Algoritmi e Strutture Dati (Mod. B)

Algoritmi su grafi

Ricerca in profondità

(Depth-First Search) Parte III

Applicazioni di DFS

***Due problemi*:**

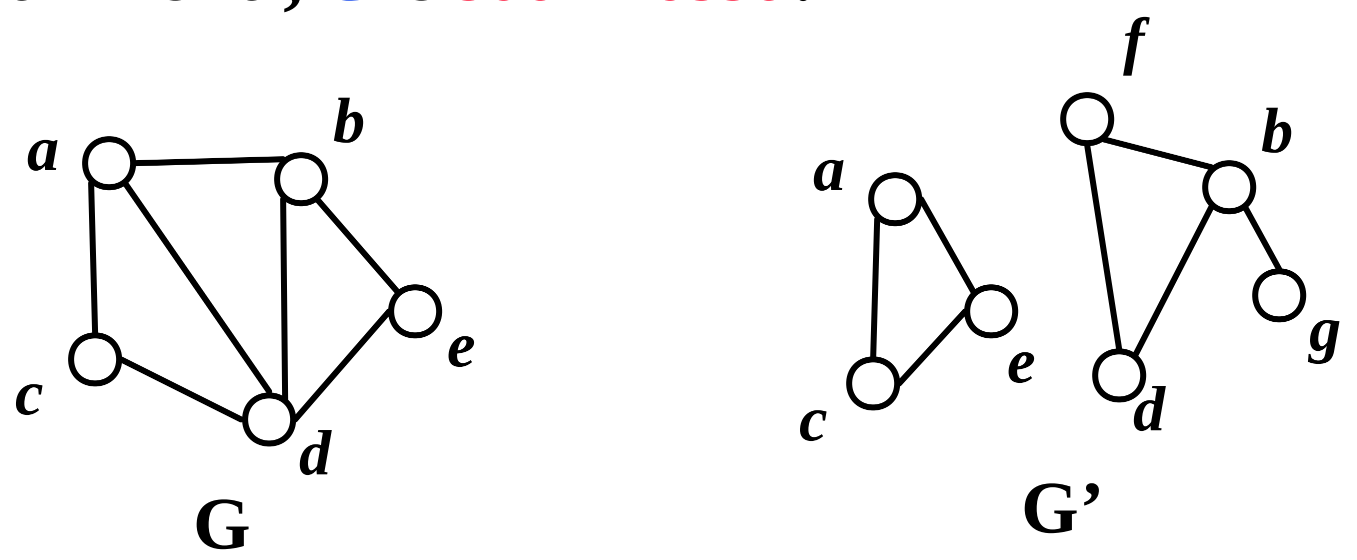
- ✓ **calcolare l'*ordinamento topologico* indotto da un *grafo aciclico*.**

- ➢ **calcolare le *componenti (fortemente) connesse* (*CFC*) di un *grafo (non) orientato*.**

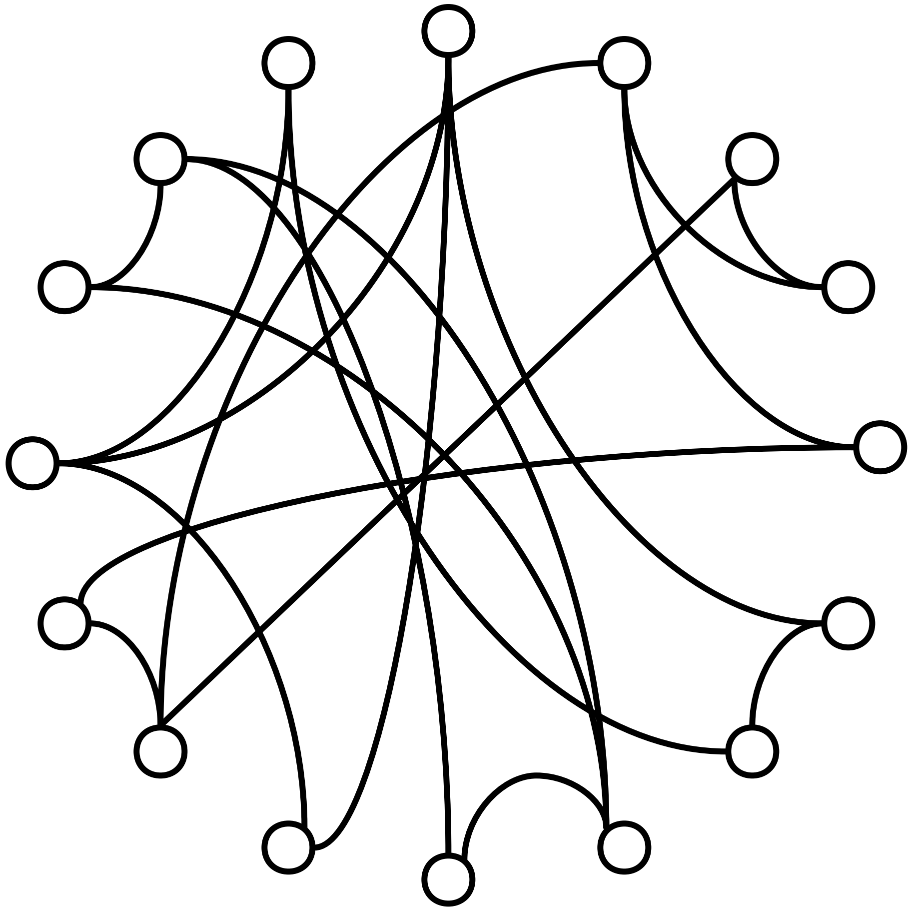
Vedremo che entrambi i problemi possono essere risolti *impiegando* opportunamente l'*algoritmo* di *DFS*

Connettività

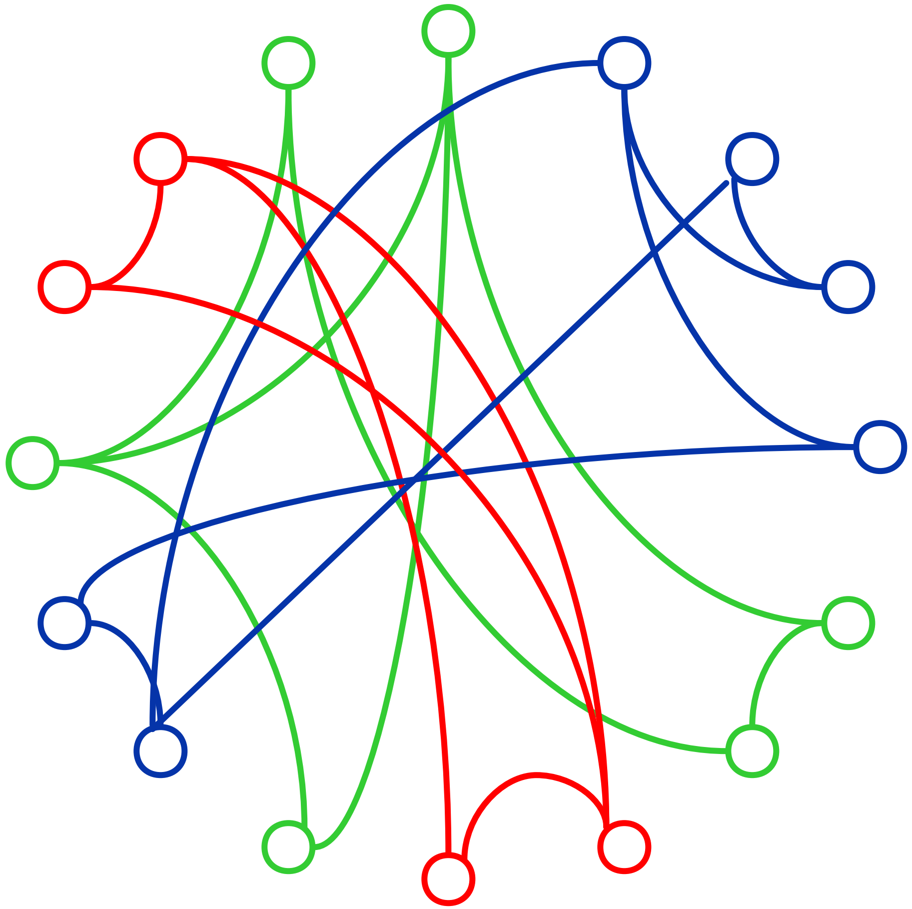
- **Un vertice *u* si dice *connesso* ad un vertice *v* in un grafo *G* se esiste un percorso da *u* a *v* in *G*.**
- **Un grafo non orientato (un grafo orientato) *G* si dice (*fortemente*) *connesso* se ogni coppia di vertici è *connessa*.**
- **Altrimenti, *G* è *sconnesso*.**



Verifica della connettività



Verifica della connettività



Verifica della connettività

Per verificare se un *grafo non orientato* è *connesso* possiamo:

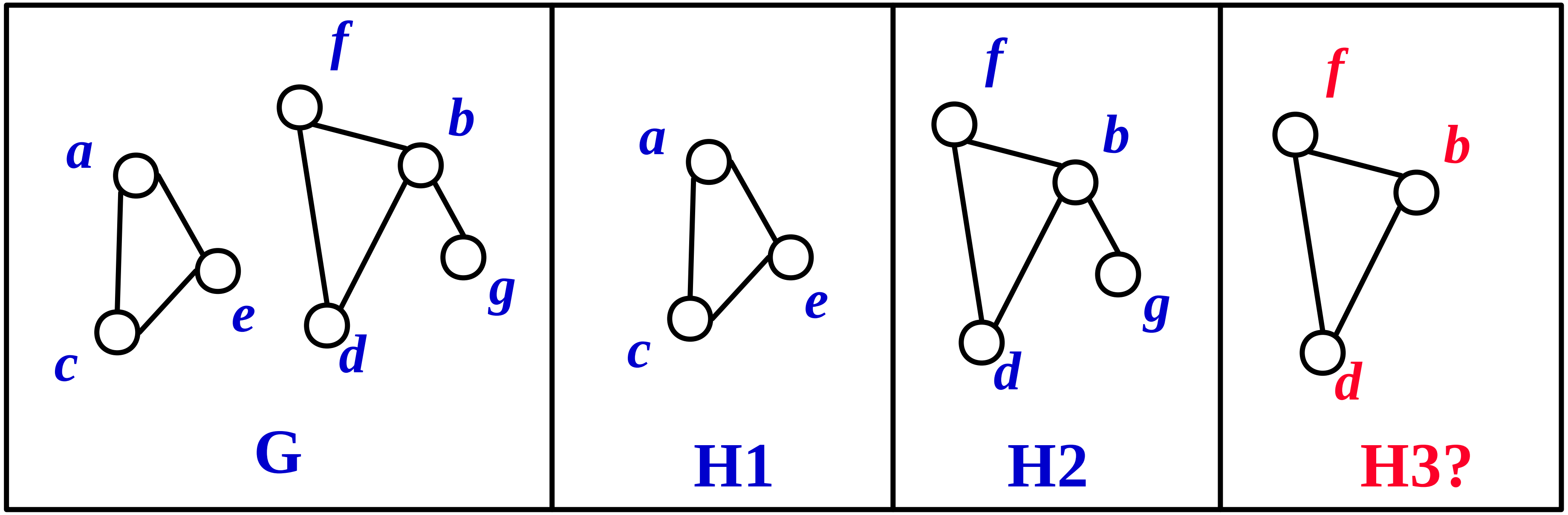
- **usare l'algoritmo *DFS***
- **il grafo è connesso *se e solo se* una chiamata di *DFS* raggiungerà tutti i vertici.**

- **Se al termine della *DFS* c'è *più* di un vertice *u* con *pred*[*u*] = `NIL` il grafo *non può* essere *connesso*.**

Componenti connesse

Un *sottografo massimale connesso* di un *grafo non orientato G* si dice *componente connessa* di *G*.

- **Un *sottografo connesso H di G* è "massimale" se**
  - **non si possono aggiungere ad *H* altri vertici o archi**
  - **in modo che l'*H'* risultante sia ancora un sottografo connesso di *G*.**



Verifica della connettività

Per calcolare le *componenti connesse* un *grafo non orientato* possiamo usare l'algoritmo *DFS*:

- **Ogni chiamata esterna (non ricorsiva) a *DFS-Visita* raggiungerà tutti i vertici contenuti *esattamente* in una *componente connessa*. *Perché?***
- **Le *componenti connesse* sono pari al numero di vertici *u* per cui, al termine di una *DFS* sul grafo, *pred*[*u*] = `NIL`.**

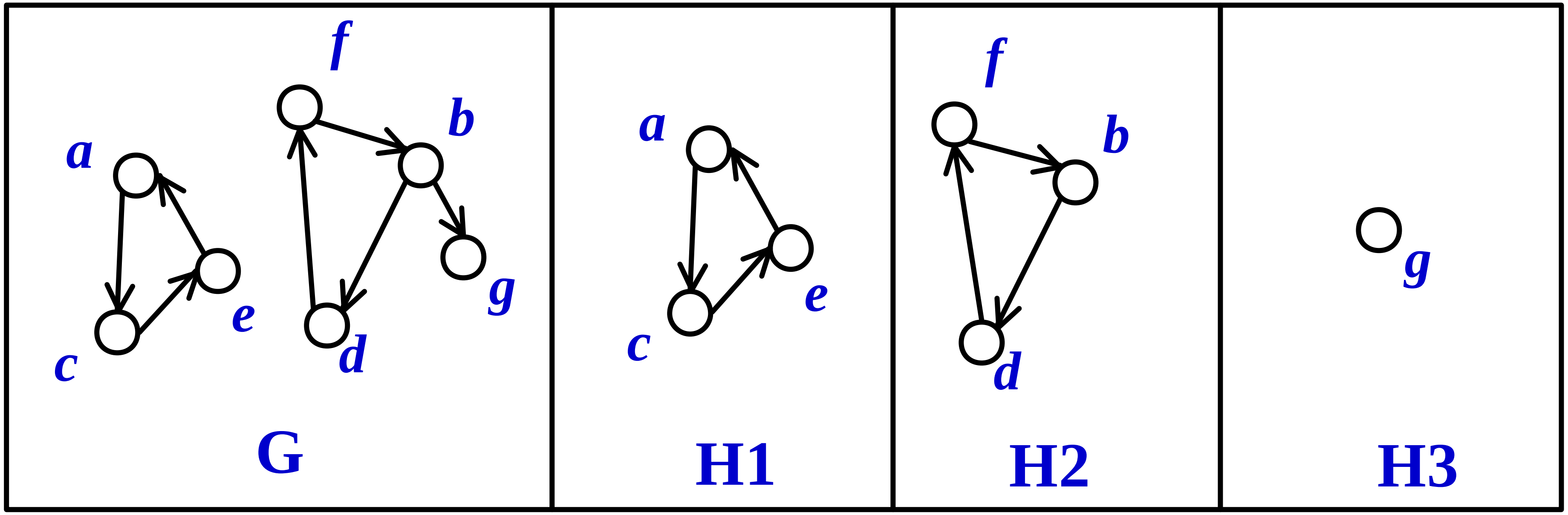
Esercizio

Es. 23.3.9: **Mostrare che *DFS* su un *grafo non orientato G* può essere usata per identificare le Componenti Connesse e che la *foresta DF* contiene tanti *alberi* quante *CC*. Modificare *DFS* in modo che ogni vertice sia etichettato con $cc[v]$ tra 1 e k (k numero di *CC*) in modo che $cc[u]=cc[v]$ se e solo se u e v se appartengono alla stessa *CC*.**

Componenti fortemente connesse

Un *sottografo massimale fortemente connesso* di un *grafo orientato G* si dice *componente fortemente connessa (CFC)*.

- **Un *sottografo fortemente connesso H di G* è massimale se**
  - **non si possono aggiungere ad *H* altri vertici o archi**
  - **in modo che l'*H'* risultante sia ancora un sottografo fortemente connesso di *G*.**



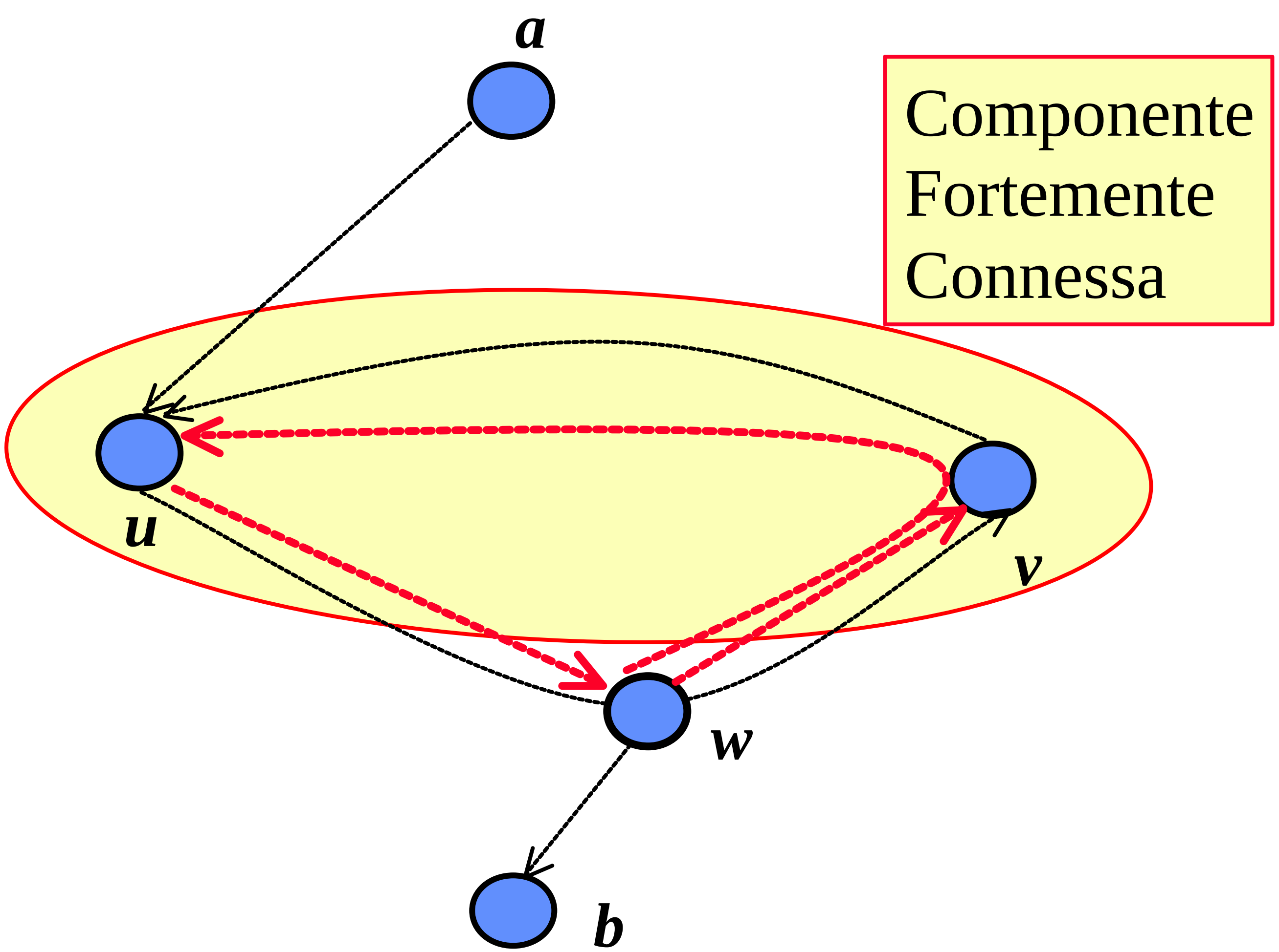
Proprietà delle CFC

Teorema 1: **Se due vertici compaiono nella stessa *componente fortemente connessa*, allora *nessun percorso* tra i due vertici *esce* da quella *componente*.**

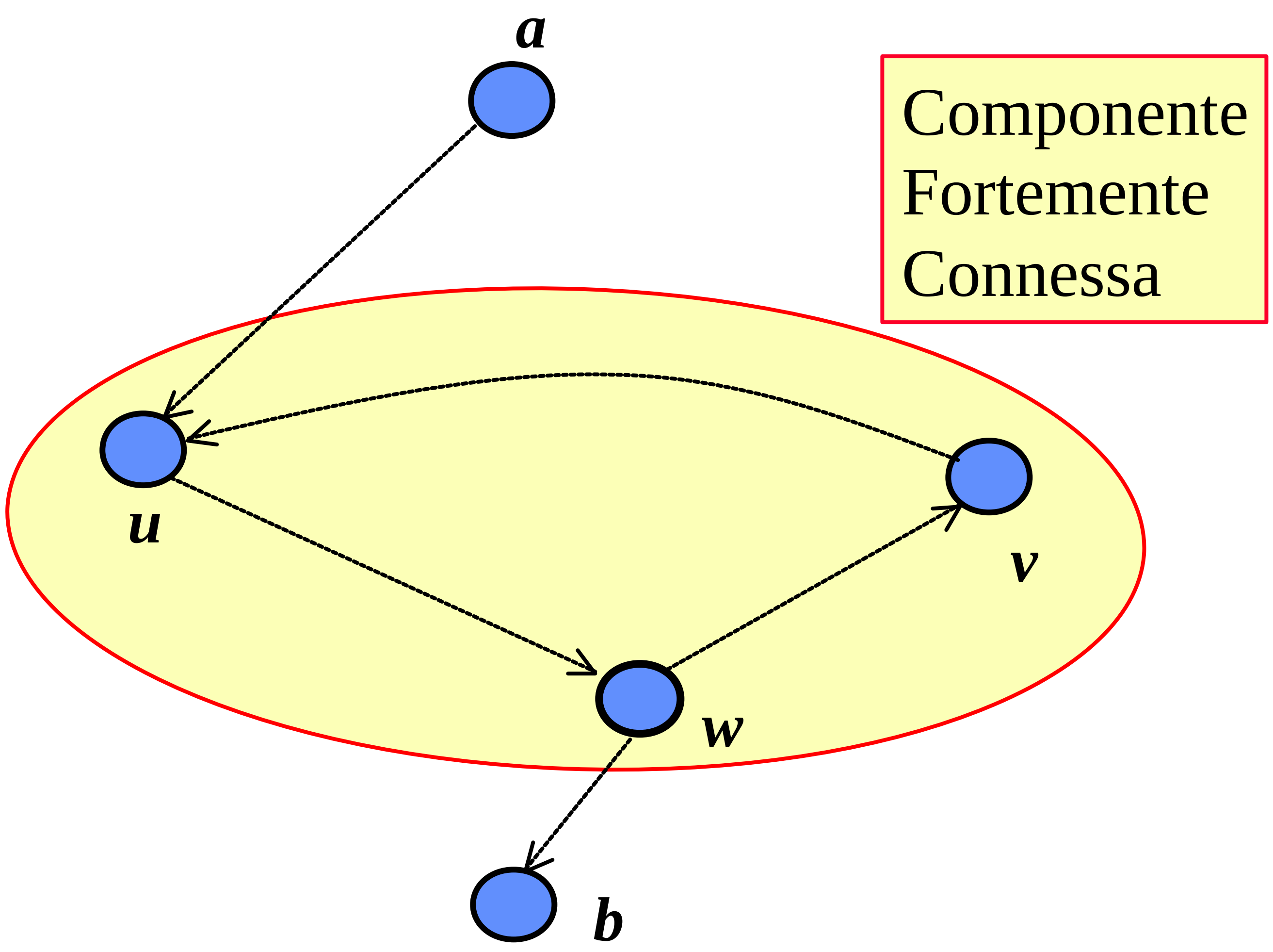
Dimostrazione: **Siano *u* e *v* due vertici nella stessa componente fortemente connessa.**

- **Esistono percorsi sia da *v* a *u* che da *u* a *v*. Sia *w* un vertice lungo qualche percorso *u*®*w*®*v*.**
- **Poiché c'è un percorso *v*®*u*, *u* è raggiungibile da *w* tramite *w*®*v*®*u*. Quindi *w* e *u* sono nella stessa componente fortemente connessa.**
- **Poiché *w* è stato scelto arbitrario, il teorema segue.**

Proprietà delle CFC



Proprietà delle CFC



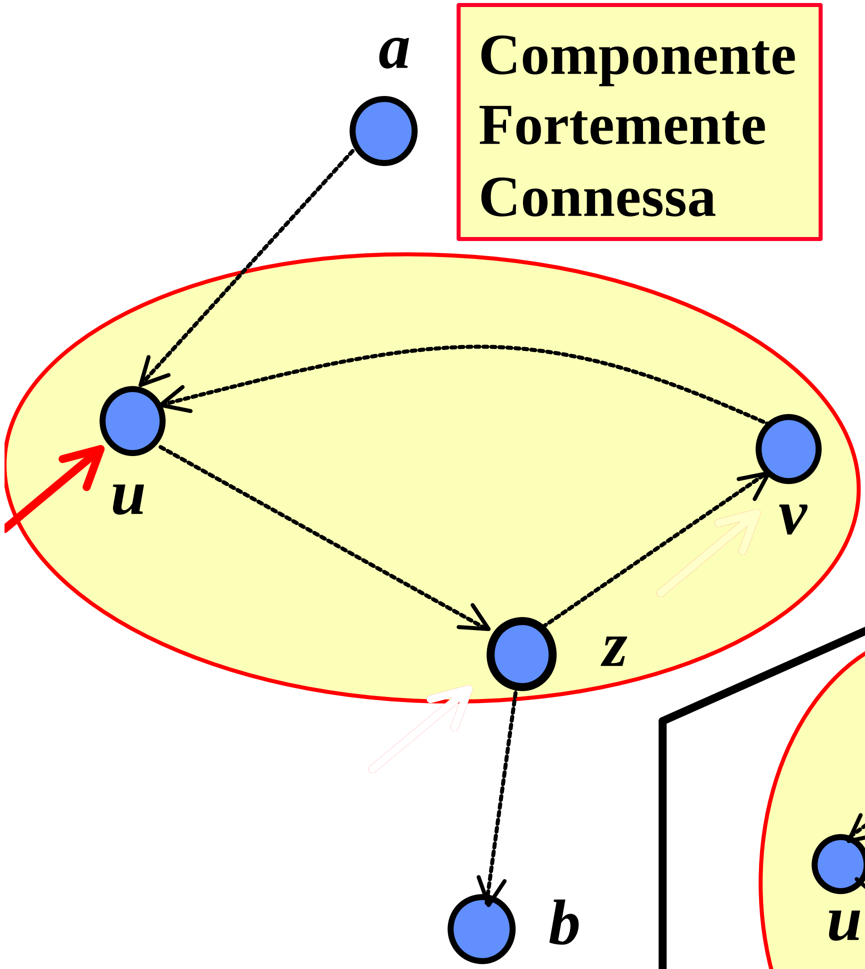
Proprietà delle CFC

Teorema 2: **In ogni DFS, tutti i vertici nella *stessa componente fortemente connessa* compaiono nello *stesso albero DF*.**

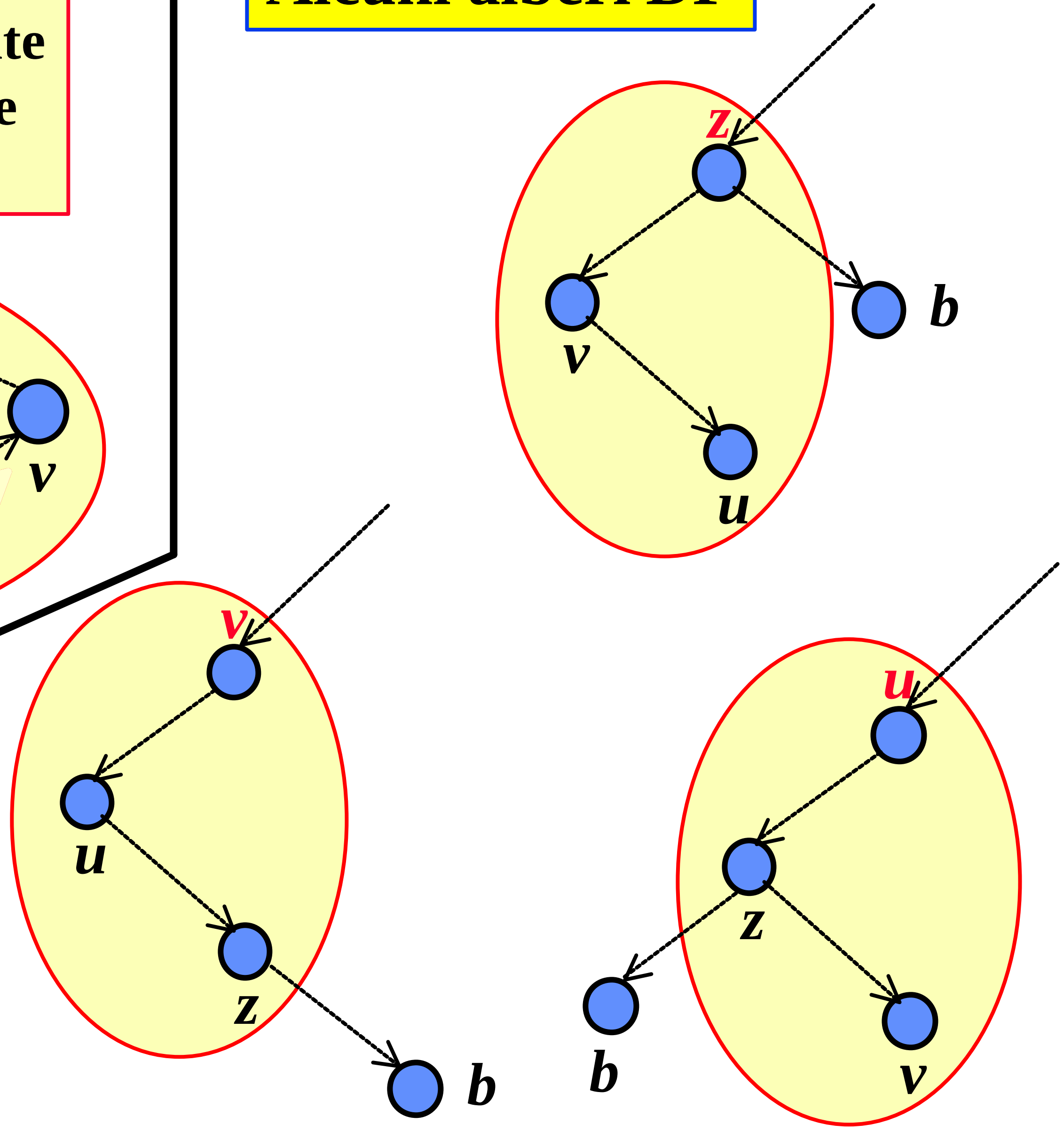
Dimostrazione: **Sia *r* il primo vertice di una componente fortemente connessa (*CFC*), visitato da *DFS*.**

- **Poiché è il primo, tutti gli altri vertici nella *CFC* devono essere ancora bianchi.**
- **Esiste quindi un percorso da *r* a tutti gli altri vertici nella *CFC*… (*perché?*)…**
- **…infatti questi percorsi non escono mai dalla *CFC* di *r* (per il *teorema precedente*) e i vertici di tutti i percorsi nella *CFC* sono bianchi.**
- **Quindi per il *teorema del percorso bianco*, ogni vertice nella *CFC* sarà un discendente di *r* nell'*albero DF*.**

Proprietà delle CFC



Alcuni alberi DF



Proprietà delle CFC

Definizione: **Dato un vertice *u* di un grafo *G*, l'*avo di u*, in simboli f*(u)*, è il vertice *w* raggiungibile da *u* che viene terminato per ultimo in una *DFS* del grafo *G*, cioè:**

> f*(u)*= *w* **tale che** $u \xrightarrow[p]{} w$ **e** ***f*[*w*] *è massimo* tra i vertici raggiungibili da *u***

- **Notate che è possibile che sia** f*(u)*= *u*, **perché** *u* **è raggiungibile da se stesso e quindi vale anche**

  ***f*[*u*]£ *f*[f*(u)*]**

- **Inoltre si può dimostrare che** f(f*(u)*) = f*(u)*

Proprietà delle CFC

Si può dimostrare che $\phi(\phi(u)) = \phi(u)$

- **$u \xrightarrow{p} v$ implica che $f[\phi(v)] \leq f[\phi(u)]$**
- **infatti l'insieme $\{w: v \xrightarrow{p} w\} \subseteq \{w: u \xrightarrow{p} w\}$, e il tempo di terminazione ($f[\,]$) dell'*avo* è il *massimo* tra tutti i vertici raggiungibili.**

- **ma poiché $u \xrightarrow{p} \phi(u)$ allora $f[\phi(\phi(u))] \leq f[\phi(u)]$**
- **e per quello che abbiamo visto nel lucido precedente vale anche $f[\phi(u)] \leq f[\phi(\phi(u))]$**
- **quindi risulta che $f[\phi(u)] = f[\phi(\phi(u))]$**
- **ma allora $\phi(\phi(u)) = \phi(u)$, perché due vertici con lo stesso tempo di terminazione in *DFS* non possono che essere lo stesso vertice.**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, l'*avo* f*(u)* di un qualsiasi vertice *u* è un *antenato* di *u* nell'*albero DF* di *G*.**

Dimostrazione: **Se f*(u)* = *u* il teorema è banalmente vero.**

- **Se f*(u)* ^{1} *u*, poiché *u* —$_p$® f*(u)*, consideriamo il colore del vertice f*(u)* al tempo *d*[*u*]:**
  - **se f*(u)* è nero, allora *f*[f*(u)*] < *f*[u], <u>*contraddicendo*</u> il fatto che deve essere *f*[*u*] £ *f*[f*(u)*], per definizione.**
  - **se f*(u)* è grigio, allora f*(u)* è un *antenato* di *u*.**

Dimostriamo ora che f*(u)* *non può essere bianco*

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* $\phi(u)$ di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

Dimostrazione: $\phi(u)$ ***non può essere bianco***

Due casi **(ricordate che** $u \xrightarrow{p} \phi(u)$**):**

1. **Ogni vertice intermedio tra *u* e $\phi(u)$ è bianco**
2. **Qualche vertice intermedio tra *u* e $\phi(u)$ non è bianco**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* f*(u)* di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

Dimostrazione: f***(u) non è bianco***

1. **Ogni vertice intermedio tra *u* e** f***(u)* è bianco**

   allora f***(u) sarà un discendente di u per il teorema del percorso bianco*.**

   Questo significa però anche che *f*[f***(u)*]< *f*[*u*], e ciò *contraddice* la definizione di** f***(u)*.**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* $\varphi(u)$ di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

Dimostrazione: $\varphi(u)$ ***non è bianco***

2. **Qualche vertice intermedio tra *u* e $\varphi(u)$ non è bianco**

sia *t* l'ultimo vertice non bianco nel percorso tra *u* e $\varphi(u)$.

Allora *t* deve essere grigio (non ci sono archi da vertici neri a vertici bianchi) e il successore di *t* è bianco.

Ma allora c'è un percorso bianco tra *t* e $\varphi(u)$ al tempo *d*[*u*], e quindi anche al tempo *d*[*t*] tale percorso bianco esisterà (*Perché*?). Ma allora $\varphi(u)$ sarà un discendente di *t* per il *Teorema del Percorso Bianco*.

Quindi $f[t] > f[\varphi(u)]$, <u>*contraddicendo*</u> la scelta di $\varphi(u)$.

Proprietà delle CFC

Corollario: **Durante una *DFS* di un grafo orientato *G*, per ogni vertice *u*, i *u* e f*(u)* appartengono alla stessa *CFC*.**

Dimostrazione: **Per definizione di avo, abbiamo che**
***u* —$_p$® f*(u)*.**

Ma poiché f*(u)* è un antenato di *u* nella *foresta DF* (*teorema precedente*), sappiamo anche che vale f*(u)* —$_p$® *u*.

In conclusione, entrambi i vertici, essendo mutuamente raggiungibili, *devono* stare nella *stessa CFC*.

Proprietà delle CFC

Teorema 4: **In un grafo orientato *G*, due vertici *u* e *v*, compaiono nella stessa *CFC se e solo se* hanno lo *stesso avo* nella *DFS* di *G*.**

Dimostrazione:

- ***solo se*: Assumiamo *u* e *v* siano nella stessa *CFC*.**
  - **Ogni vertice raggiungibile da *u* è anche raggiungibile da *v* e vice versa.**
  - **Dalla definizione di *avo* segue che** $\varphi(u)=\varphi(v)$

    infatti, $u \xrightarrow{p} v$ **implica che** $f[\varphi(u)] \geq f[\varphi(v)]$

    mentre $v \xrightarrow{p} u$ **implica che** $f[\varphi(v)] \geq f[\varphi(u)]$.

Quindi $f[\varphi(v)] = f[\varphi(u)]$.

Proprietà delle CFC

Teorema 4: **In un grafo orientato *G*, due vertici *u* e *v*, compaiono nella stessa CFC *se e solo se* hanno lo stesso *avo* nella DFS di *G*.**

Dimostrazione:

- ***se*: Assumiamo ora $\phi(u) = \phi(v)$.**
  - **Per il *teorema 4*, *u* compare nella stessa *CFC* di $\phi(u)$, e *v* compare nella stessa *CFC* di $\phi(v)$**
  - **quindi, ovviamente *u* e *v* compaiono nella stessa *CFC*.**

Calcolo delle CFC

Possiamo quindi concludere che:

- **Le *CFC* sono insiemi di vertici che hanno lo *stesso avo*.**
- **Durante *DFS*, l'*avo* $\phi(u)$ di un vertice *u* è sia il *primo vertice scoperto* (visitato) che l'*ultimo vertice terminato* (processato) nella *CFC* contenente *u* (dal *teorema del percorso bianco* e dal *teorema 4*)**
- **L'*ultimo vertice terminato r* in una *DFS* è certamente un *avo*. Infatti, è almeno l'*avo* di se stesso poiché nessun altro vertice nell'albero ha *tempo di terminazione* maggiore di *r*.**

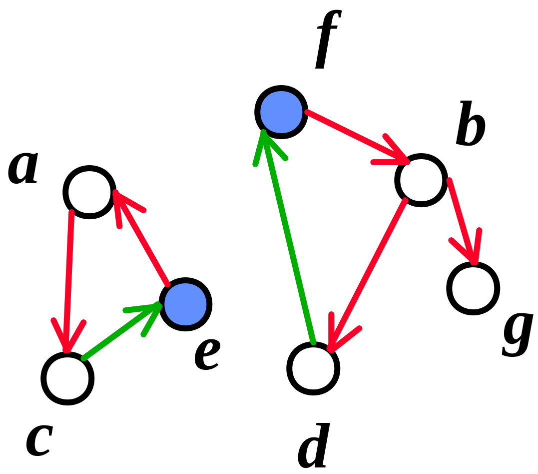
Calcolo delle CFC

- **L'*ultimo vertice terminato r* è certamente un *avo*. Infatti, *r* è *avo* di se stesso, nessun altro vertice nell'albero ha *tempo di terminazione* maggiore.**
- **In generale, quali sono i vertici della *CFC* di un avo *z*?**
  - **sono tutti quelli che hanno *z* come *avo*, cioè: tutti quei vertici che possono raggiungere *z*, ma nessun altro vertice con tempo di terminazione maggiore di *z*.**
- **Se *r* è il vertice con il *massimo valore di f*[*r*], allora ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere.**

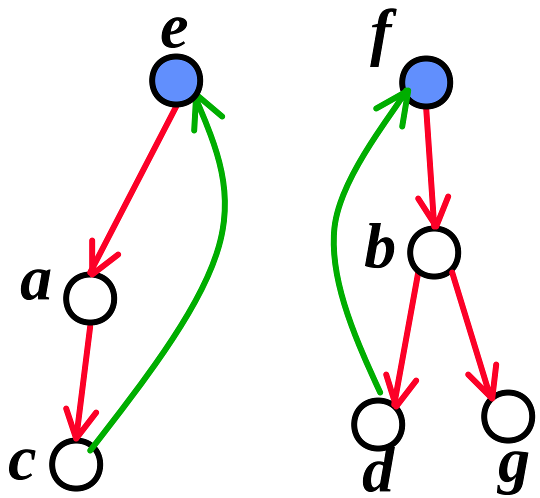
Calcolo delle CFC

- **Se *r* è il vertice con il *massimo valore* di *f[r]*, allora ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere.**
- **Ma, dalla definizione di grafo trasposto G^T di G, questi vertici sono proprio i *vertici raggiungibili* da *r* nel *grafo trasposto* G^T. Questi si possono ottenere *con una seconda DFS su* G^T a partire da *r*.**
- **Lo stesso procedimento viene ripetuto con tutti i vertici del grafo non raggiunti al passo precedente, scegliendo i vertici in *ordine decrescente di tempo di terminazione della prima DFS* (prima quelli terminati più tardi *durante la prima DFS*).**

Calcolo delle CFC

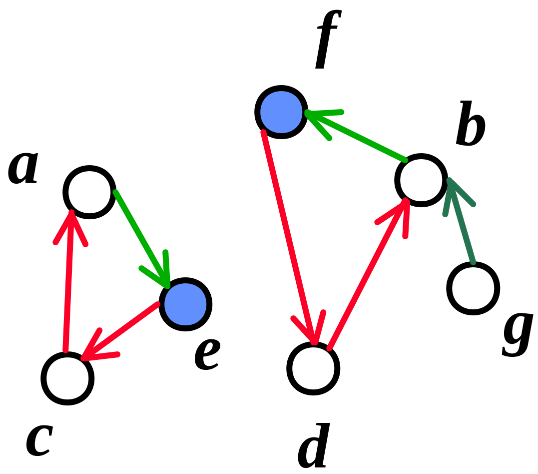


G

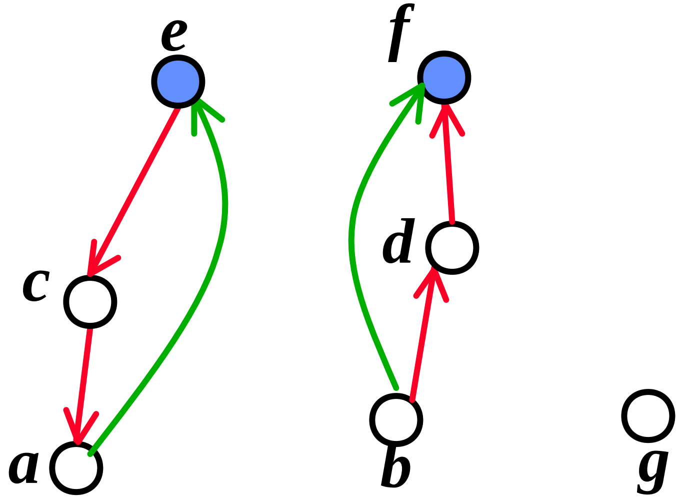


$$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$$

Calcolo delle CFC



Trasposto G^T



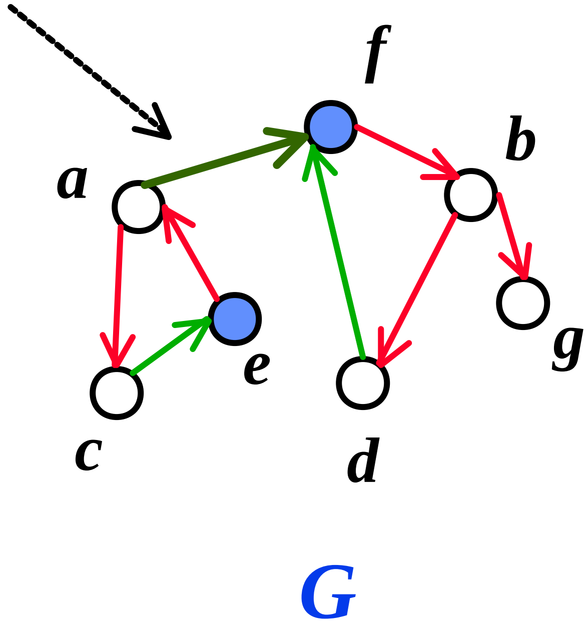
CFC_1 CFC_2 CFC_3

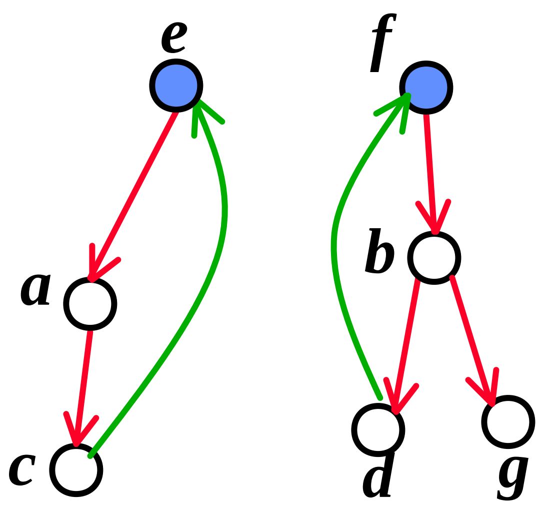
$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

$f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

$f[g] > f[d]$

Calcolo delle CFC



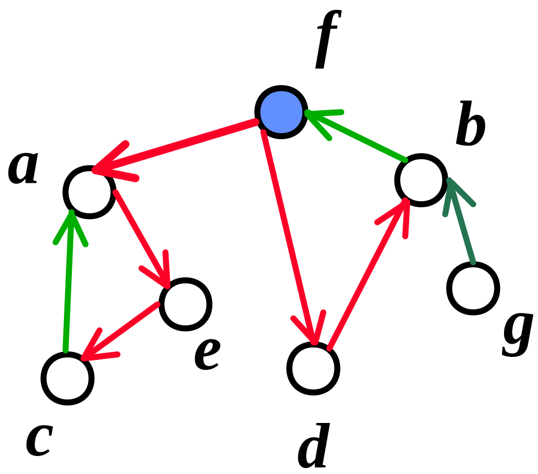


$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

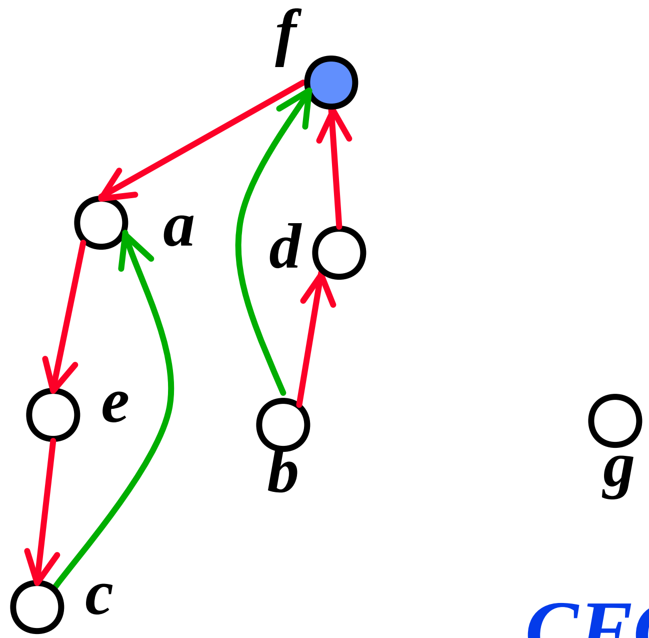
Supponiamo di non rispettare l'ordine decrescente e di scegliere il nodo *f* per primo.

Calcolo delle CFC

Il risultato è scorretto!



Trasposto G^T



CFC_2

CFC_1?

Supponiamo di non rispettare l'ordine decrescente e di scegliere il nodo *f* per primo.

Ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere.

Algoritmo per il calcolo delle CFC

1 ***DFS(G)***

2 **Calcolare il *grafo trasposto G^T***

3 ***DFS(G^T)*** **ma esaminando i vertici in ordine decrescente di tempo *f[v]* di fine visita**

4 **fornire i vertici di ogni albero della *foresta DF* prodotta al *passo 3* come una *diversa CFC***

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le *componenti fortemente connesse* del grafo orientato *G*.**

Dimostrazione: **Per induzione sul numero di *alberi DF* trovati durante la *DFS* di G^T, dimostriamo che i vertici di ogni *albero DF* formano una *CFC*.**

Dimostriamo che u **è aggiunto a *T sse*** $u \in \{v \in V: \varphi(v)=r\}$**.**

Passo Base: **inizialmente non ci sono alberi precedenti. Il verso se** $u \in \{v \in V: \varphi(v)=r\}$ ***u* allora è aggiunto a *T*, discende immediatamente dal fatto che *G* e G^T hanno le stesse CFC unitamente al *Teorema 2*.**

L'altro verso discende dal fatto che *r* è la radice dell'*ultimo albero della prima DFS*, quindi f[*r*] è massimo. Inoltre, se *u* viene aggiunto a *T*, allora c'è un percorso da *u* a *r* in *G* e, poiché f[*r*] è massimo, chiaramente $\varphi(u)=r$ **(per def. di avo).**

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le** ***componenti fortemente connesse*** **del grafo orientato** ***G*****.**

Dimostrazione:

Passo Induttivo: **Consideriamo l'*n*-esimo albero DF *T* con radice *r* prodotto da *DFS* su G^T e sia $C(r)=\{v \in V: \varphi(v)=r\}$.**

Dimostriamo che *u* è aggiunto a *T se e solo se u* $\in$ *C(r)*.

se: **Per il *Teorema 2* (sotto), ogni vertice in *C(r)* viene messo nello stesso *albero DF* dalla prima *DFS*.**

Poiché *r* $\in$ *C(r)*, e *r* è la radice del nuovo *albero DF*, ogni elemento di *C(r)* verrà messo in *T* dalla *DFS* su G^T

> ***Teorema 2:*** **In ogni *DFS*, tutti i vertici nella *stessa CFC* compaiono nello *stesso albero DF*.**

Correttezza di CFC(G)

Teorema: $CFC(G)$ **calcola correttamente le** ***componenti fortemente connesse*** **del grafo orientato** G**.**

Dimostrazione: **Dimostriamo che** u **è aggiunto** T ***se e solo se*** $u \in C(r)$**.**

solo se: **Dimostriamo (per contrapposizione) che se per un vertice** w **vale** $f[\varphi(w)] < f[r]$ **o** $f[\varphi(w)] < f[r]$**, allora** w **non viene aggiunto a** T**.**

Per ipotesi induttiva, ogni w **tale che** $f[\varphi(w)] > f[r]$ **non può essere messo in** T**, poiché quando** r **è selezionato dal ciclo in** DFS**,** w **è già stato messo nell'albero con radice** $\varphi(w)$**.**

Ogni w **tale che** $f[\varphi(w)] < f[r]$ **non può essere posto in** T**, se così fosse, allora** $w \xrightarrow{p} r$ **e dalla formula (1) e da** $r = \varphi(r)$ **segue che** $f[\varphi(w)] \geq f[\varphi(r)] = f[r]$**, ma ciò contraddice** $f[\varphi(w)] < f[r]$**.**

$u \xrightarrow{p} v$ **implica che** $f[\varphi(v)] \leq f[\varphi(u)]$ **(1)**

Correttezza di CFC(G)

Teorema: *CFC(G)* **calcola correttamente le componenti fortemente connesse del grafo orientato** G.

Dimostrazione: **Dimostriamo che** u **è aggiunto a** T ***se e solo se*** $u \in C(r)$.

solo se: **Ogni** w **tale che** $f[\phi(w)] < f[r]$ **non può essere posto in** T**, se così fosse, allora** $w \rightarrow r$ **e dalla formula (1) e da** $r = \phi(r)$ **segue che** $f[\phi(w)] \geq f[\phi(r)] = f[r]$**, che contraddice** $f[\phi(w)] < f[r]$.

Quindi, T **contiene solo quei vertici** u **per i quali** $f[\phi(u)] = r$.

Cioè, T **è proprio uguale alla componente fortemente connessa** $C(r)$**, e ciò completa la dimostrazione**

Esercizi su CFC

Dal libro di testo:

Esercizio 23.5-4

Esercizio 23.5-5