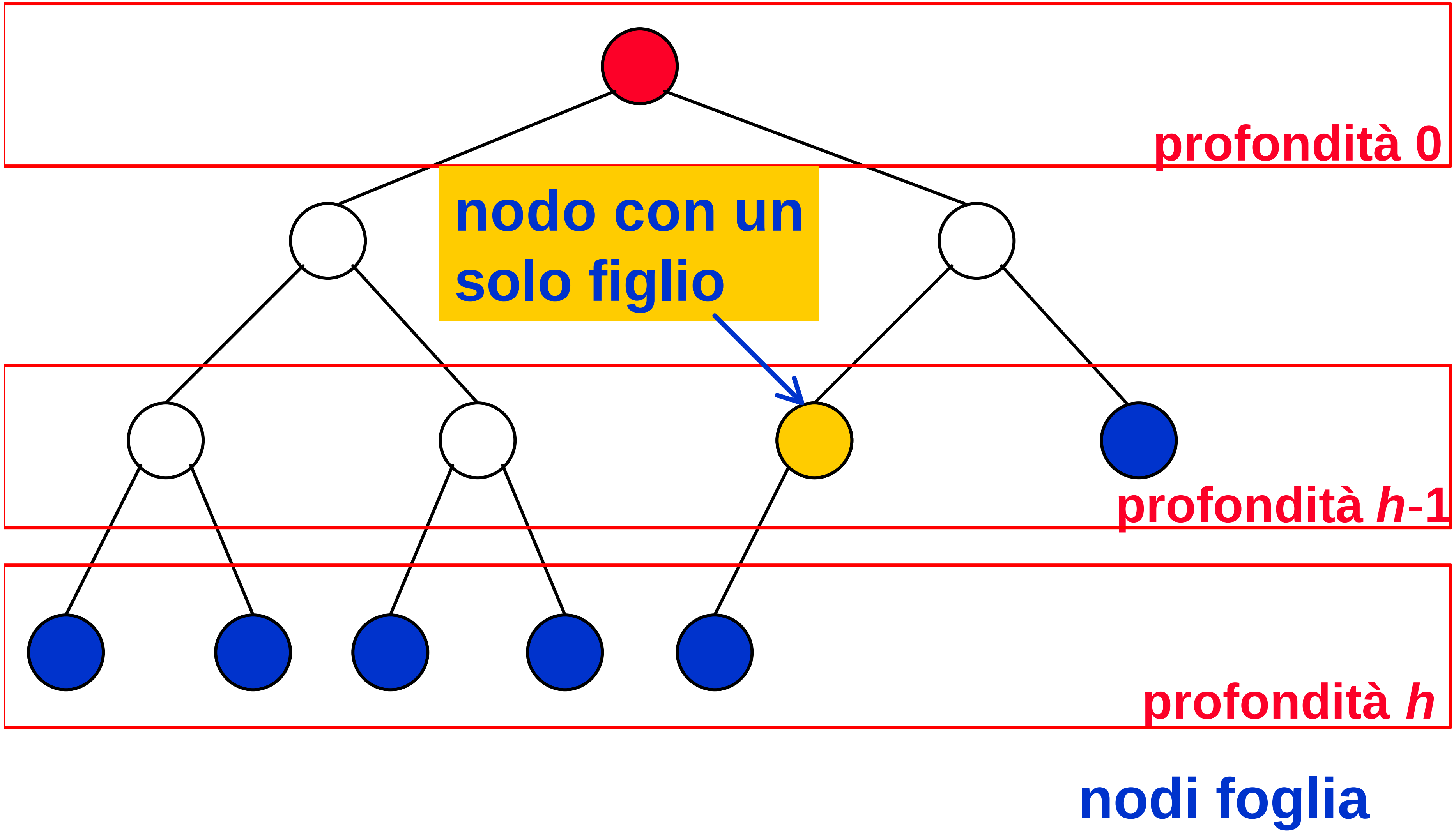
Albero binaro completo

Un *albero binario* si dice *completo* se

- **tutte le *foglie* hanno *profondità h* o *h-1*, dove *h* è l'*altezza dell'albero***

- **tutti i *nodi interni* hanno *grado 2*, eccetto al più uno.**

Albero binario completo



Proprietà di uno Heap

Un *Albero Heap* è un *albero binario* tale che per ogni nodo *i*:

- **tutte le *foglie* hanno *profondità h* o *h-1*, dove *h* è l'*altezza dell'albero*;**
- **tutti i *nodi interni* hanno *grado 2*, eccetto al più uno;**
- **entrambi i *nodi j* e *k* figli di *i* sono *NON maggiori* di *i*.**

Condizioni **1** e **2** definiscono la **forma dell'albero**

Proprietà di uno Heap

Un *Albero Heap* è un *albero binario* tale che per ogni nodo *i*:

- **tutte le *foglie* hanno *profondità h* o *h-1*, dove *h* è l'*altezza dell'albero*;**
- **tutti i *nodi interni* hanno *grado 2*, eccetto al più uno;**
- **entrambi i *nodi j* e *k* figli di *i* sono *NON maggiori* di *i*.**

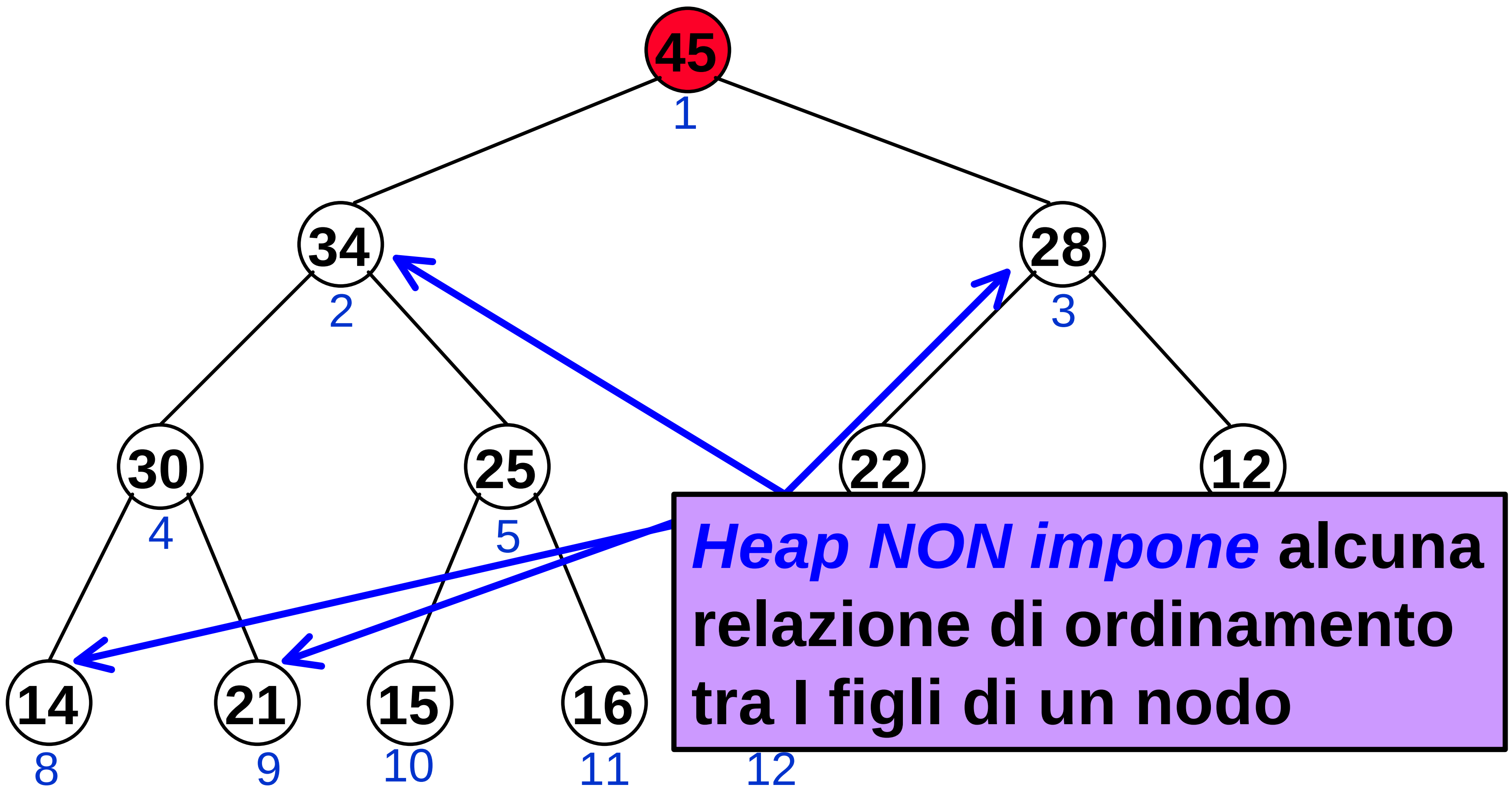
Condizione **3** definisce l'**etichettatura dell'albero**

Proprietà di uno Heap

Un *Albero Heap* è un *albero binario completo* tale che per ogni nodo *i*:

- **entrambi i *nodi j* e *k* figli di *i* sono *NON maggiori* di *i*.**

Heap


45
1
34
2
28
3
30
4
25
5
22
12
14
8
21
9
15
10
16
11
12
Heap NON impone **alcuna relazione di ordinamento tra I figli di un nodo**

Heap e Ordinamenti Parziali

Un *Albero Heap* è un *albero binario completo* tale che per ogni nodo *i*:

- **entrambi i nodi *j* e *k* figli di *i* sono *NON* maggiori di *i*.**

Uno *Heap* rappresenta un *Ordiamento Parziale*

Heap e Ordinamenti Parziali

Un *Ordinamento Parziale* è una relazione tra elementi di un insieme che è:

- ***Riflessiva*: *x* è in relazione con se stesso**
- ***Anti-simmetrica*: se *x* è in relazione con *y* e *y* è in relazione con *x* allora $x = y$**
- ***Transitiva*: se *x* è in relazione con *y* e *y* è in relazione con *z* allora *x* è in relazione con *z***

Esempi:

- **le relazioni £ e ³**
- **le relazioni > , <   NON sono ordinamenti parziali**

Heap e Ordinamenti Parziali

Gli *Ordinamenti Parziali* possono essere usati per modellare, ad esempio, gerarchie con *informazione incompleta* o *elementi con uguali valori.*

L'ordinamento parziale definito da uno *Heap* è una nozione *più debole* di un *ordinamento totale*, infatti uno *Heap*

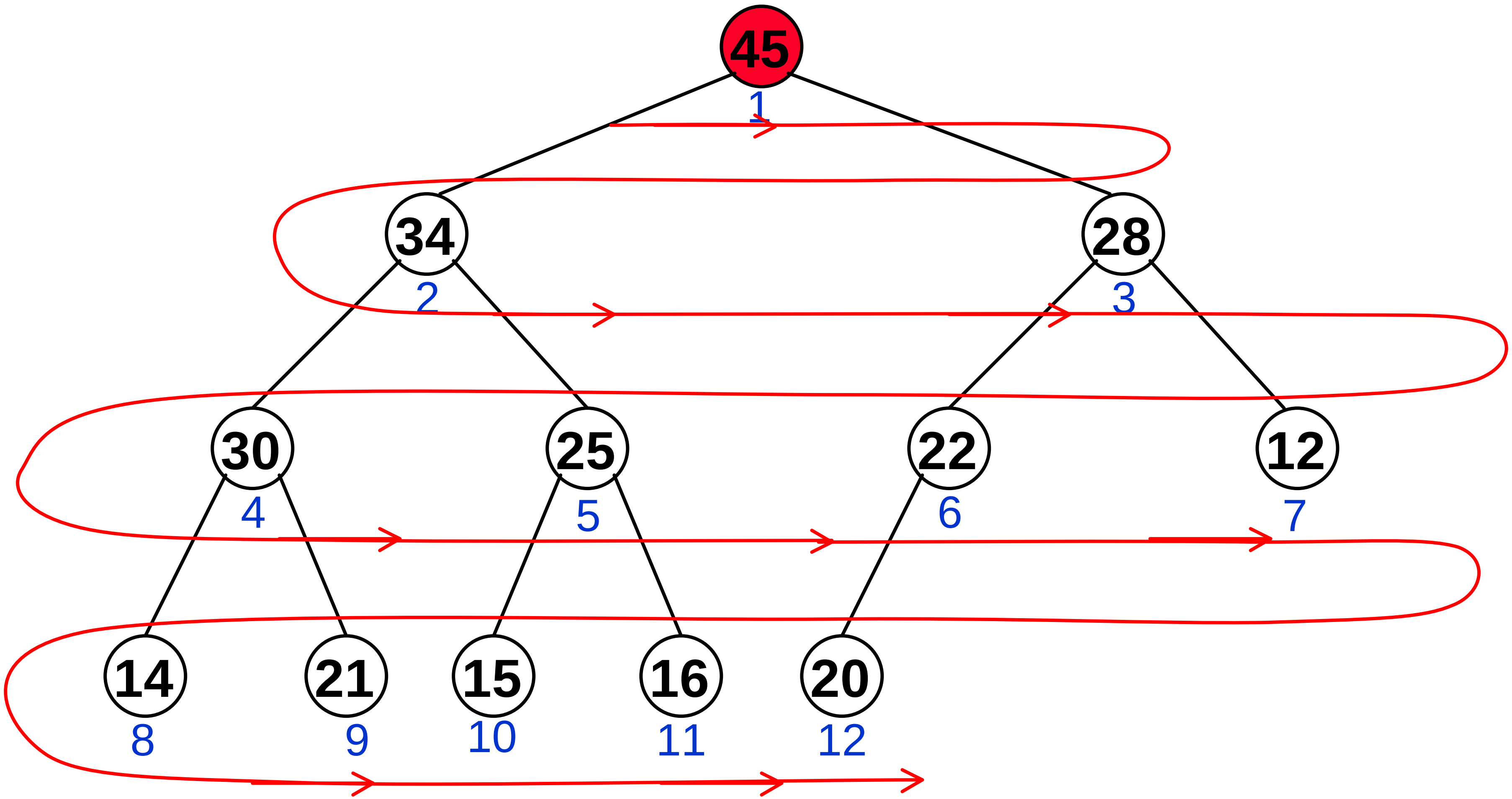
- **è più semplice da costruire**
- **è molto utile ma meno dell'ordinamento totale**

Implementazione di uno Heap

Uno *Heap* può essere implementato in vari modi:

- **come un albero a puntatori**
- **come un array**
- **....**

Heap: da albero ad array



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

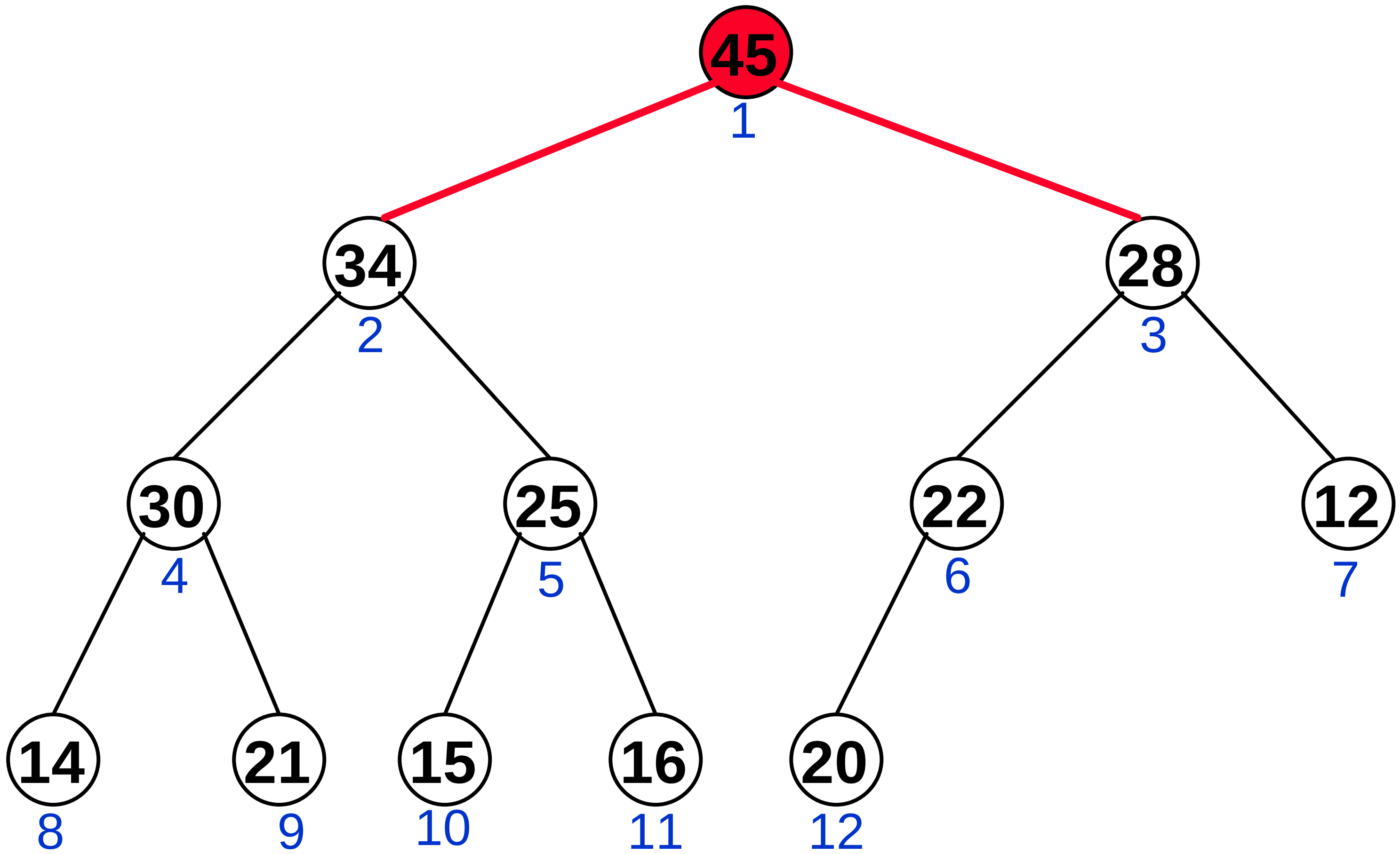
Heap: da albero ad array

Uno *Heap* può essere implementato come un array *A* in cui:

- **la radice dello *Heap* sta nella posizione *A*[0] dell'array**
- **se il nodo *i* dello *Heap* sta nella posizione *i* dell'array (cioè *A*[*i*]),**
  - **il figlio sinistro di *i* sta nella posizione 2*i***
  - **il figlio destro di *i* sta nella posizione 2*i*+1**

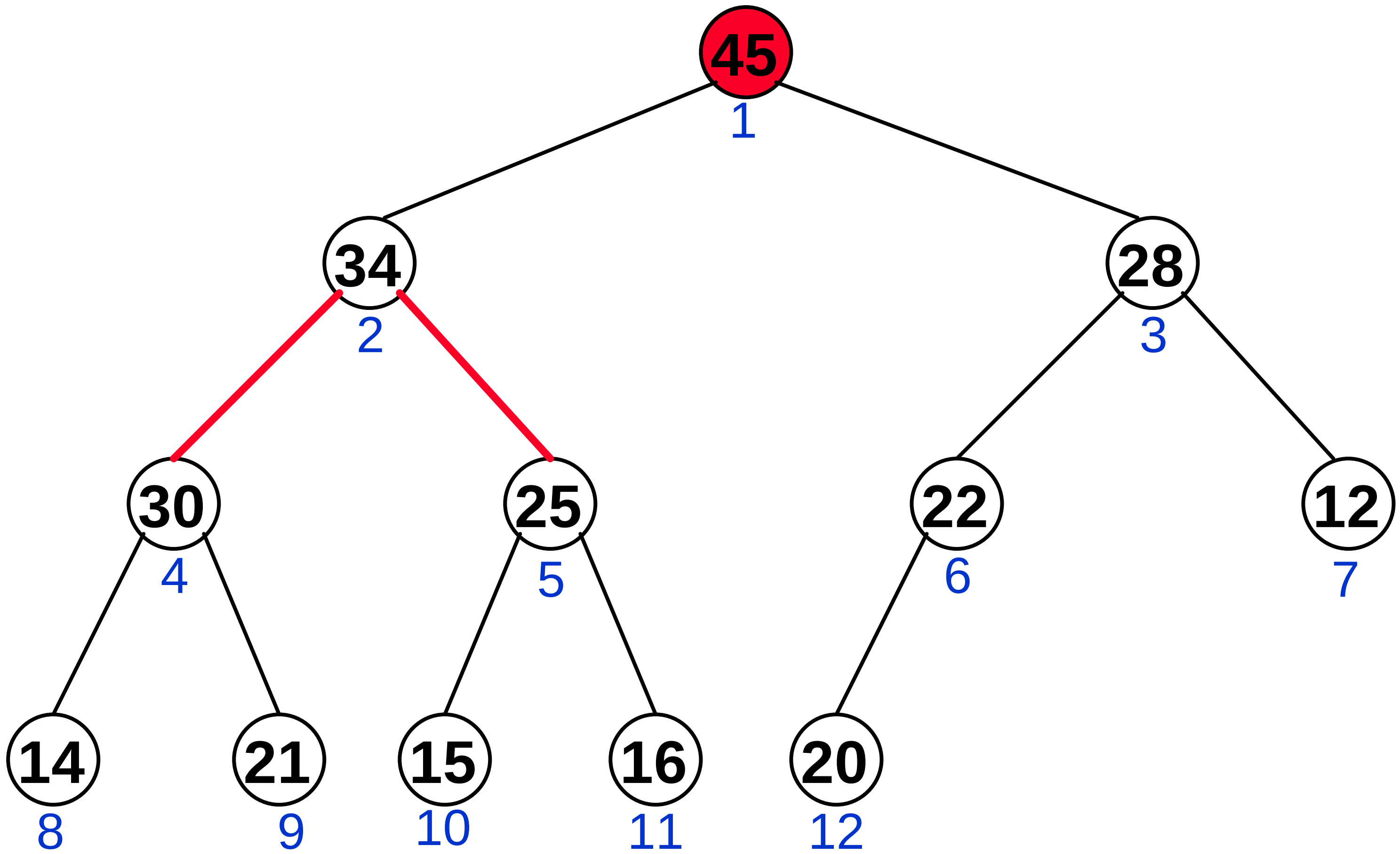
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Heap: da albero ad array



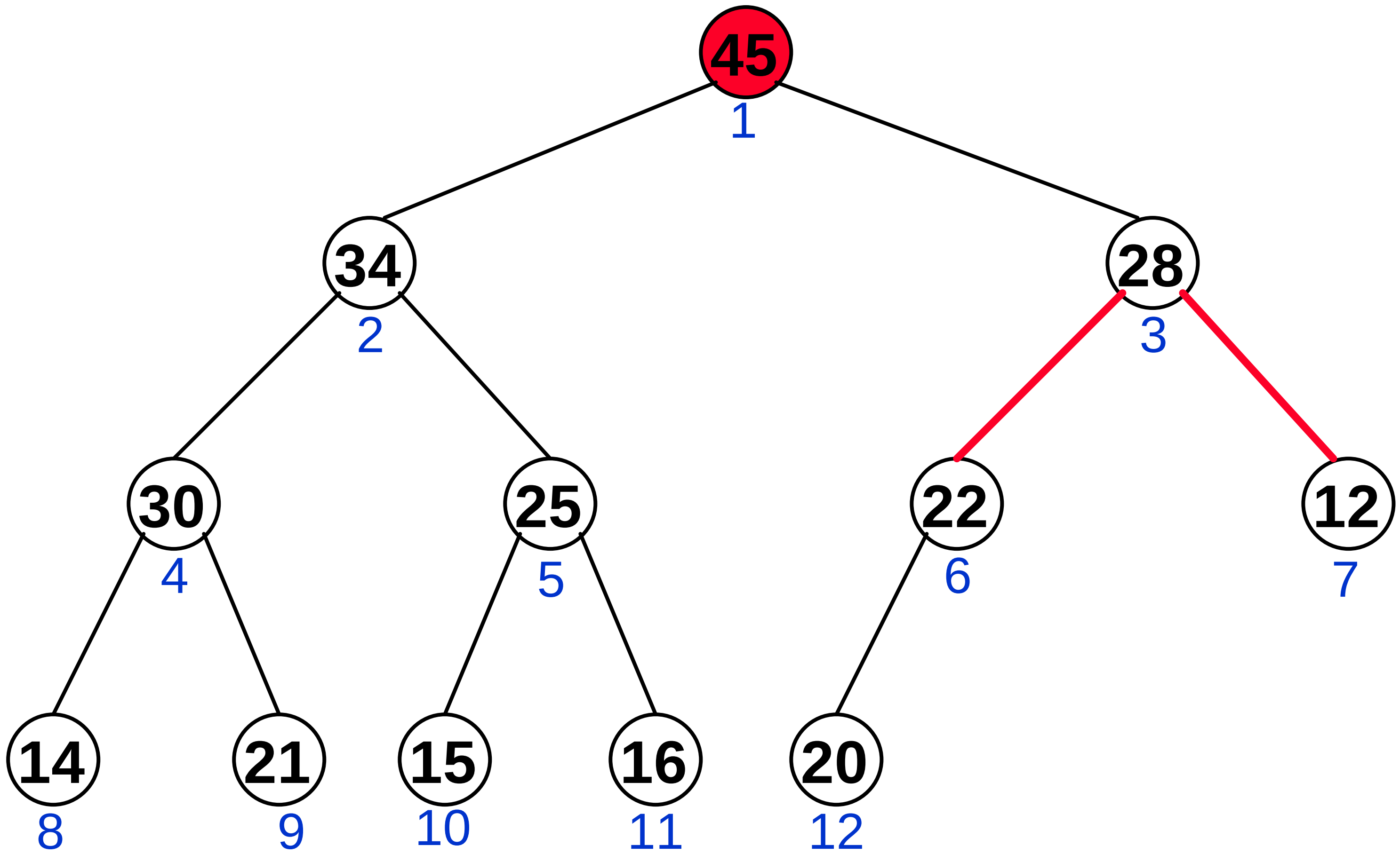
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Heap: da albero ad array



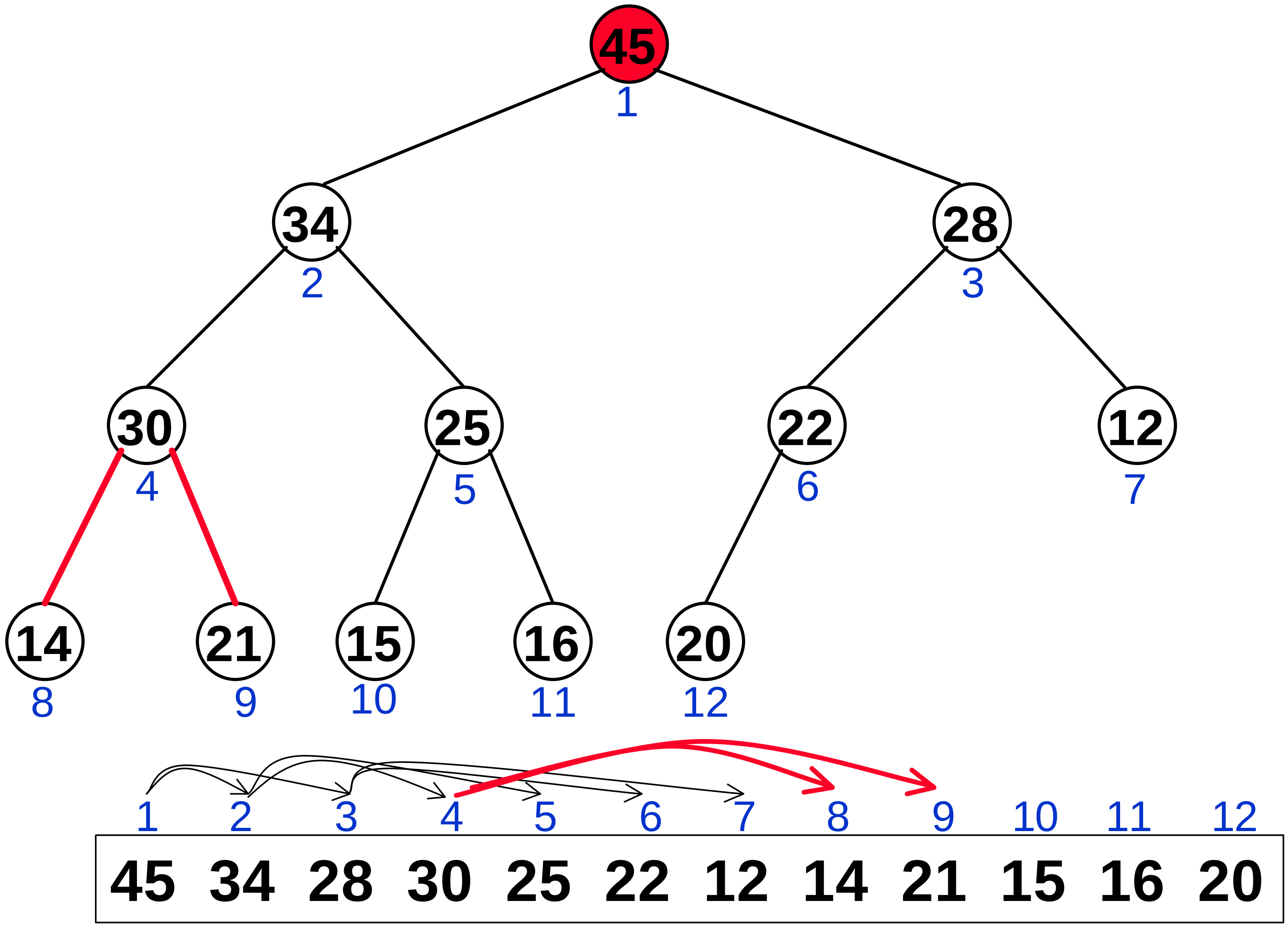
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Heap: da albero ad array

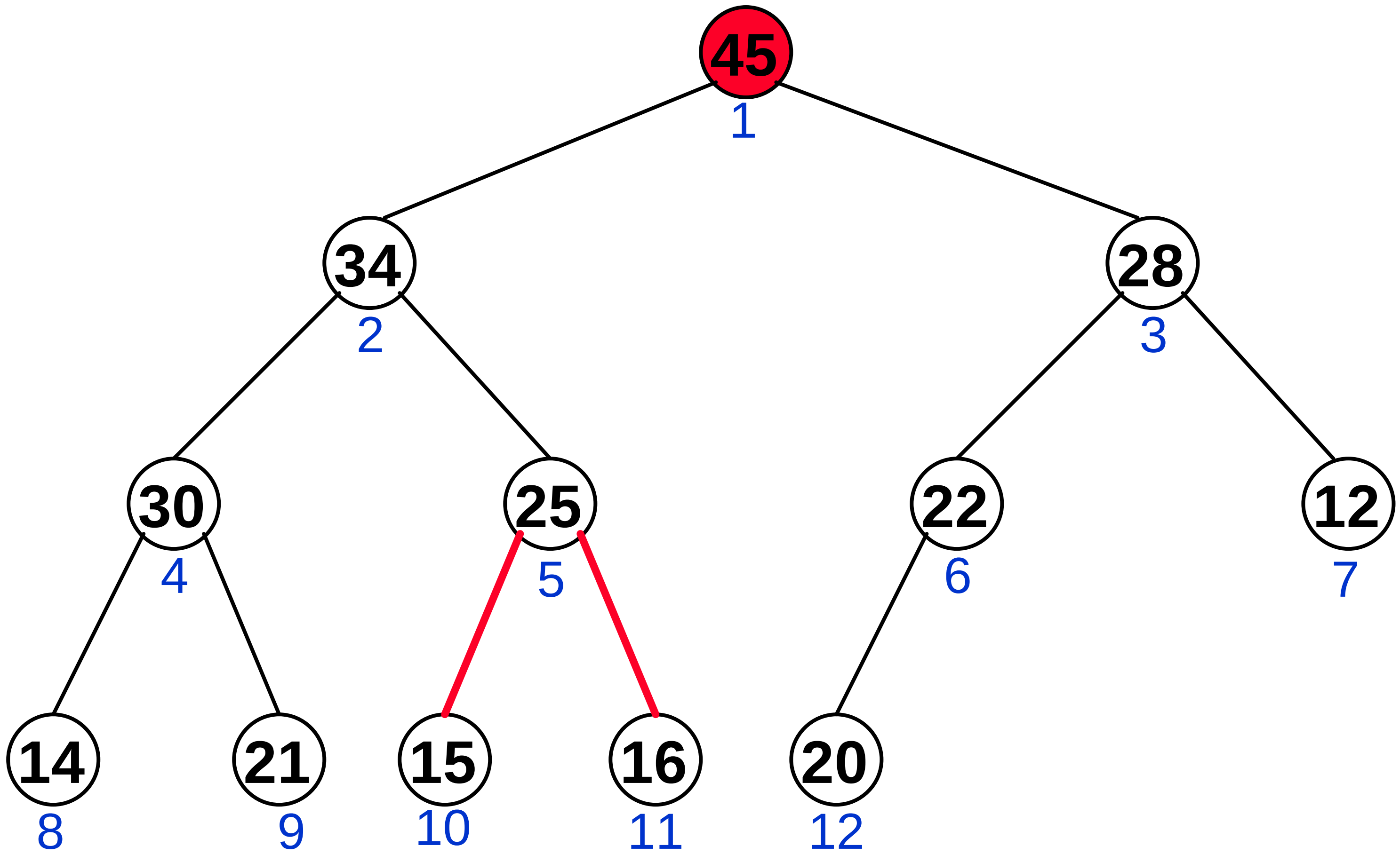


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Heap: da albero ad array

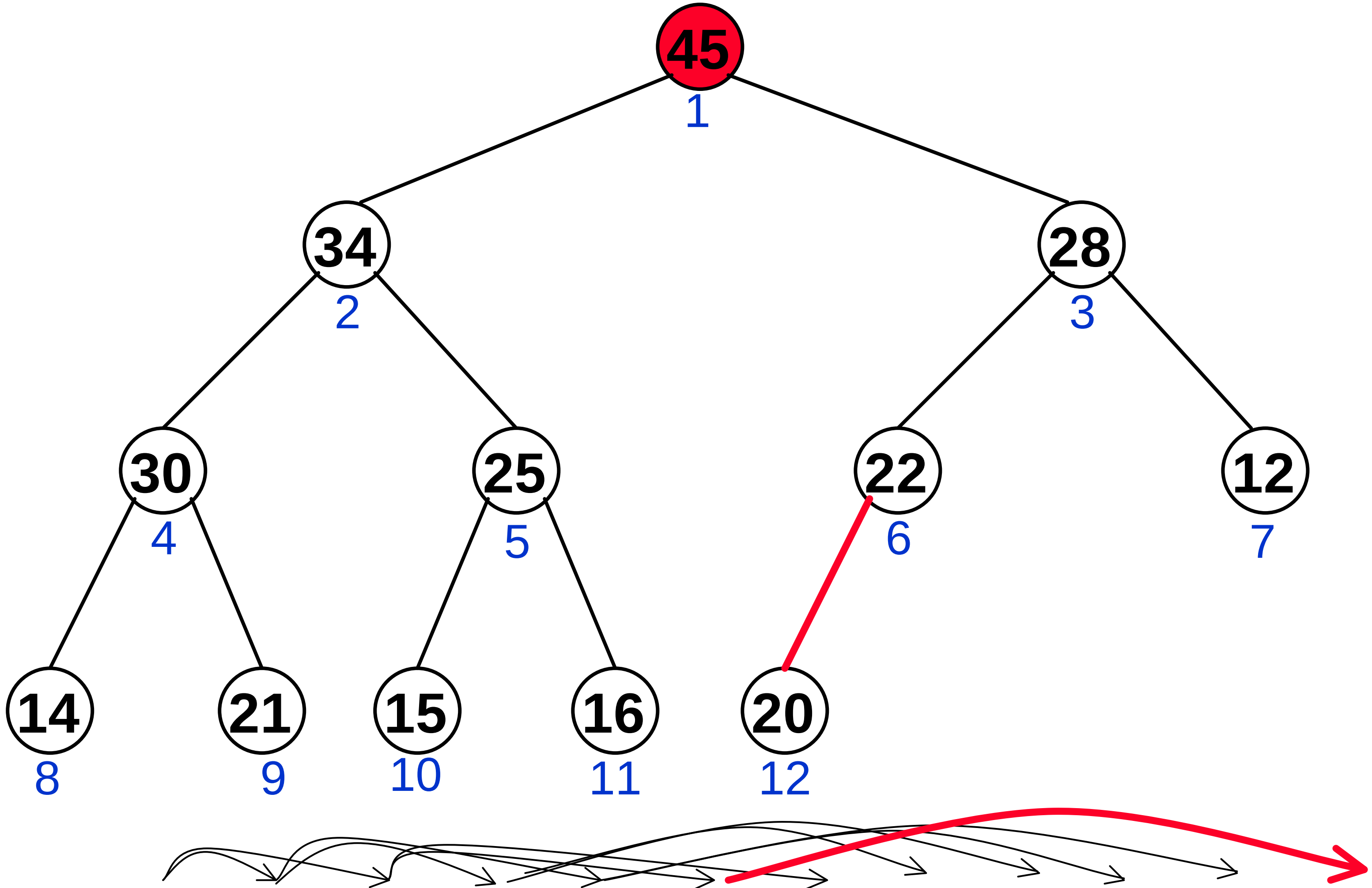


Heap: da albero ad array



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Heap: da albero ad array



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Proprietà di uno Heap

Un *Albero Heap* è un *albero binario completo* tale che per ogni nodo *i*:

- **entrambi i nodi *j* e *k* figli di *i* sono NON maggiori di *i.***

Un *array A* è uno *Heap* se

$$A[i]^{3}\ A[2i] \quad \text{e} \quad A[i]^{3}\ A[2i+1]$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Operazioni elementari su uno Heap

```
SINISTRO(i)
    return 2i

DESTRO(i)
    return 2i + 1

PADRE(i)
    return ⌊i/2⌋
```

heapsize[A] $\le$ ***n*** **è la lunghezza dello *Heap***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	**34**	**28**	**30**	**25**	**22**	**12**	**14**	**21**	**15**	**16**	**20**

Operazioni su uno Heap

- **`Heapify(`*`A`*`,`*`i`*`)`**: ripristina la proprietà di **Heap** al sottoalbero radicato in ***i*** assumendo che i suoi sottoalberi destro e sinistro siano già degli **Heap**

- **`Costruisci-Heap(`*`A`*`)`**: produce uno **Heap** a partire dall'array ***A*** non ordinato

- **`HeapSort(`*`A`*`)`**: ordina l'array ***A*** sul posto.

Heapify: Intuizioni

`Heapify(A,i)`: dati due ***Heap*** ***H_1*** e ***H_2*** con radici **`SINISTRO(i)`** e **`DESTRO(i)`** e un nuovo elemento ***v*** in posizione **`A[i]`**

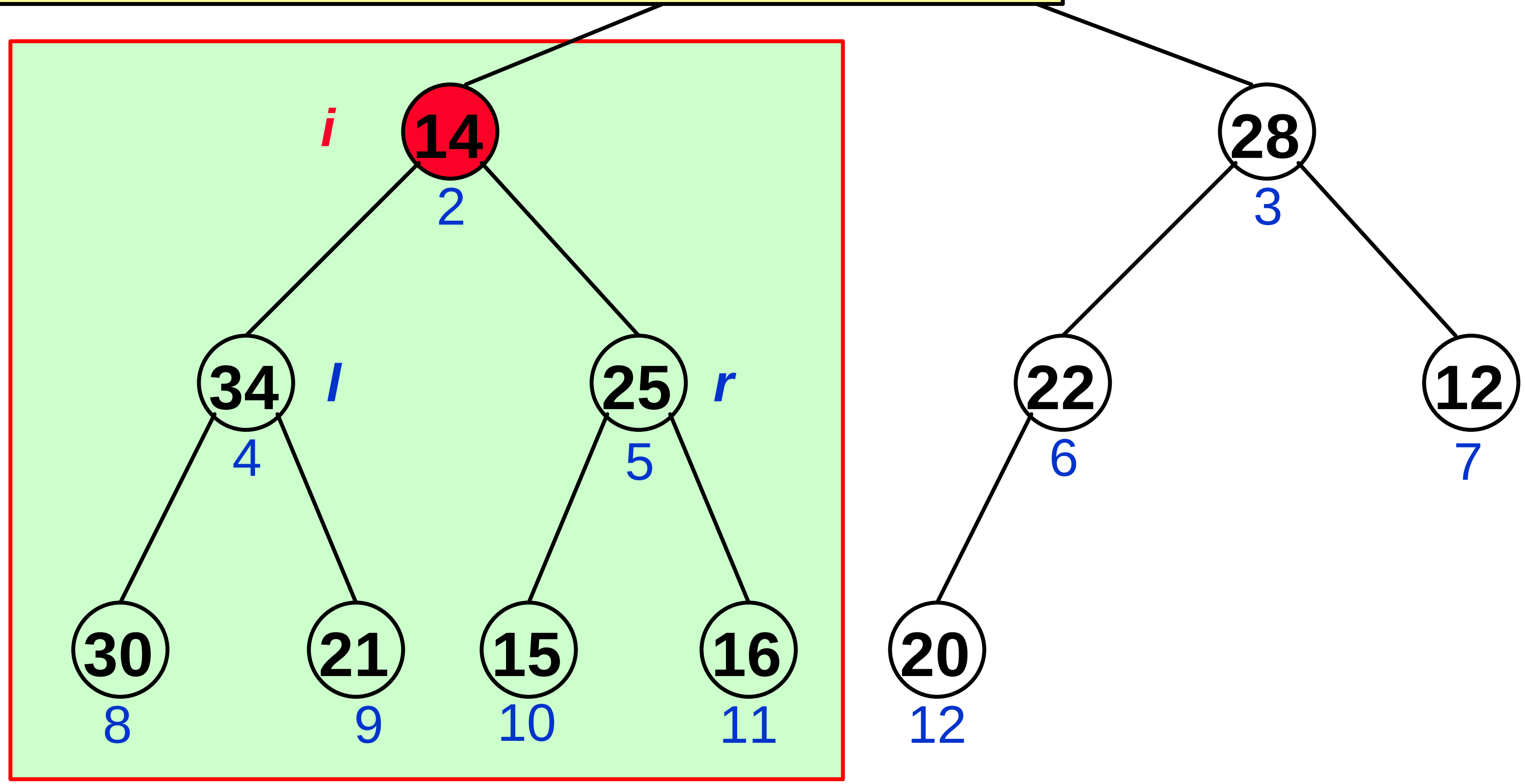
- se lo ***Heap H*** con radice **`A[i]=v`** ***viola*** la ***proprietà di Heap*** allora:
  - metti in **`A[i]`** la ***più grande*** tra le radici degli ***Heap H1*** e ***H2***
  - applica **`Heapify`** ricorsivamente al sottoalbero modificato (con radice **`A[2i]`** o **`A[2i+1]`**) e all'elemento ***v*** (ora in posizione **`A[2i]`** o **`A[2i+1]`**).

Algoritmo Heapify

```
Heapify(A,i)
    l = SINISTRO(i)
    r = DESTRO(i)
    IF l ≤ heapsize[A] AND A[l] > A[i]
        THEN maggiore = l
        ELSE maggiore = i
    IF r ≤ heapsize[A] AND A[r] > A[maggiore]
        THEN maggiore = r
    IF maggiore ≠ i
        THEN “scambia A[i] e A[maggiore]”
             Heapify(A,maggiore)
```

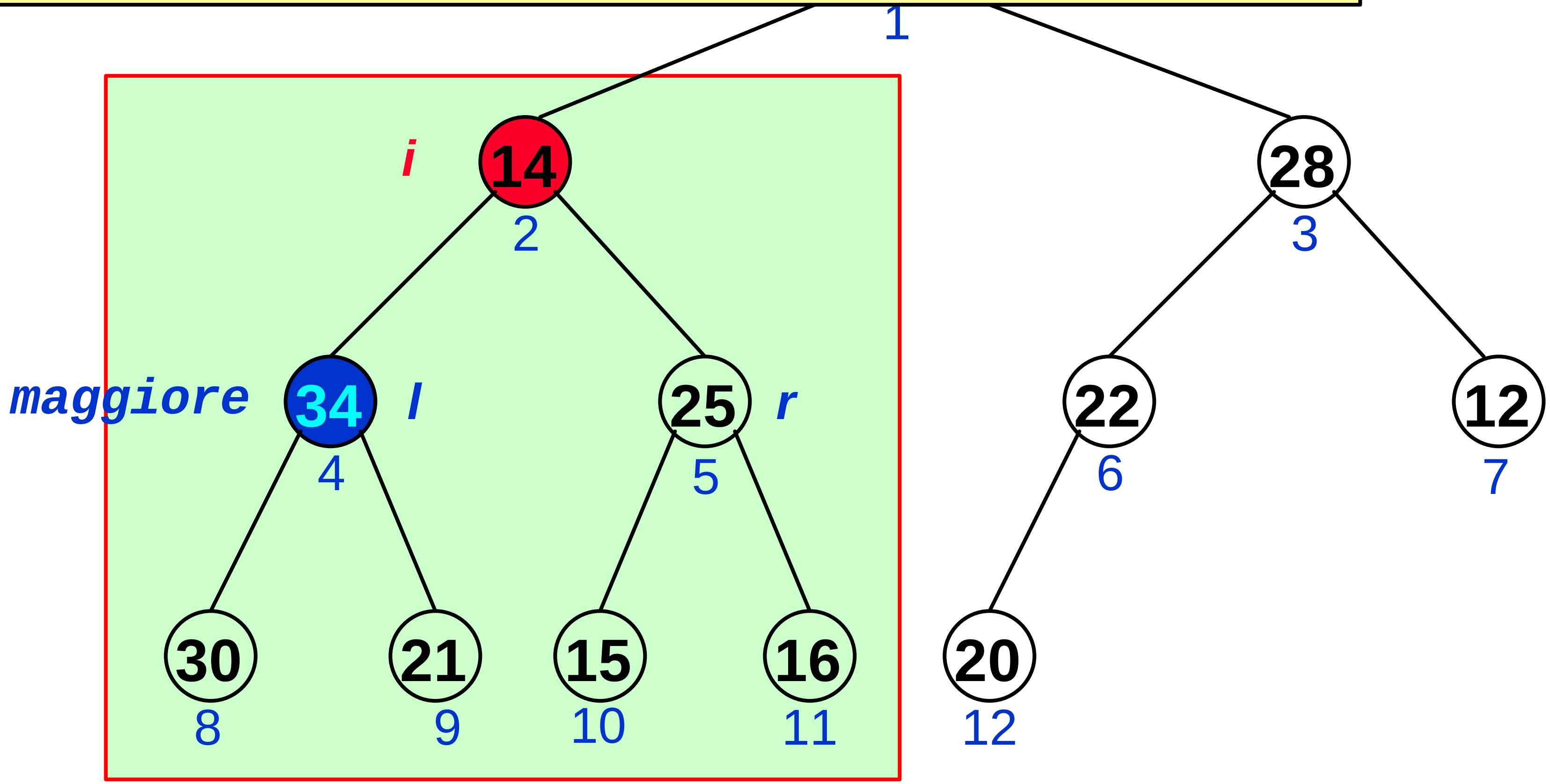
Heapify

```
…
IF l £ heapsize[A] AND A[l] > A[i]
      THEN maggiore = l
      ELSE maggiore = i
…
```



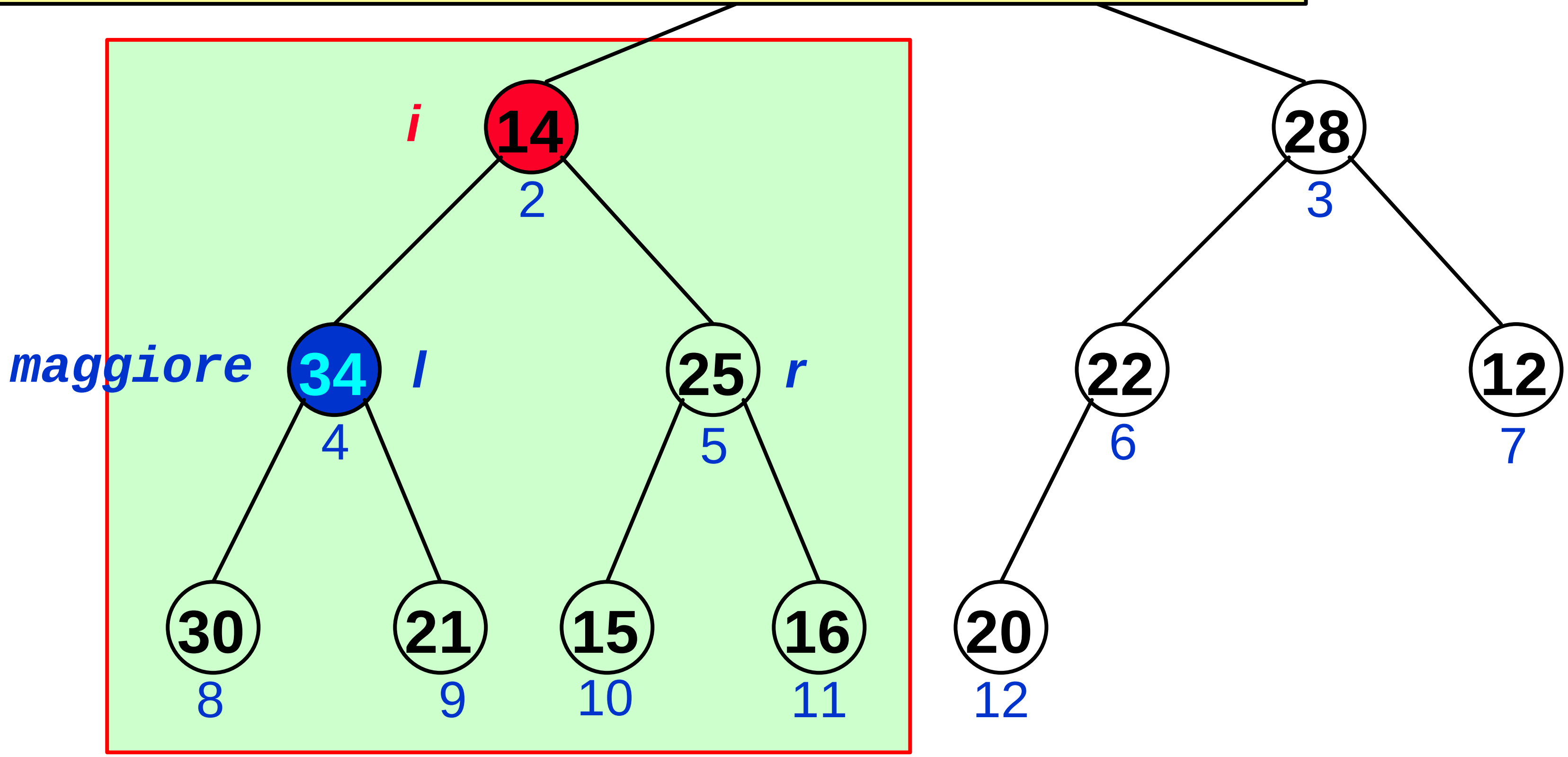
Heapify

```
…
IF r £ heapsize[A] AND A[r] > A[maggiore]
      THEN maggiore = r
…
```



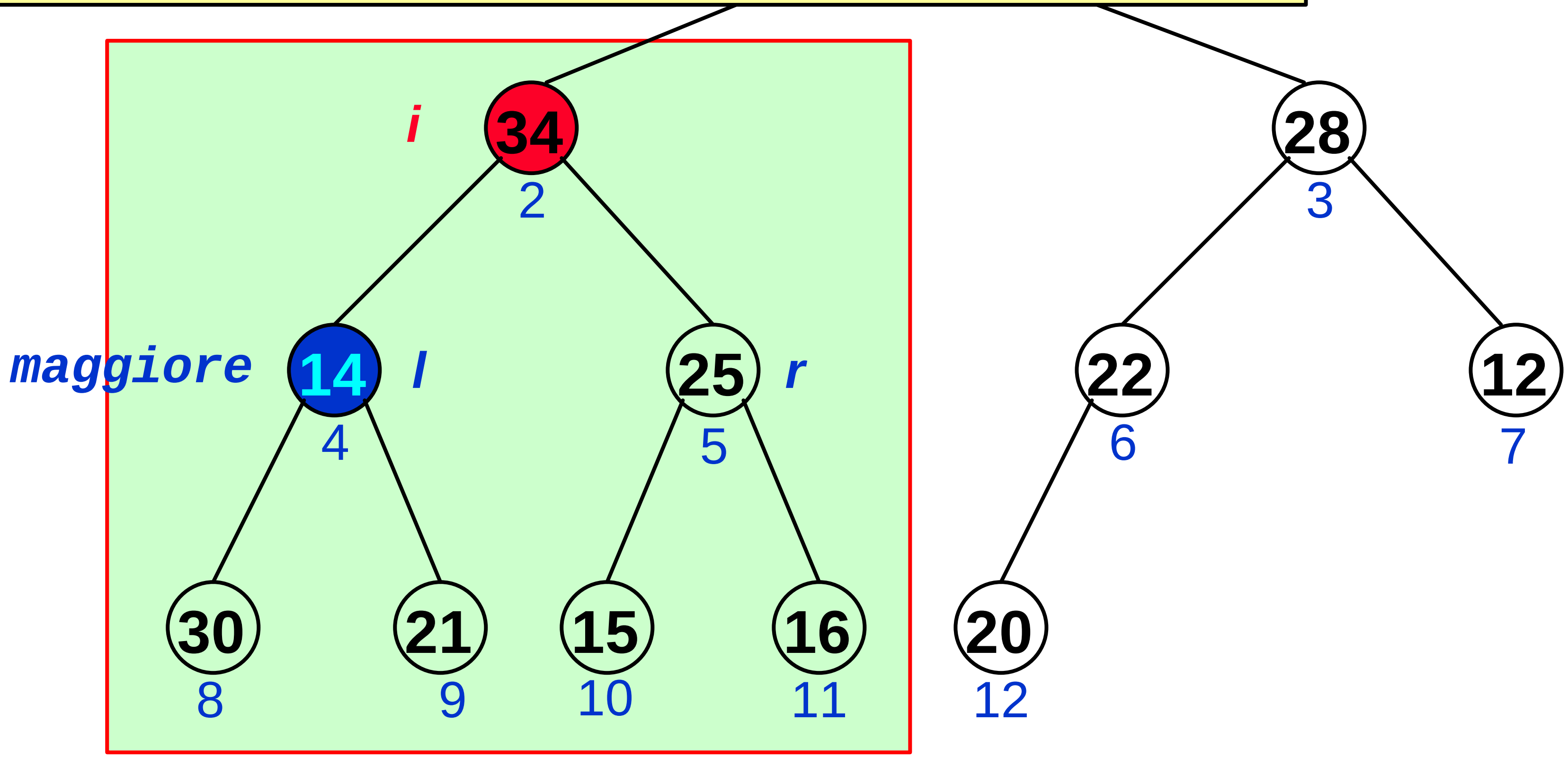
Heapify

```
…
IF maggiore ¹ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



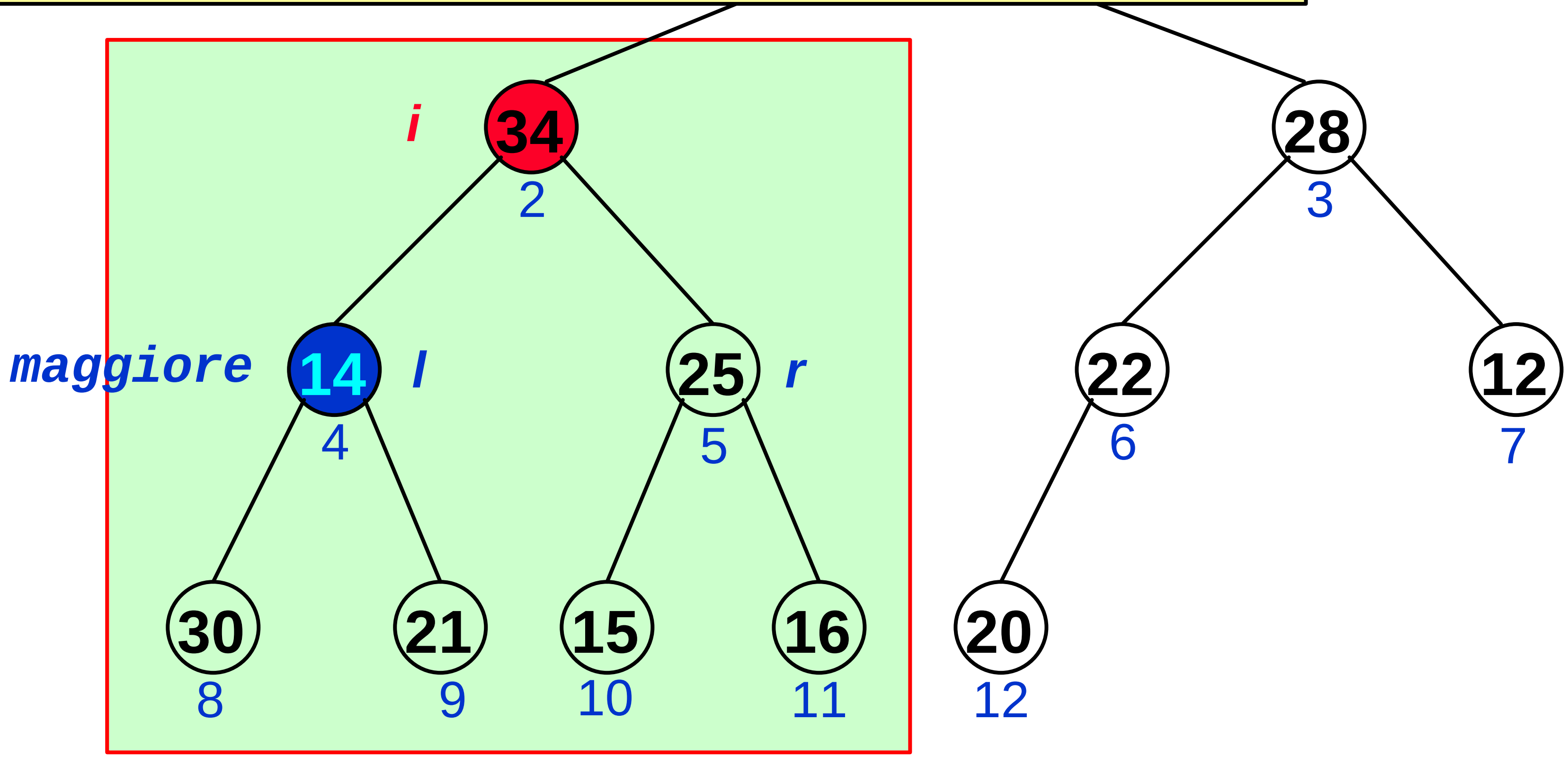
Heapify

```
…
IF maggiore ≠ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



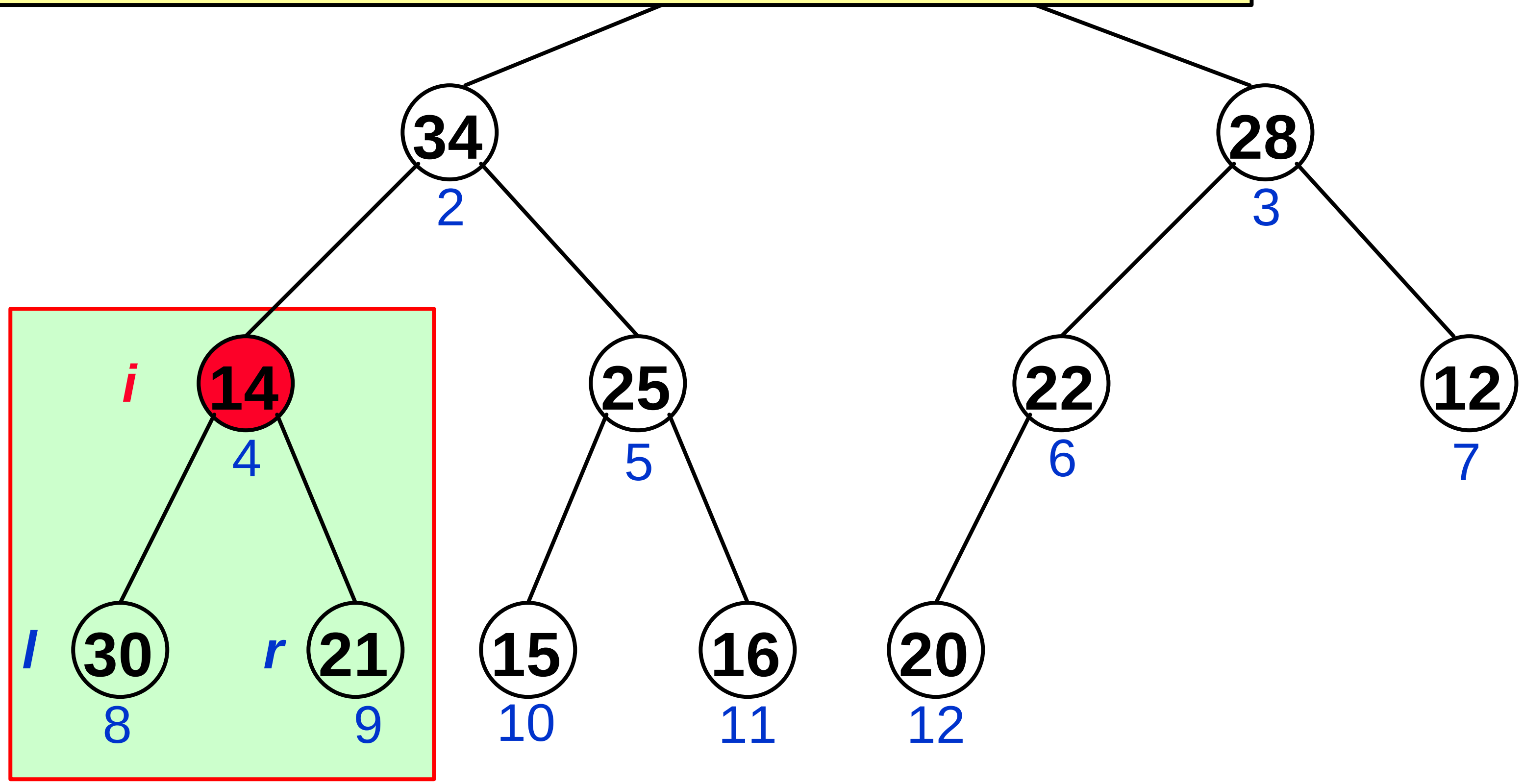
Heapify

```
…
IF maggiore ≠ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



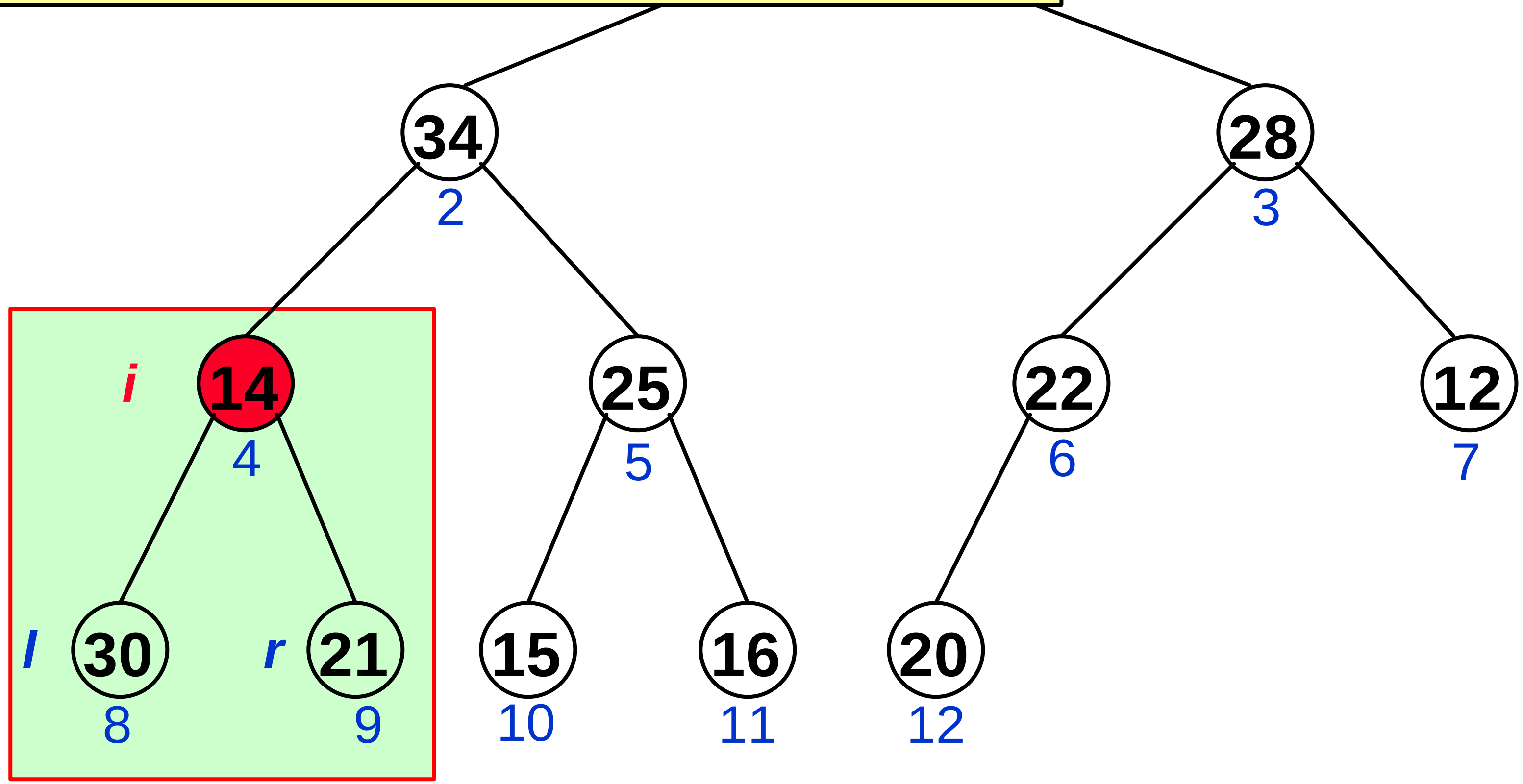
Heapify

```
…
IF maggiore ¹ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



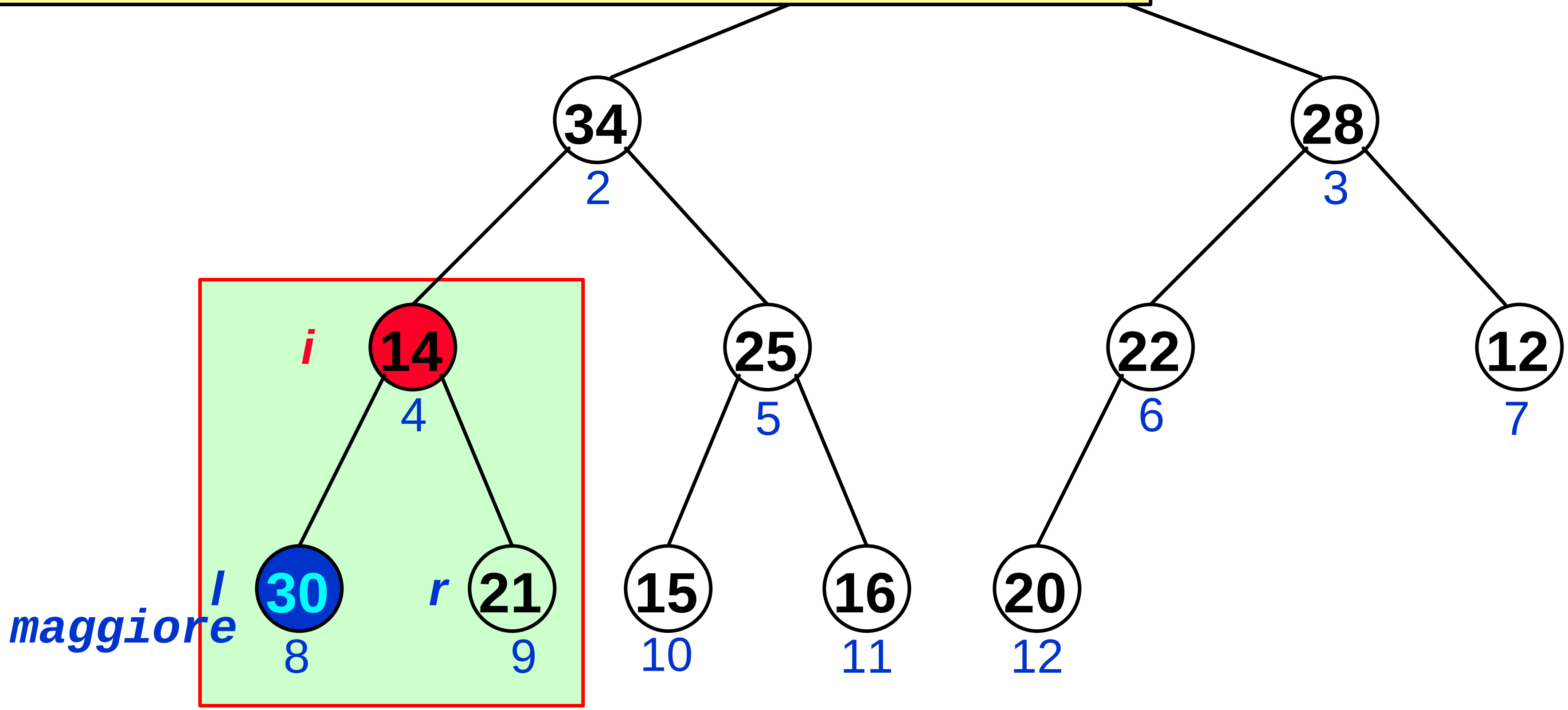
Heapify

```
…
IF l £ heapsize[A] AND A[l] > A[i]
        THEN maggiore = l
        ELSE maggiore = i
…
```



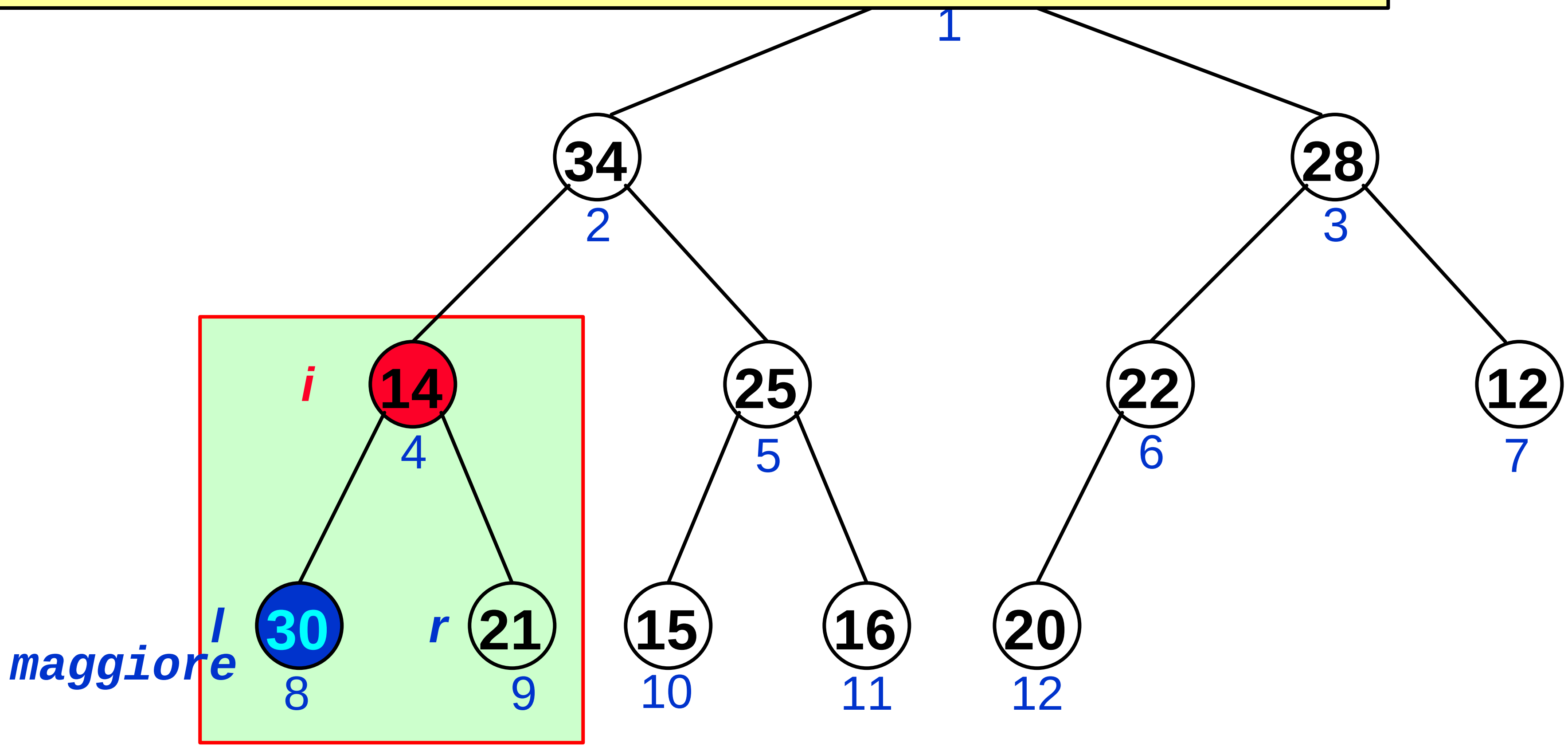
Heapify

```
…
IF l £ heapsize[A] AND A[l] > A[i]
      THEN maggiore = l
      ELSE maggiore = i
…
```



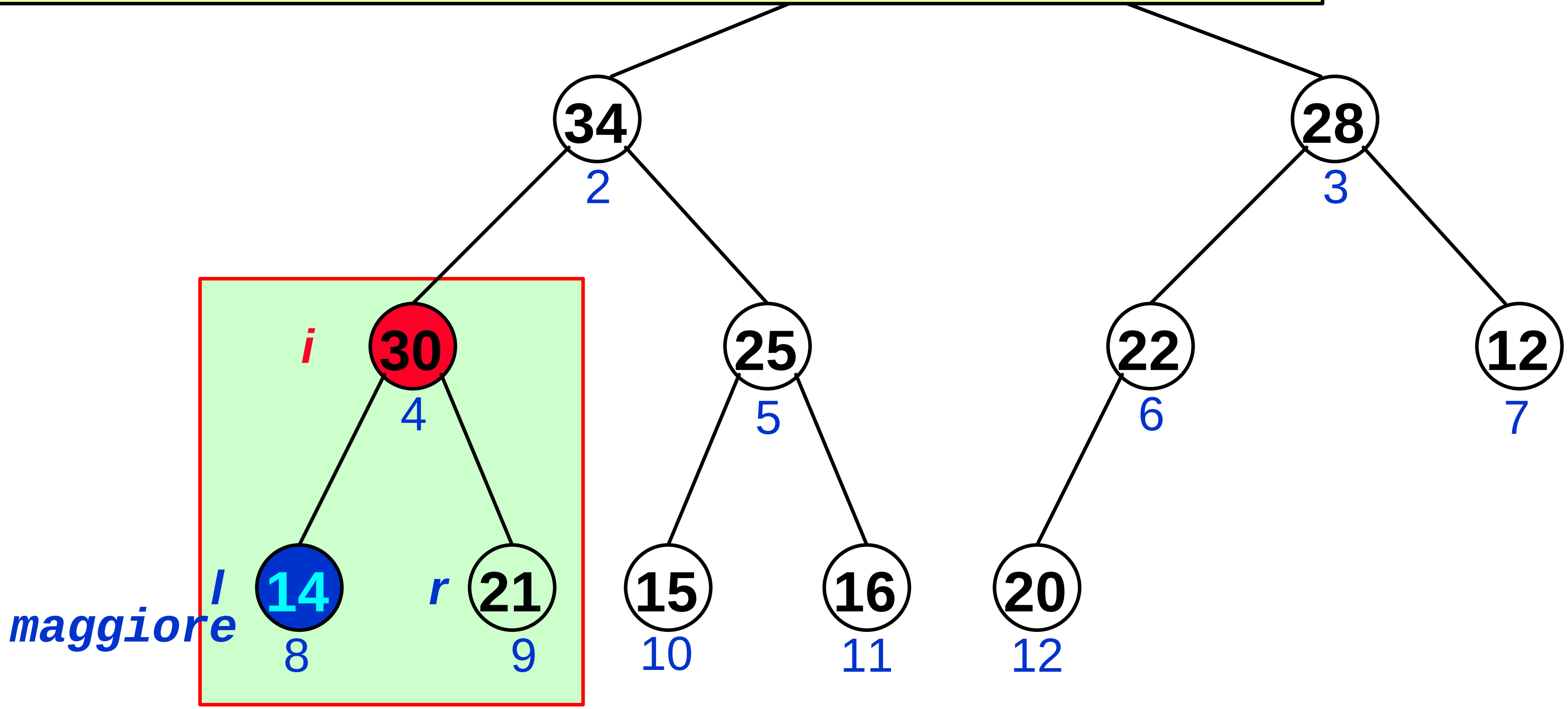
Heapify

```
…
IF r £ heapsize[A] AND A[r] > A[maggiore]
      THEN maggiore = r
…
```



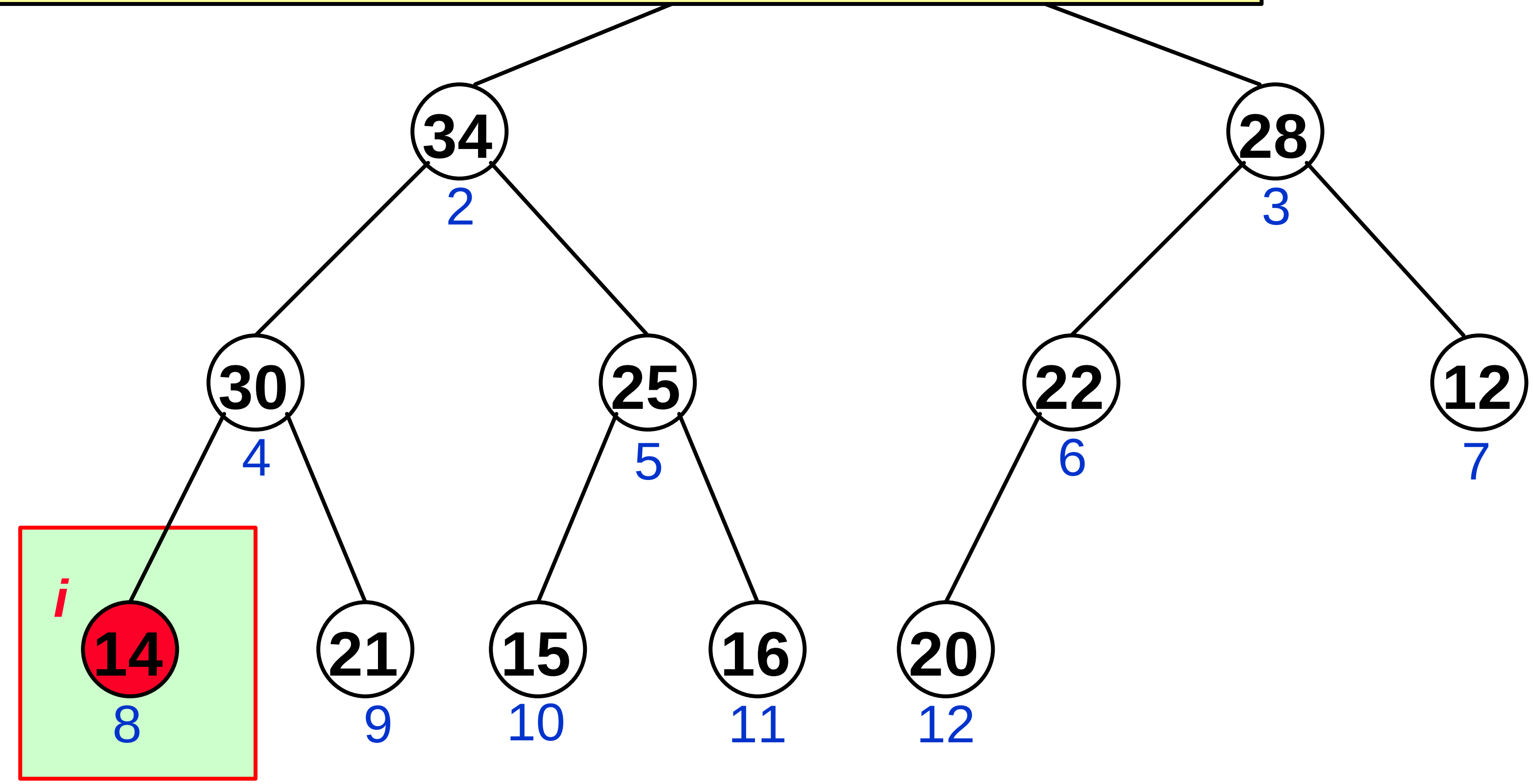
Heapify

```
…
IF maggiore ¹ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



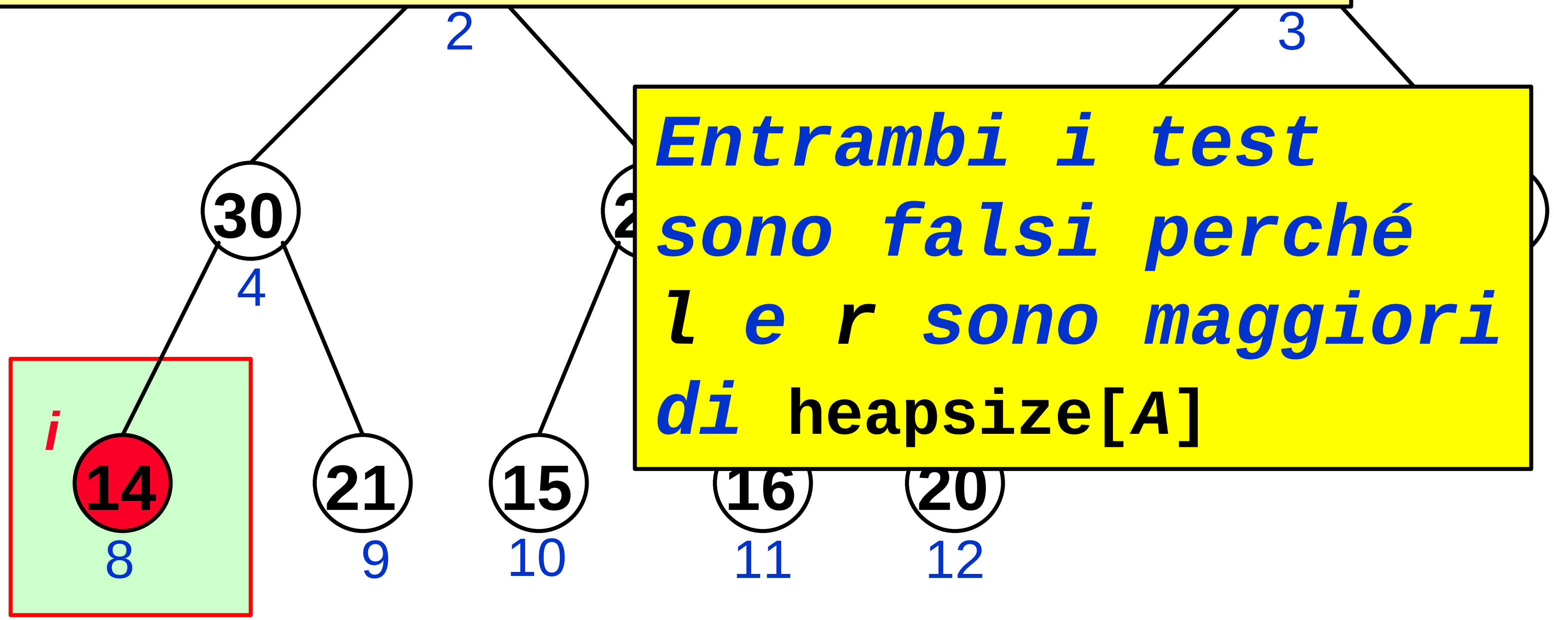
Heapify

```
…
IF maggiore ¹ i
      THEN "scambia A[i] e A[maggiore]"
           Heapify(A,maggiore)
…
```



Heapify

```
…
IF l £ heapsize[A] AND A[l] > A[i]
      THEN maggiore = l
      ELSE maggiore = i
IF r £ heapsize[A] AND A[r] > A[maggiore]
      THEN maggiore = r
…
```



Entrambi i test sono falsi perché l e r sono maggiori di **heapsize[*A*]**

Heapify

Heapify termina!
È stata ripristi-
nata la proprietà
Heap