Algoritmi e Strutture Dati

Alberi Binari di Ricerca

Alberi binari di ricerca

Motivazioni

- **gestione e ricerche in grosse quantità di dati**
- ***liste* ed *array non* sono *adeguati* perché inefficienti in tempo *O*(*n*) o in spazio**

Esempi:

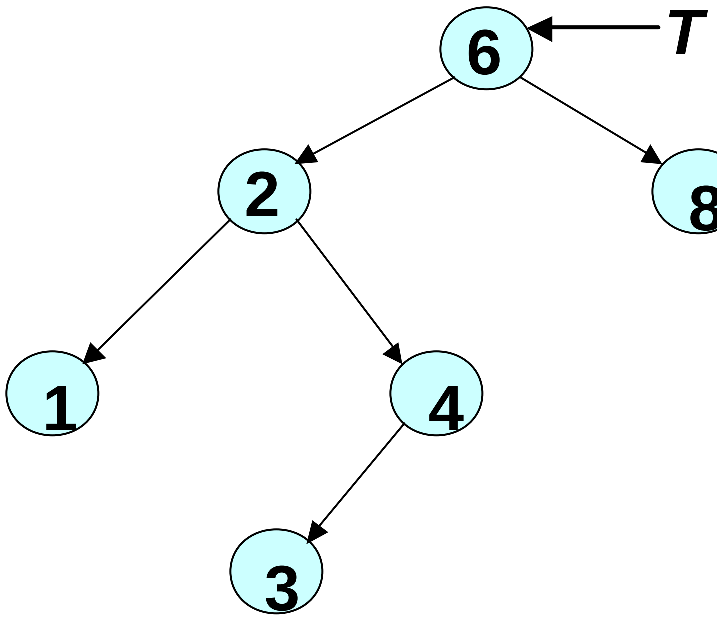
- **Mantenimento di archivi (*DataBase*)**
- **In generale, mantenimento e gestione di corpi di *dati* su cui si effettuano *molte ricerche*, eventualmente alternate a operazioni di inserimento e cancellazione.**

Alberi binari di ricerca

***Definizione*: Un *albero binario di ricerca* è un albero binario che soddisfa` la seguente proprietà:**

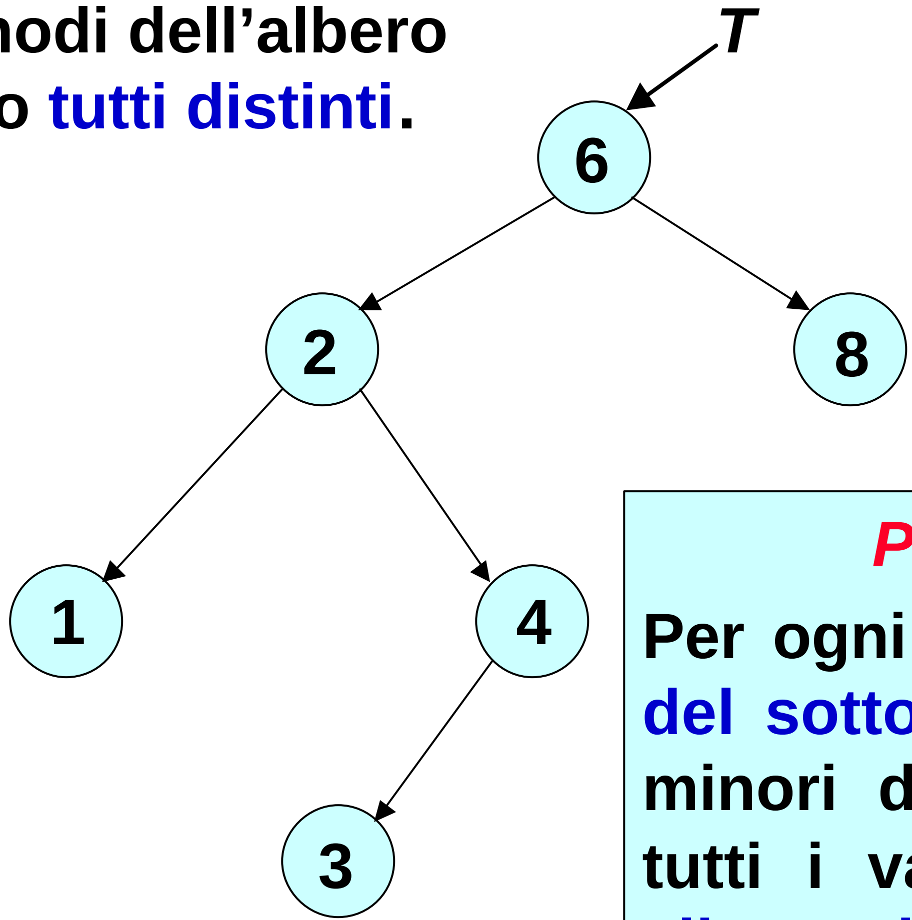
se *X* è un nodo e *Y* è un nodo nel sottoalbero sinistro di *X*, allora $key[Y] \leq key[X]$;

se *Y* è un nodo nel sottoablero destro di *X* allora $key[Y] \geq key[X]$



Alberi binari di ricerca

Assumiamo che i valori nei nodi dell'albero siano tutti distinti.



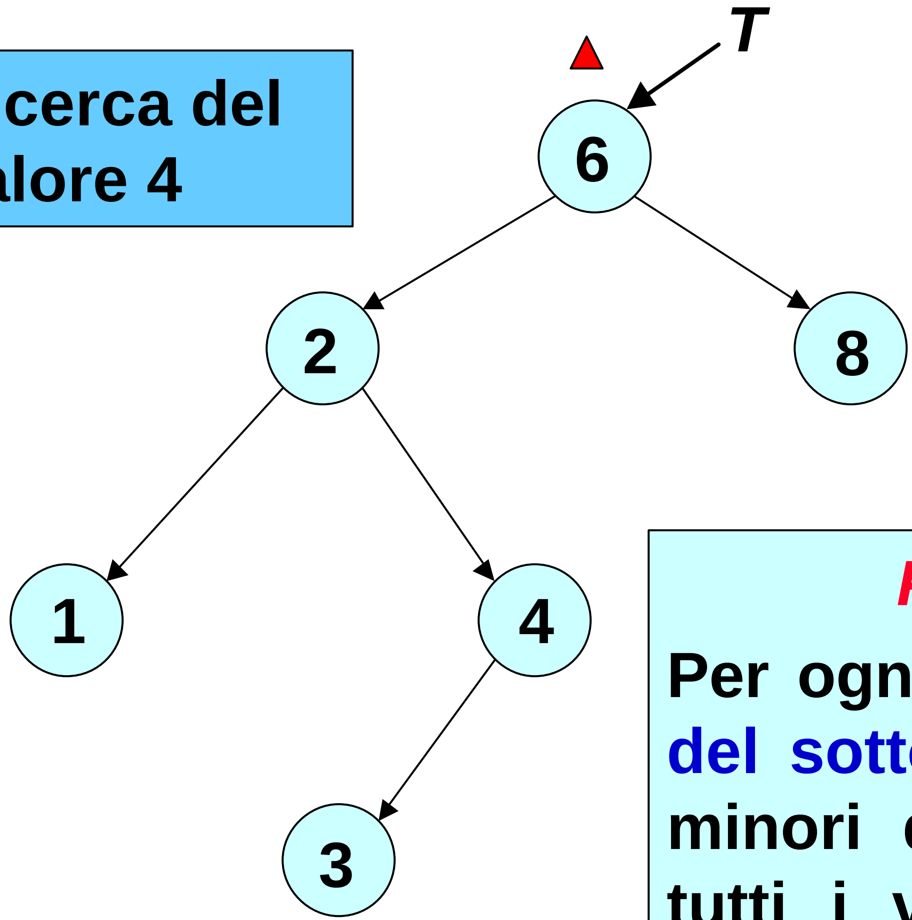
Assumiamo che i valori nei nodi (le chiavi) possano essere ordinati.

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4

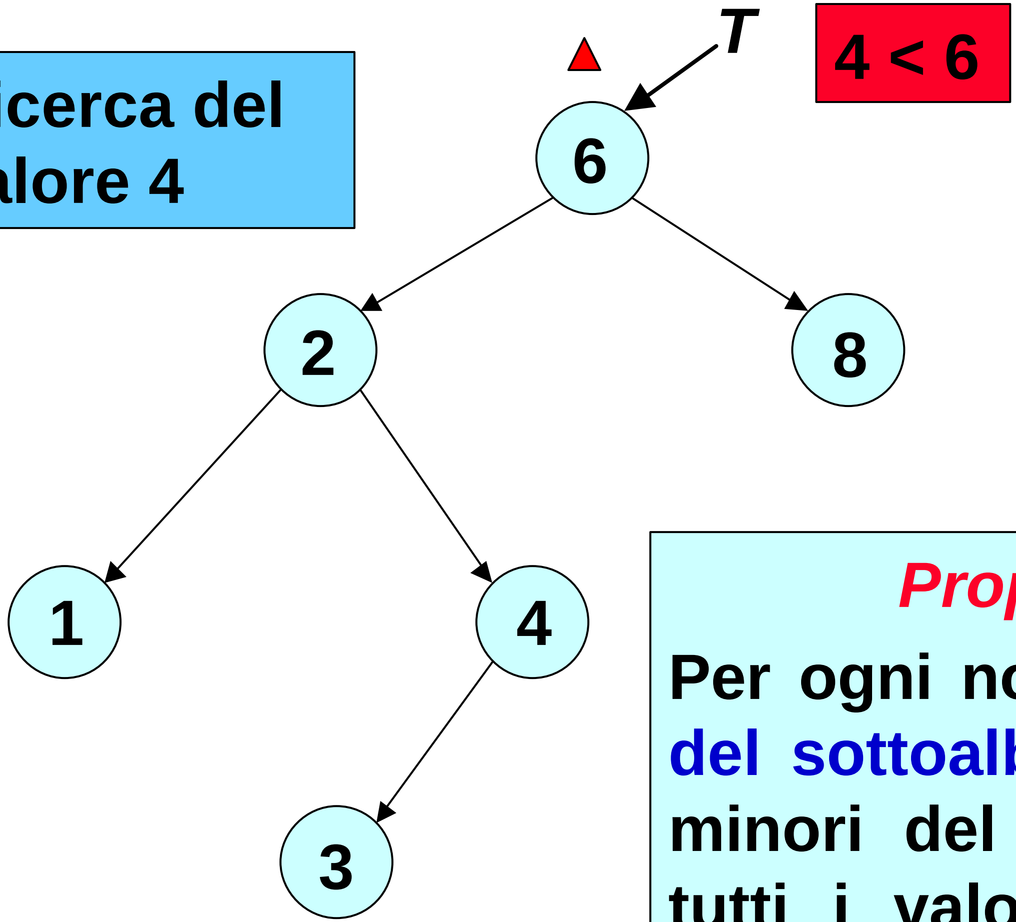


Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4

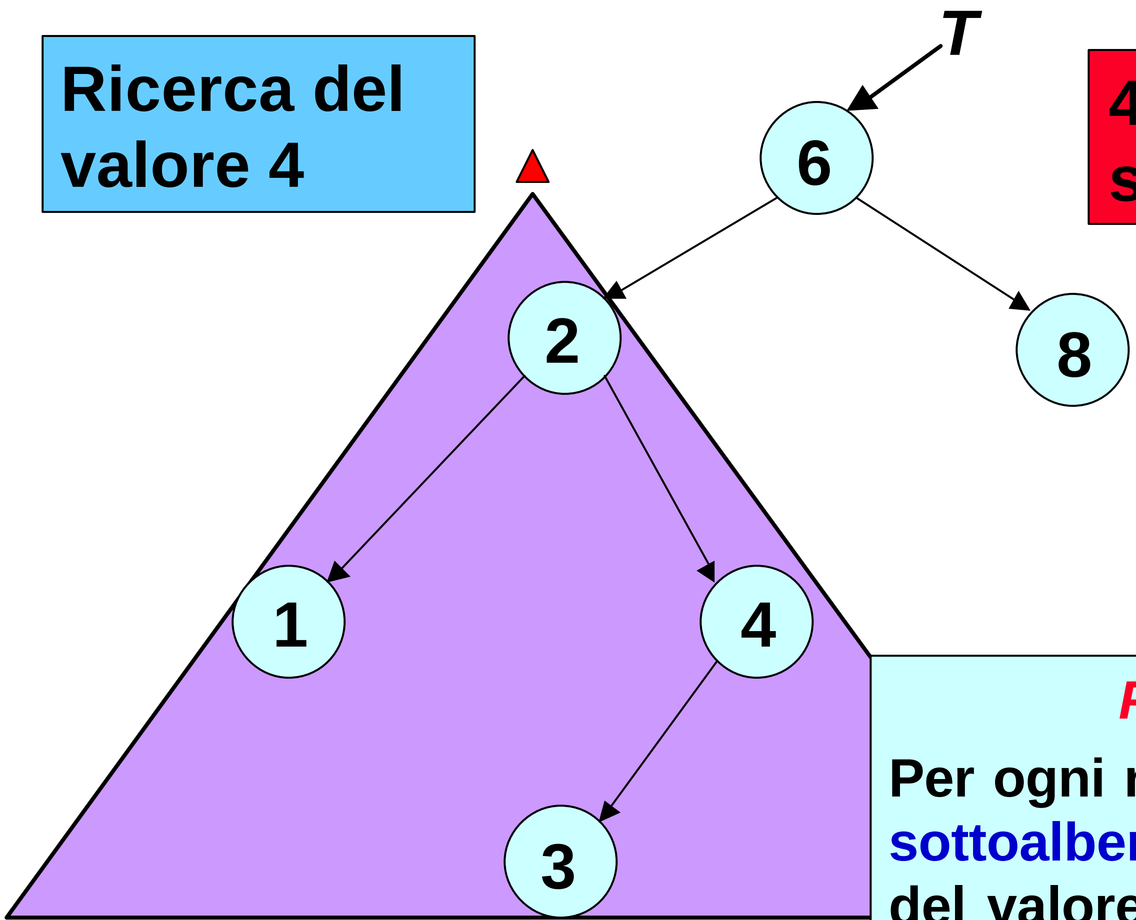


Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



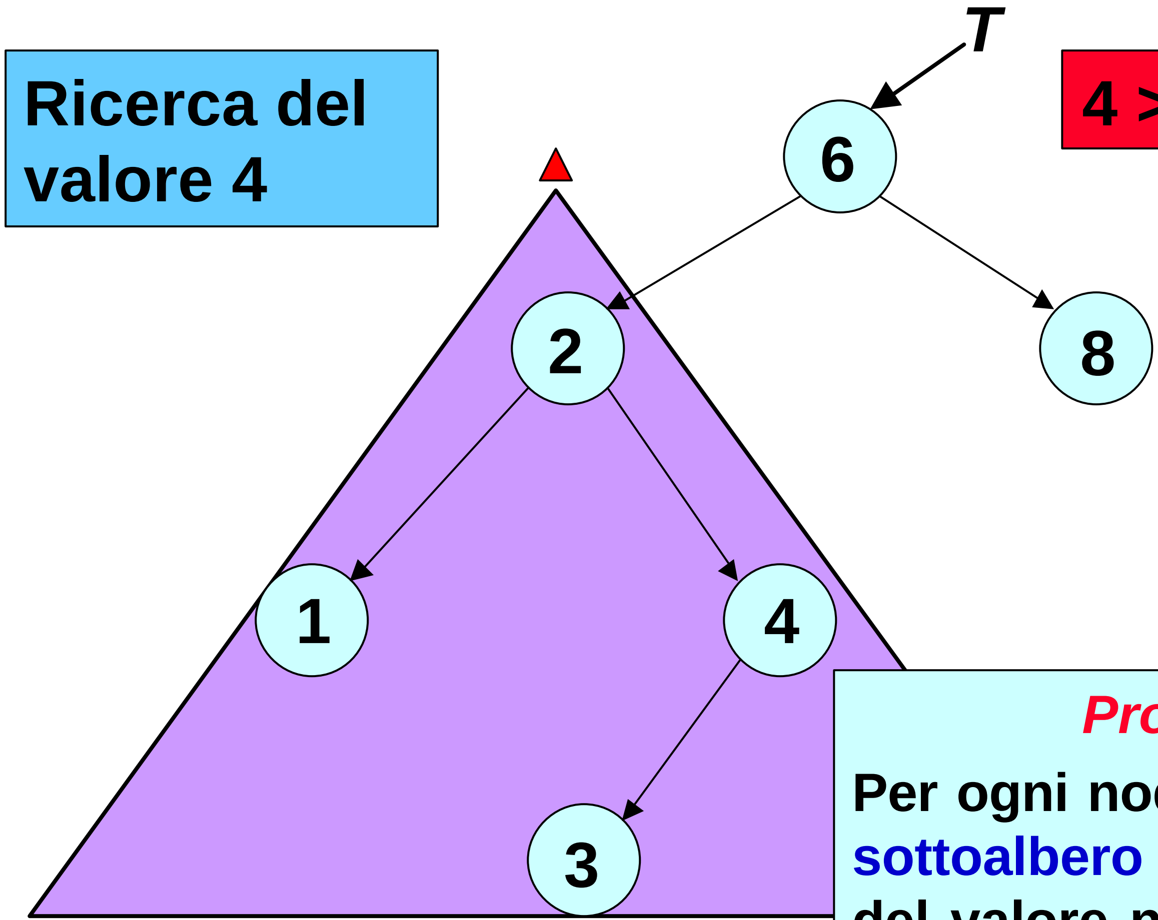
4 sta nel sottoalbero sinistro di 6

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



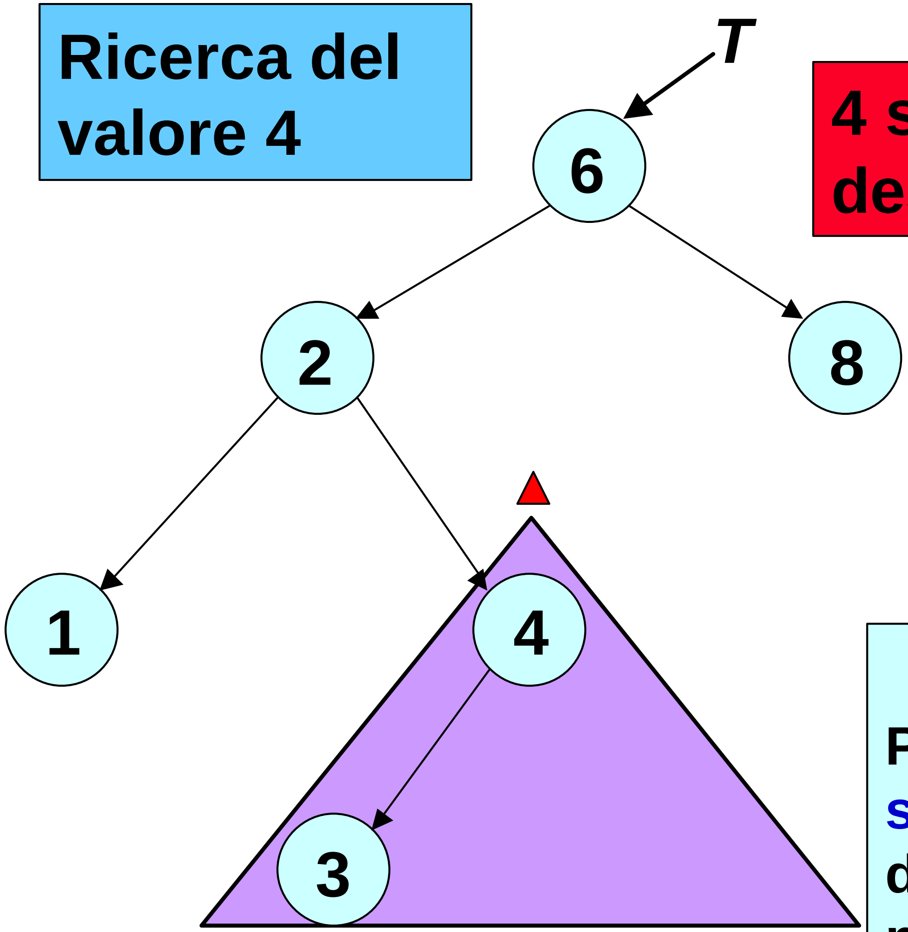
4 > 2

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



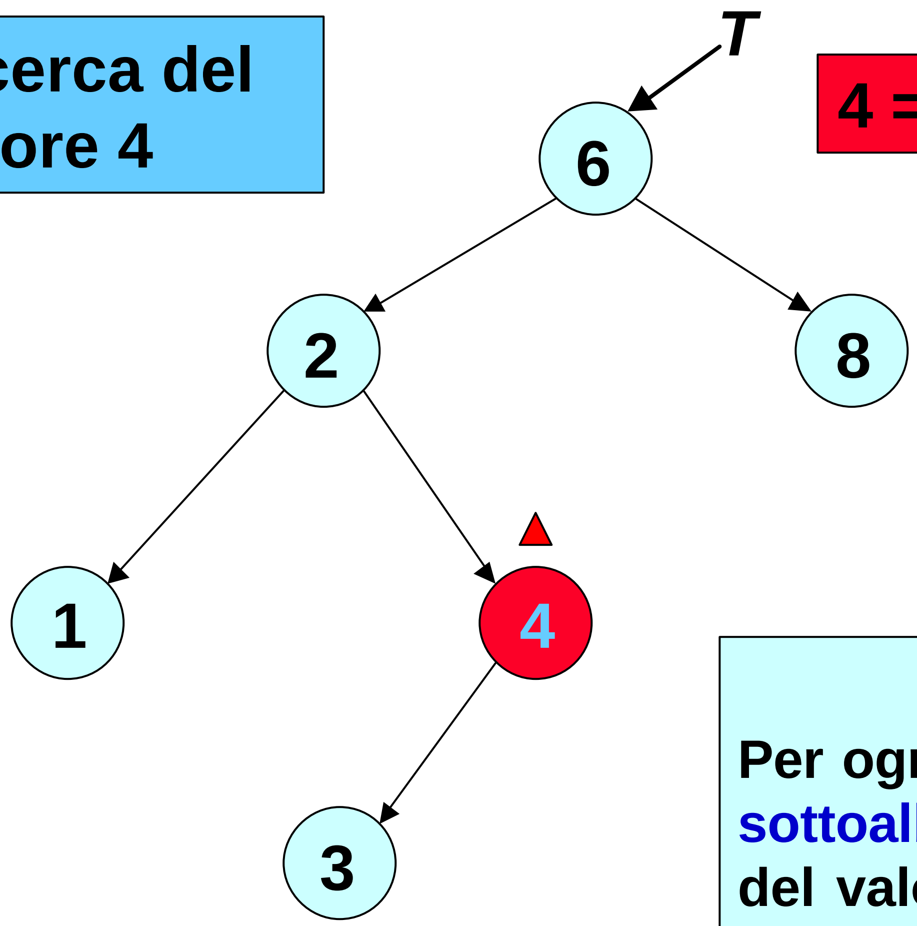
4 sta nel sottoalbero destro di 2

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



4 = 4 : Trovato!

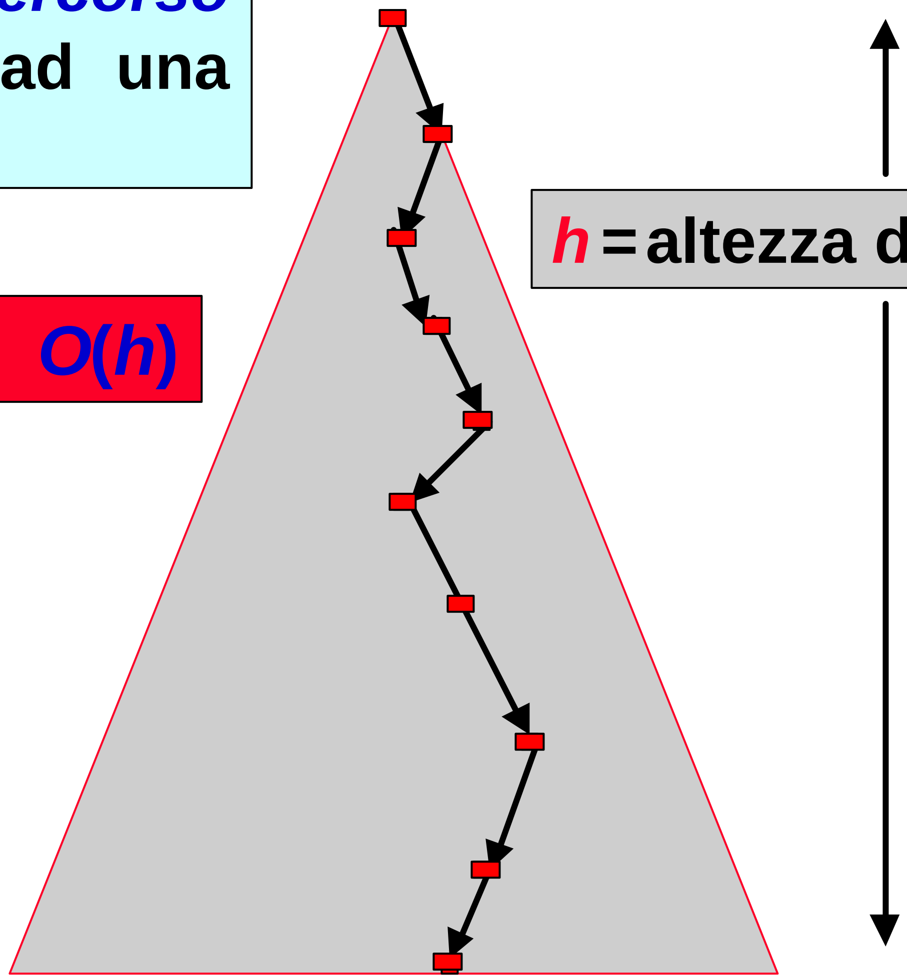
Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca

In generale, la *ricerca* è confinata ai *nodi* posizionati *lungo un singolo percorso* (path) dalla radice ad una foglia

Tempo di ricerca = *O*(*h*)

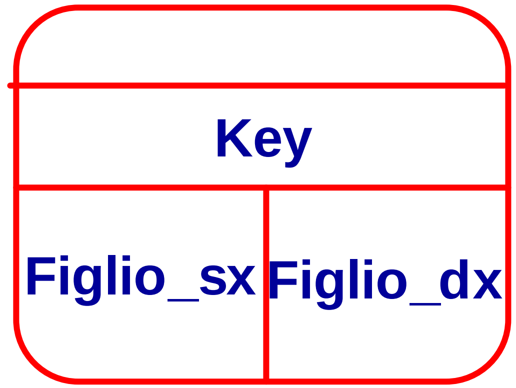


***h* = altezza dell'albero**

ADT albero binario di ricerca: tipo di dato

- *È una specializzazione dell'ADT albero binario*
- *Gli elementi statici sono essenzialmente gli stessi, l'unica differenza è che si assume che i dati contenuti (le chiavi) siano ordinabili secondo qualche relazione d'ordine.*

```
typedef *nodo ARB;
struct {
            elemento key;
            ARB figlio_dx, figlio_sx;
        } nodo;
```



ADT albero binario di ricerca: funzioni

- **Selettori:**
  - *root(T)*
  - *figlio_dx(T)*
  - *figlio_sx(T)*
  - *key(T)*
- **Costruttori/Distruttori:**
  - *crea_albero()*
  - *ARB_inserisci(T,x)*
  - *ARB_cancella (T,x)*
- **Proprietà:**
  - *vuoto(T)* = *return (T=Nil)*

Ritorna il valore del test di uguaglianza

- **Operazioni di Ricerca**
  - *ARB_ricerca(T,k)*
  - *ARB_minimo(T)*
  - *ARB_massimo(T)*
  - *ARB_successore(T,x)*
  - *ARB_predecessore(T,x)*

Ricerca in Alberi binari di ricerca

```
ARB_ricerca(T,k)
   IF T ≠ NIL THEN
       IF k ≠ Key[T] THEN
          IF k < Key[T] THEN
            return ARB_ricerca(figlio_sx[T],k)
          ELSE
            return ARB_ricerca(figlio_dx[T],k)
       ELSE
          return T
   ELSE
       return T
```

***NOTA**: Questo algoritmo cerca il nodo con chiave k nell'albero T e ne ritorna il puntatore. Ritorna NIL nel caso non esista alcun nodo con chiave k.*

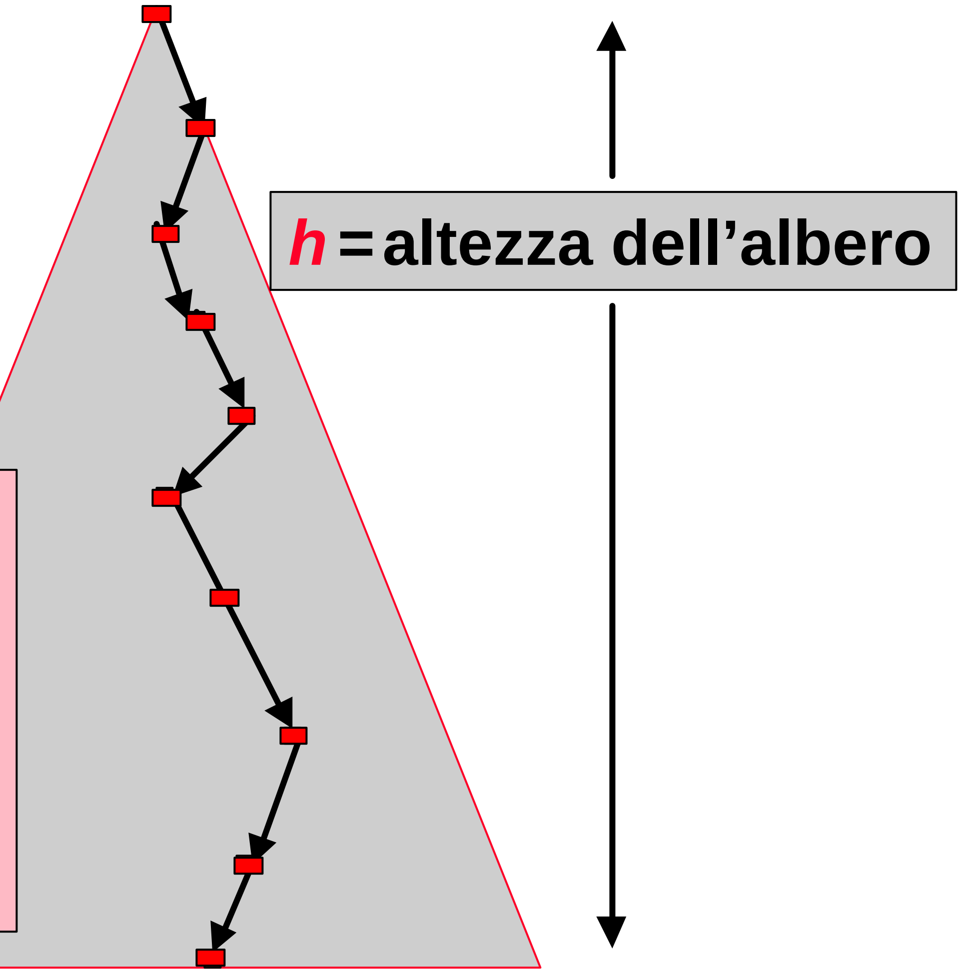
Ricerca in Alberi binari di ricerca

```
ARB_ricerca'(T,k)
   IF T = NIL OR k = Key[T] THEN
        return T
   ELSE IF k < Key[T] THEN
            return ARB_ricerca'(figlio_sx[T],k)
        ELSE
            return ARB_ricerca'(figlio_dx[T],k)
```

***NOTA**: Variante sintattica del precedente algoritmo!*

Ricerca in Alberi binari di ricerca

In generale, la *ricerca* è confinata ai *nodi* posizionati ***lungo un singolo percorso*** (*path*) dalla radice ad una foglia



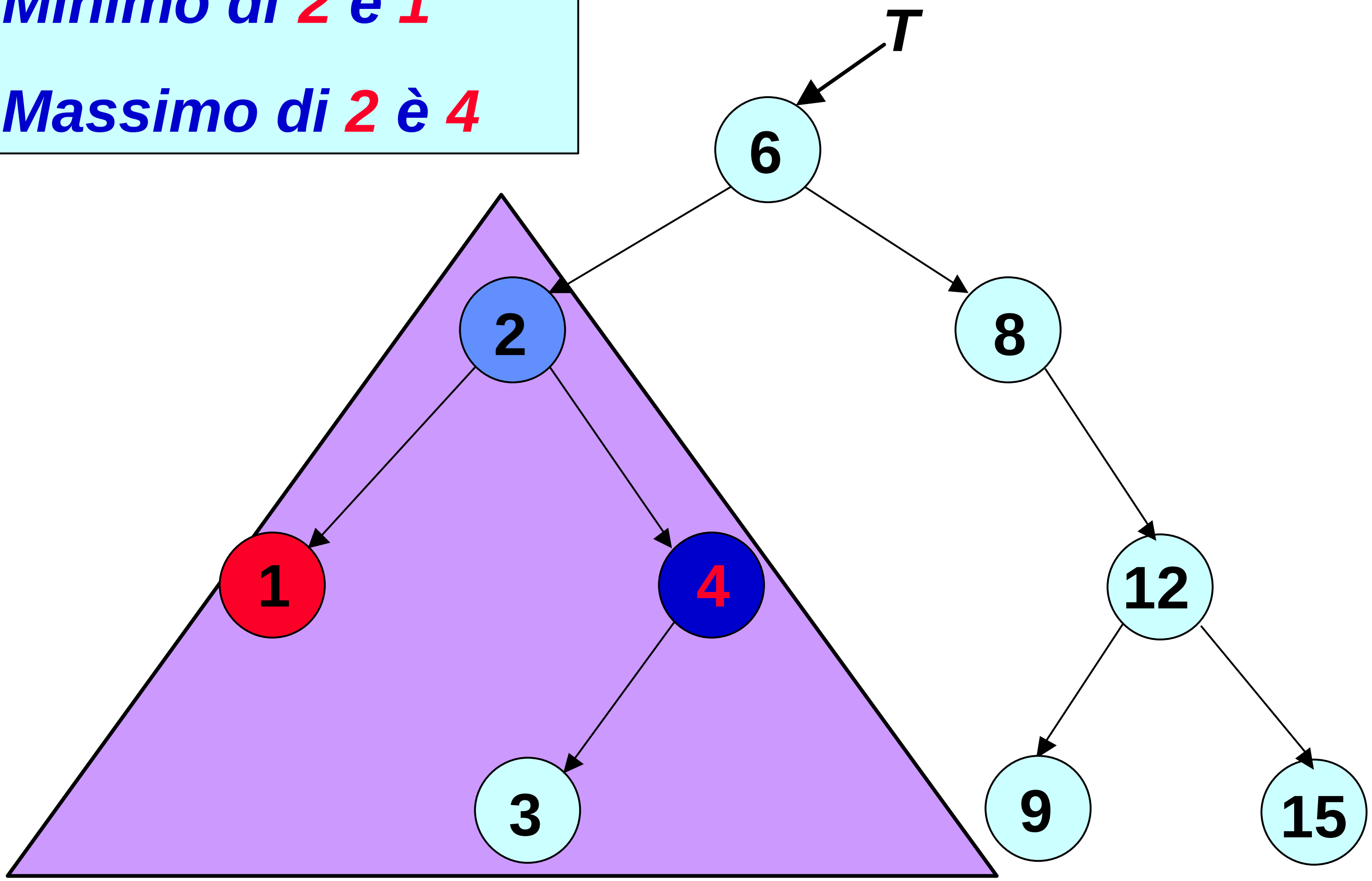
Tempo di ricerca = $O(h)$

$O(h)$ = $O(\log N)$, dove N è il numero di nodi nell'albero, solo se l'albero è *balanciato* (cioè la lunghezza del percorso minimo è vicino a quella del percorso massimo).

ARB: ricerca del minimo e massimo

Il Minimo di 2 è 1

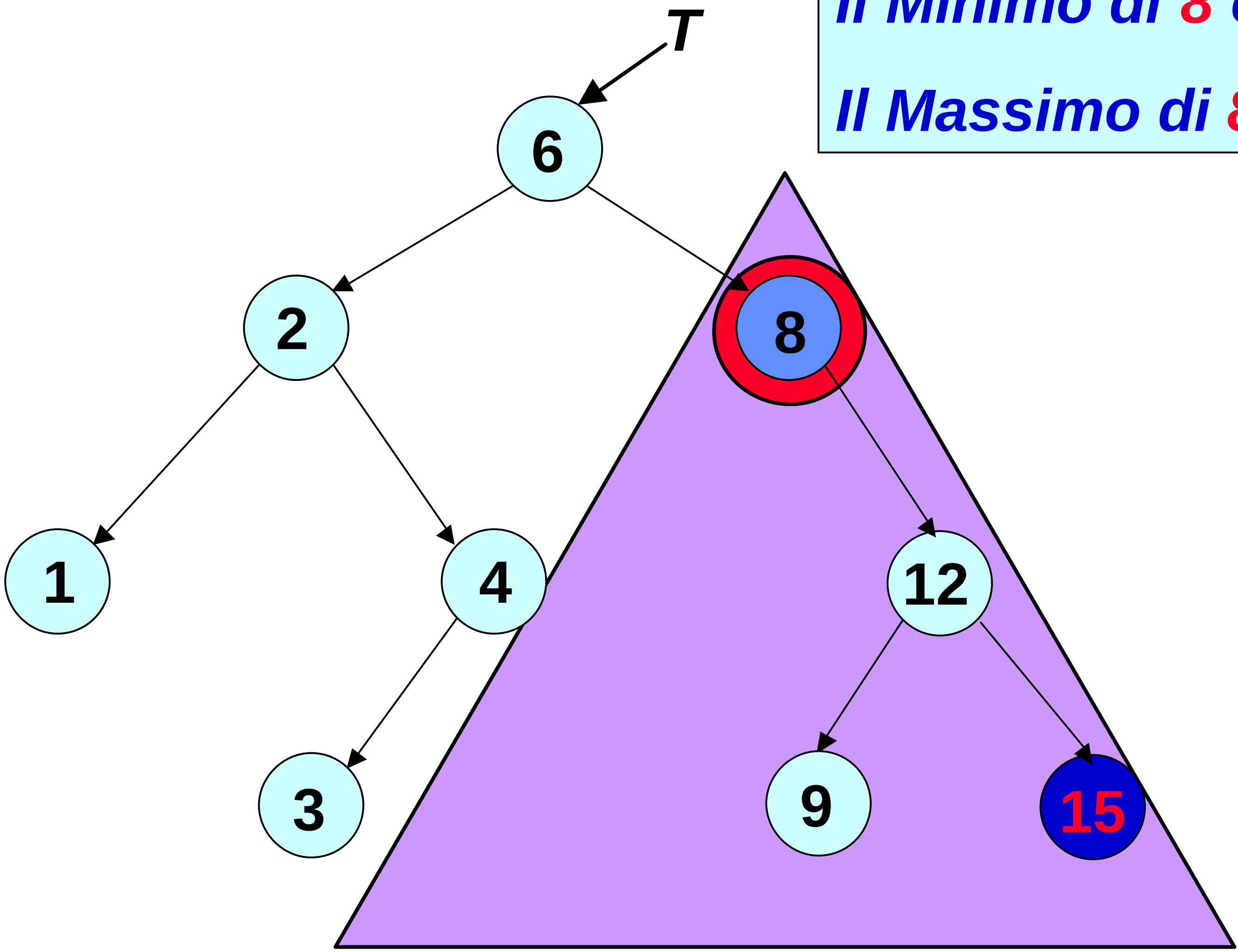
Il Massimo di 2 è 4



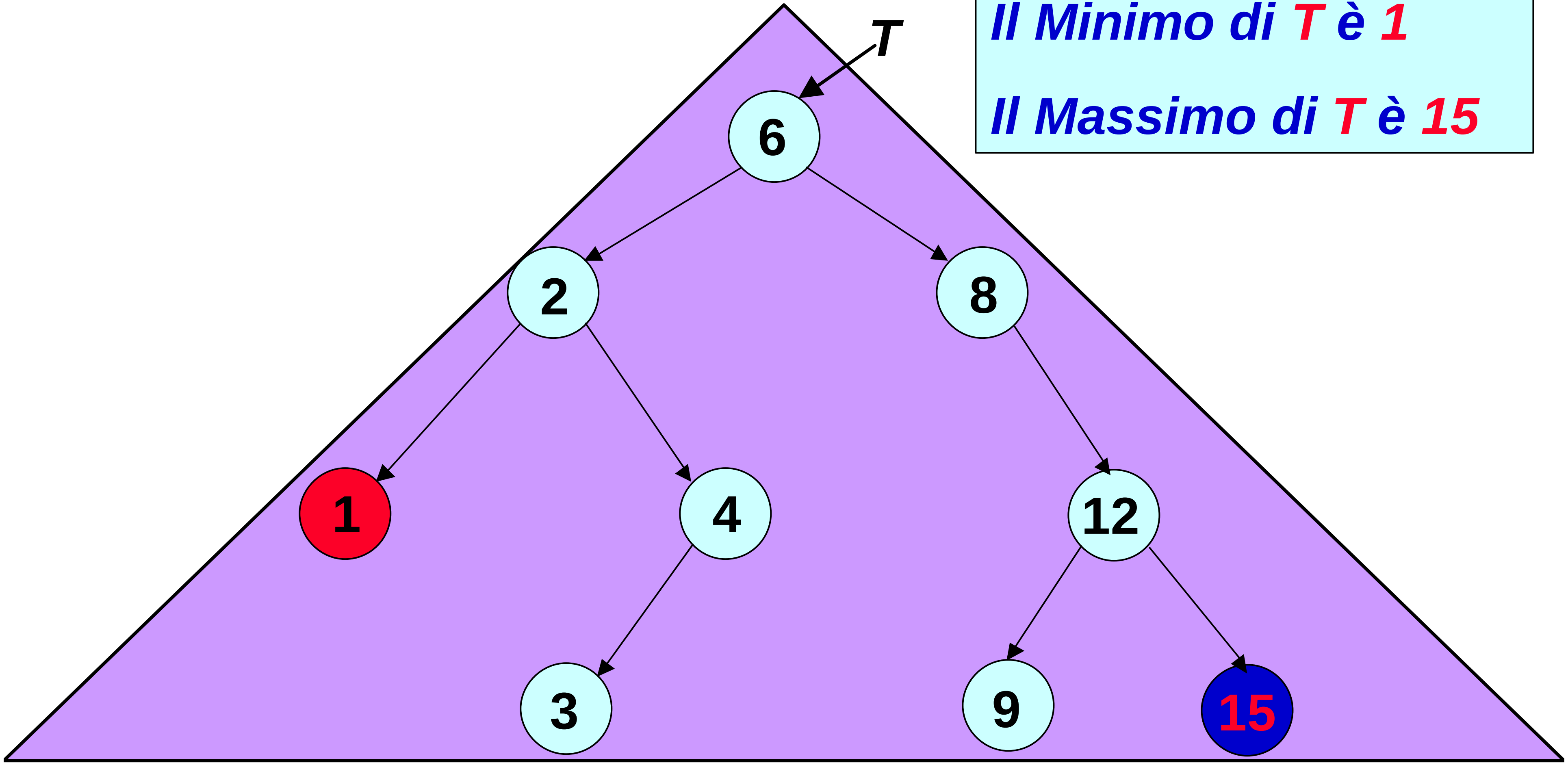
ARB: ricerca del minimo e massimo

Il Minimo di 8 è 8

Il Massimo di 8 è 15



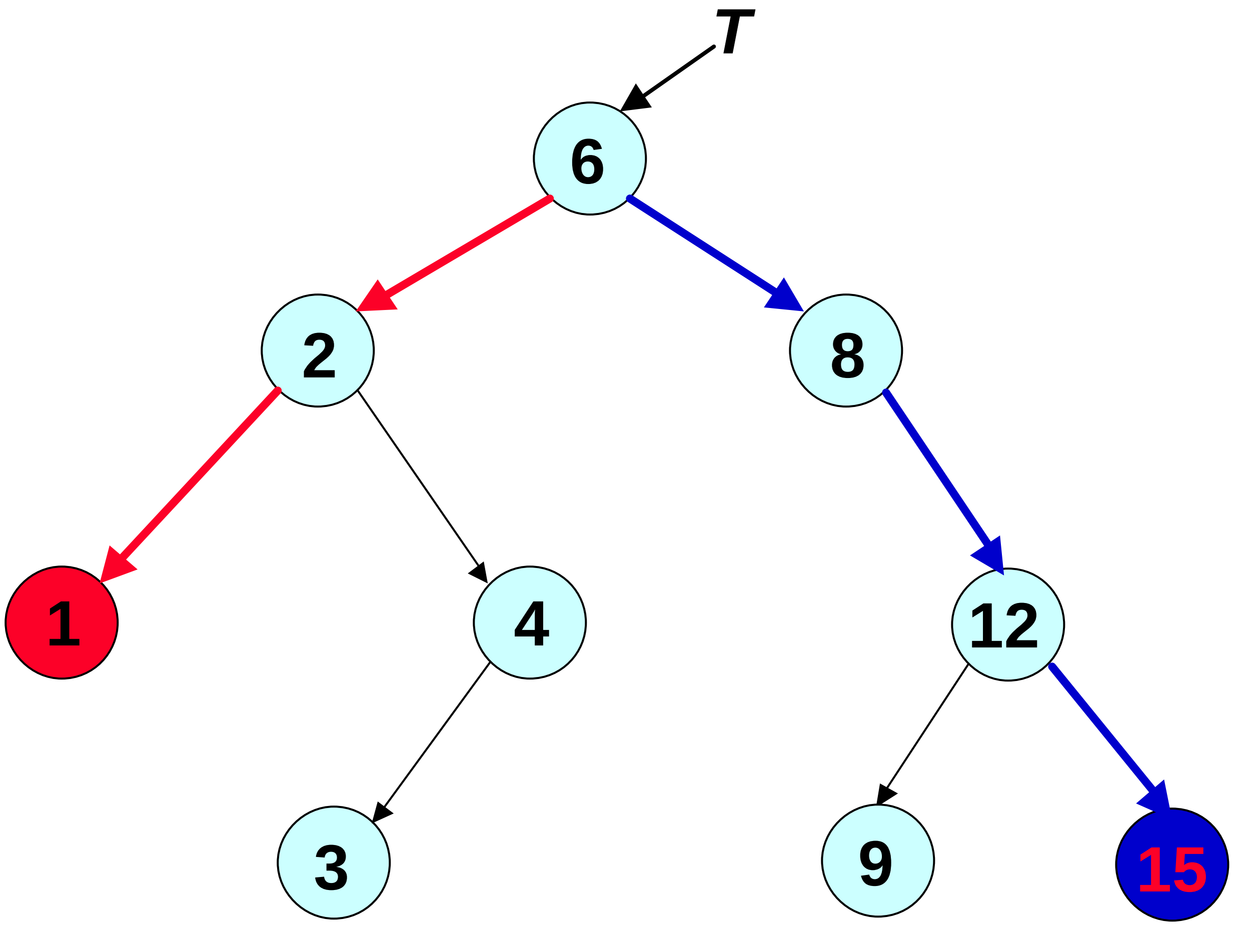
ARB: ricerca del minimo e massimo



Il Minimo di T è 1

Il Massimo di T è 15

ARB: ricerca del minimo e massimo



ARB: ricerca del minimo e massimo

```
ARB ABR-Minimo(x:ARB)
   WHILE figlio-sx[x] 1 NIL DO
        x = figlio-sx[x]
   return x
```

```
ARB ABR-Massimo(x: ARB)
   WHILE figlio-dx[x] 1 NIL DO
         x = figlio-dx[x]
   return x
```

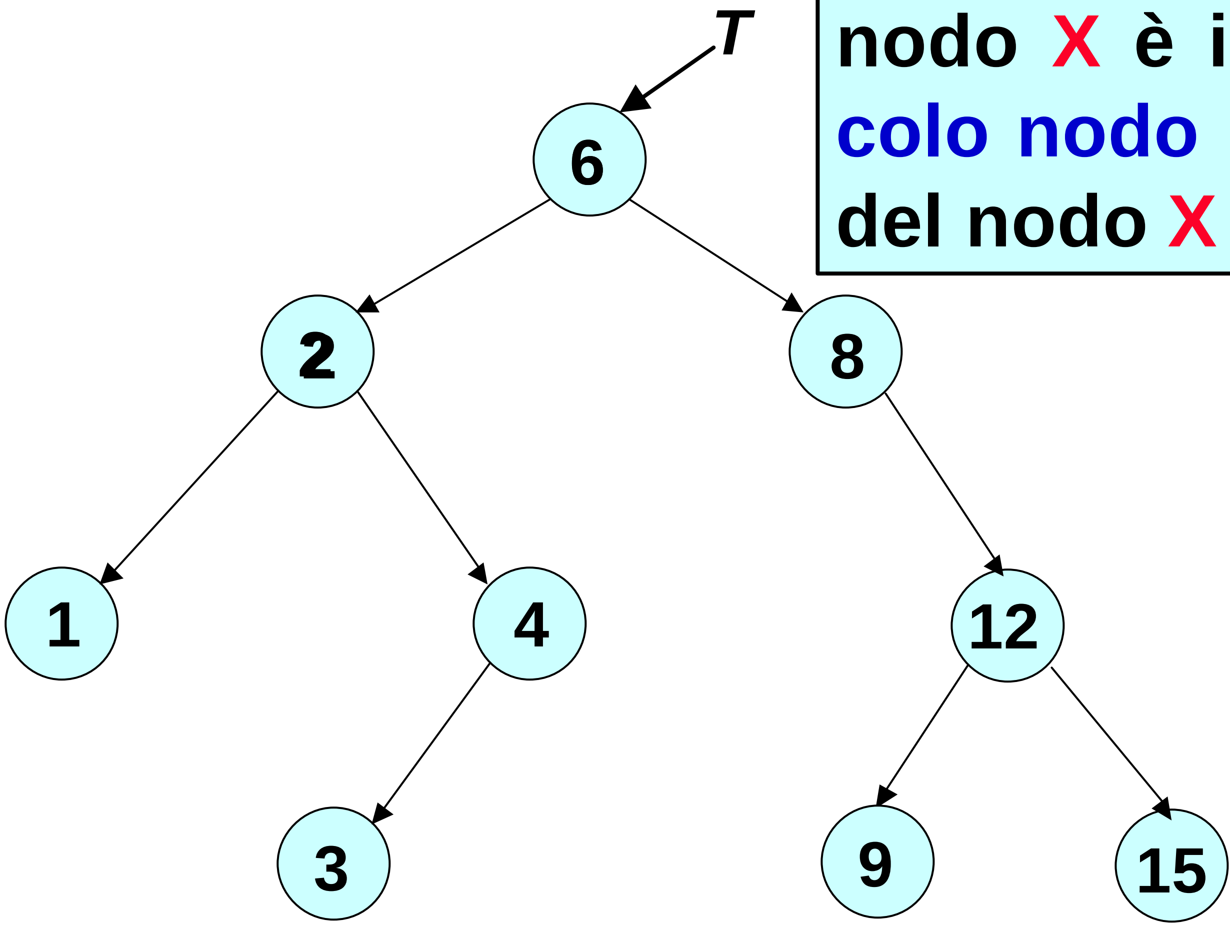
ARB: ricerca del minimo e massimo

```
ARB ABR-Minimo(x:ARB)
   WHILE figlio-sx[x] ¹ NIL DO
        x = figlio-sx[x]
   return x
```

```
ARB ABR-Massimo(x: ARB)
   WHILE figlio-dx[x] ¹ NIL DO
        x = figlio-dx[x]
   return x
```

```
ARB ARB_Minimo(x:ARB)
  IF x ¹ NIL AND figlio_sx[x] ¹ NIL THEN
      return ARB_Minimo(figlio_sx[x])
  return x
```

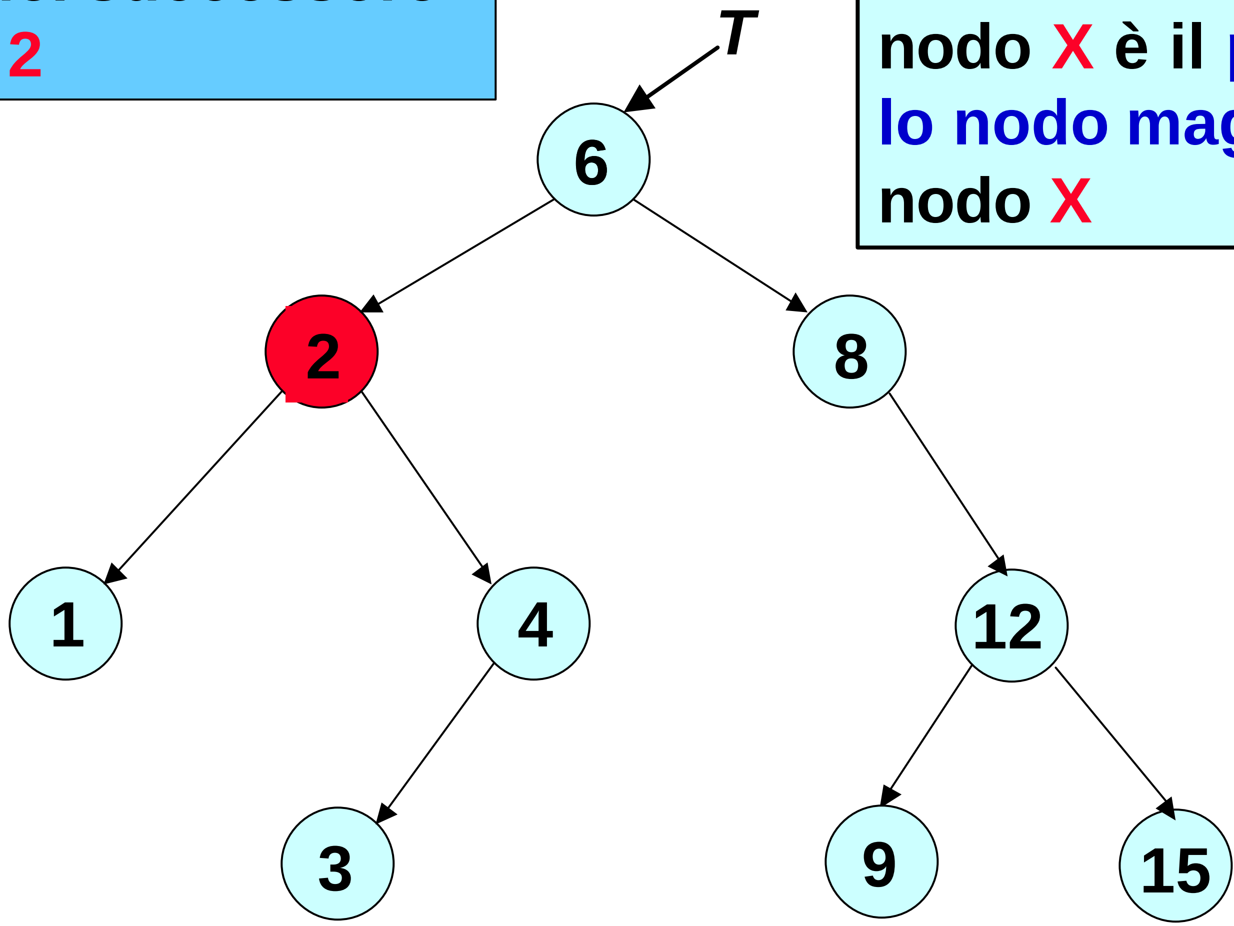
ARB: ricerca del successore



Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X

ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 2**

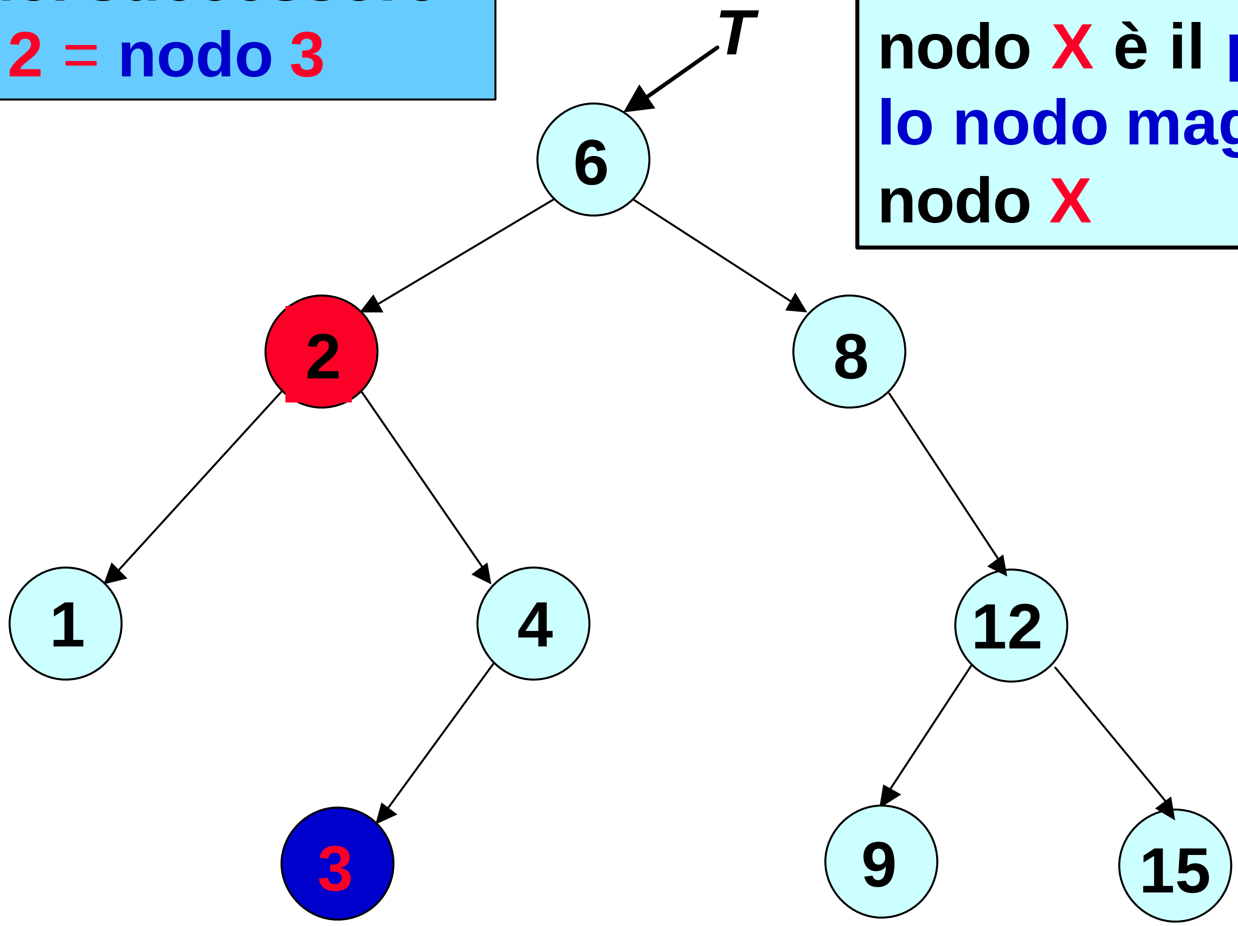


Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X

ARB: ricerca del successore

Ricerca del successore del nodo 2 = nodo 3

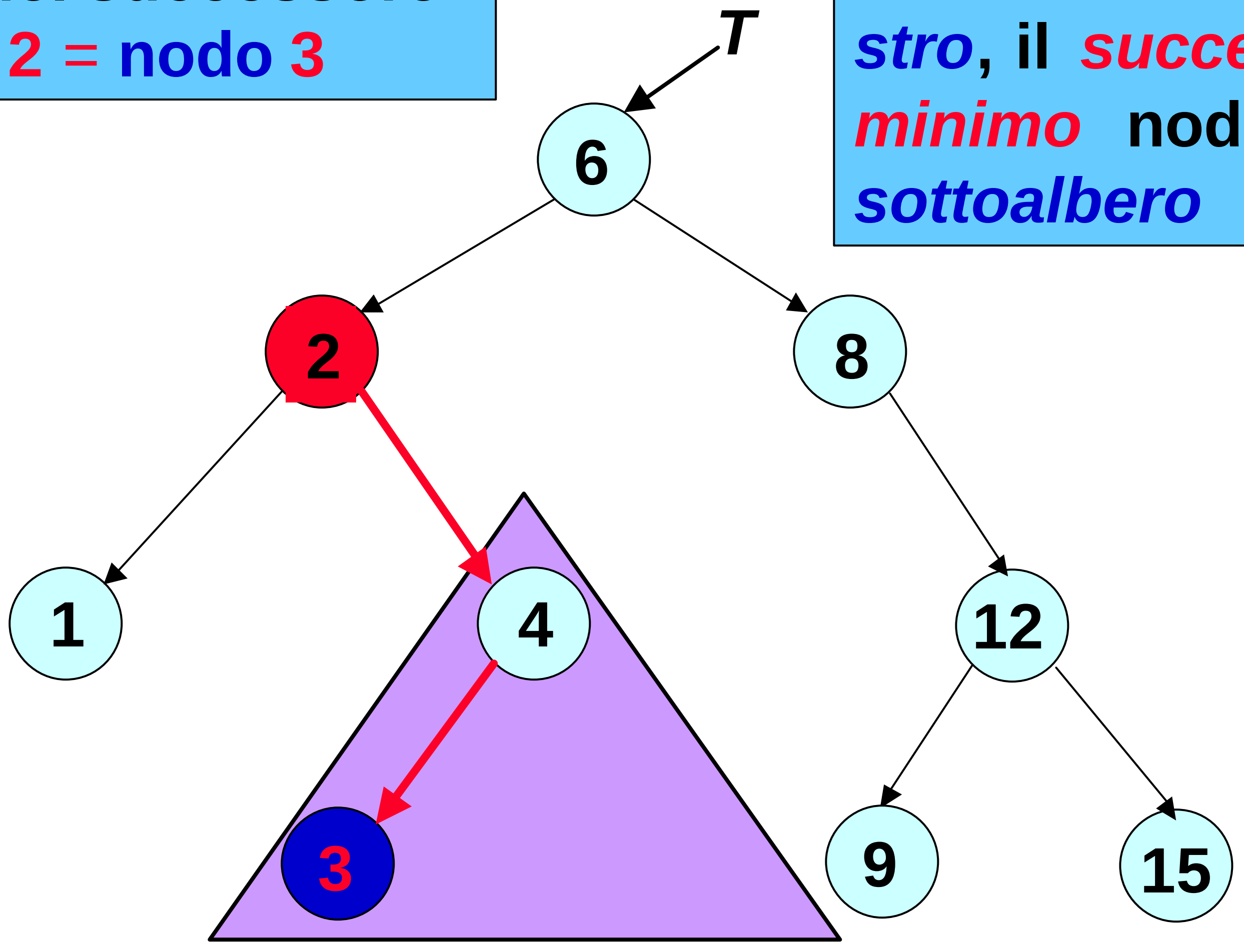
Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X



ARB: ricerca del successore

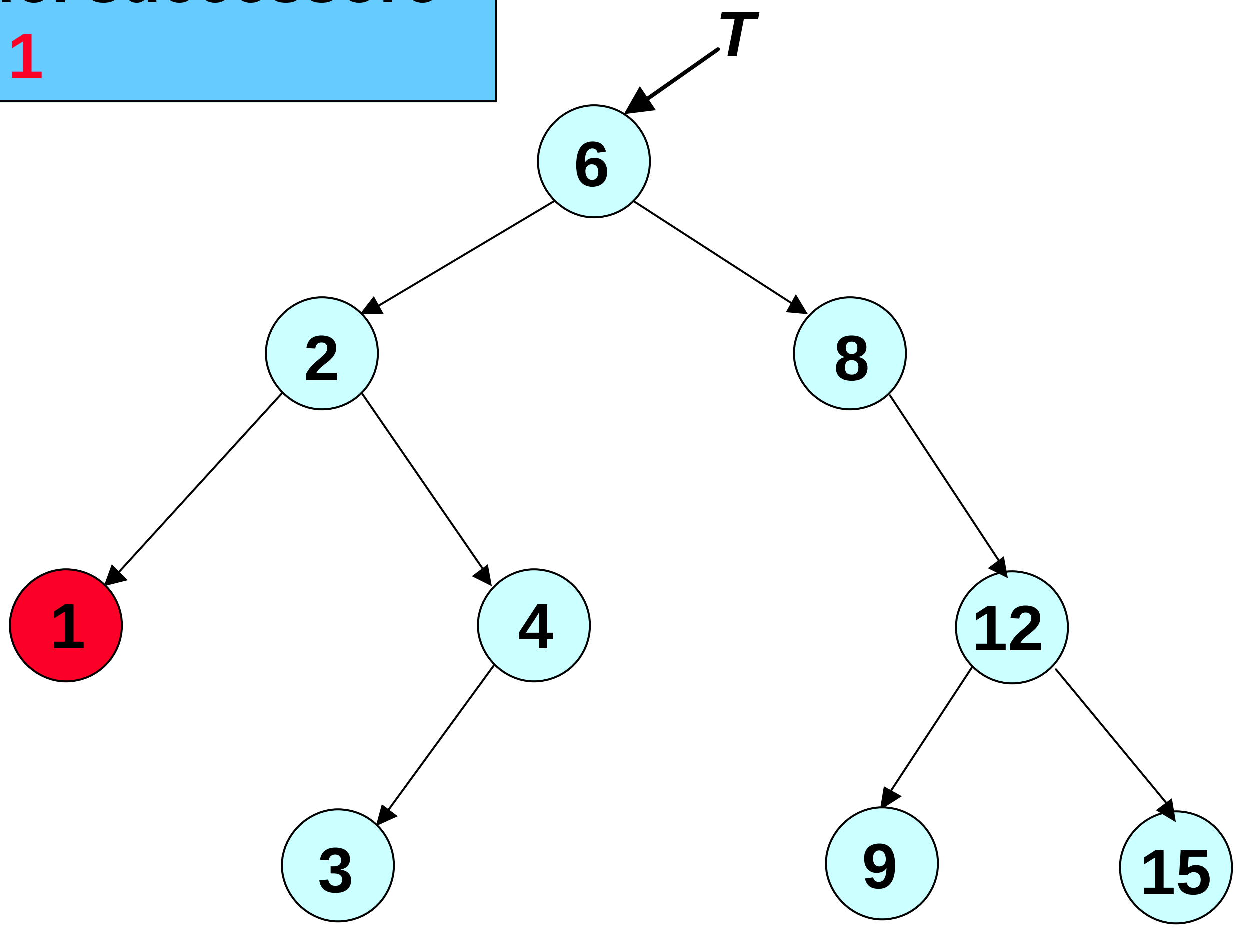
Ricerca del successore del nodo 2 = nodo 3

Se *x* ha un *figlio destro*, il *successore* è il *minimo* nodo di quel *sottoalbero*



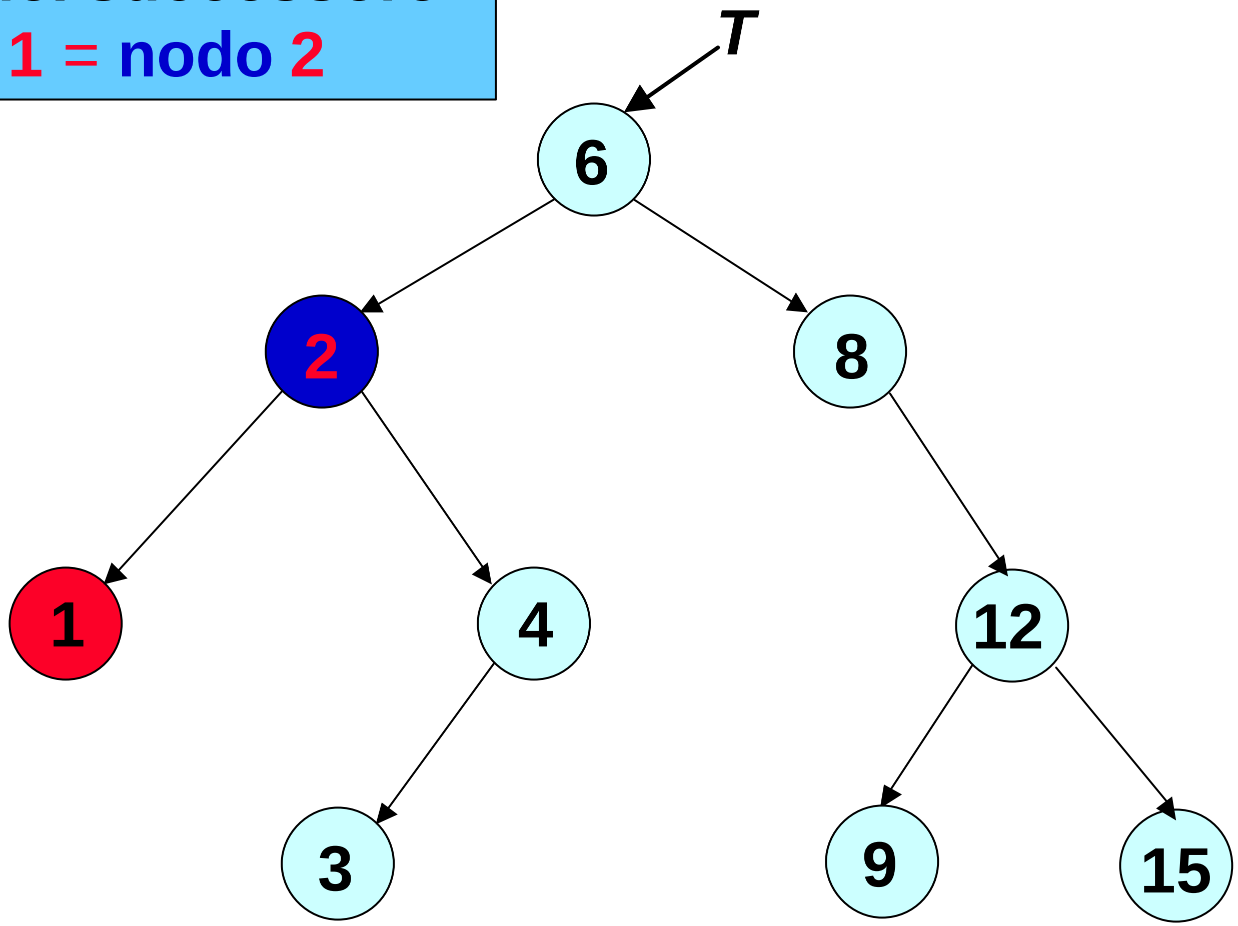
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 1**



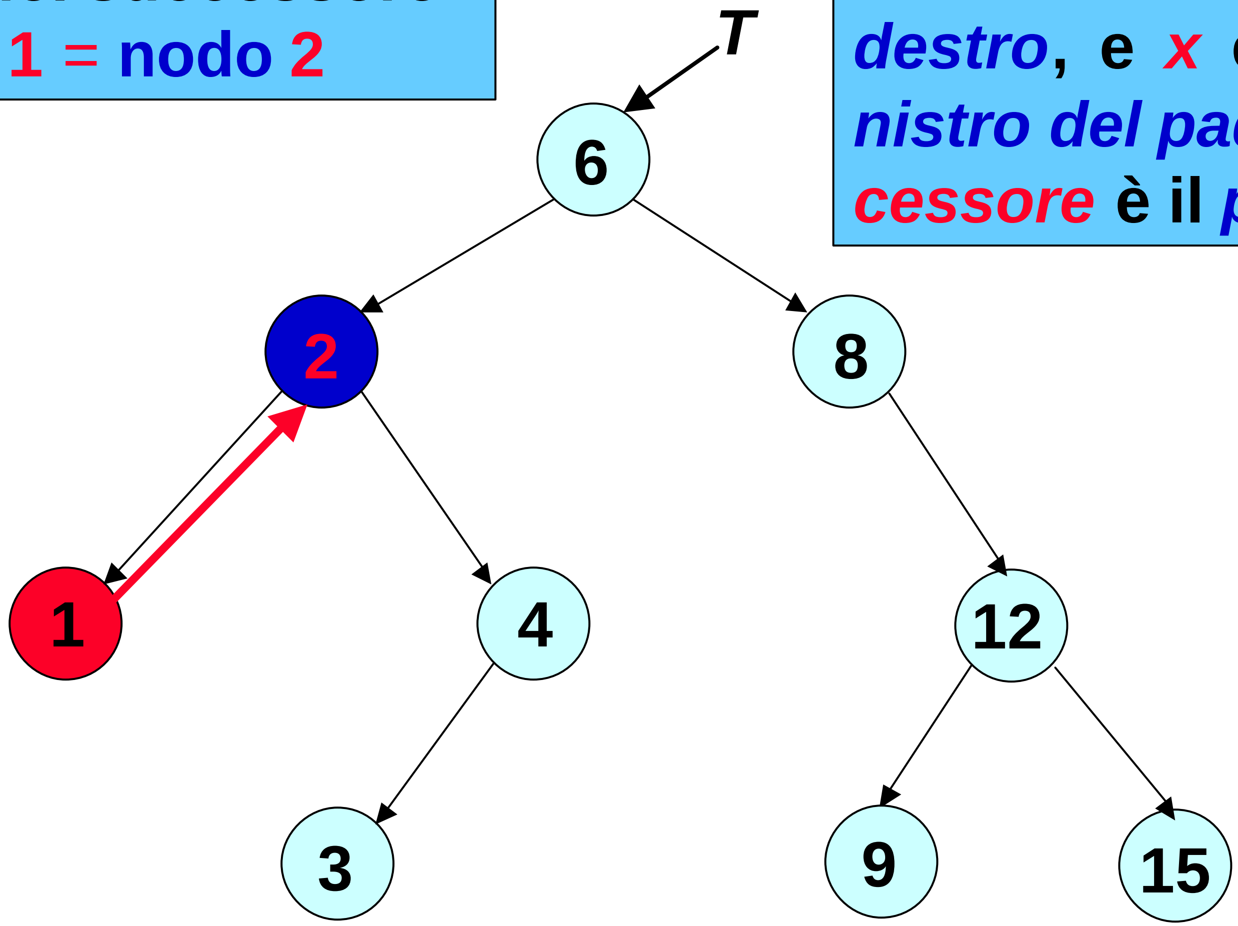
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 1 = nodo 2**



ARB: ricerca del successore

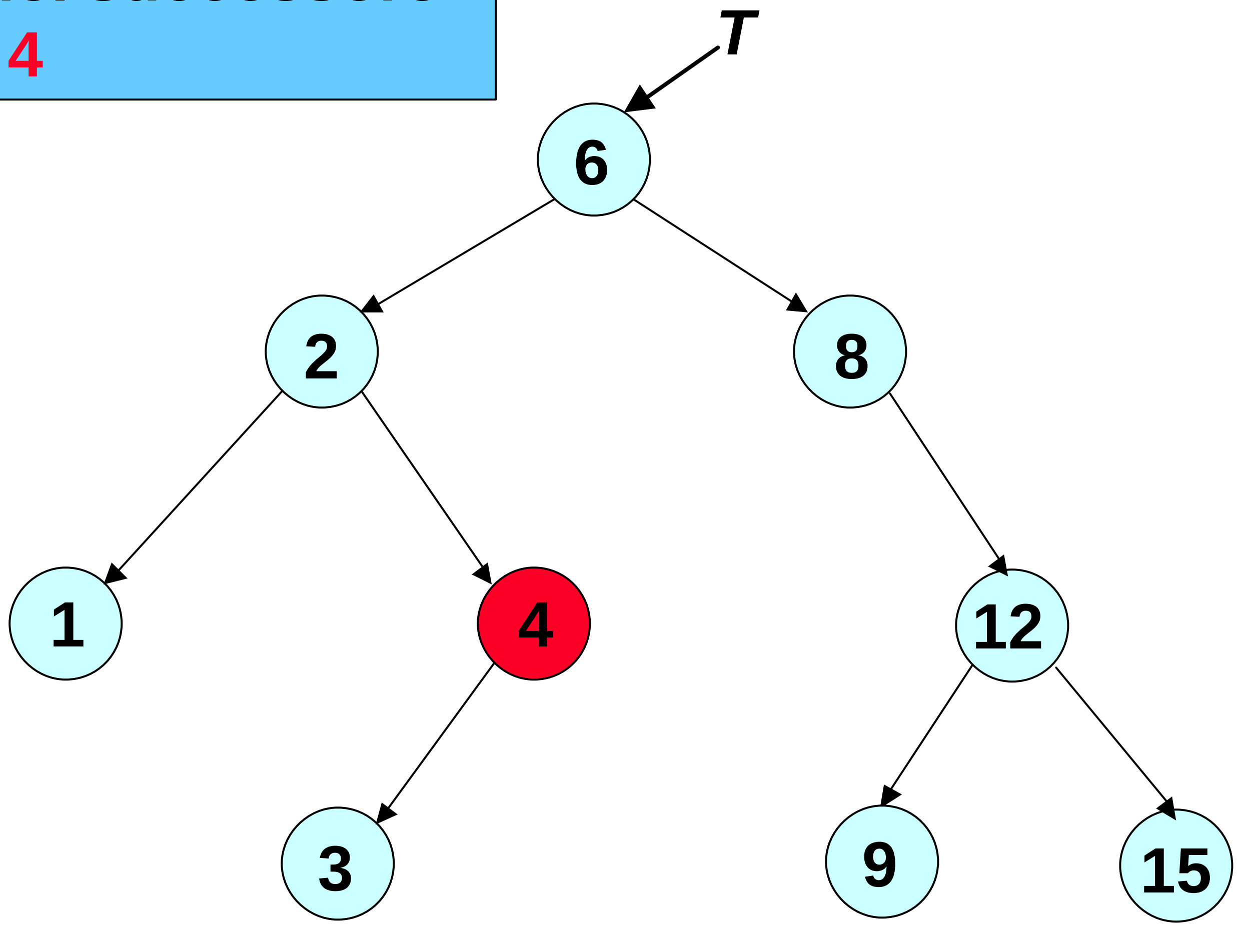
Ricerca **del successore del nodo 1 = nodo 2**



Se *x* NON ha un *figlio destro*, e *x* è *figlio sinistro del padre*, il *successore* è il *padre*.

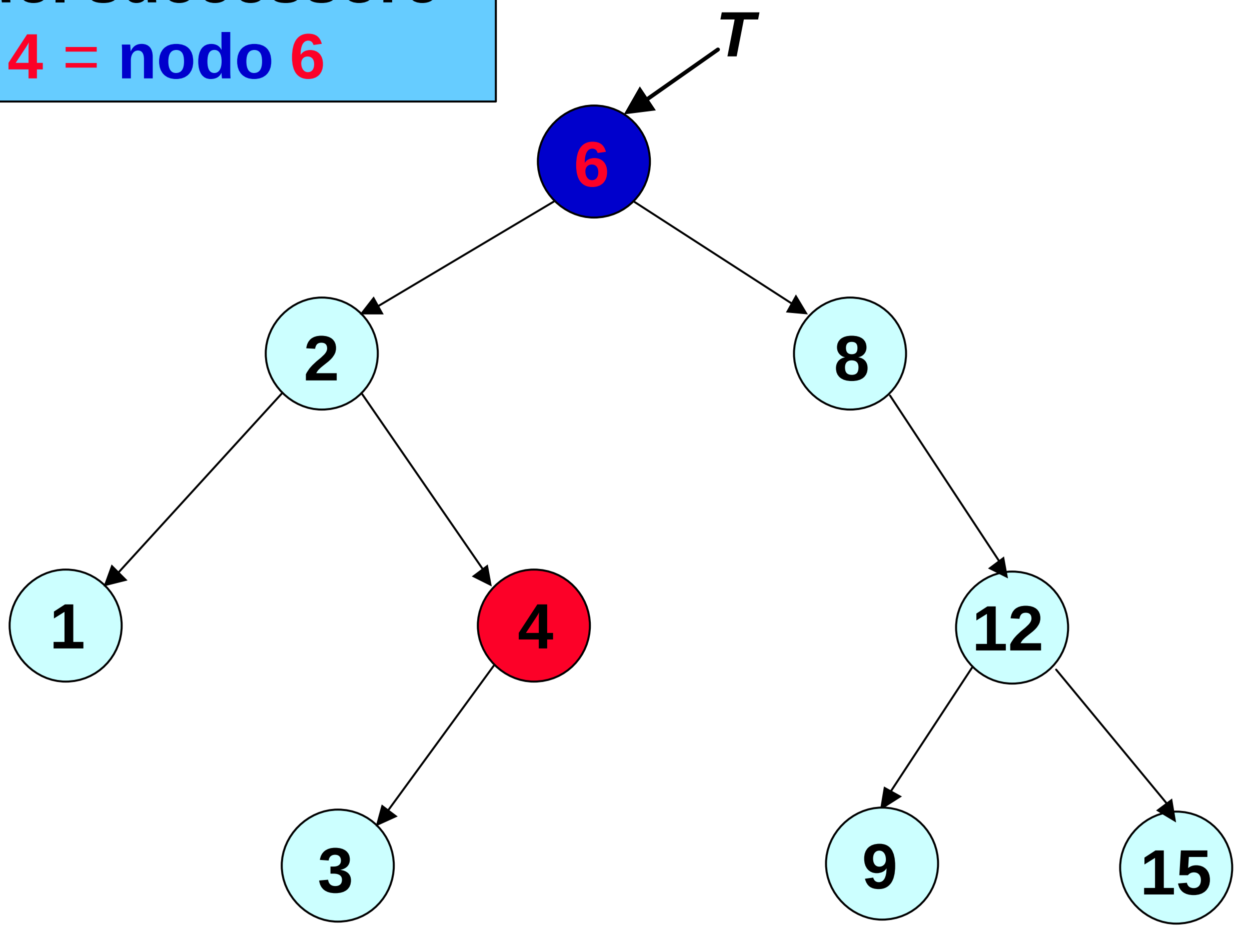
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 4**



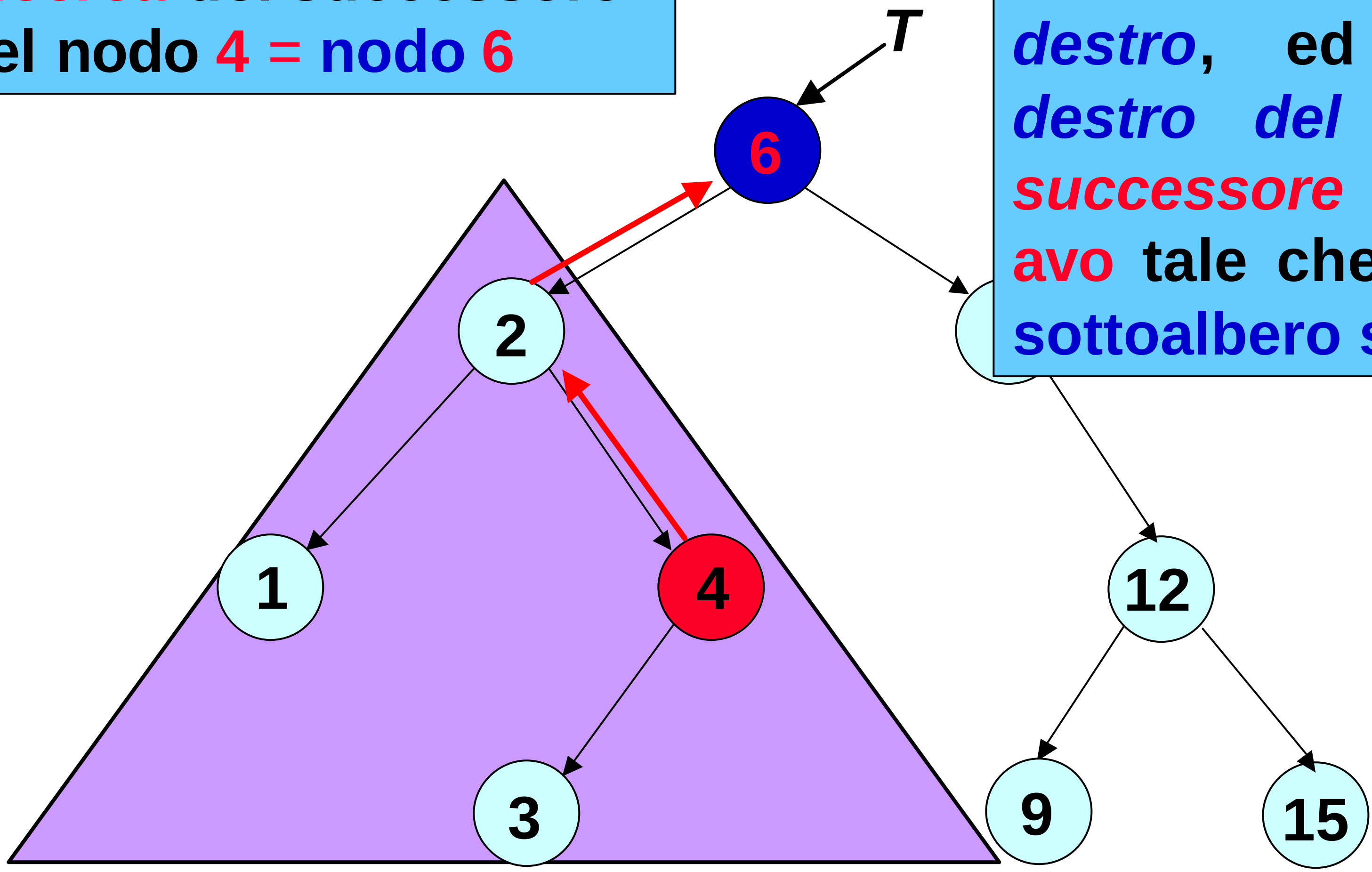
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 4 = nodo 6**



ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 4 = nodo 6**



Se *x* NON ha un *figlio destro*, ed è *figlio destro del padre*, il *successore* è il primo avo tale che x sta nel sottoalbero sinistro.

ARB: ricerca del successore

```
ABR-Successore(T,k)
  Z = T
  Y = NIL
  WHILE (Z!=NIL && key[Z]!=k)
     Y = Z
     IF (key[Z] < k) THEN
        Z = f_dx[Y]
     ELSE IF (key[Z] > k) THEN
        Z = f_sx[Y]
   IF (Z != NIL && f_dx[Z]!=NIL) THEN
        return ABR-Minimo(f_dx[Z])
   ELSE
     WHILE (Y != NIL AND Z = f_dx[Y])
      DO
          Z = Y
          Y = padre[Z]
      return Y
```

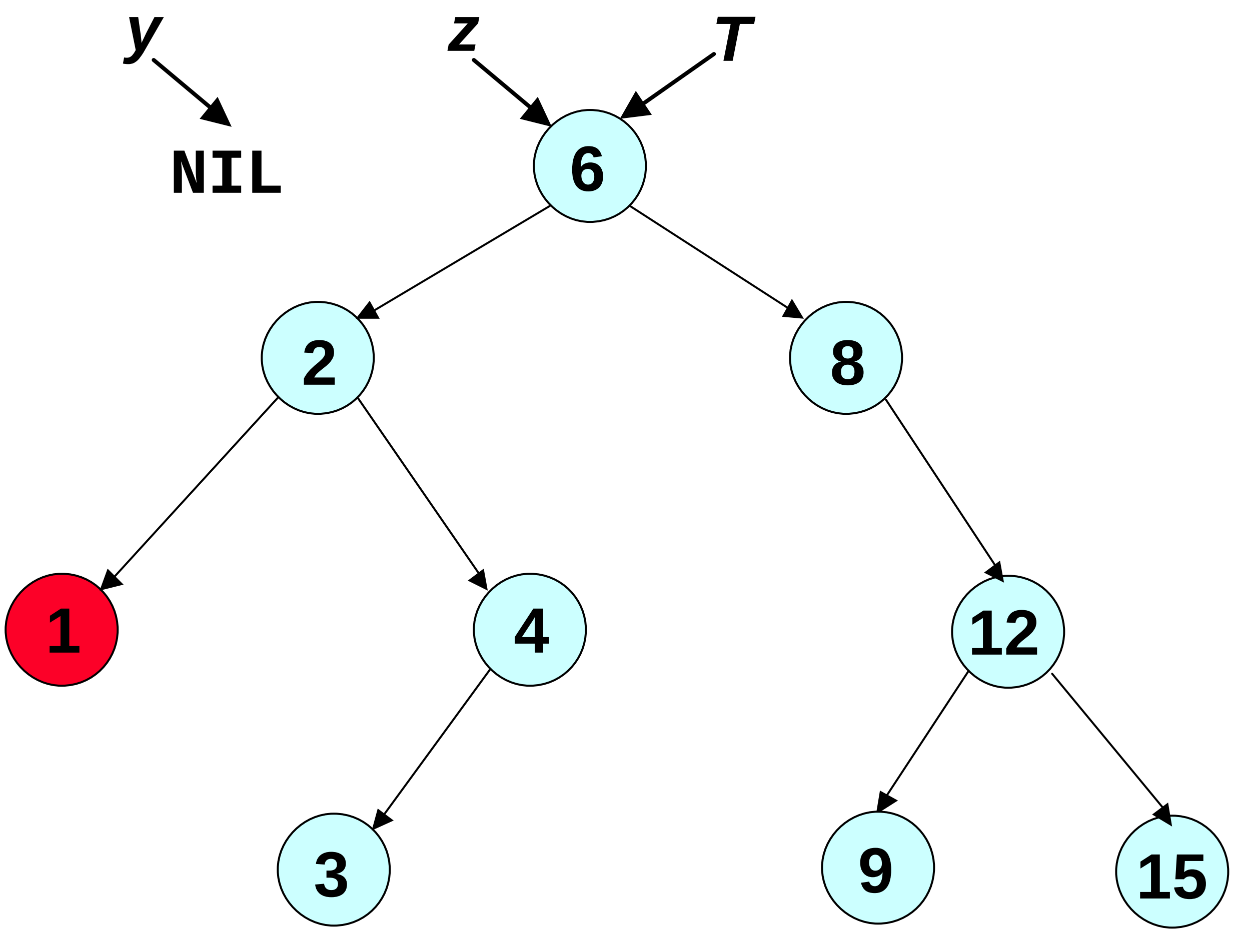
ARB: ricerca del successore

```
ABR-Successore(T,k)
  Z = T
  Y = NIL
  WHILE (Z!=NIL && key[Z]!=k)
```

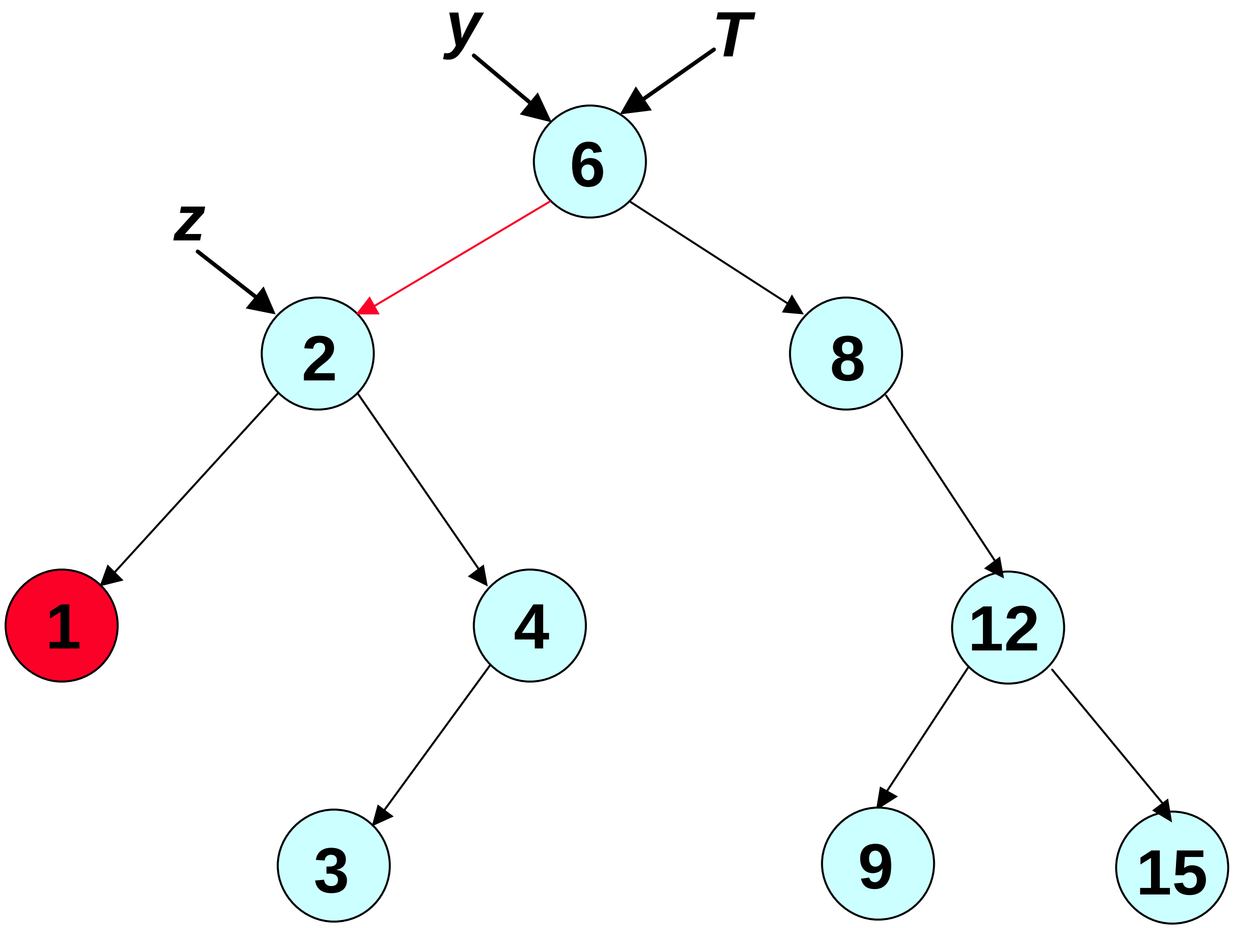
Questo algoritmo assume che ogni nodo abbia il puntatore al padre

```
     ELSE IF (key[Z] > k) THEN
         Z = f_sx[Y]
   IF (Z != NIL && f_dx[Z] != NIL) THEN
         return ABR-Minimo(f_dx[Z])
   ELSE
      WHILE (Y != NIL AND Z = f_dx[Y]) DO
          Z = Y
          Y = padre[Z]
      return Y
```

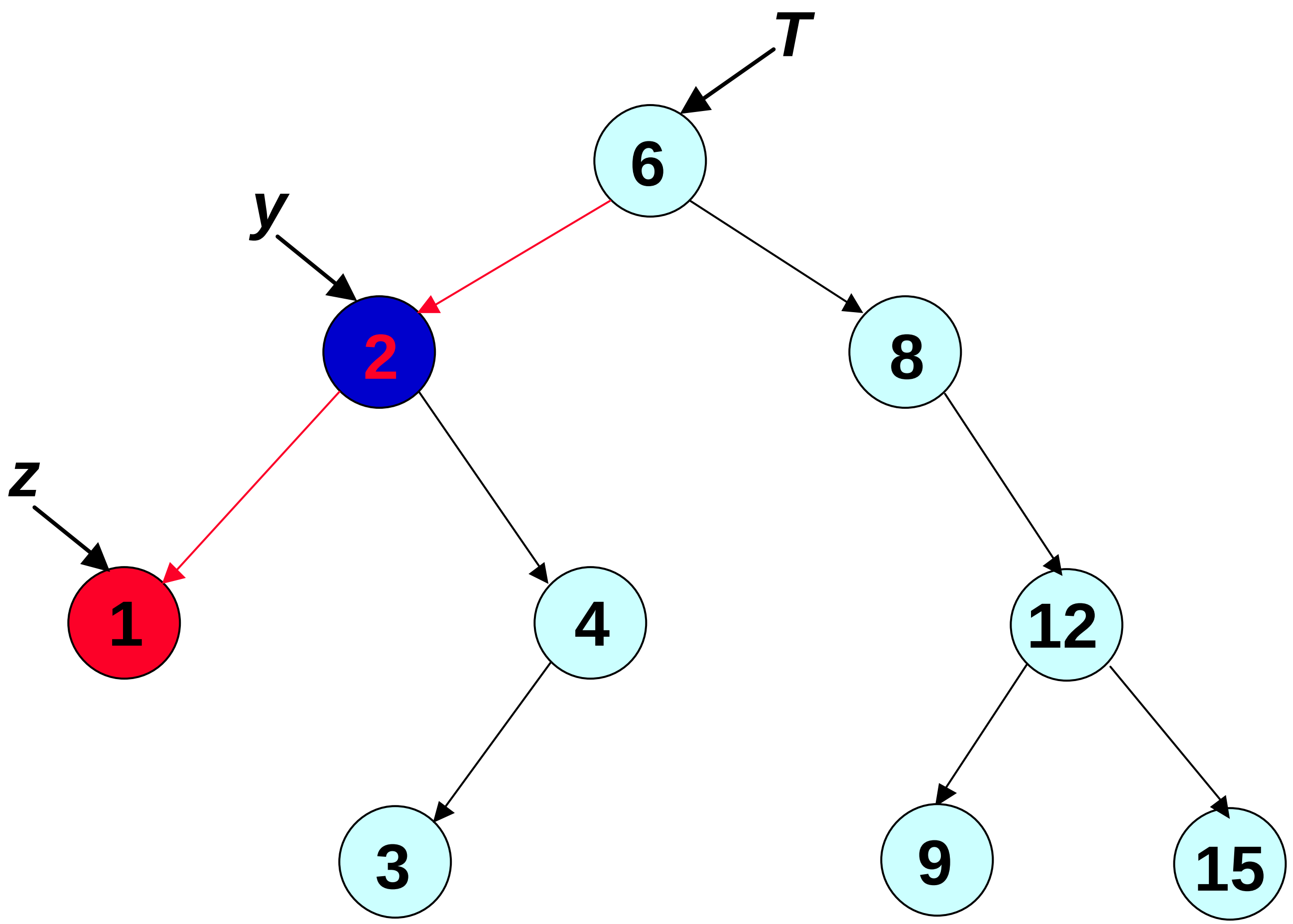
ARB: ricerca del successore II



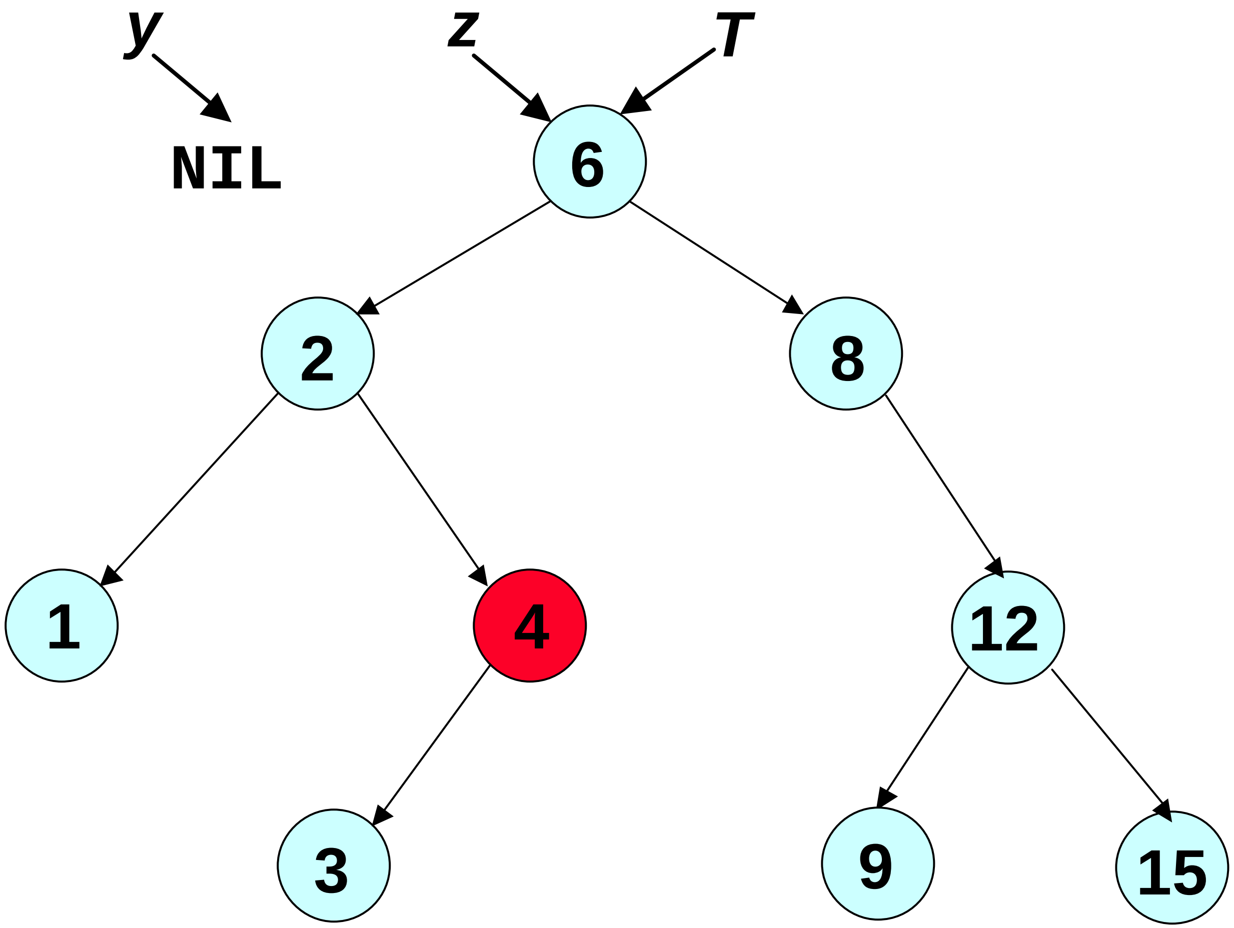
ARB: ricerca del successore II



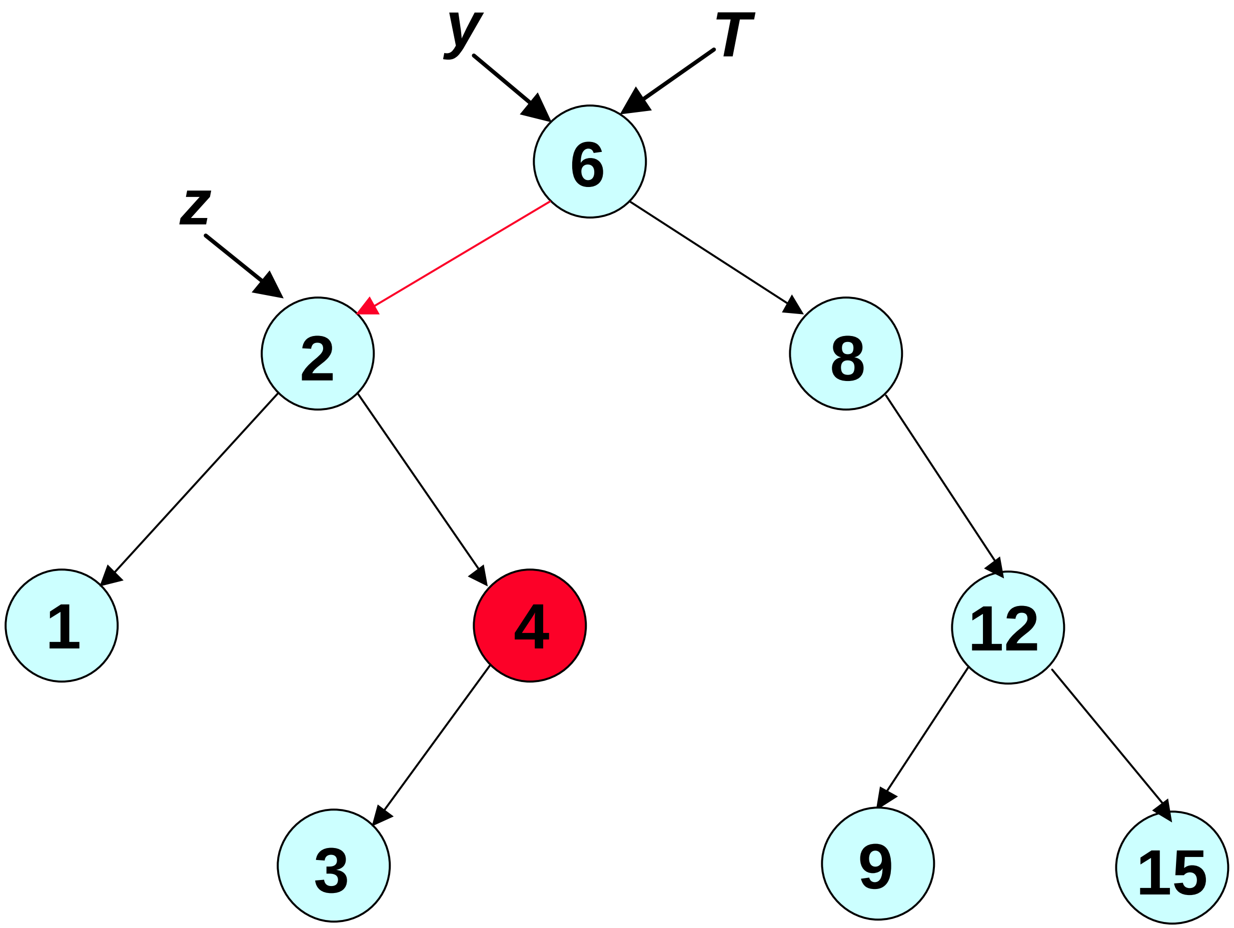
ARB: ricerca del successore II



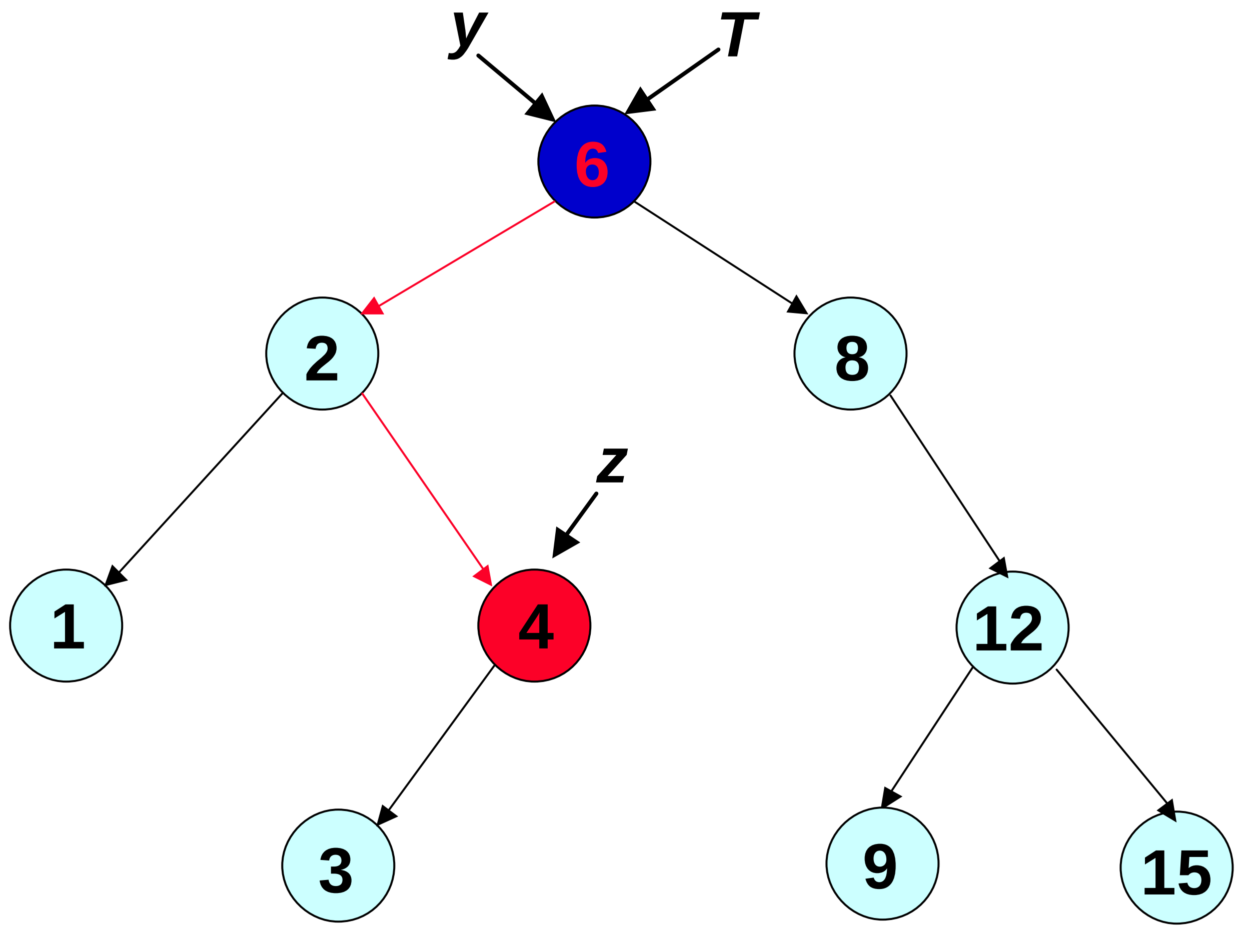
ARB: ricerca del successore II



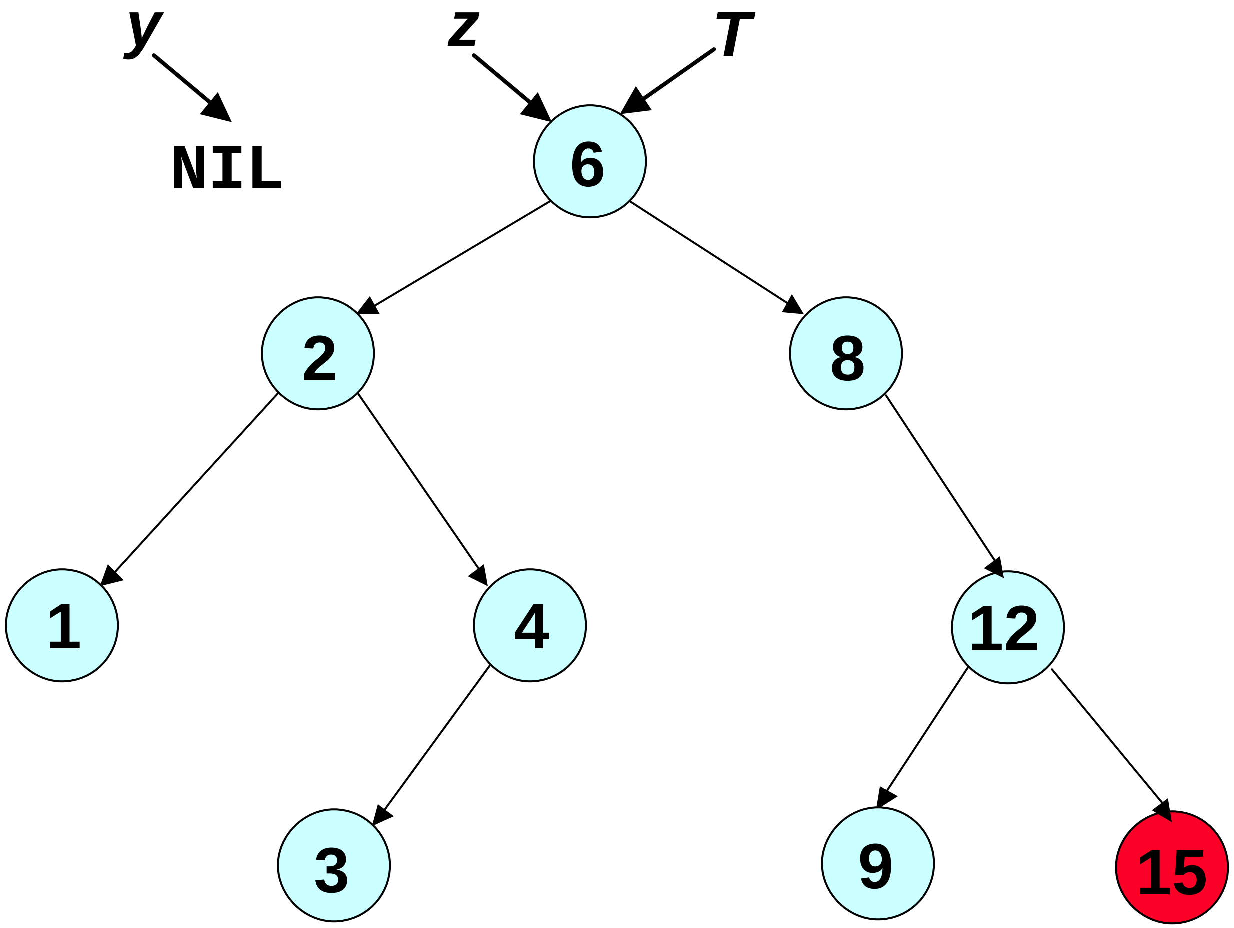
ARB: ricerca del successore II



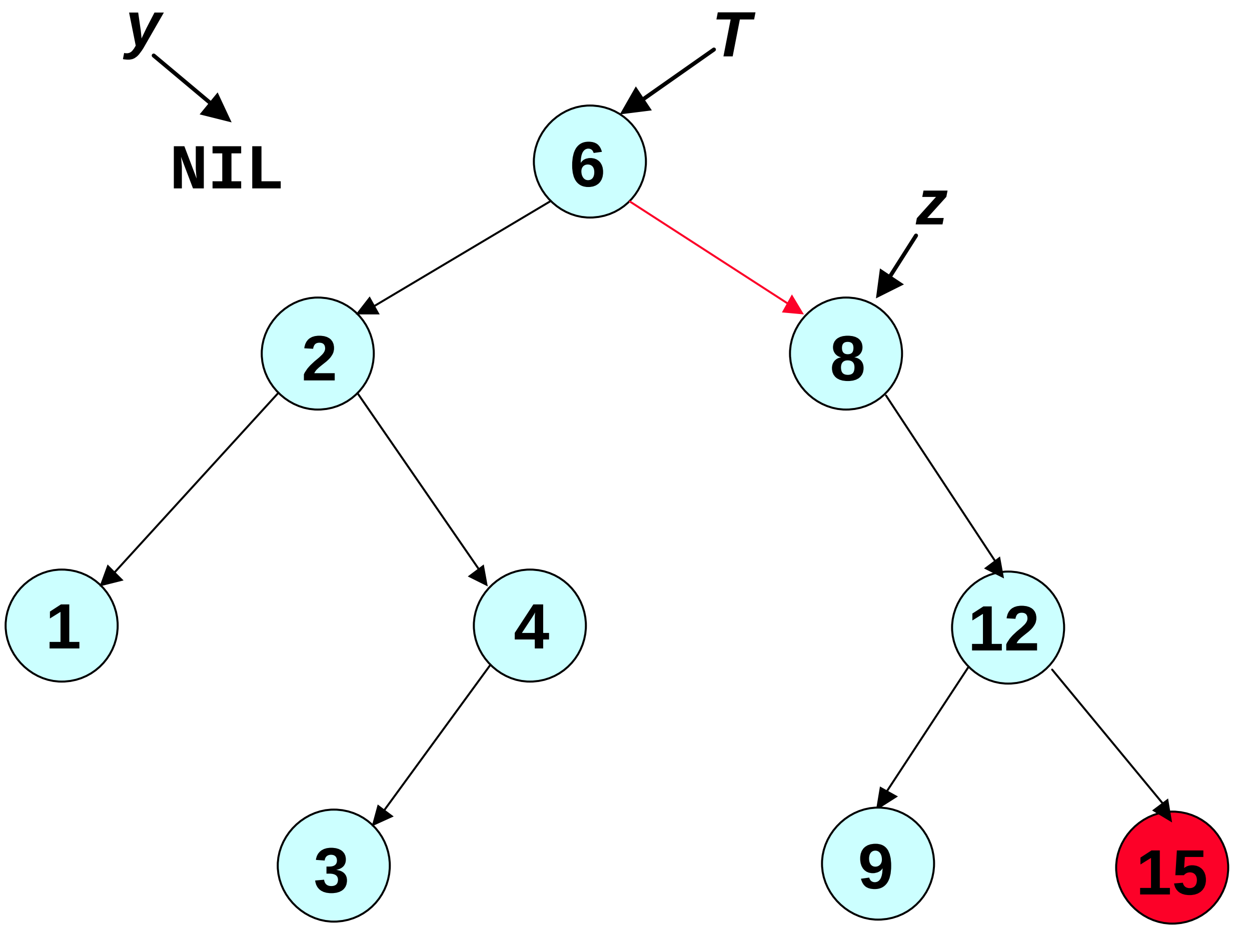
ARB: ricerca del successore II



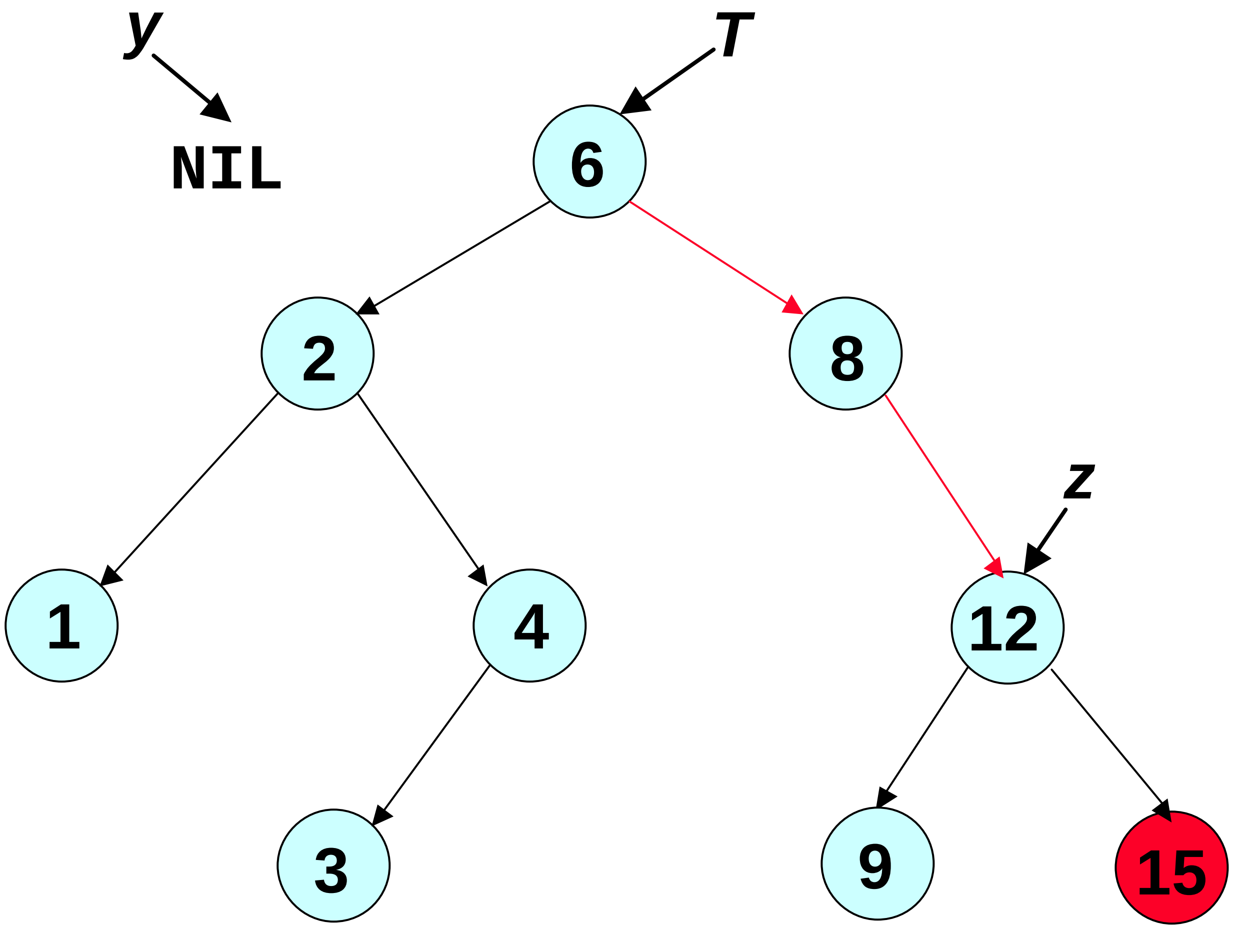
ARB: ricerca del successore II



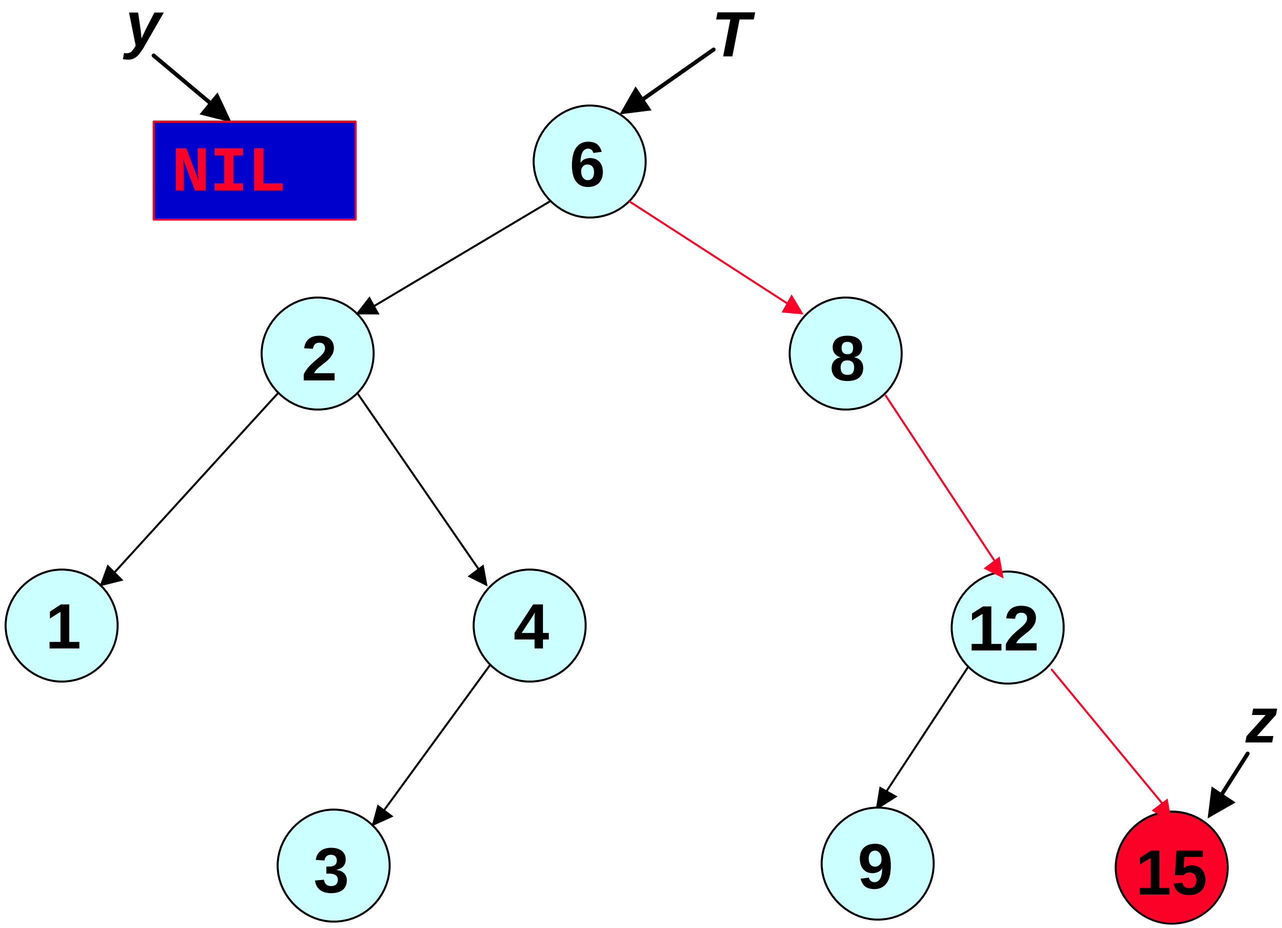
ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II

- **Inizializzo il *successore* a *NIL***

- **Partendo dalla radice dell'albero:**
  - **ogni volta che seguo un *ramo sinistro* per raggiungere il nodo, aggiorno il successore al nodo padre;**
  - **ogni volta che seguo un *ramo destro* per raggiungere il nodo, NON aggiorno il successore al nodo padre;**

ARB: ricerca del successore

```
ARB ABR-Successore'(T, k)
  Z = T
  Y = NIL
  WHILE (Z != NIL && key[Z] != k)
     IF (key[Z] < k)
        Z = f_dx[Z]
     ELSE IF (key[Z] > k)
        Y = Z
        Z = f_sx[Z]
  IF (Z != NIL && f_dx[Z] != NIL) THEN
        return ABR-Minimo(f_dx[Z])
  ELSE
        return Y
```

ARB: ricerca del successore ricorsiva

```
ABR-Successore_ric(T,k)
  IF (T != NIL) THEN
    IF (k > key[T]) THEN
         return ABR-Successore_ric(f_dx[T],k)
    ELSE IF (k = key[T] && f_dx[T] != NIL) THEN
             return ABR-Minimo(f_dx[T])
    ELSE /* key < key[T] */
       tmp = ABR-Successore_ric(f_sx[T],k)
       IF (tmp != NIL) THEN
          return tmp
       ELSE
          return T
  ELSE
     return NIL
```

ARB: ricerca del successore ricorsiva

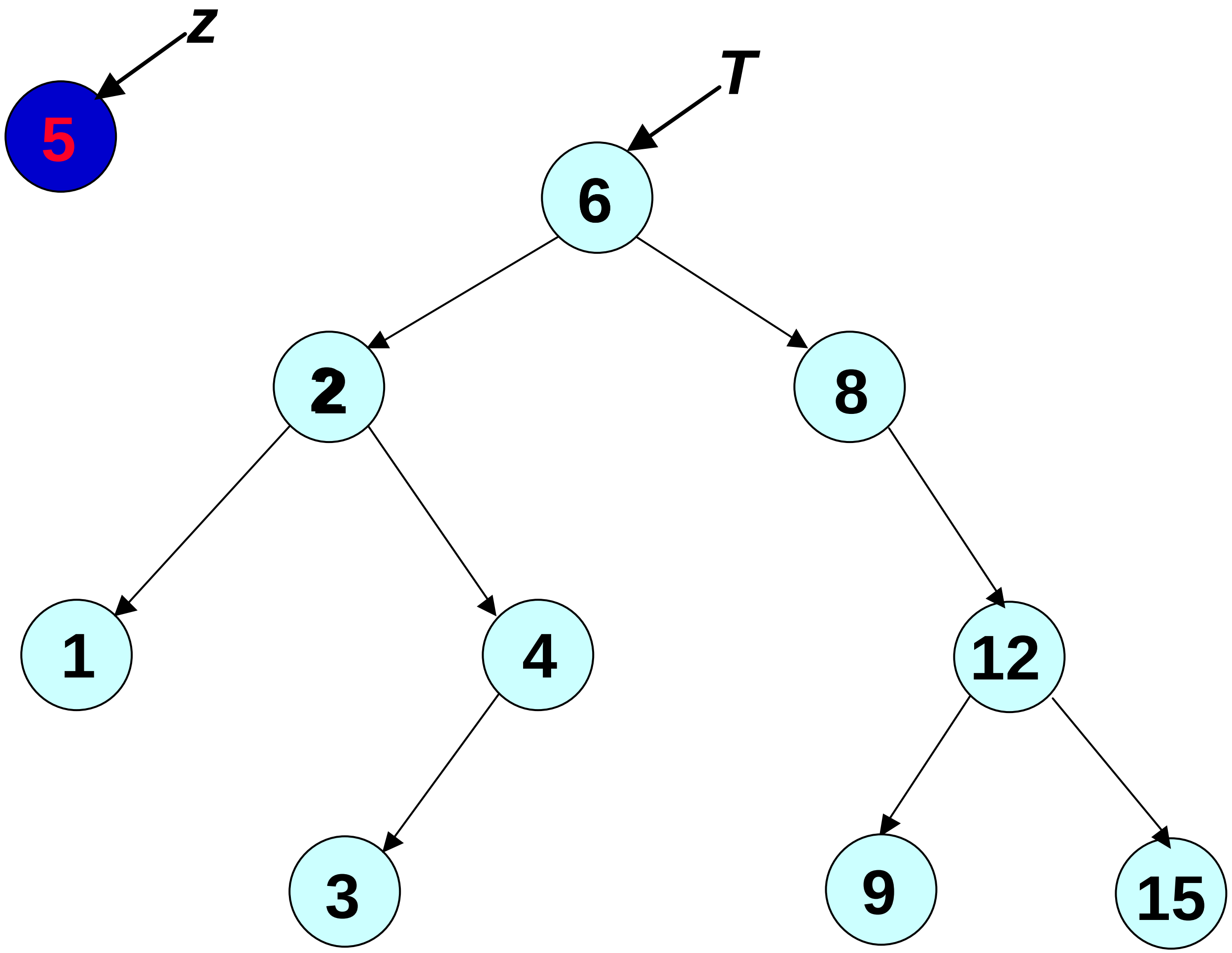
```
ABR-Successore_ric'(T,k,P_T)
  IF (T != NIL) THEN
    IF (k > key[T]) THEN
       return ABR-Successore_ric'(f_dx[T],k,P_T)
    ELSE IF (key < key[T]) THEN
       return ABR-Successore_ric'(f_sx[T],k,T)
    ELSE /* key = key[T] */
       IF (f_dx[T] != NIL) THEN
             return ABR-Minimo(f_dx[T])
  return P_T
```

```
ABR-Successore'(T,k)
   return ABR-Successore_ric'(T,k,NIL)
```

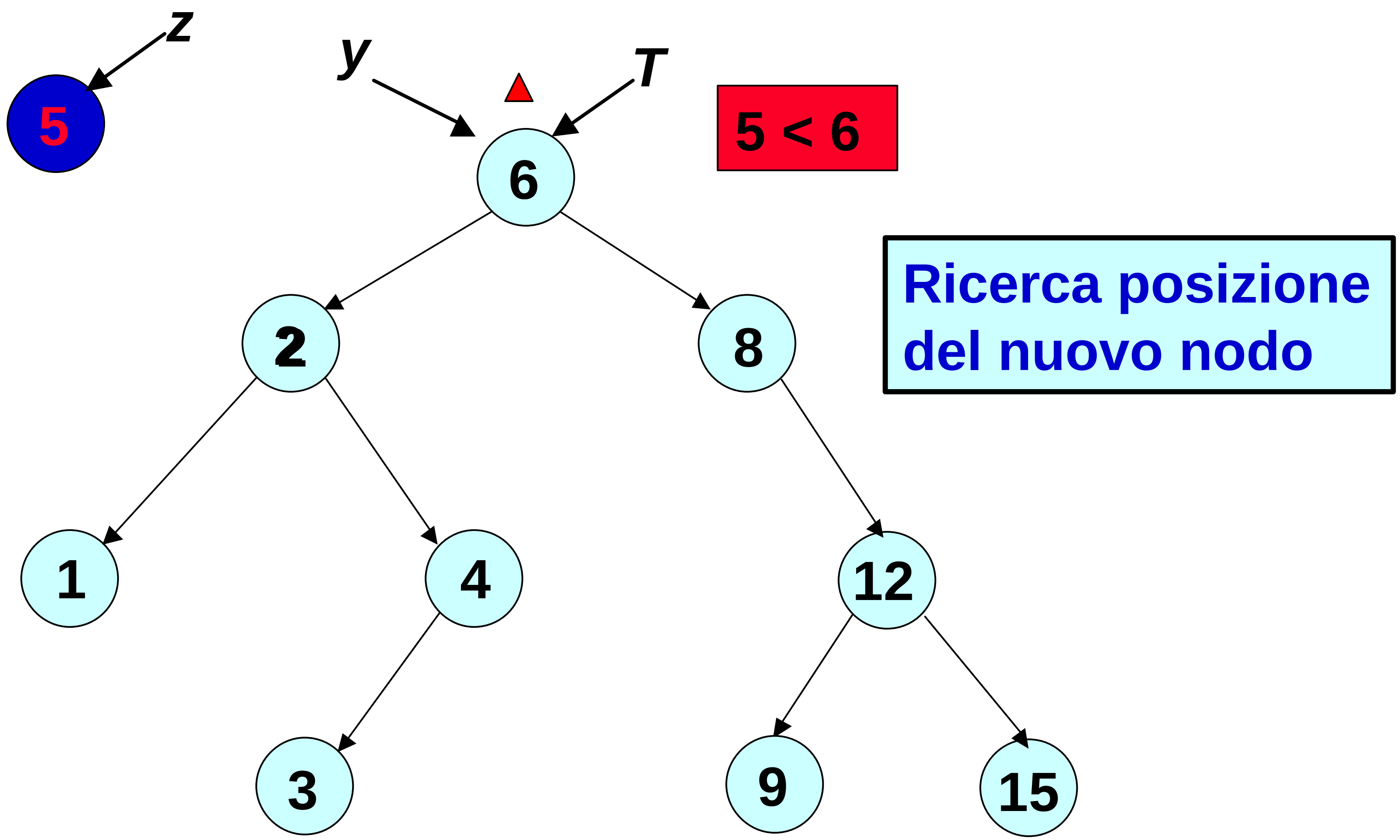
ARB: costo delle operazioni

Teorema. *Le operazioni di **Ricerca**, **Minimo**, **Massimo**, **Successore** e **Predecessore** su di un **Albero Binario di Ricerca** possono essere eseguite in tempo $O(h)$, dove h è l'altezza dell'albero.*

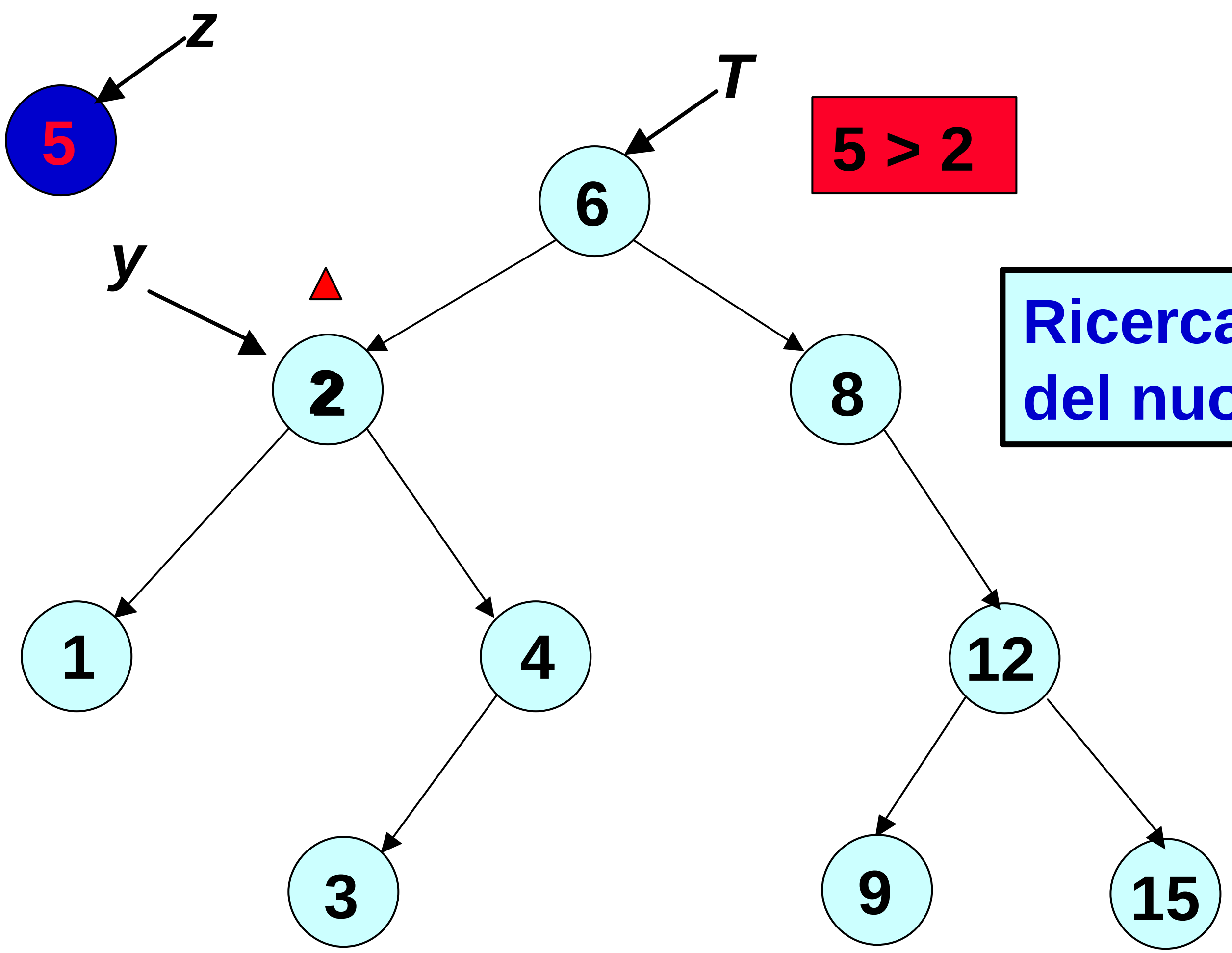
ARB: Inserimento di un nodo (caso I)



ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

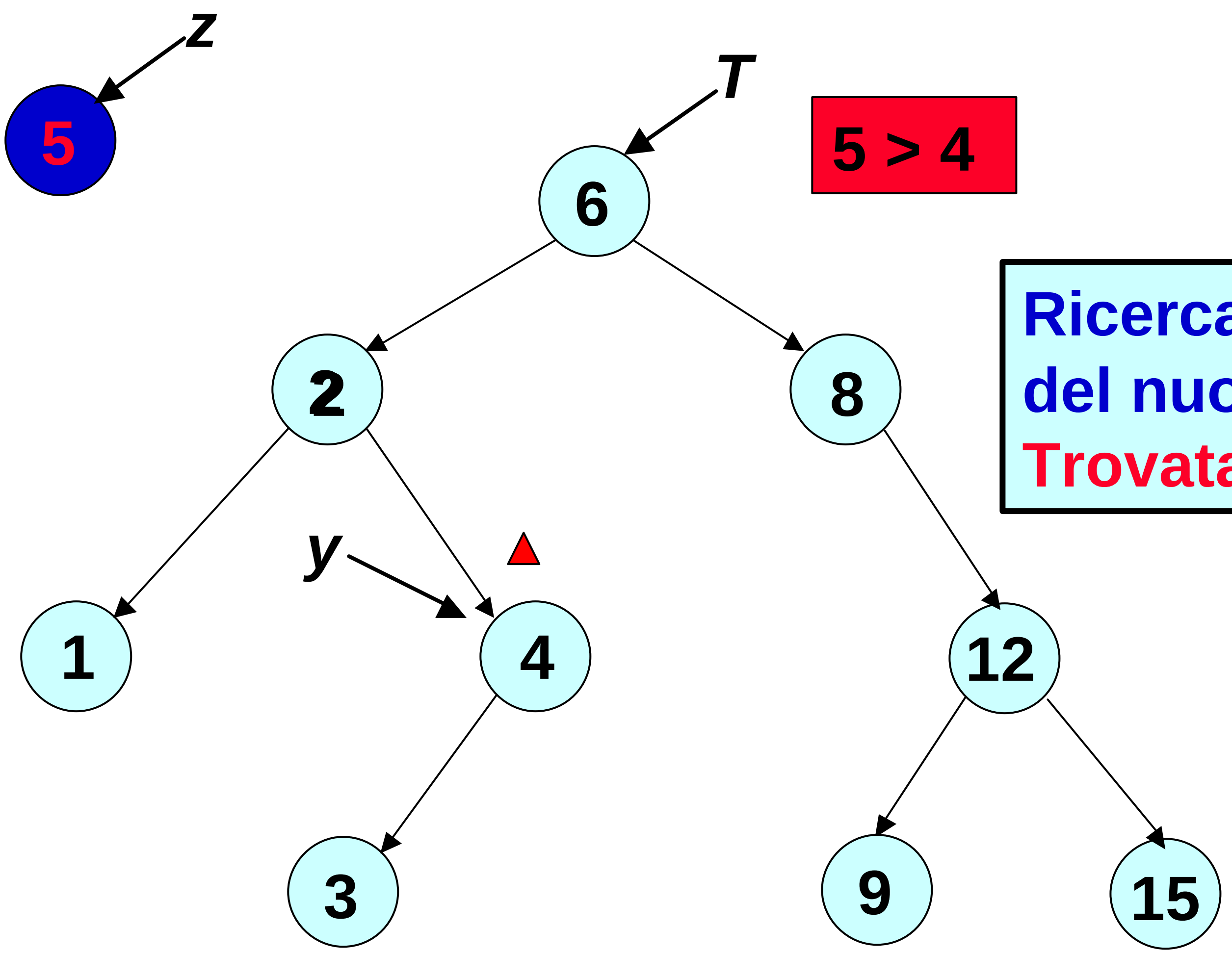


ARB: Inserimento di un nodo (caso I)



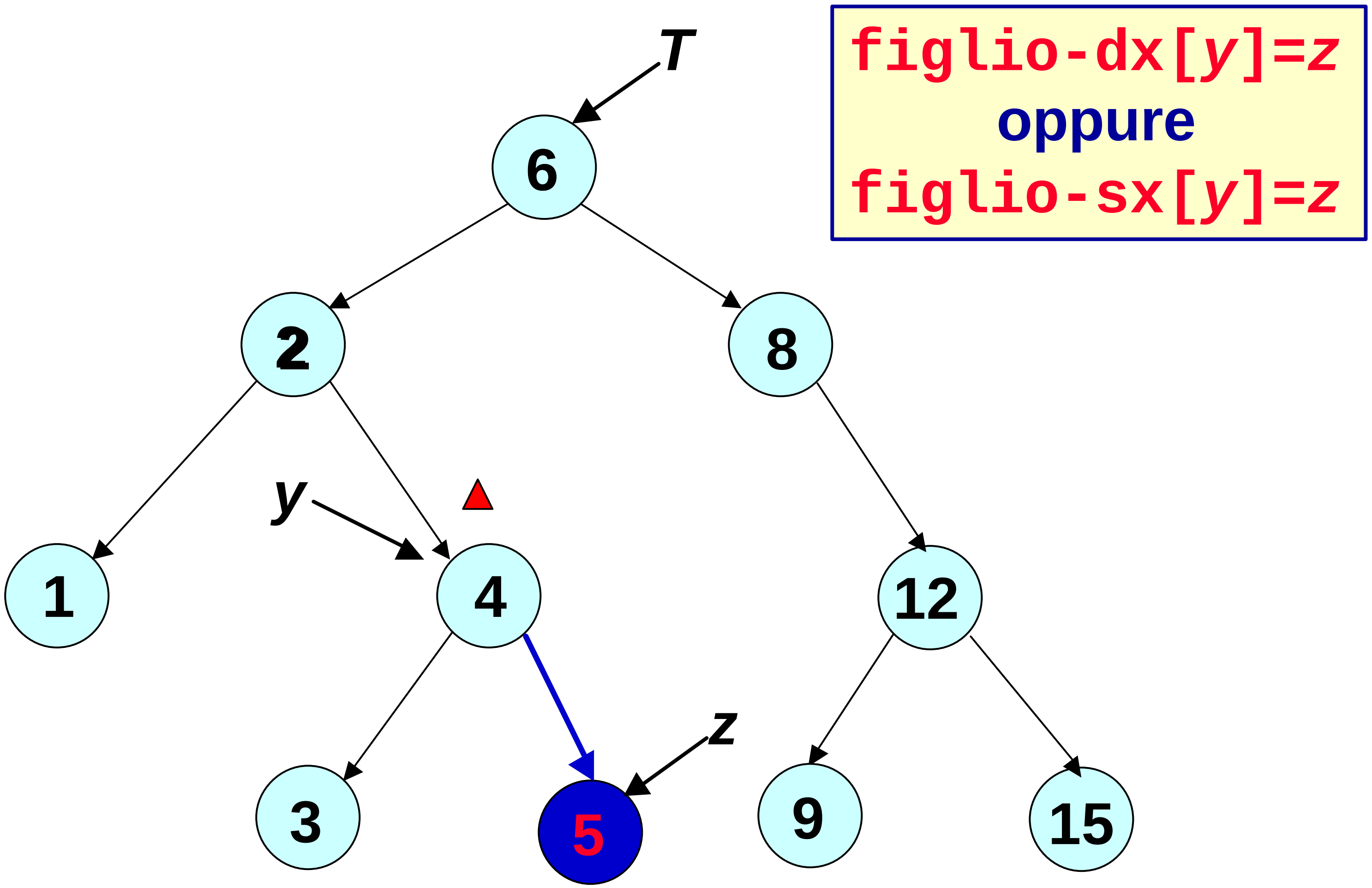
Ricerca posizione del nuovo nodo

ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

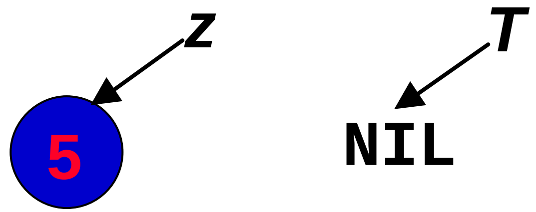


Ricerca posizione del nuovo nodo Trovata!

ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

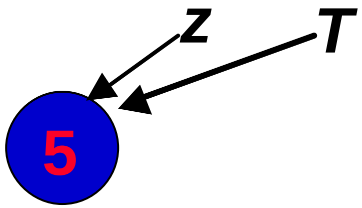


ARB: Inserimento di un nodo (caso II)



Albero è vuoto

ARB: Inserimento di un nodo (caso II)



`Root[T] = z`

Albero è vuoto
Il nuovo nodo da inserire diviene la radice

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-inserisci(T,k)
   z = alloca nodo ARB
   key[z] = k
   y = NIL
   x = T
   WHILE (x != NIL)
     DO y = x
        IF (key[z] < key[x])
          THEN x = sx[x]
          ELSE x = dx[x]
   IF y = NIL THEN
          T = z
   ELSE IF key[z] < key[y] THEN
             sx[y] = z
        ELSE
             dx[y] = z
```

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-inserisci(T,k)
   z = alloca nodo ARB
   key[z] = k
   y = NIL
   x = T
   WHILE (x != NIL)
     DO y = x
        IF (key[z] < key[x])
          THEN x = sx[x]
          ELSE x = dx[x]
   IF y = NIL THEN
          T = z
   ELSE IF key[z] < key[y] THEN
             sx[y] = z
        ELSE
             dx[y] = z
```

Ricerca posizione del nuovo nodo

(caso II)

(caso I)

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-insert_ric(T,z)
  IF T != NIL THEN
    IF key[z] < key[T] THEN
        sx[T]= ABR-insert_ric(sx[T],z)
    ELSE
        dx[T]= ABR-insert_ric(dx[T],z)
    return T
  ELSE
      return z
```

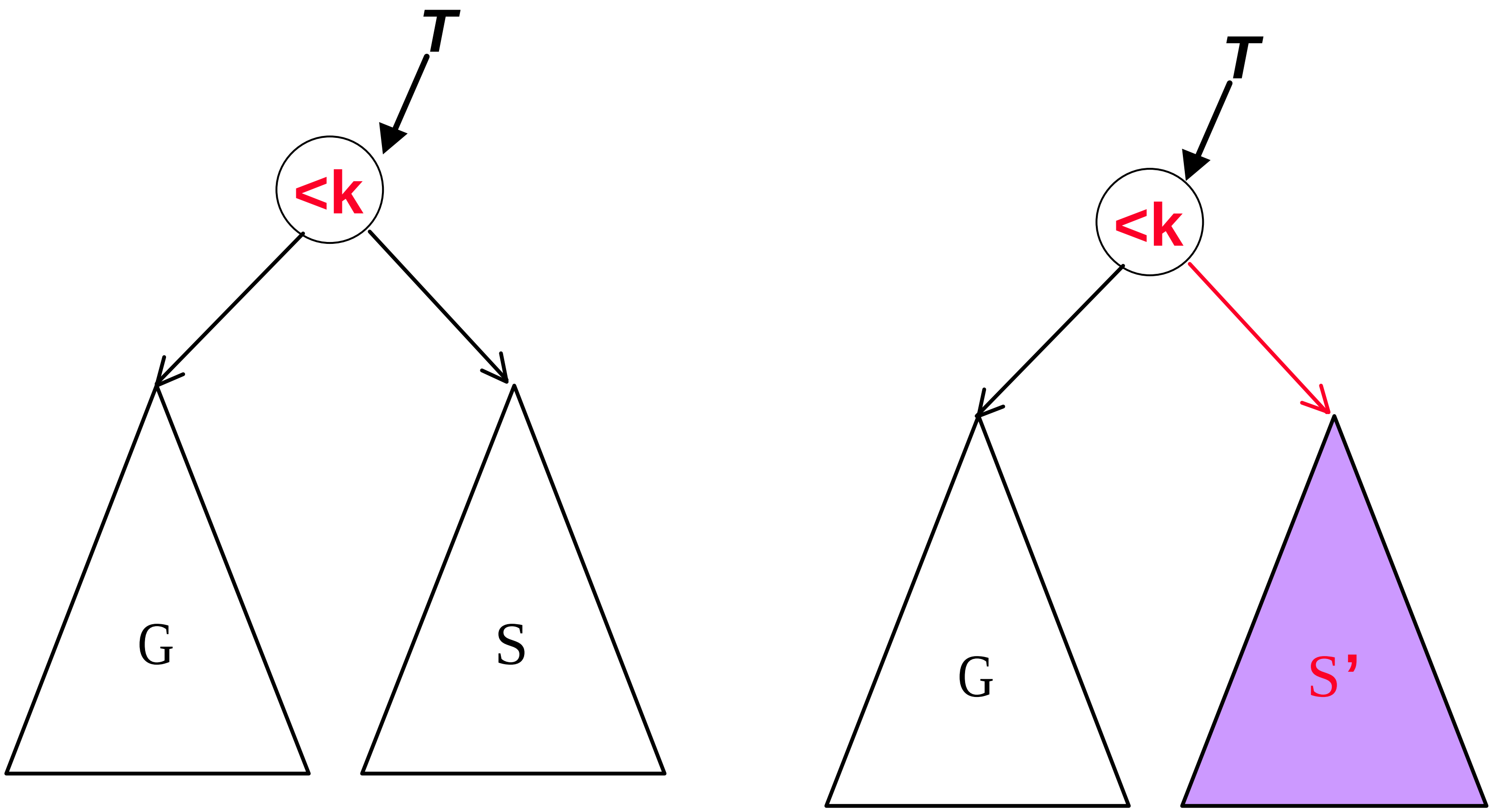
Ricordate che qui z è il nodo che contiene la chiave da inserire

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-insert_ric(T,k)
  IF T != NIL THEN
    IF k < key[T] THEN
         sx[T]= ABR-insert_ric(sx[T],k)
    ELSE
         dx[T]= ABR-insert_ric(dx[T],k)
    return T
  ELSE
       z = alloca nodo ARB
       key[z] = k
       return z
```

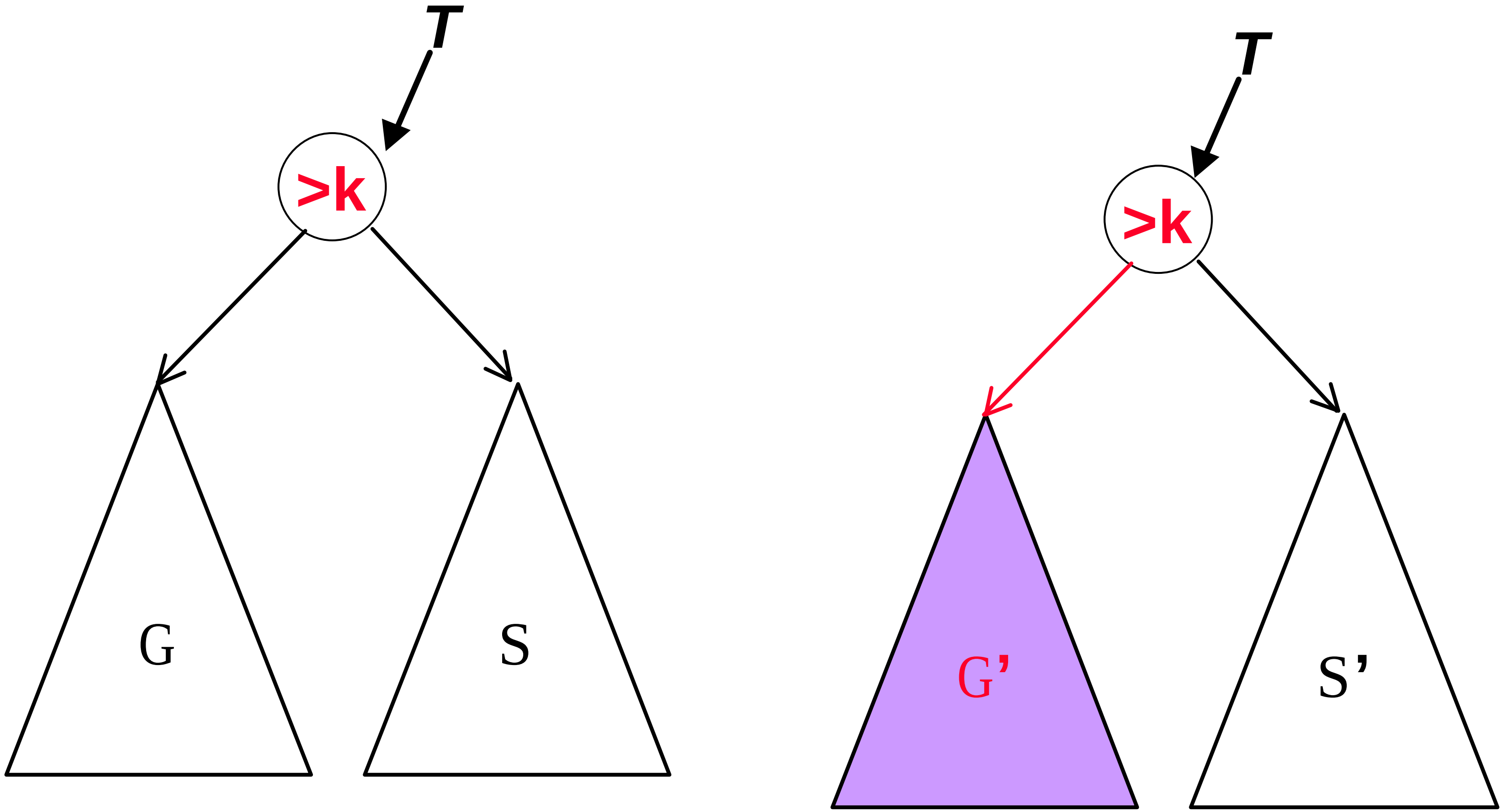
Qui invece k è la chiave da inserire. Si deve quindi allocare il nodo!

Cancellazione ricorsiva



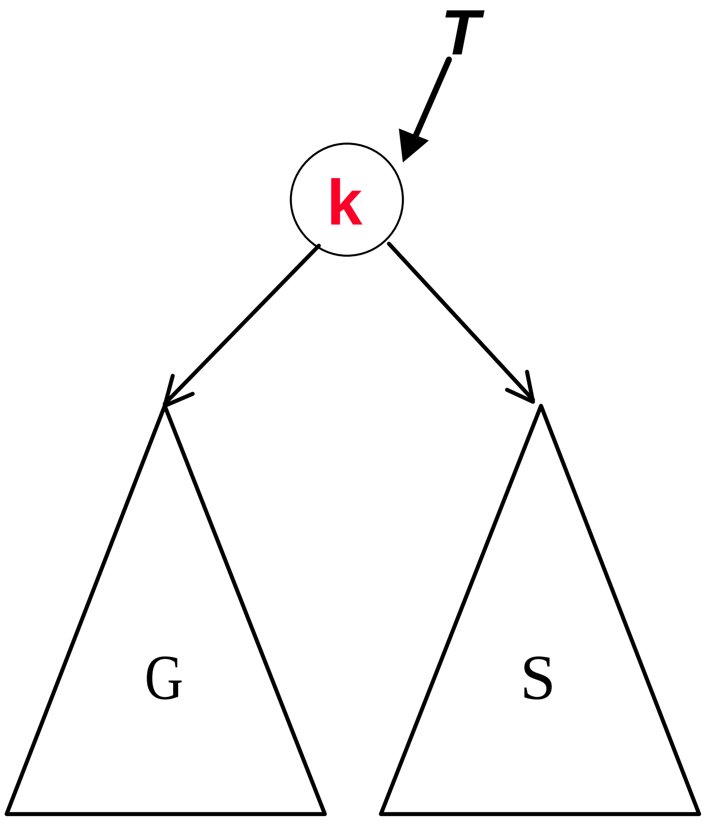
S' = **cancella(**S**,k)**

Cancellazione ricorsiva

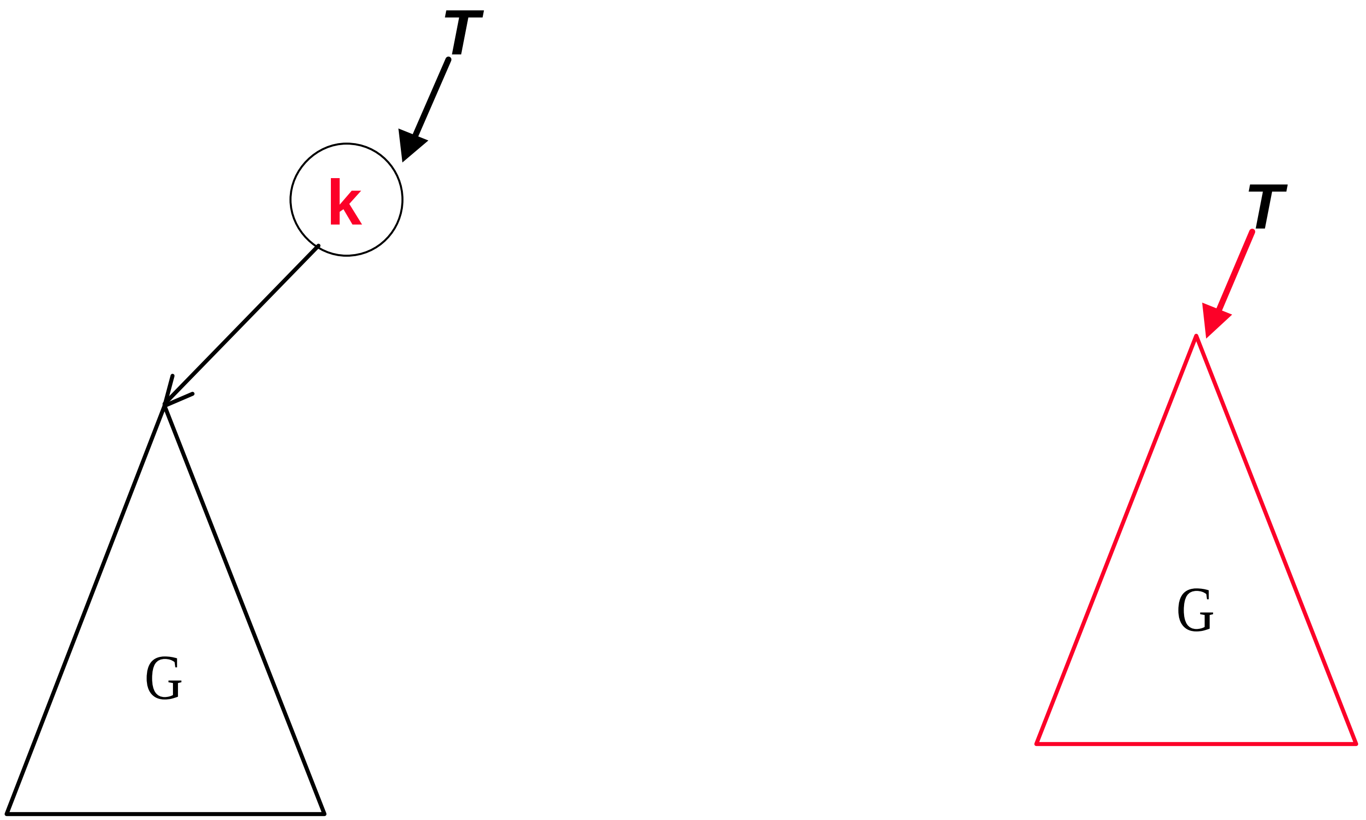


G' = **cancella(**G**,k)**

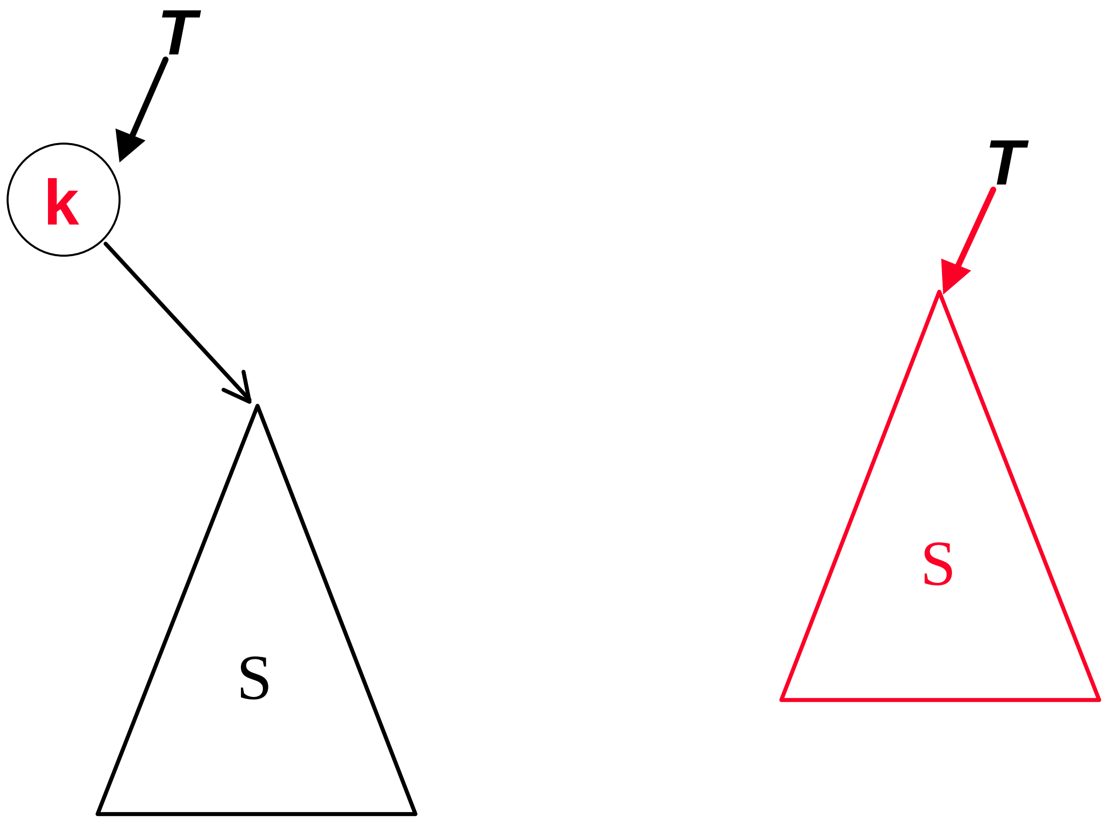
Cancellazione ricorsiva



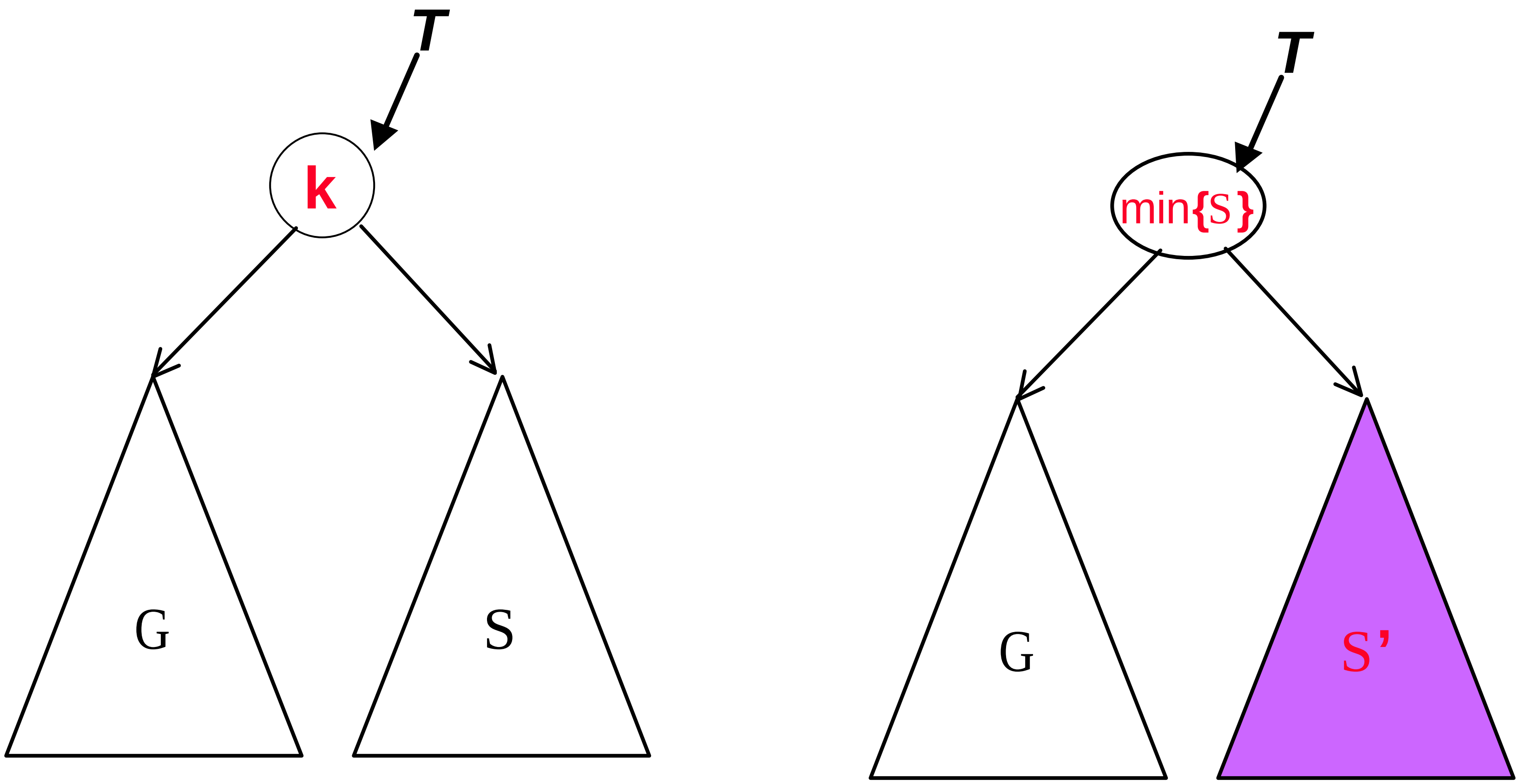
Cancellazione ricorsiva (caso I)



Cancellazione ricorsiva (caso II)



Cancellazione ricorsiva (caso III)



S' = S - { min{S} }

ARB: Cancellazione ricorsiva

```
ABR-Cancella-ric(k,T)
   IF T != NIL THEN
     IF k < key[T] THEN
          sx[T]=ARB-Cancella-ric(k,sx[T])
     ELSE IF k > key[T] THEN
          dx[T]=ARB-Cancella-ric(k,dx[T])
     ELSE /* k = key[T] */
         nodo = T
         IF dx[nodo]= NIL THEN
             T = sx[nodo]
         ELSE IF sx[nodo]= NIL THEN
             T = dx[nodo]
         ELSE
            nodo = Stacca-min(dx[T],T)
            "copia nodo in T"
        dealloca(nodo)
   return T
```

casi I e II

caso III

ARB: Cancellazione ricorsova

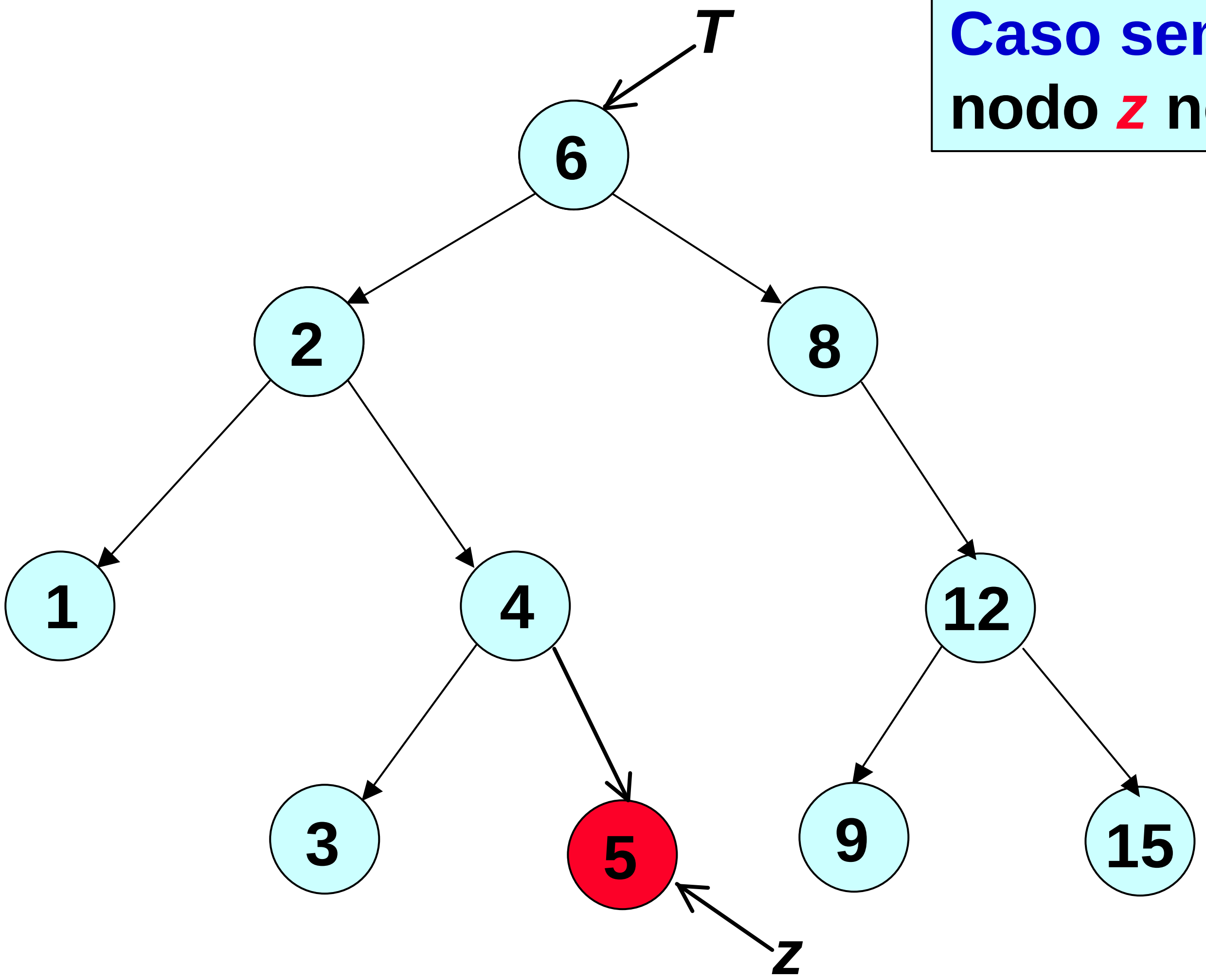
Il parametro P serve per ricordarsi il padre di T durante la discesa

```
Stacca-min(T,P)
   IF T ¹ NIL THEN
     IF sx[T] ¹ NIL THEN
          return Stacca-min(sx[T],T)
     ELSE /* successore trovato */
        IF T = sx[P]
           sx[P] = dx[T]
        ELSE /* min è il primo nodo passato */
           dx[P] = dx[T]
   return T
```

***NOTA**. L'algoritmo **stacca il nodo minimo dell'albero T e ne ritorna il puntatore**. Può anche ritornare NIL in caso non esista un minimo (T è vuoto). Il valore di ritorno dovrebbe essere quindi verificato dal chiamante prima dell'uso.*

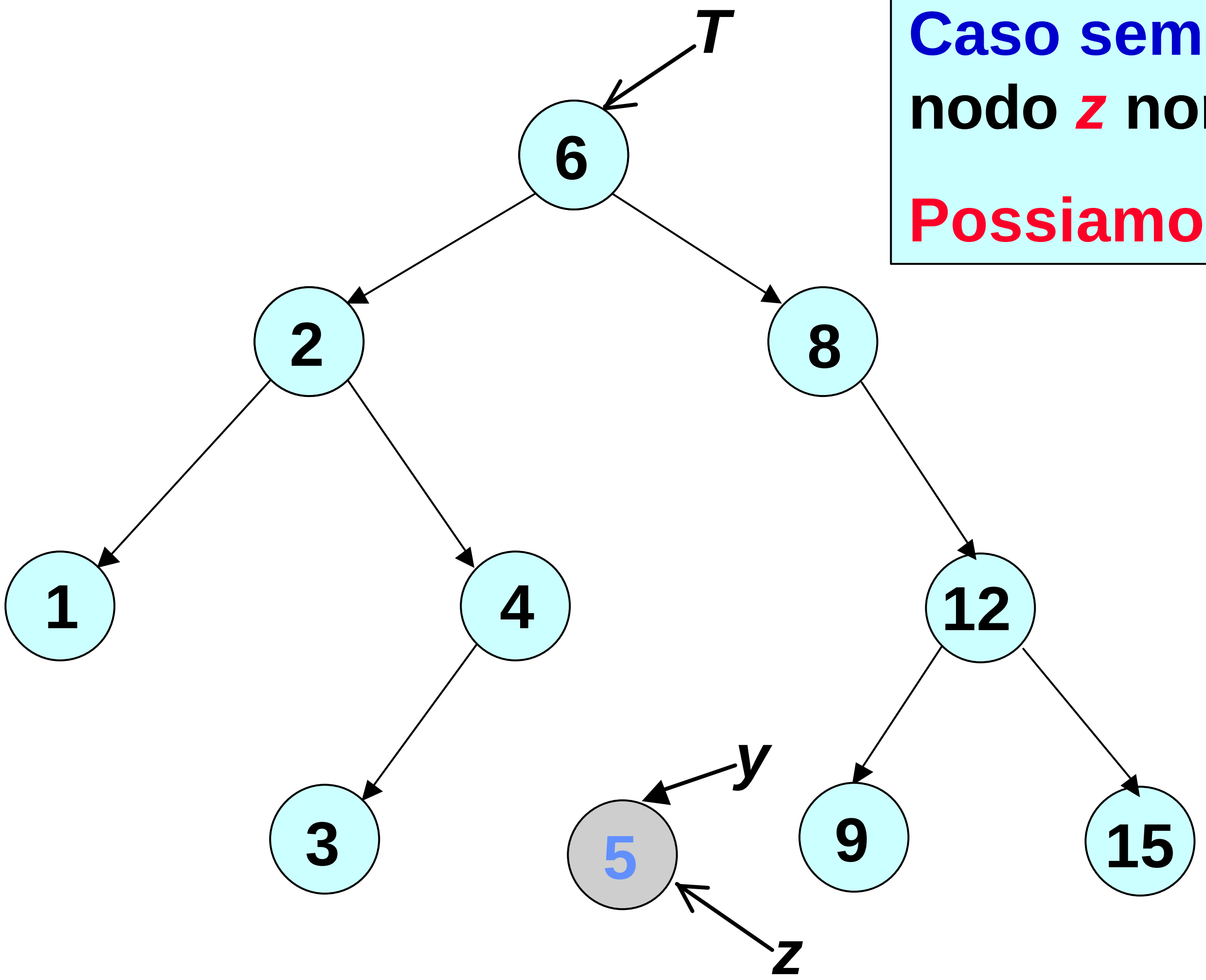
Nel caso della cancellazione ricorsiva però siamo sicuri che il minimo esiste sempre e quindi non è necessario eseguire alcun controllo!

ARB: Cancellazione di un nodo (caso I)



Caso semplice: il nodo *z* non ha figli

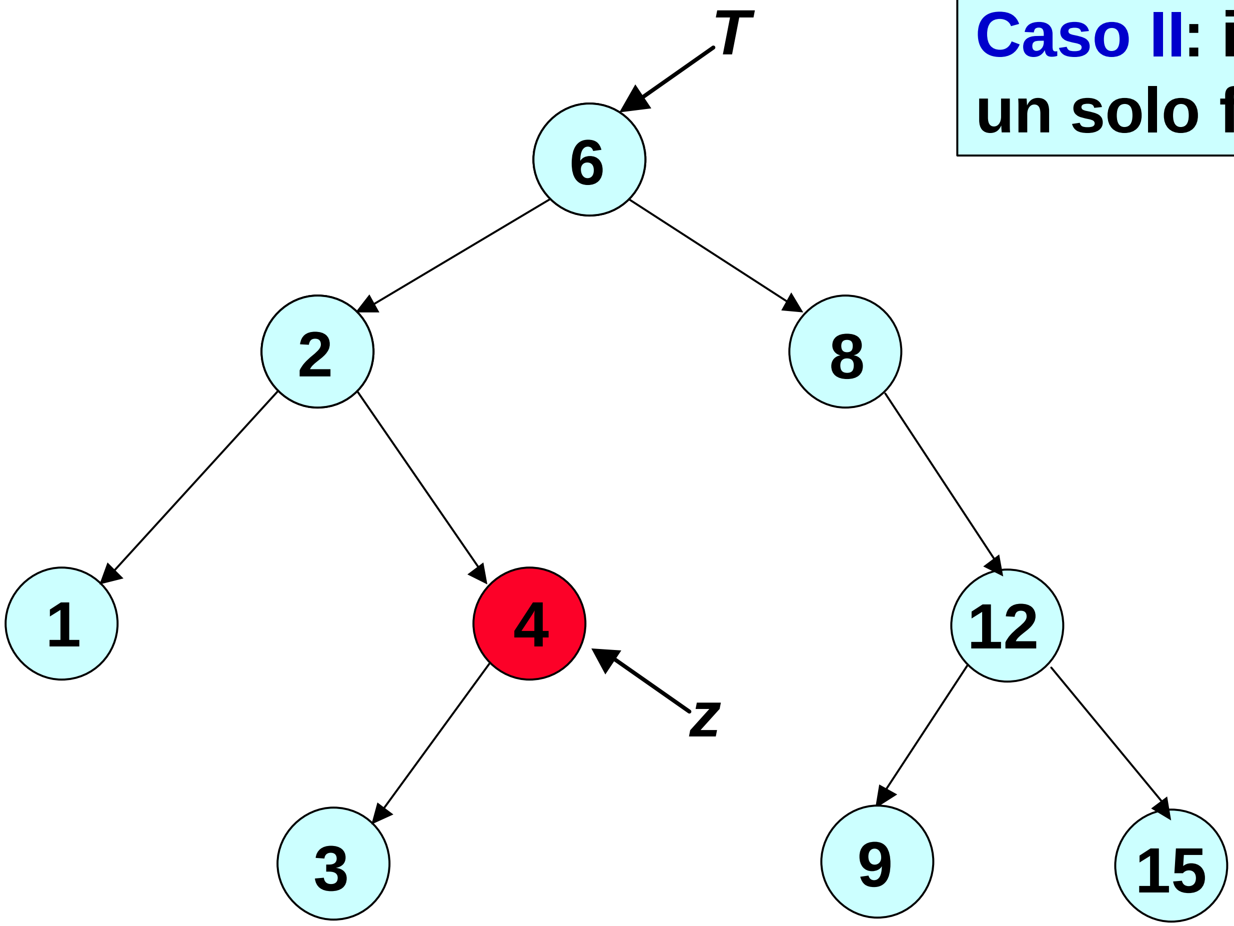
ARB: Cancellazione di un nodo (caso I)



Caso semplice: il nodo *z* non ha figli

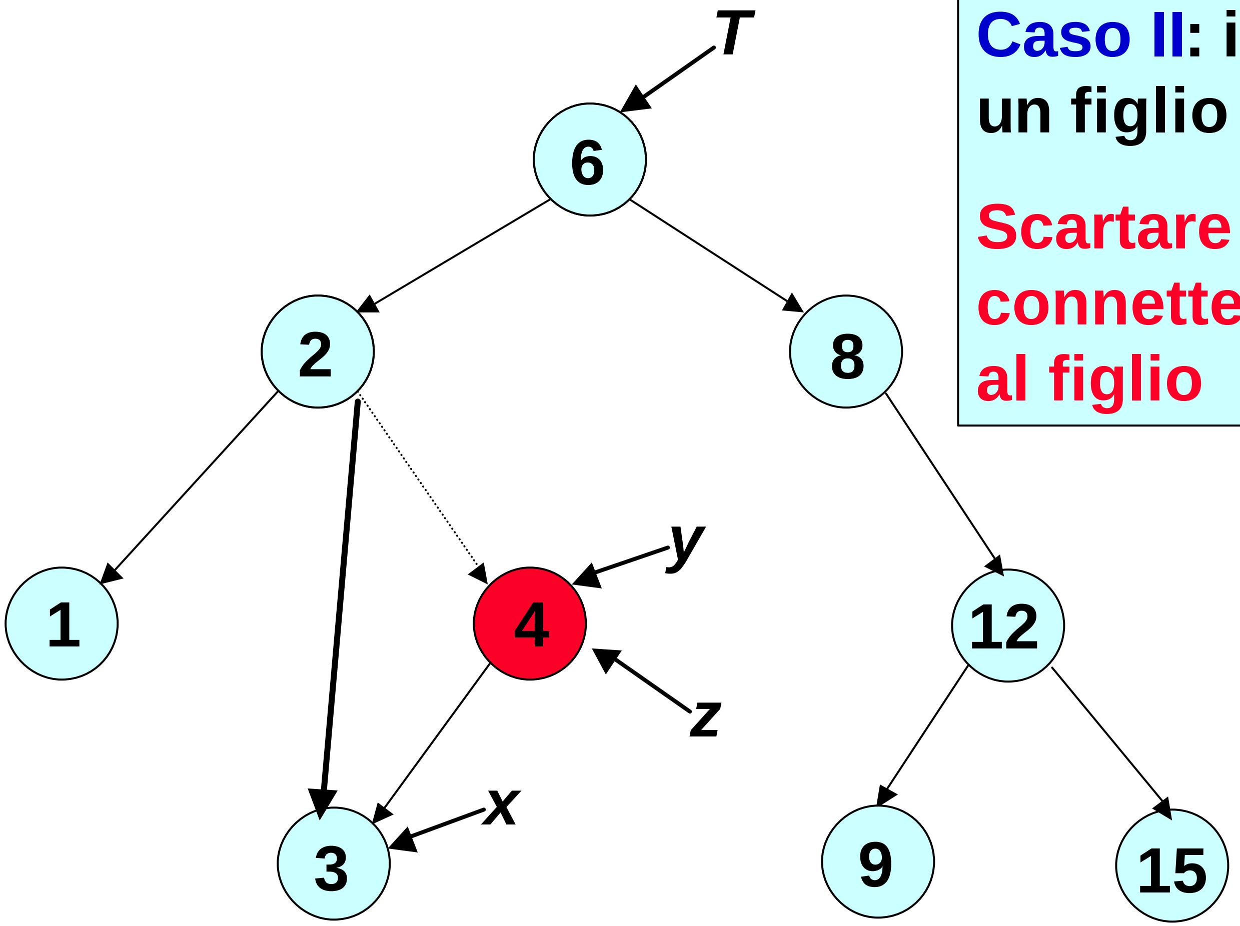
Possiamo eliminarlo

ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un solo figlio

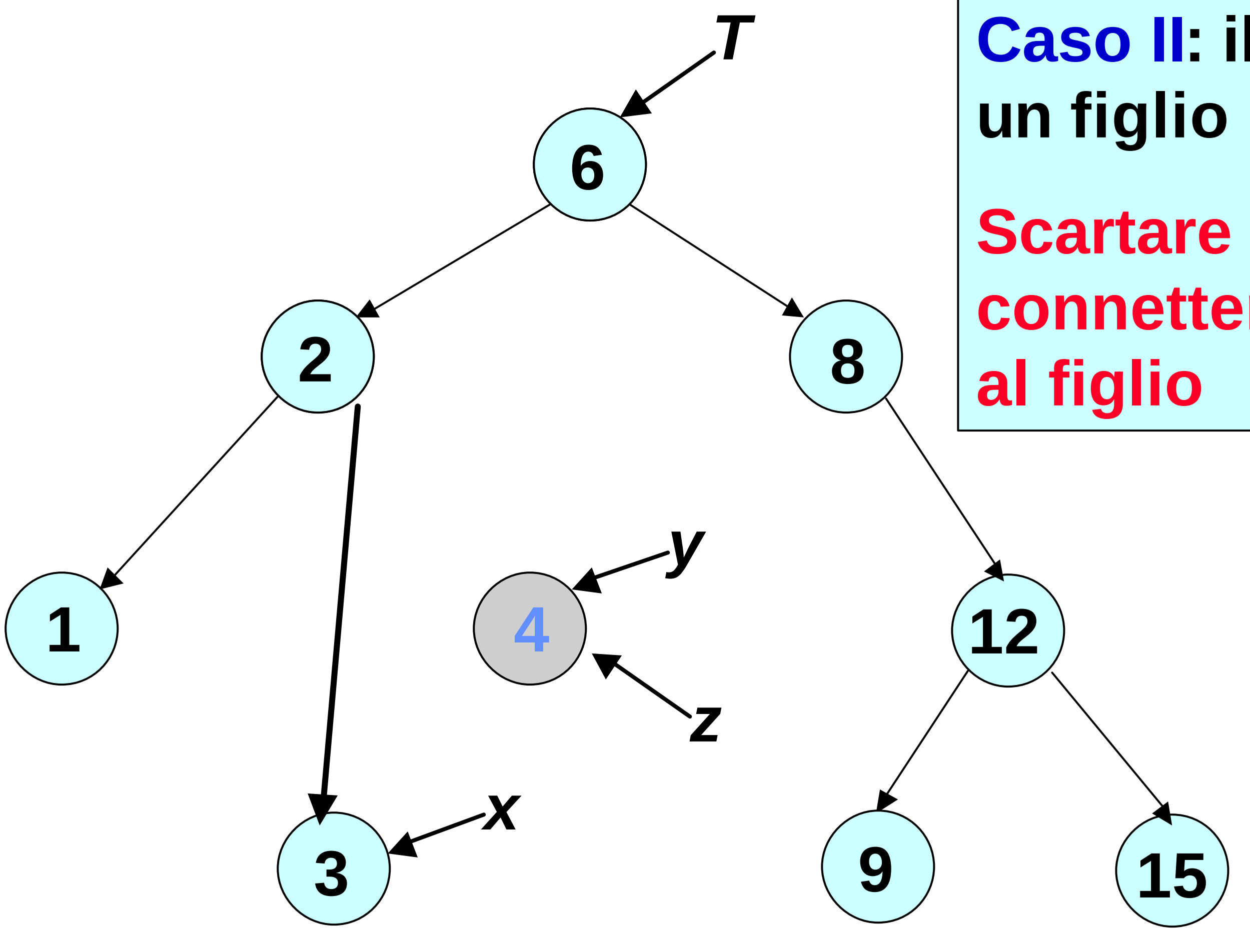
ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un figlio

Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

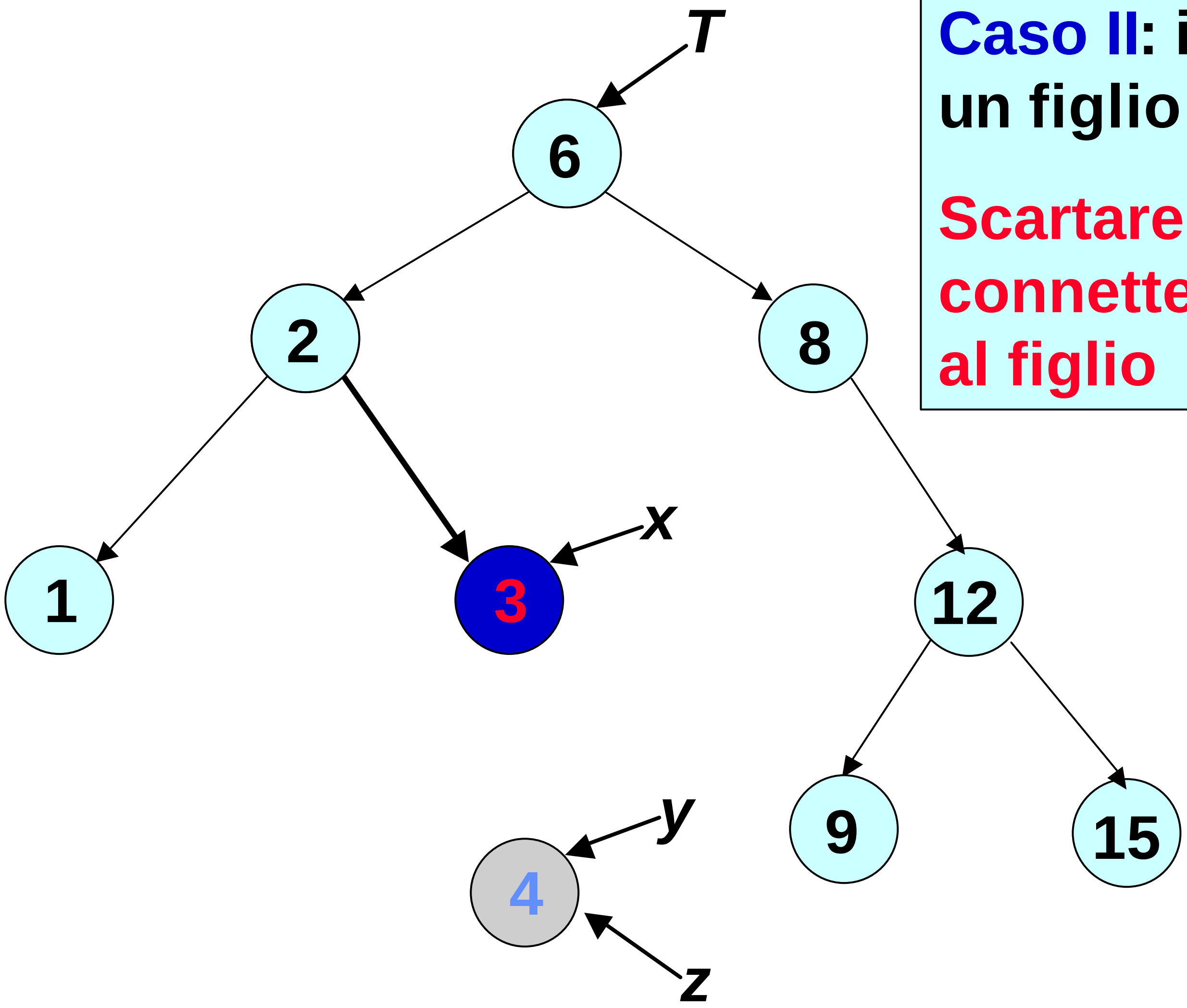
ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un figlio

Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)

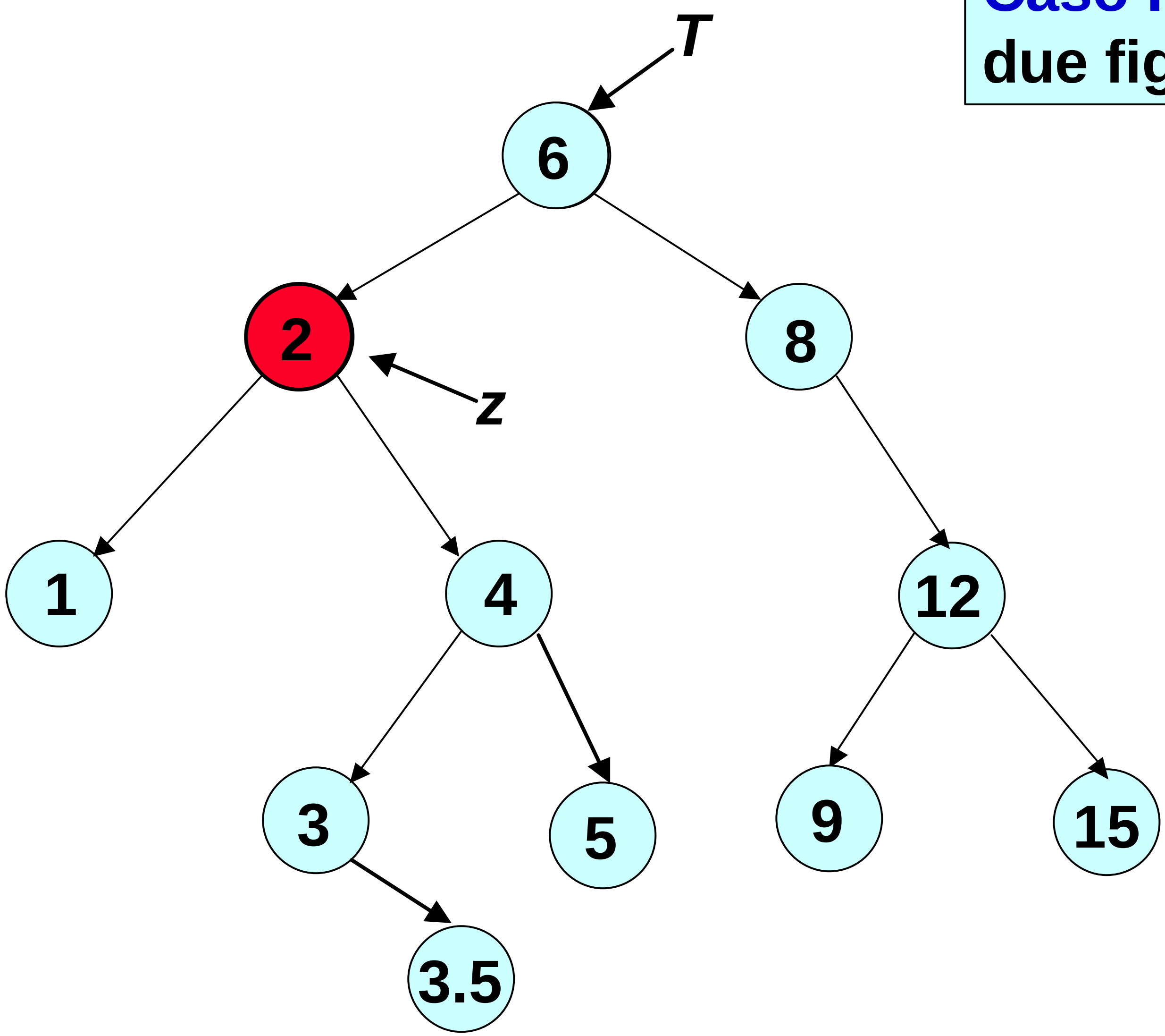


Caso II: il nodo ha un figlio

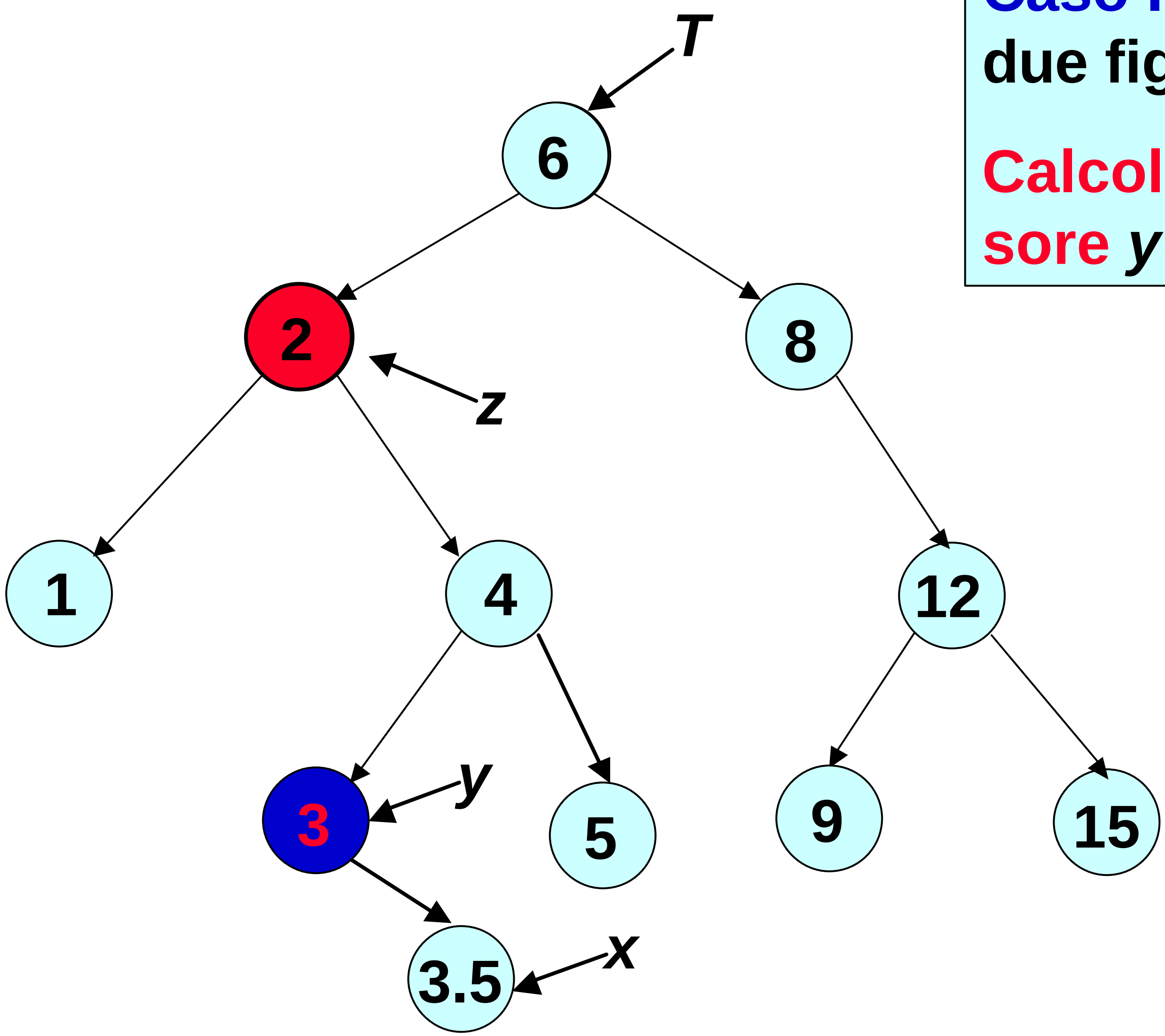
Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)

Caso III: il nodo ha due figli



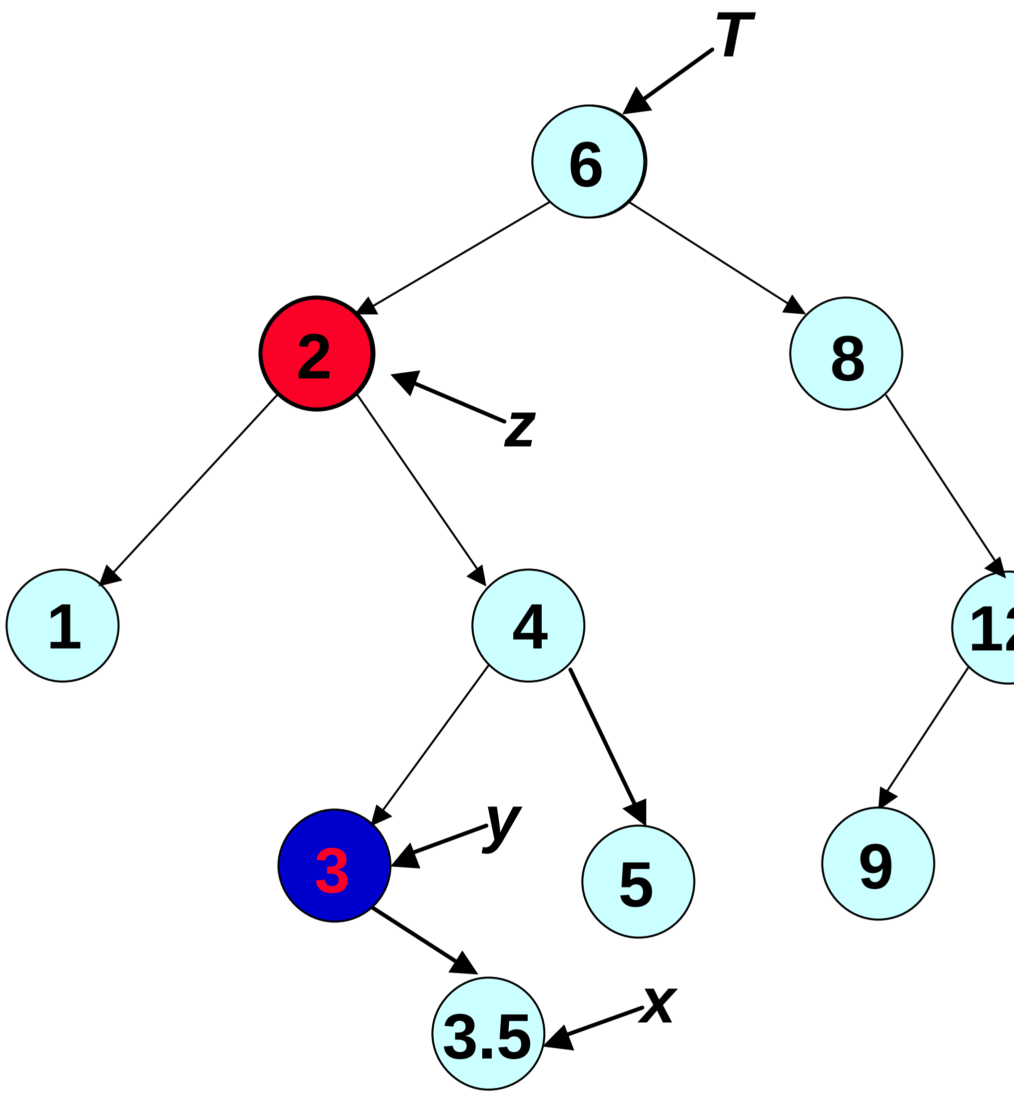
ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)

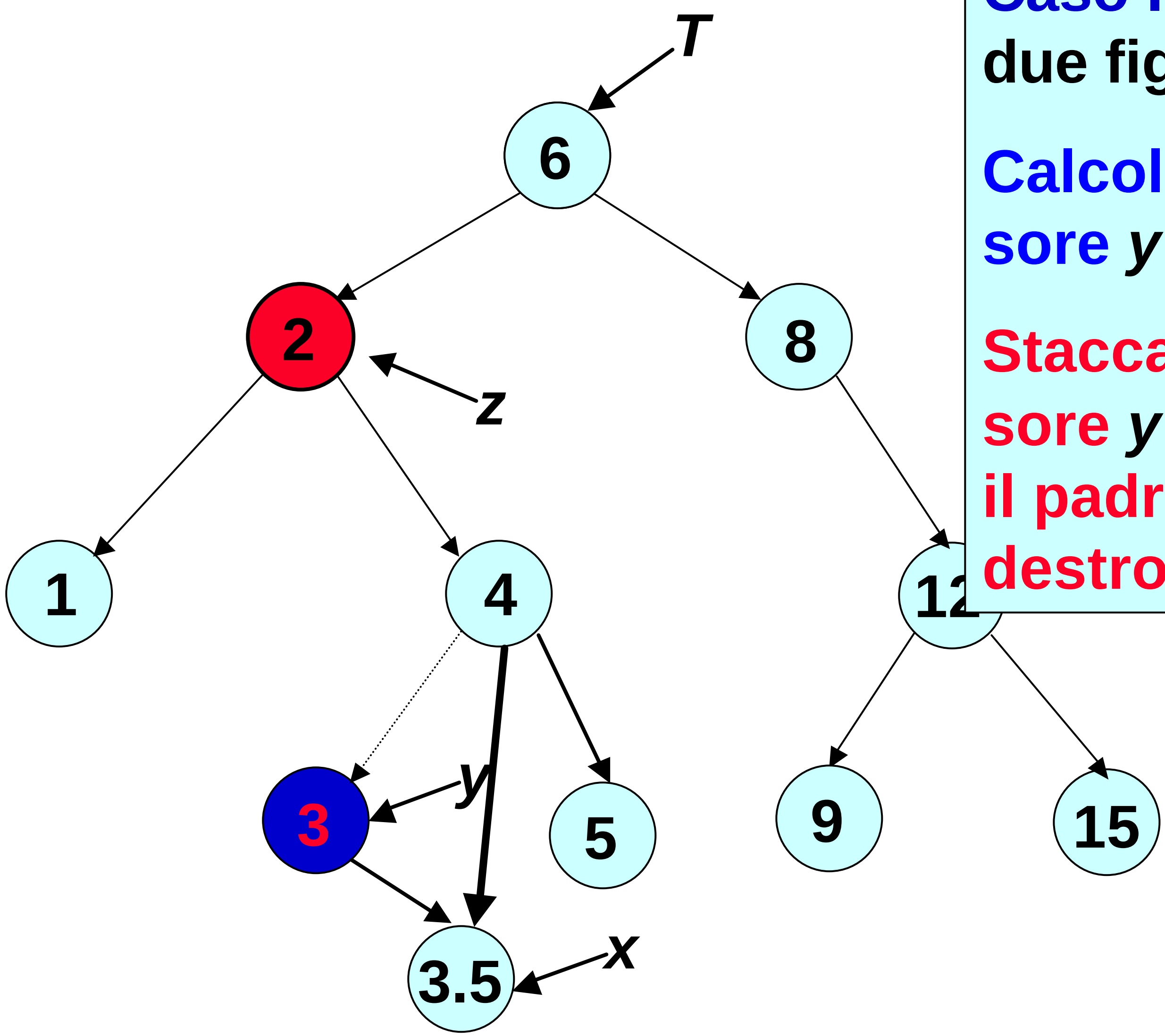


Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

NOTA: Il successore di un nodo con due figli non può avere un figlio sinistro

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)

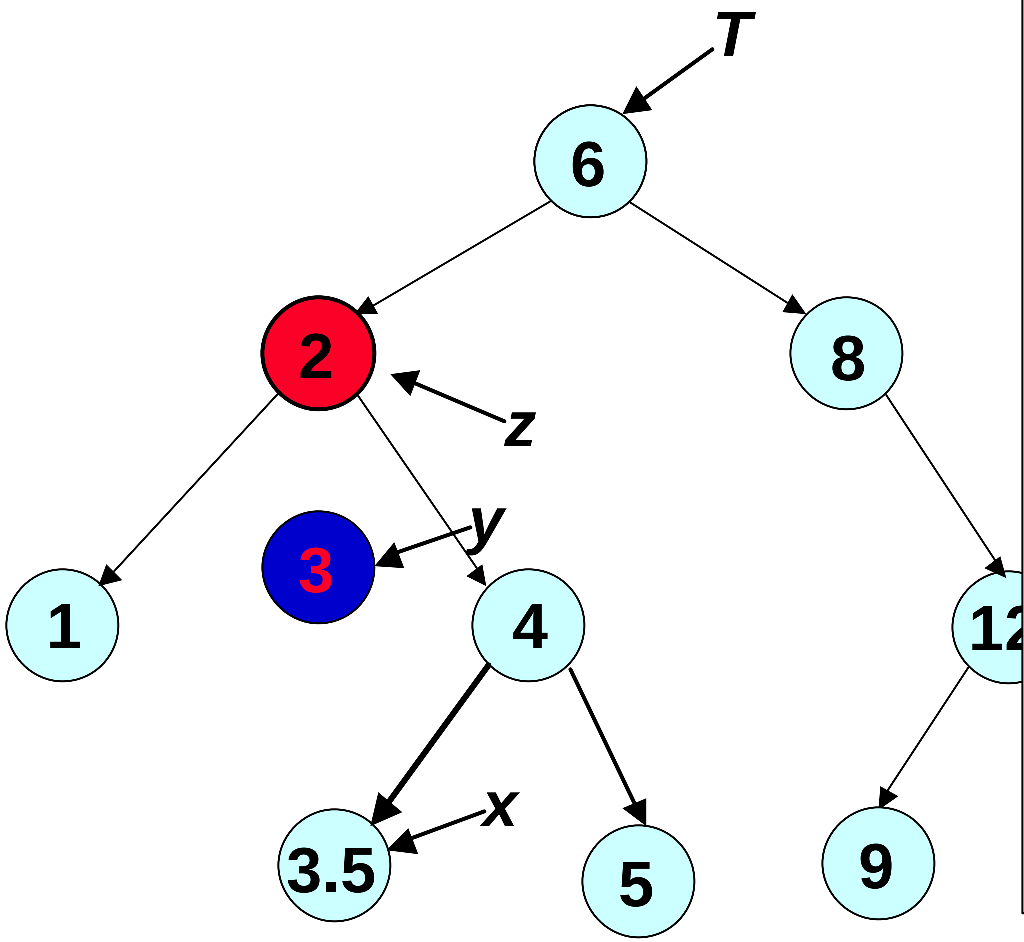


Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Staccare il successore *y* e connettere il padre al figlio destro

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



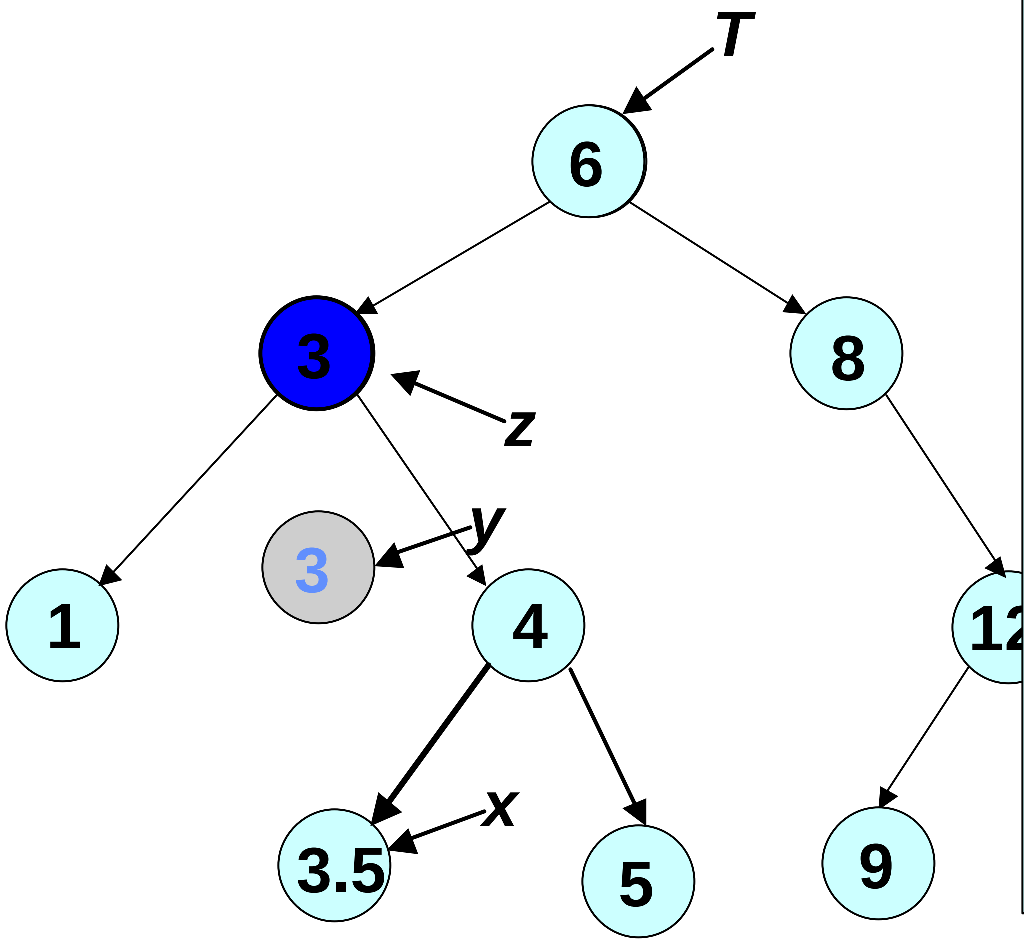
Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Staccare il successore *y* e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore nel nodo da cancellare

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



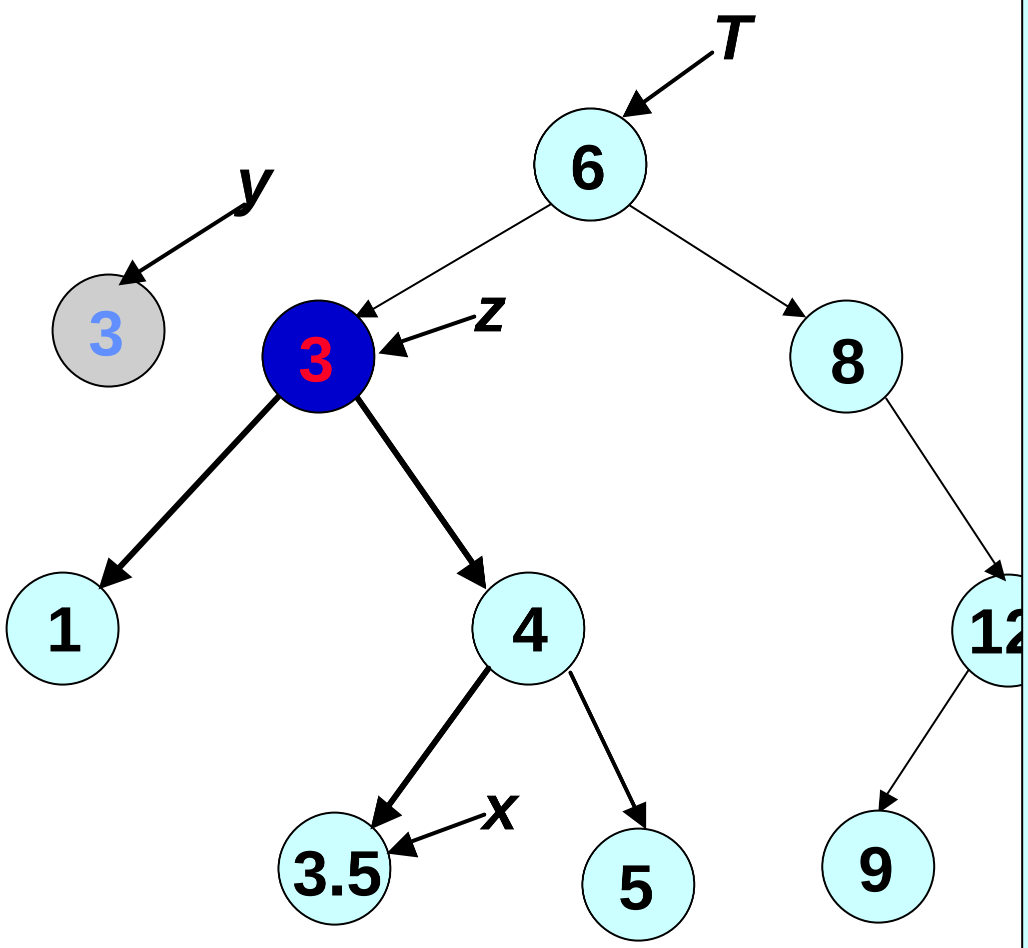
Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Staccare il successore *y* e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore nel nodo da cancellare

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Staccare il successore *y* e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore *y* nel nodo da cancellare

Deallocare il nodo staccato *y*

ARB: Cancellazione di un nodo

- ***Caso I***: **Il nodo non ha figli. Semplicemente si elimina.**
- ***Caso II***: **Il nodo ha un solo figlio. Si** ***collega il padre del nodo al figlio*** **e si elimina il nodo.**
- ***Caso III***: **Il nodo ha due figli.**
  - **si** ***cerca il suo successore*** **(che ha** ***un solo figlio destro*****);**
  - **si** ***elimina il successore*** **(come in** ***Caso II*****);**
  - **si** ***copiano*** **i campi** ***valore*** **del successore** ***nel nodo*** **da eliminare.**

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (sx[z]= NIL OR
        dx[z]=NIL) THEN
        y = z
   ELSE y = ARB-Successore(z)
   IF sx[y] != NIL THEN
        x = sx[y]
   ELSE x = dx[y]
   IF x != NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN T=x
   ELSE IF y=sx[padre[y]] THEN
             sx[padre[y]]=x
        ELSE dx[padre[y]]=x
   IF y!=z THEN "copia i campi di y in z"
   dealloca y
   return T
```

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (sx[z]=NIL OR
        dx[z]=NIL) THEN
        y = z
   ELSE y = ARB-Successore(z)
   IF sx[y] != NIL THEN
        x = sx[y]
   ELSE x = dx[y]
   IF x!=NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN T=x
   ELSE IF y=sx[padre[y]] THEN
             sx[padre[y]]=x
        ELSE dx[padre[y]]=x
   IF y!=z THEN "copia i campi di y in z"
   dealloca y
   return T
```

casi I e II

y è il nodo da eliminare

caso III

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (sx[z]=NIL OR
        dx[z]=NIL) THEN
        y = z
   ELSE y = ARB-Successore(z)
   IF sx[y] != NIL THEN
        x = sx[y]
   ELSE x = dx[y]
   IF x!=NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN T=x
   ELSE IF y=sx[padre[y]] THEN
             sx[padre[y]]=x
        ELSE dx[padre[y]]=x
   IF y!=z THEN "copia i campi di y in z"
   dealloca y
   return T
```

casi I e II

y è il nodo da eliminare e x è il suo sostituto

y è sostituito da x

caso III

```
ABR-Cancella-iter(T,k)
   p = NIL
   z = T
   WHILE (z != NIL && key[z]!=k) DO
        p = z
        IF (key[z] > k) THEN z = sx[z]
                        ELSE z = dx[z]
   IF (z = NIL) THEN return T  /* nulla da cancellare */
   IF (sx[z] = NIL OR dx[z] = NIL)
     THEN y = z
     ELSE /* z ha 2 figli: si cerca il successore */
         y = dx[z]; p = z
         WHILE (sx[y] ¹ NIL) DO
            p = y
            y = sx[y]
   IF (sx[y] ¹ NIL) THEN x = sx[y]
                    ELSE x = dx[y]
   IF (p = NIL) THEN T = x /* si sta cancellando la radice */
   ELSE IF (y = sx[p]) THEN sx[p]=x
                       ELSE dx[p]=x
   IF (y != z) THEN /* z ha due figli */
       "copia i campi di y in z"
   dealloca y
   return T
```

y è il nodo da eliminare
p è il padre di *y*
x è il sostituto di *y* in *T*

```
ABR-Cancella-iter(T,k)
   p = NIL
   z = T
   WHILE (z != NIL) DO
        p = z
        IF (key[z] > k) THEN z = sx[z]
                        ELSE z = dx[z]
   IF (z = NIL) THEN return T  /* nulla da cancellare */
   IF (sx[z] = NIL OR dx[z] = NIL)
     THEN y = z
     ELSE /* z ha 2 figli: si cerca il successore */
          y = dx[z]
          WHILE (sx[y] ¹ NIL) DO
             p = y
             y = sx[y]
   IF (sx[y] ¹ NIL) THEN x = sx[y]
                   ELSE x = dx[y]
   IF (p = NIL) THEN T = x /* si sta canc
   ELSE IF (y = sx[p]) THEN sx[p]=x
                       ELSE dx[p]=x
   IF (y != z) THEN /* z ha due figli */
      "copia i campi di y in z"
   dealloca y
   return T
```

y è il nodo da eliminare
p è il padre di *y*
x è il sostituto di *y* in *T*

Ricerca di k

Casi I e II

Ricerca successore
Caso III

Distacco nodo y da eliminare e aggiornamento del padre

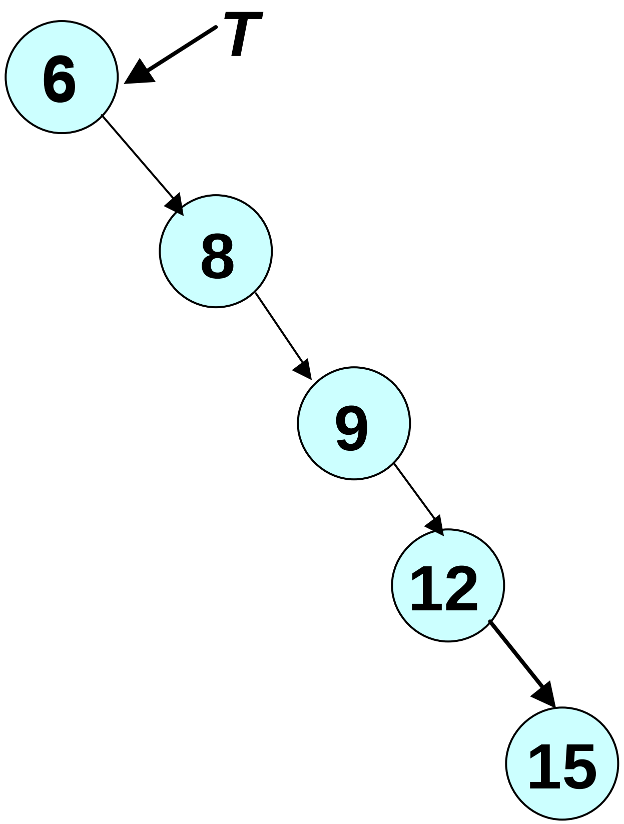
Copia successore
Caso III

ARB: costo di Inserimento e Cancellazione

***Teorema**. Le operazioni di Inserimento e Cancel-lazione sull'insieme dinamico Albero Binario di Ricerca possono essere ese-guite in tempo O(h) dove h è l'altezza dell'albero*

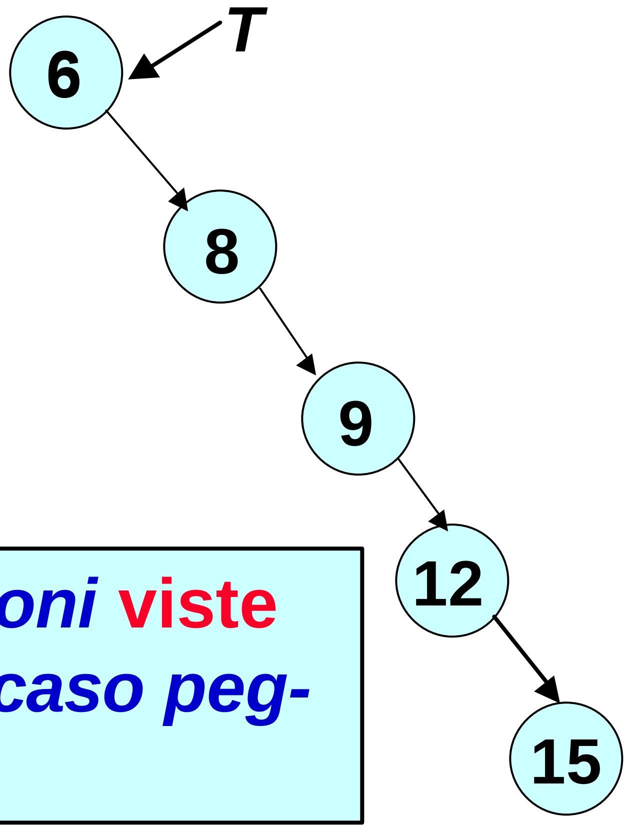
Costo delle operazioni su ABR

L'algortimo di inserimento NON garantisce che l'albero risultante sia bilaciato. Nel caso peggiore l'altezza h può essere pari ad N (numero dei nodi)



Costo delle operazioni su ABR

L'algortimo di inserimento NON garantisce che l'albero risultante sia bilaciato. Nel caso peggiore l'altezza h può essere pari ad N (numero dei nodi)



Quindi *tutte le operazioni* viste hanno *costo* O(*N*) nel *caso peggiore*

Costo medio delle operazioni su ABR

Dobbiamo calcolare la *lunghezza media* $a(n)$ del *percorso di ricerca*.

- **Assumiamo che le chiavi arrivino in ordine casuale (e che tutte abbiano *uguale probabilità* di presentarsi)**
- **La probabilità che la chiave *i* sia la radice è allora 1/*n***

$$\boxed{a(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i}$$

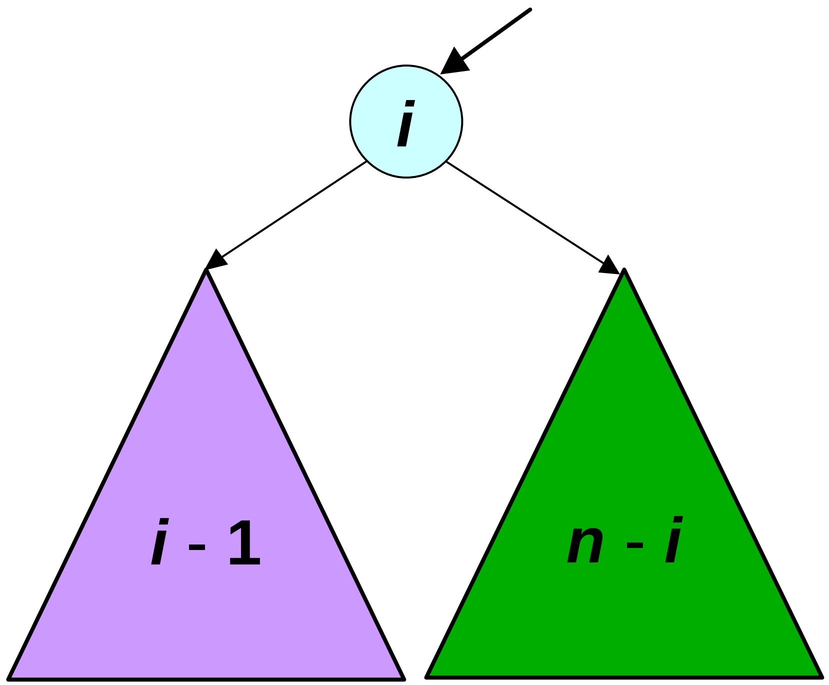
p_i **è la lunghezza del percorso al nodo *i***

Costo delle operazioni su ABR

Se *i* è la radice, allora

- **il sottoalbero sinistro avrà *i* - 1 nodi e**
- **il sottoalbero destro avrà *n* - *i* nodi**

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

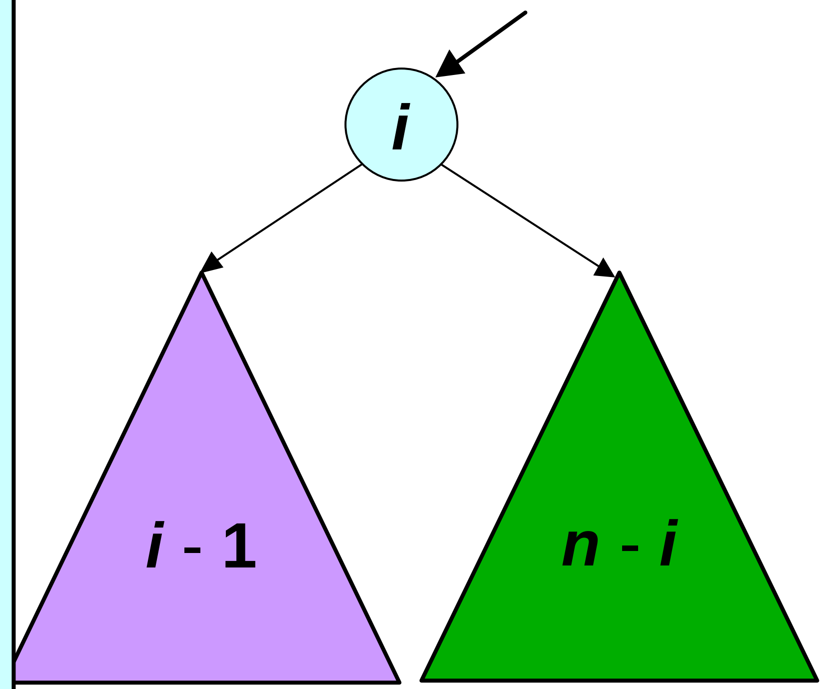


Costo delle operazioni su ABR

Se *i* è la radice, allora

- **il sottoalbero sinistro avrà *i* - 1 nodi e**
- **il sottoalbero destro avrà *n* - *i* nodi**
- **gli *i* - 1 nodi a sinistra hanno lungezza del percorso $a(i\text{-}1)+1$**
- **la radice ha lunghezza del percorso pari ad 1**
- **gli *n* - *i* nodi a sinistra hanno lungezza del percorso $a(n\text{-}l)+1$**

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$



Costo delle operazioni su ABR

$$a^i(n) = [a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-i)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a^i(n)$ **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *n* chiavi quando la radice è la chiave *i***

a(i-1) **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *i-1* chiavi**
a(n-i) **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *n-i* chiavi**

Costo delle operazioni su ABR

$$a^i(n) = [a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-i)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a^i(n)$ **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *n* chiavi quando la radice è la chiave *i***

$$a(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-i)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a(n)$ **è la media degli *$a^i(n)$*, dove ciascun *$a^i(n)$* ha probabilità 1/*n***

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a(i-1)+1]\frac{i-1}{n}+1\frac{1}{n}+[a(n-i)+1]\frac{n-i}{n}$$

$$=1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[a(i-1)\cdot(i-1)+a(n-i)\cdot(n-i)\right]$$

$$=1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[a(i-1)\cdot(i-1)\right]$$

$$=1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}ia(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$a(n-1) = 1 + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a(n-1)-1\right)$$

$$a(n-1) = 1 + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot a(i) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a(n-1)-1\right)$$

$$a(n) = \frac{1}{n^2}\left[(n^2-1)\cdot a(n-1) + 2n - 1\right]$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = \frac{1}{n^2}\left[(n^2 - 1)\cdot a(n-1) + 2n - 1\right]$$

Dimostrare per induzione

$$a(n) = 2\frac{n+1}{n}H(n) - 3$$

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Funzione armonica

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 2\frac{n+1}{n}H(n) - 3$$

Dimostrare per induzione

$$\boxed{a(n) = 2(\ln n + g) - 3 = 2\ln n - c}$$

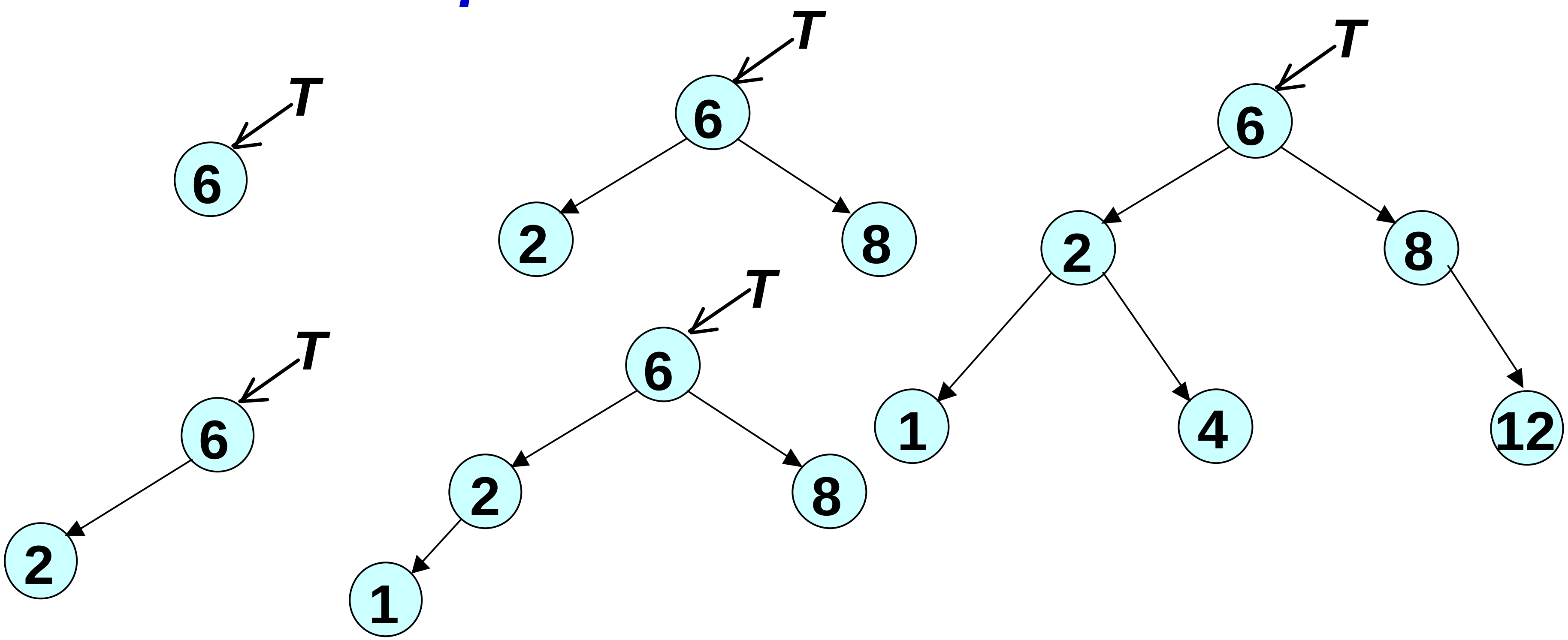
Formula di Eulero

$$H(n) = g + \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \ldots$$

dove g » **0.577**

Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice *Perfettamente Bilanciato* se, per ogni nodo *i*, il *numero dei nodi* nel suo *sottoalbero sinistro* e il *numero dei nodi* del suo *sottoalbero destro differiscono al più* di 1**



Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice *Perfettamente Bilanciato* se, per ogni nodo *i*, il *numero dei nodi* nel suo *sottoalbero sinistro* e il *numero dei nodi* del suo *sottoalbero destro* *differiscono* *al più* di 1**

La *lunghezza media a'(n) del percorso* in un *albero perfettamente bilanciato (APB)* con *n* nodi è approssimativamente

$$\boxed{a'(n) = \log n - 1}$$

Confronto tra ABR e APB

Il *rapporto* tra la *lunghezza media a(n) del percorso* in un *albero di ricerca* e la *lunghezza media a'(n)* nell'*albero perfettamente bilanciato* è (per *n* sufficientemente grande) è approssimativamente

$$\boxed{\frac{a(n)}{a'(n)} = \frac{2\ln n - c}{\log n - 1} \cong \frac{2\ln n}{\log n} = 2\ln 2 \cong 1{,}386}$$

(trascurando i termini costanti)

Confronto tra ABR e APB

Ciò significa che, se anche *bilanciassimo* perfettamente l'albero *dopo ogni inserimento* il *guadagno sul percorso medio* che otterremmo *NON supererebbe* il 39%.

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{2 \ln n - c}{\log n - 1} = \frac{2 \ln n}{\log n} = 2 \ln 2 \cong 1.386$$

Sconsigliabile **nella maggior parte dei casi, *a meno che* il *numero dei nodi* e il rapporto tra ricerche e inserimenti *siano molto grandi*.**