

Algoritmi e Strutture Dati (Mod. B)

Grafi

Grafi

I grafi sono uno *strumento di rappresentazione* (modellazione) di problemi.

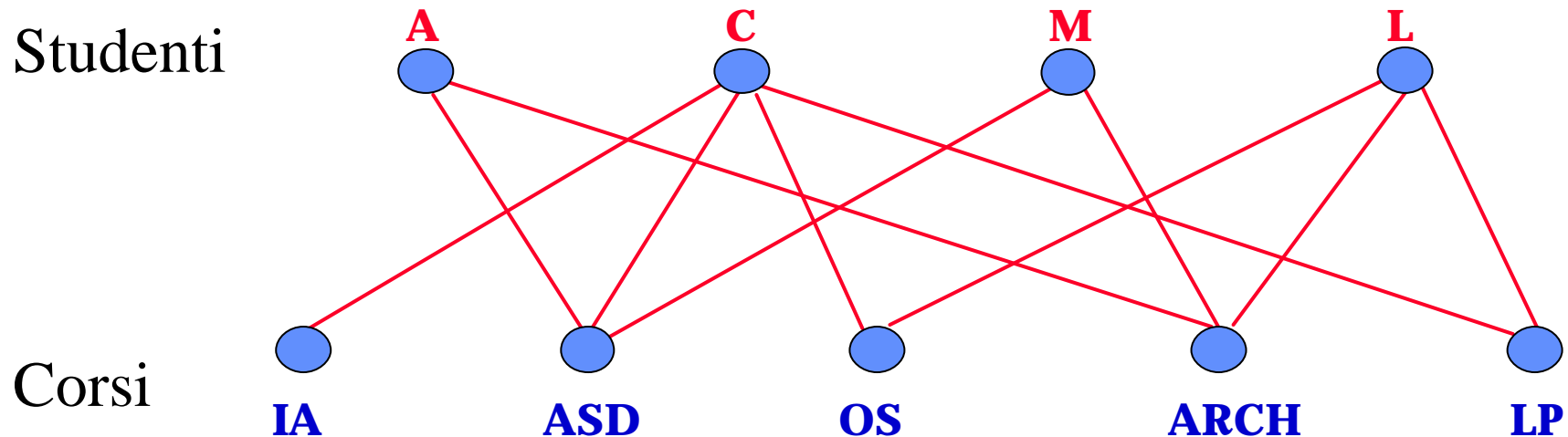
La soluzione di molti problemi può essere ricondotta alla soluzione di opportuni problemi su grafi.

- *Introduzione ai grafi*
 - Definizioni e rappresentazione di grafi
 - Algoritmi di ricerca su grafi
 - Ricerca in ampiezza (*BFS*)
 - Ricerca in profondità (*DFS*)
 - **Applicazioni:** Ordinamento Topologico, Componenti Fortemente Connesse,...

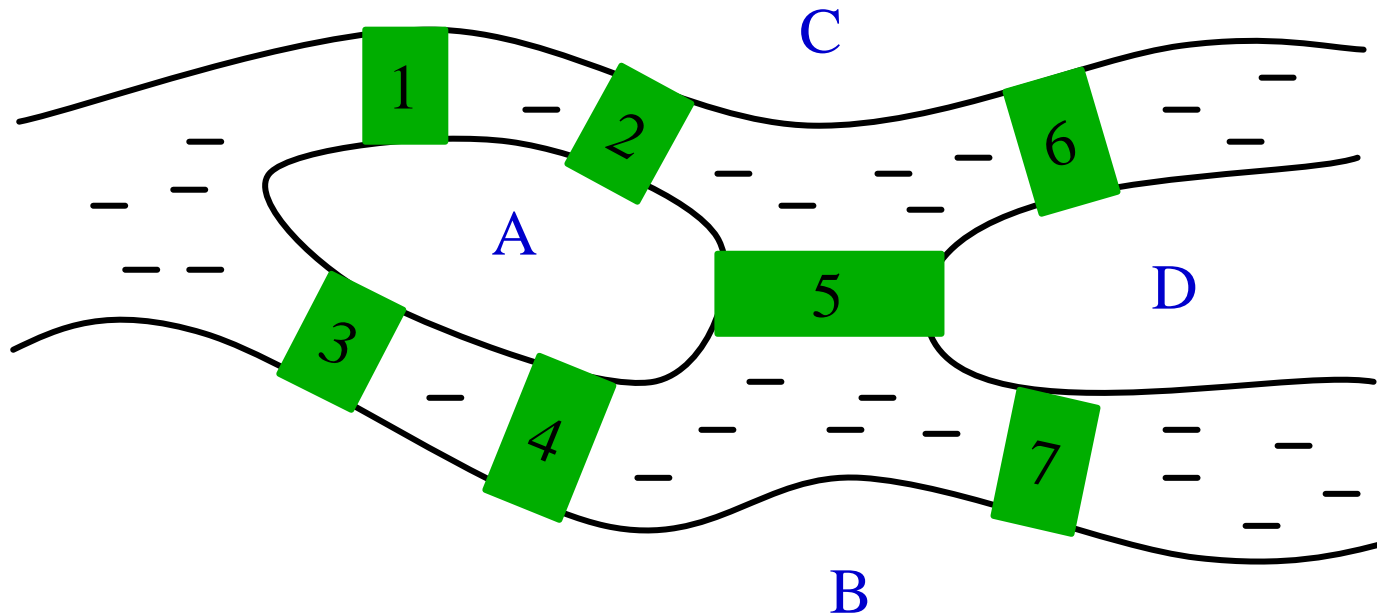
Cos'è un grafo

Esempio:

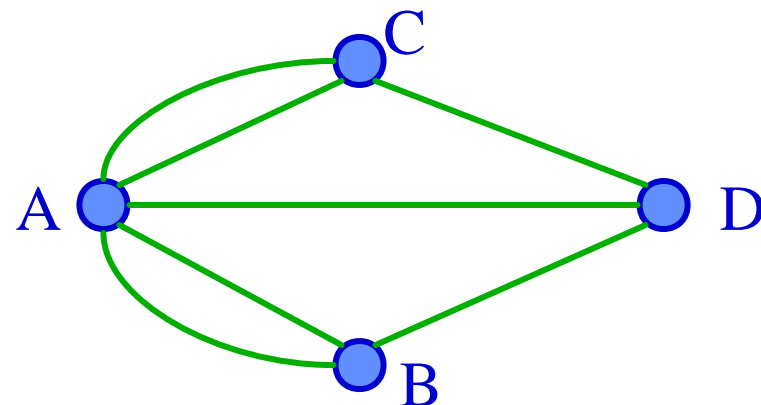
Studenti	Corsi
M arco	ASD, ARCH
C arla	IA, ASD, OS, LP
A ndrea	ASD, ARCH
L aura	OS, ARCH, LP



I ponti di Königsberg



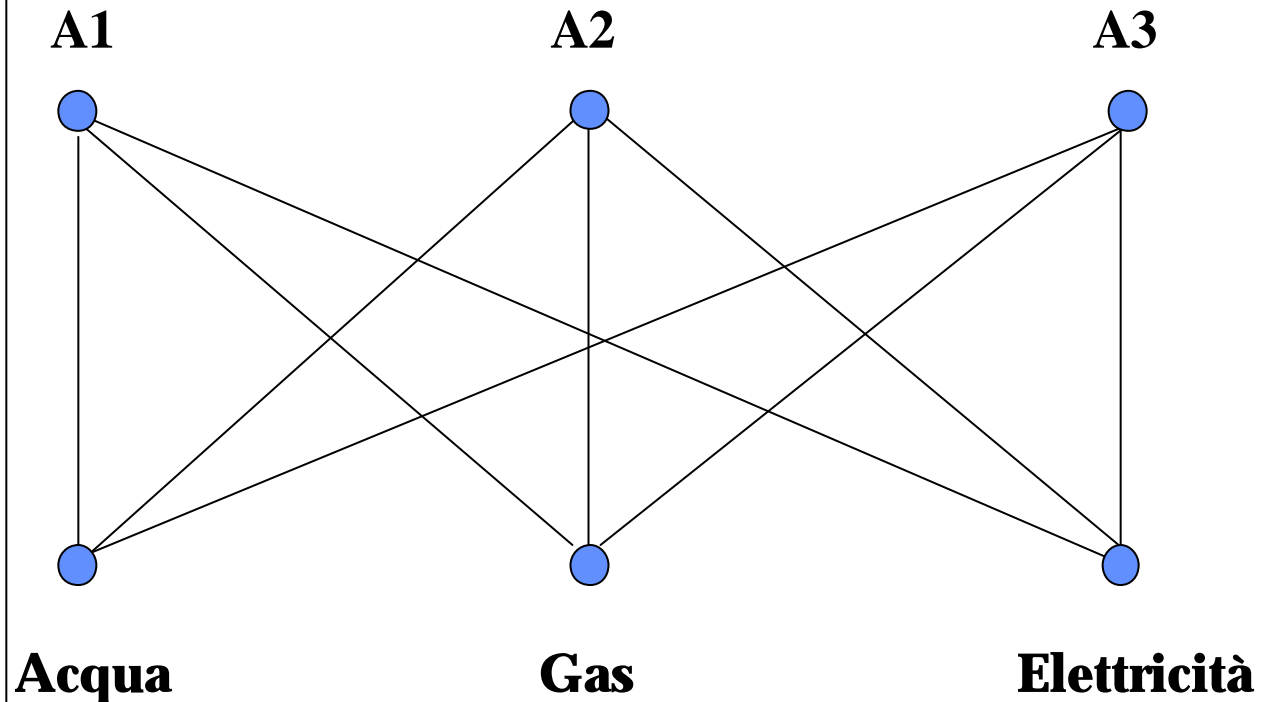
È possibile attraversare tutti i ponti esattamente una sola volta?



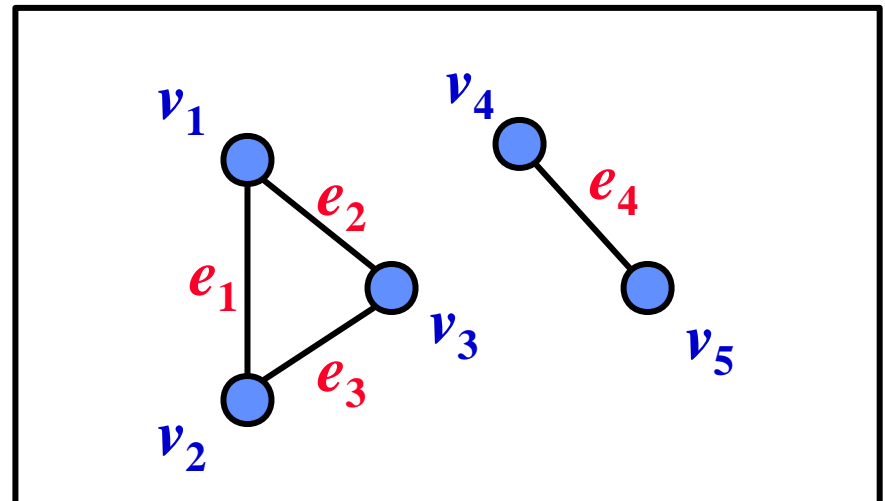
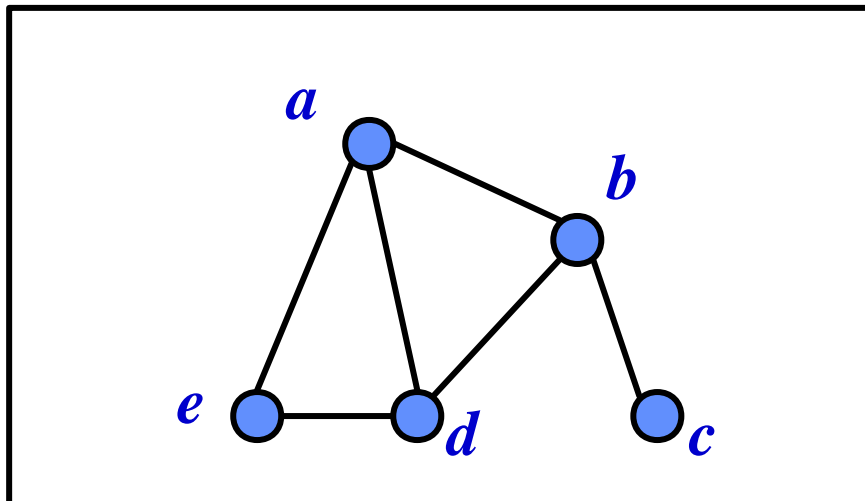
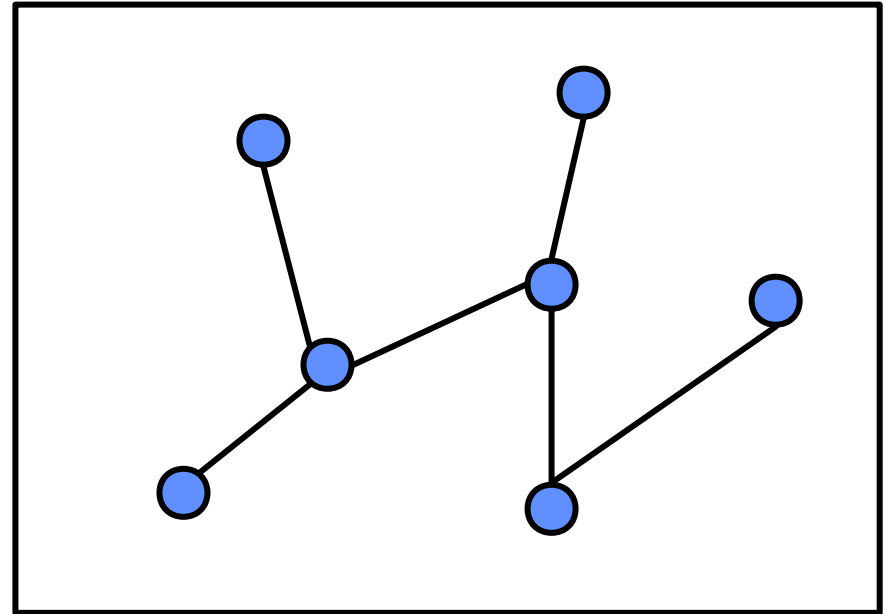
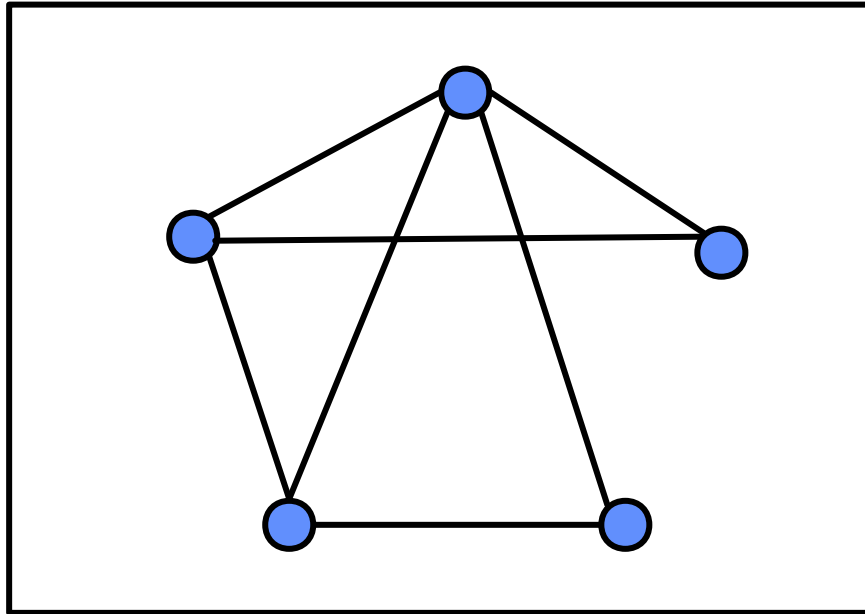
Rappresentazione a grafi di problemi

Problema: Supponiamo dover connettere tre abitazioni A1, A2 e A3 tramite tubature per fornile di Acqua, Gas ed Elettricità.

Se però assumiamo che le tubature vadano posizionate alla stessa profondità, è possibile offrire la fornitura a tutte le abitazioni senza far incrociare le tubature?



Esempi di grafi



Definizione di grafo

Un **grafo** G è una coppia di elementi (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

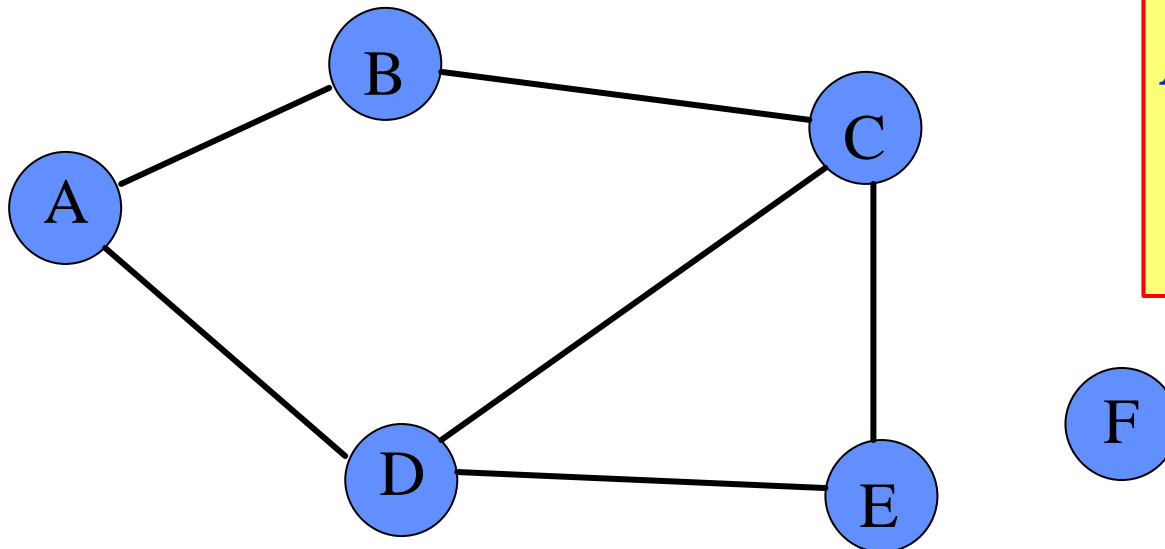
E è un insieme di **coppie di vertici** detto insieme degli **archi**

Definizione di grafo

Un **grafo** G è una coppia di elementi (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di **coppie di vertici** detto insieme degli **archi**



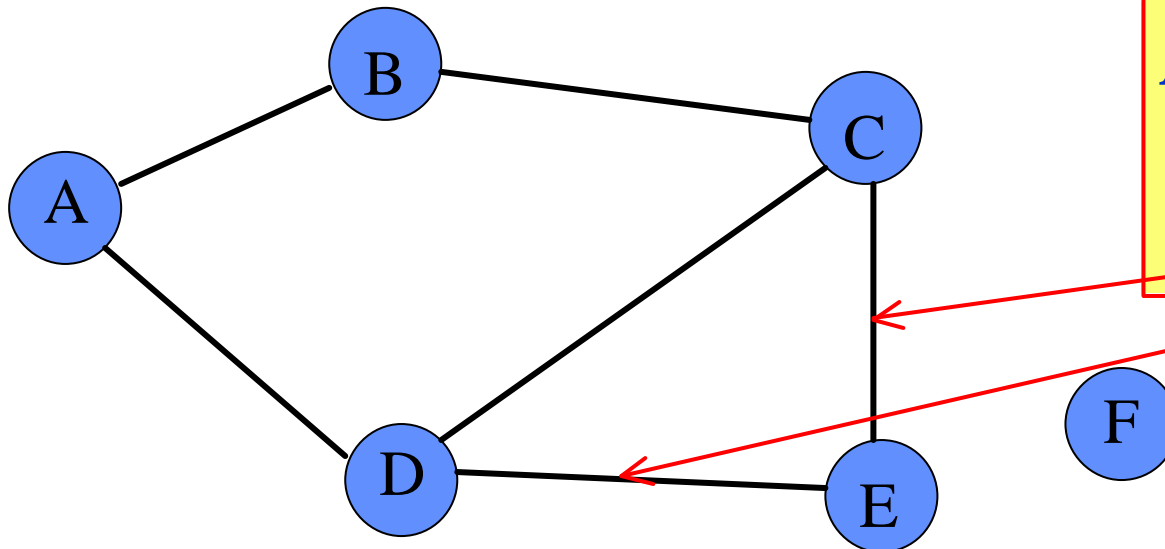
$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$$

Definizione di grafo

Un **arco** è una coppia (v,w) di vertici in V , cioè

- $v \hat{=} V$ e $w \hat{=} V$



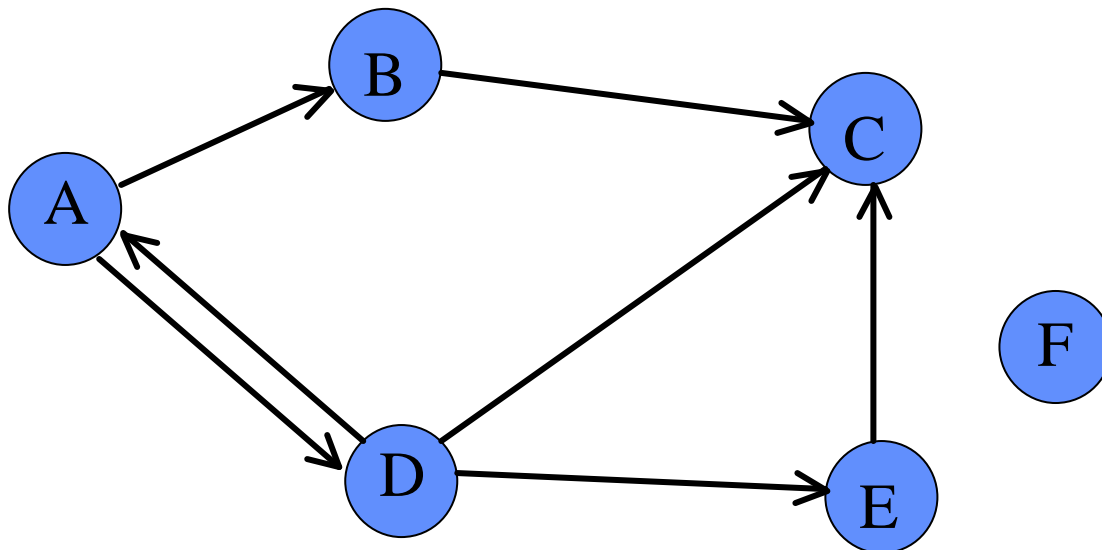
$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D),$
 $(B,C), (C,D),$
 $(C,E), (D,E)\}$

Tipi di grafi: grafi orientati

Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è una *relazione binaria* tra vertici detta insieme degli **archi**

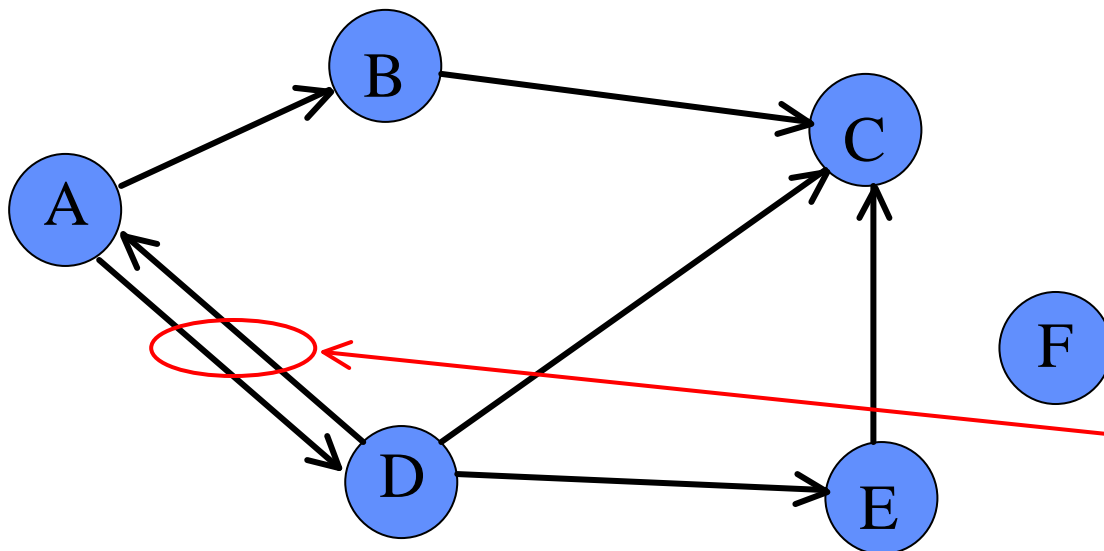


ipi di grafi: grafi orientati

Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è una *relazione binaria* tra vertici detta insieme degli **archi**



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D),$
 $(B,C), (D,C),$
 $(E,C), (D,E),$
 $(D,A)\}$

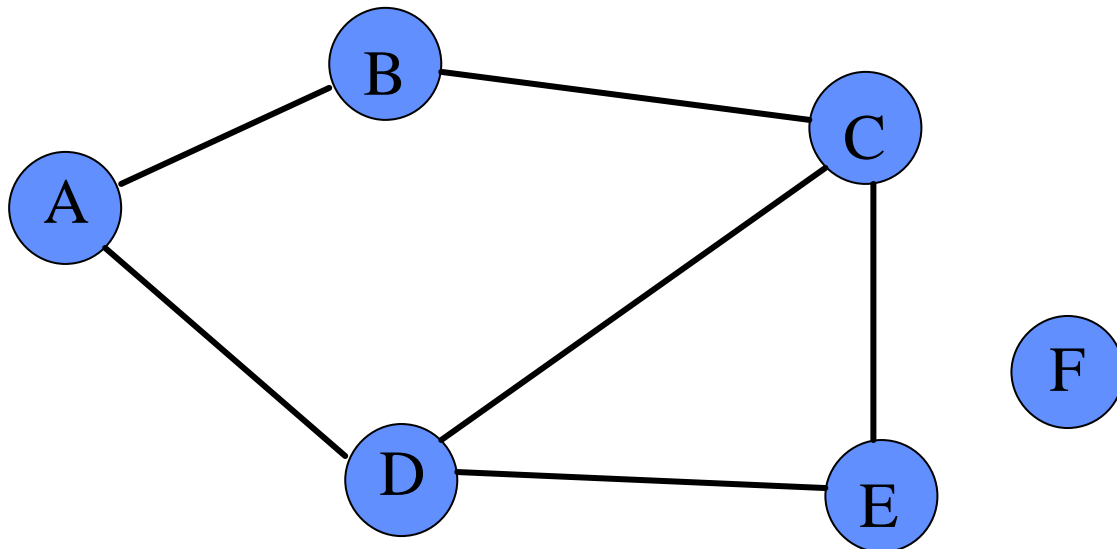
(A,D) e (D,A) denotano
due archi diversi

Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici detto insieme degli **archi**



$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

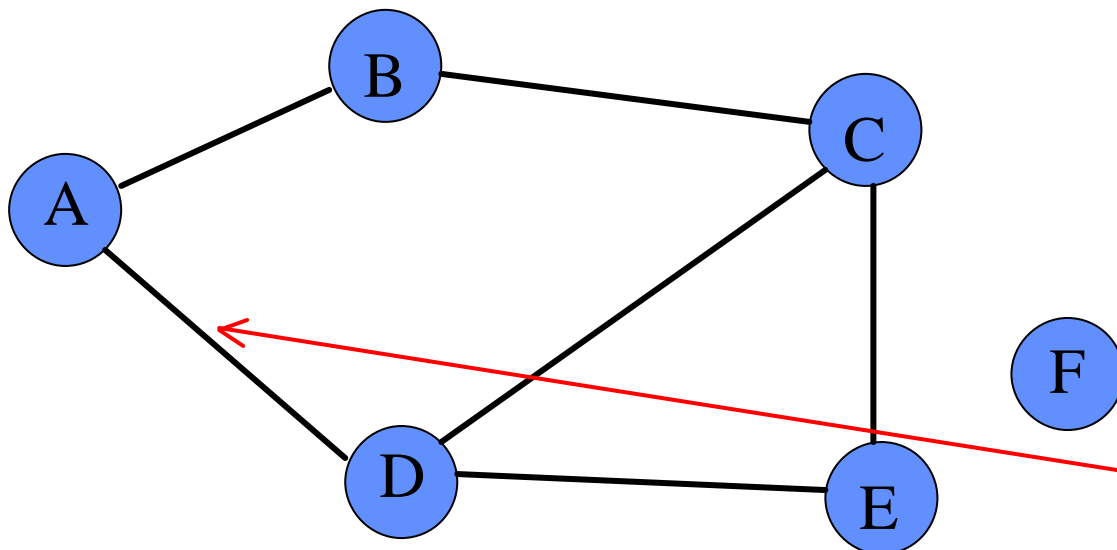
$$E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$$

Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici detto insieme degli **archi**



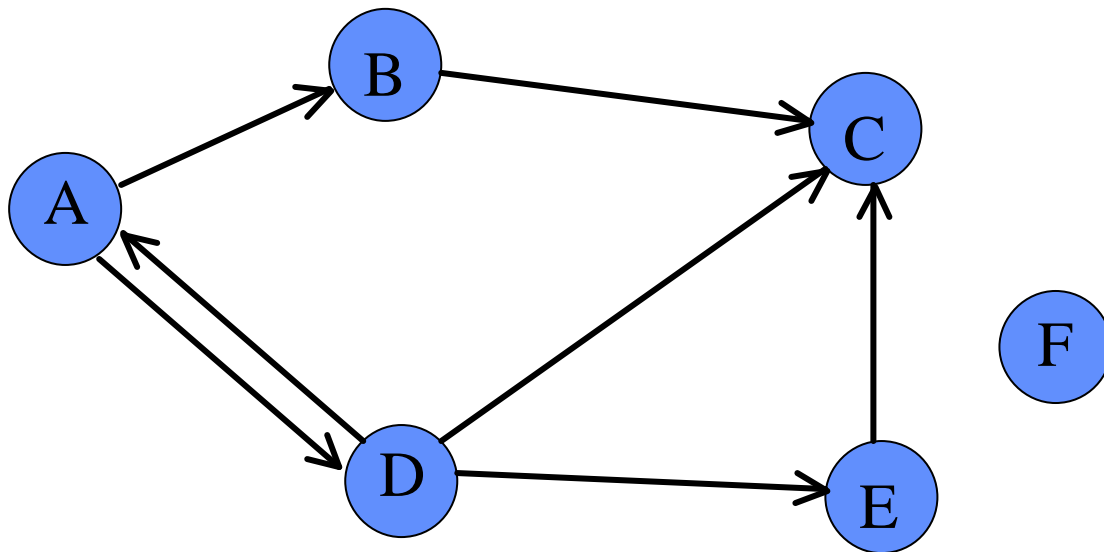
$V = \{A, B, C, D, E, F\}$

$E = \{(A,B), (A,D),$
 $(B,C), (C,D),$
 $(C,E), (D,E)\}$

(A,D) e (D,A) denotano
lo stesso arco

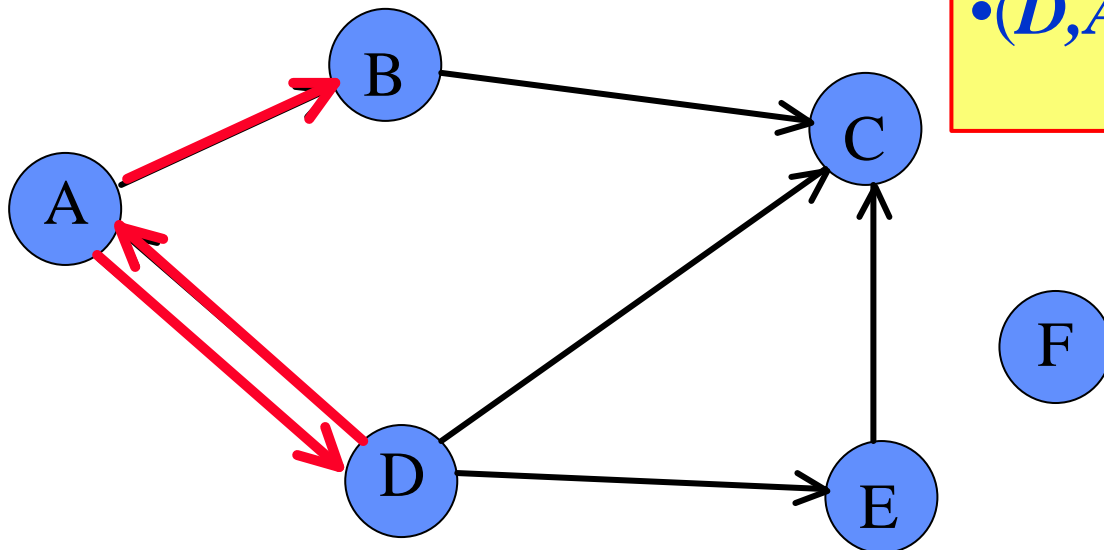
Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco (w,v) si dice *incidente* da w in v



Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco (w,v) si dice *incidente* da w in v



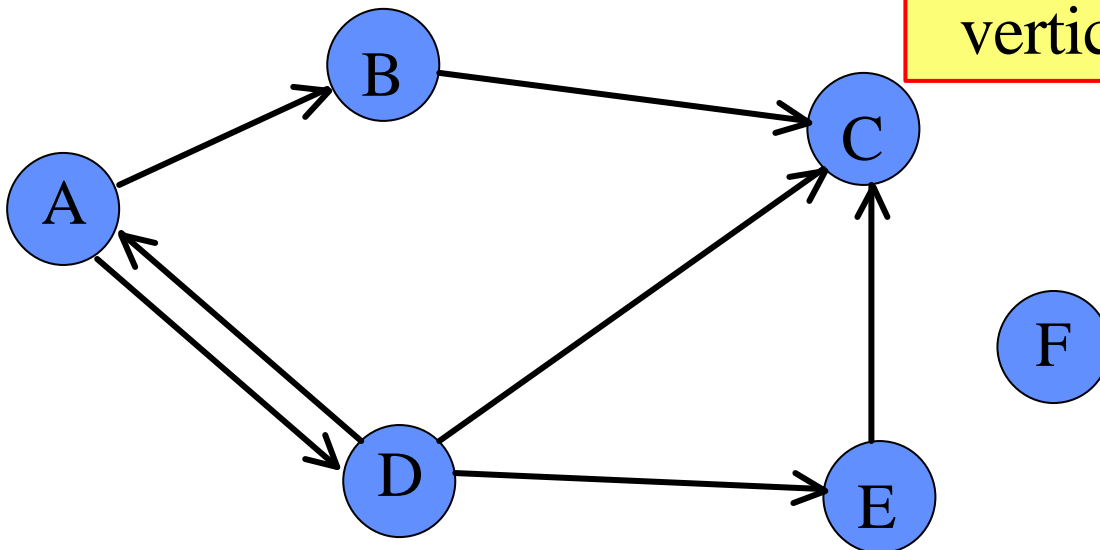
- (A,B) è *incidente* da A a B
- (A,D) è *incidente* da A a D
- (D,A) è *incidente* da D a A

Definizioni sui grafi

Un vertice w si dice *adiacente* a v se e solo se

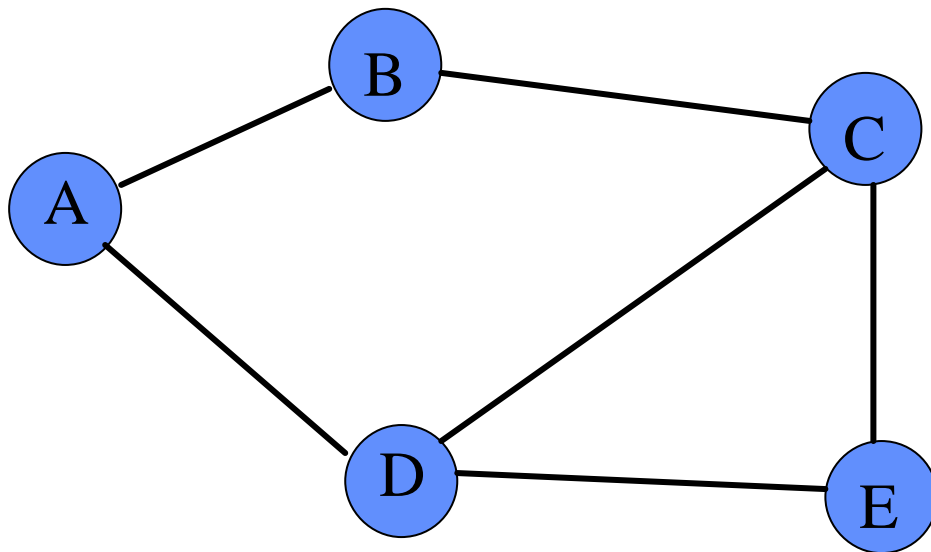
- $(v, w) \in E$.

- B è *adiacente* ad A
- C è *adiacente* a B e a D
- A è *adiacente* a D e vice versa
- B **NON** è *adiacente* a D **NÉ** a C
- F **NON** è *adiacente* ad alcun vertice



Definizioni sui grafi

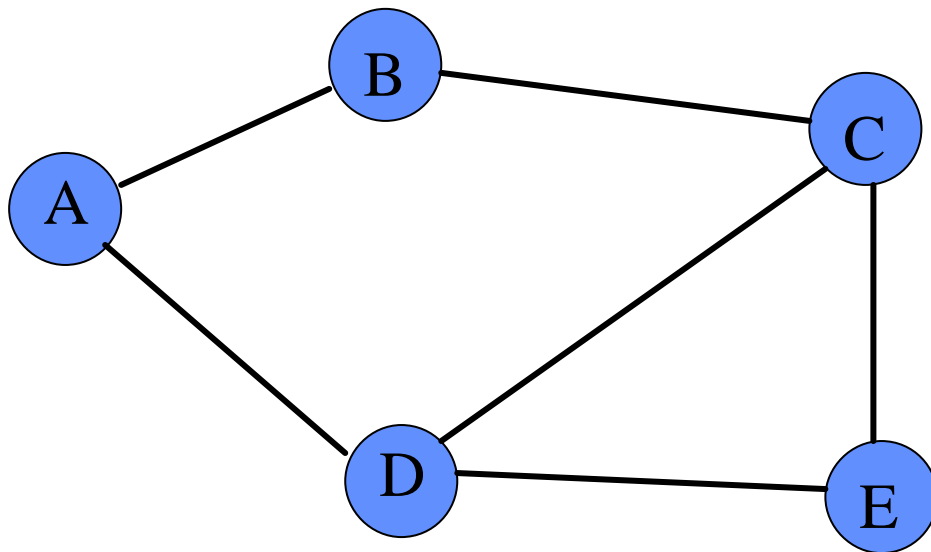
In un *grafo non orientato* la relazione di *adiacenza* tra vertici è *simmetrica*



- *A* è *adiacente* a *D* e vice versa
- *B* è *adiacente* a *A* e vice versa
- *F NON* è *adiacente* ad alcun vertice

Definizioni sui grafi

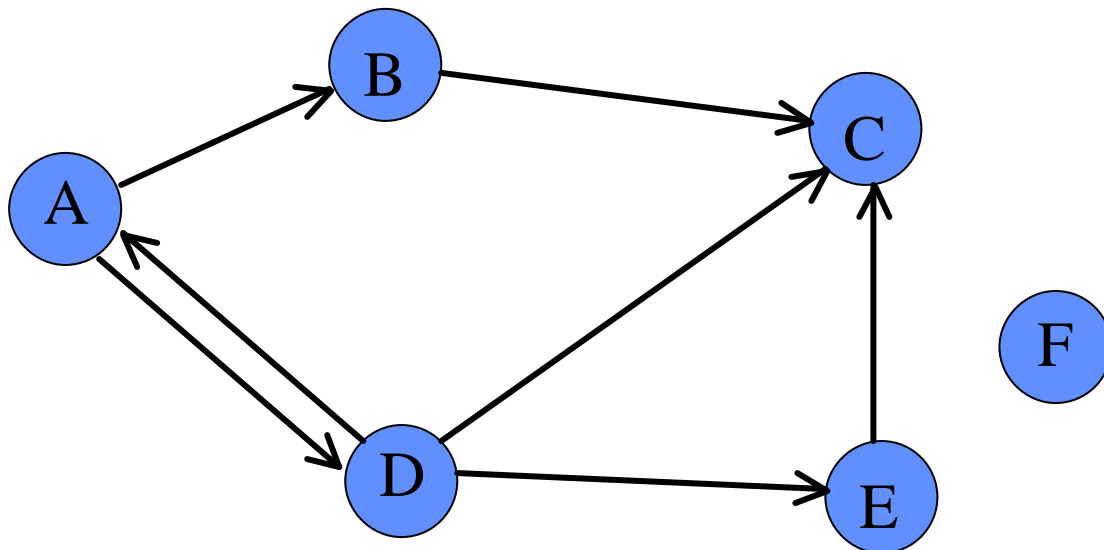
In un *grafo non orientato* il **grado** di un *vertice* è il *numero di archi* che da esso si dipartono



- *A*, *B* ed *E* hanno **grado 2**
- *C* e *D* hanno **grado 3**
- *F* ha **grado 0**

Definizioni sui grafi

In un *grafo orientato* il **grado entrante (uscente)** di un *vertice* è il *numero di archi incidenti in (uscenti da)* esso

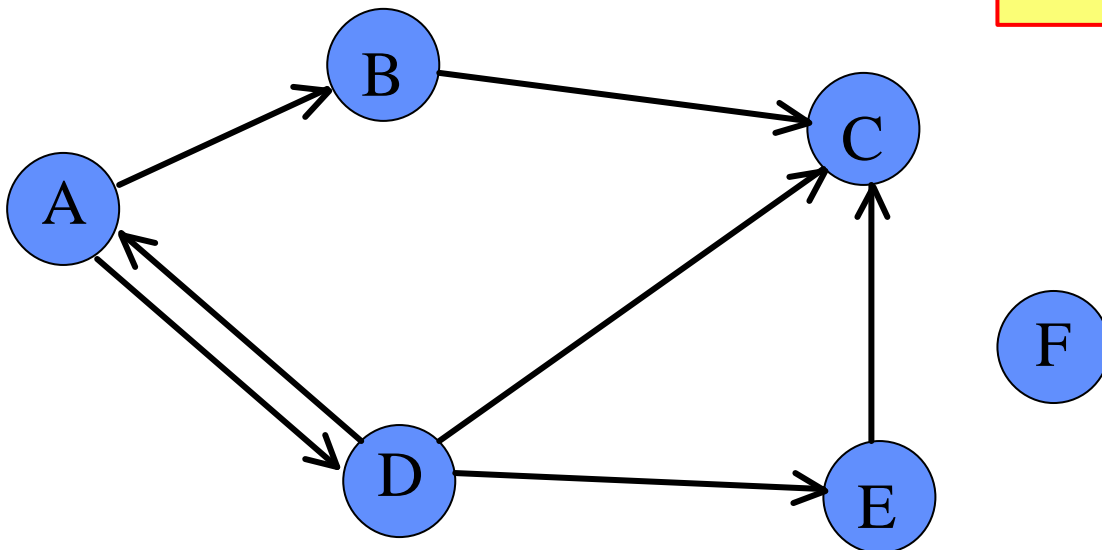


- *A* ha **grado uscente 2**
e **grado entrante 1**
- *B* ha **grado uscente 1**
e **grado entrante 1**
- *C* ha **grado uscente 0**
e **grado entrante 3**
- *D* ha **grado uscente 3**
e **grado entrante 1**

Definizioni sui grafi

In un *grafo orientato* il **grado** di un *vertice* è la somma del suo *grado entrante* e del suo *grado uscente*

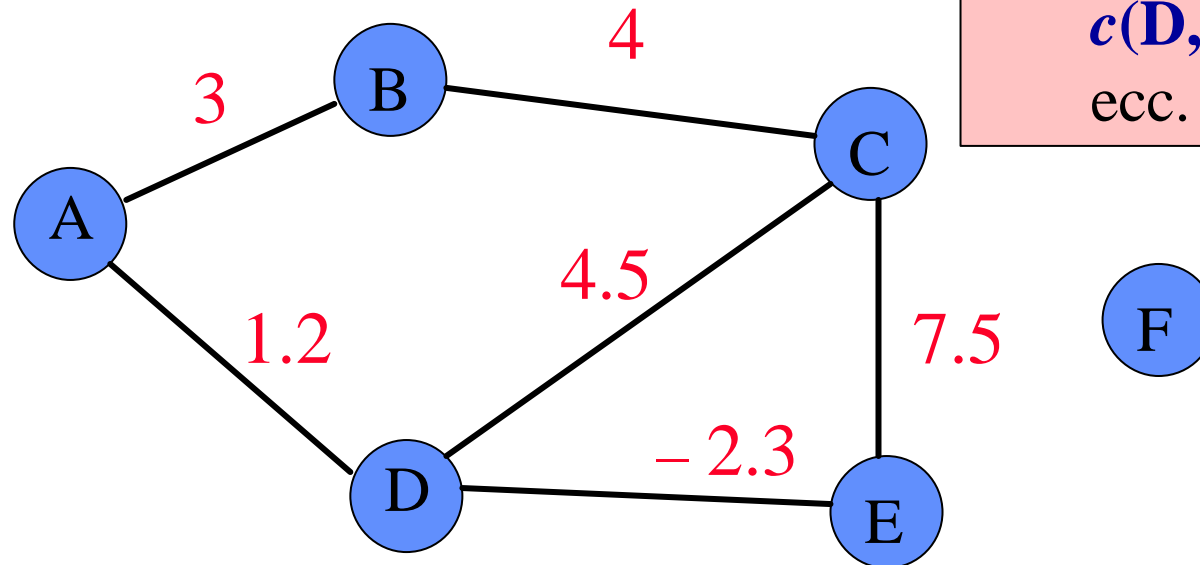
- *A* e *C* hanno **grado 3**
- *B* ha **grado 2**
- *D* ha **grado 4**



Definizioni sui grafi

In alcuni casi, gli archi hanno un **peso** (o **costo**) associato.

Il costo può essere rappresentato da una **funzione di costo**, $c: E \rightarrow \mathbf{R}$, dove \mathbf{R} è l'insieme dei numeri reali (o interi).

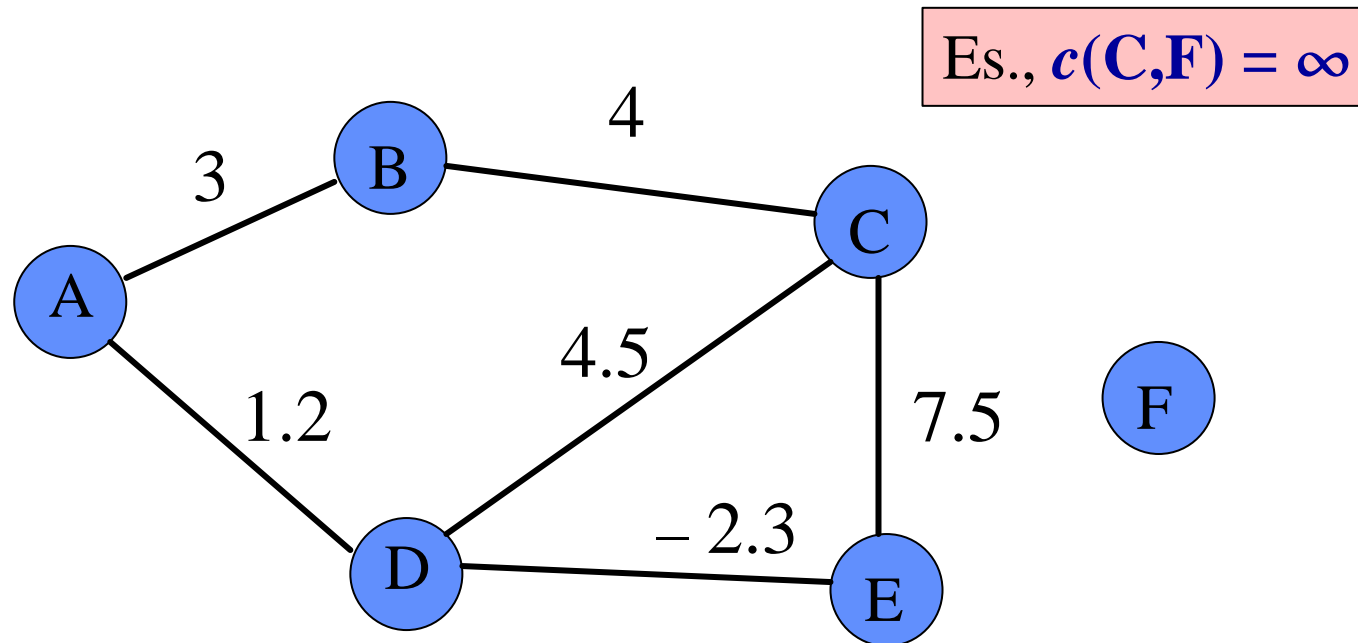


Es., $c(A, B) = 3$,
 $c(D, E) = -2.3$,
ecc.

Definizioni sui grafi

In alcuni casi, gli archi hanno un **peso** (o **costo**) associato.

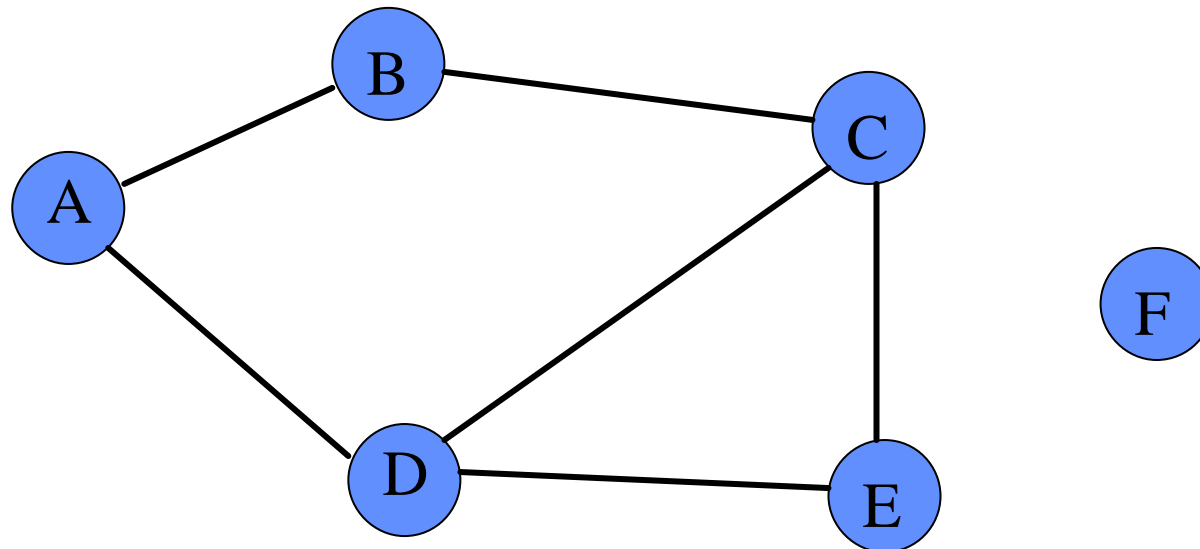
Quando tra due vertici **non esiste** un arco, si dice che il costo è **infinito**.



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

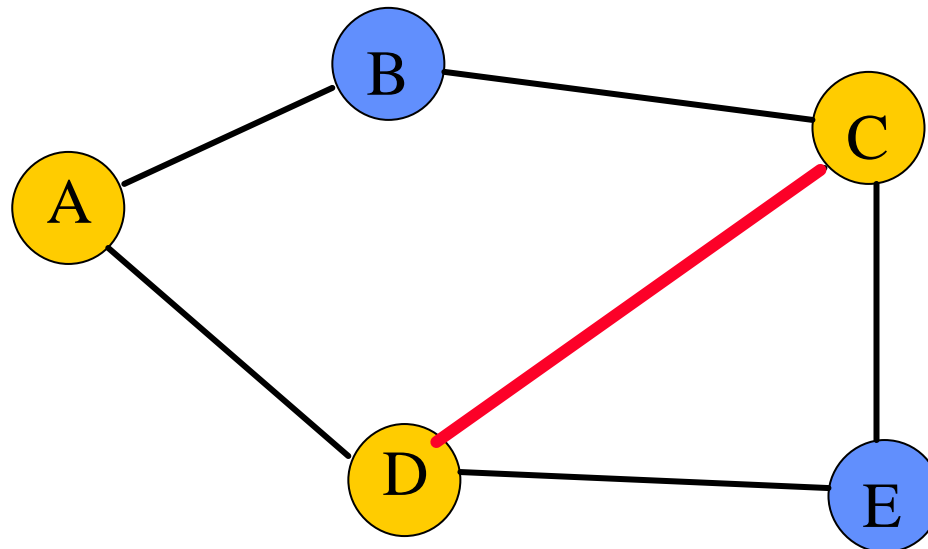
Un *sottografo* di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **sottografo** di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



Es.,

$$V^* = \{A, C, D\},$$

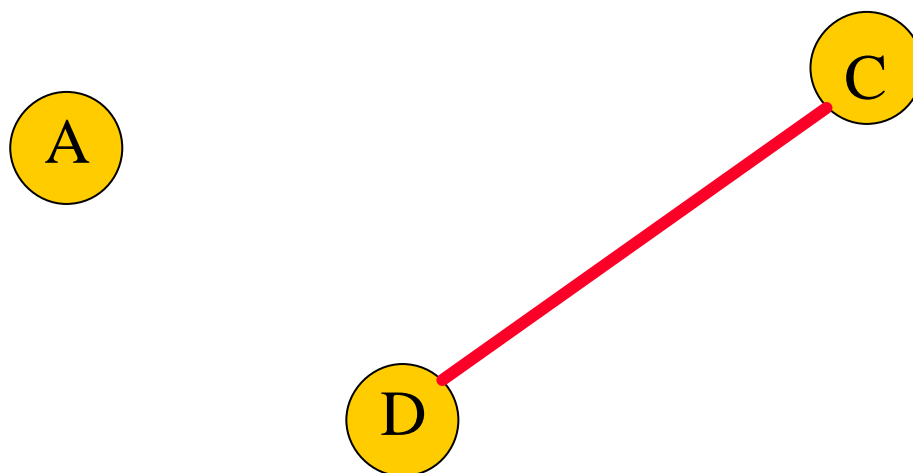
$$E^* = \{(C, D)\}.$$



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



Es.,

$$V^* = \{A, C, D\},$$

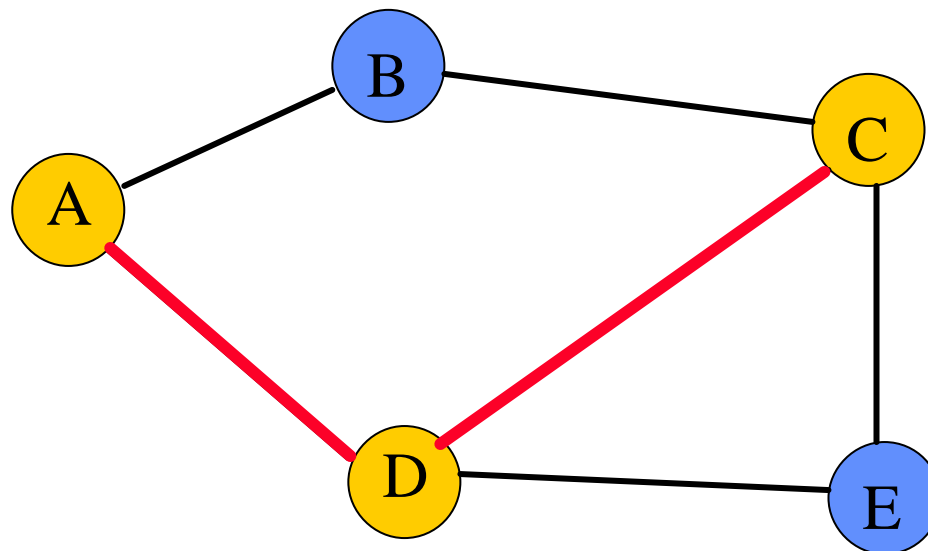
$$E^* = \{(C, D)\}.$$

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo e $V^* \subseteq V$ un insieme di vertici.

Il *sottografo* di G *indotto* da V^* è il grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che:

$$E^* = \{(w, v) \in E \mid w, v \in V^*\}$$



Es.,

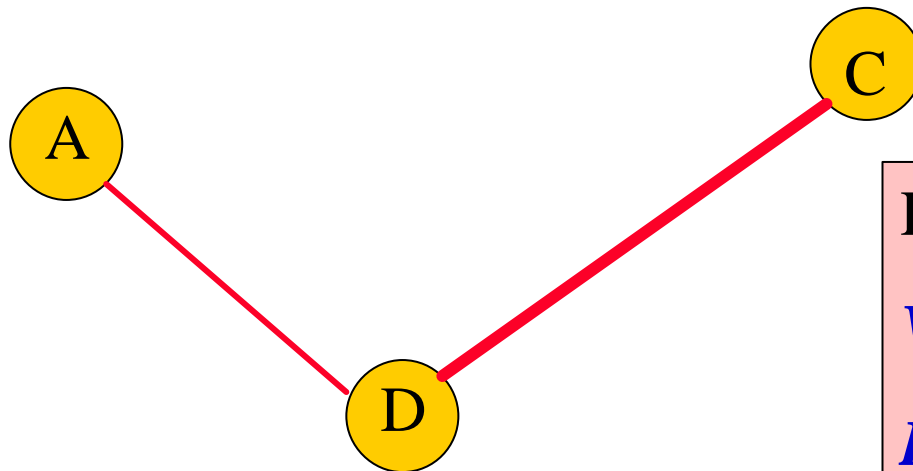
$$V^* = \{A, C, D\}$$

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo e $V^* \subseteq V$ un insieme di vertici.

Il *sottografo* di G *indotto* da V^* è il grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che:

$$E^* = \{(w, v) \in E \mid w, v \in V^*\}$$



Es.,

$$V^* = \{A, C, D\},$$

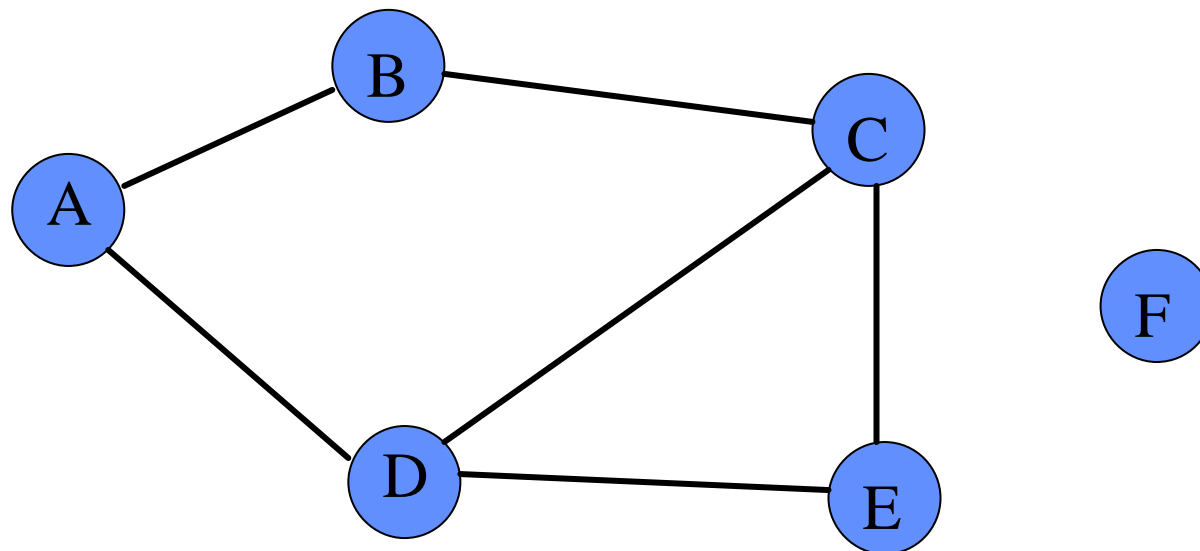
$$E^* = \{(C, D), (A, D)\}.$$

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* $H = (V^*, E^*)$ di G è detto *di supporto* se:

$$V^* = V$$

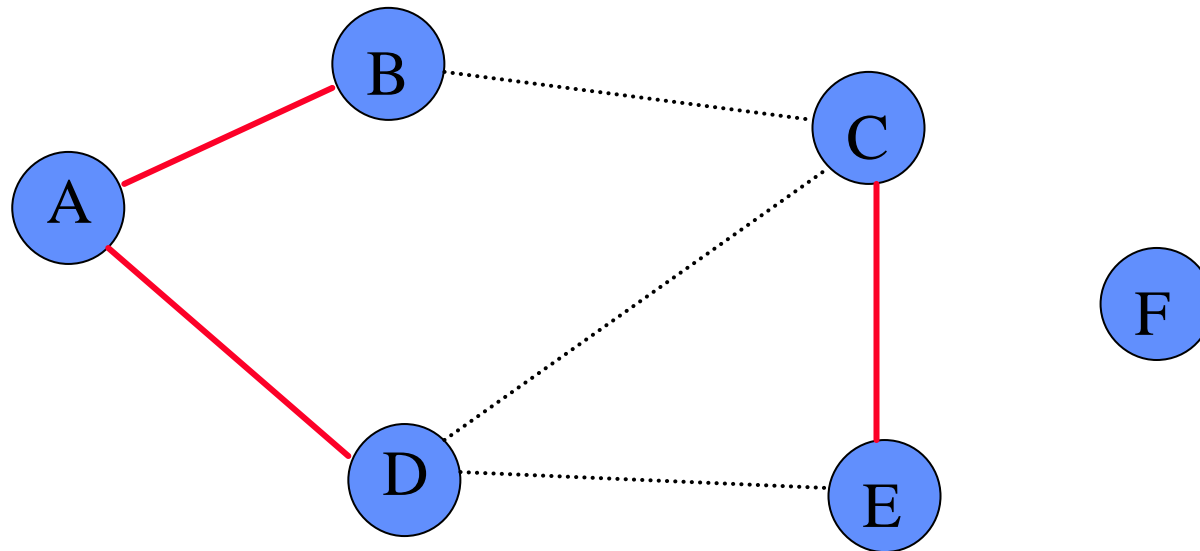


Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* $H = (V^*, E^*)$ di G è detto *di supporto* se:

$$V^* = V$$

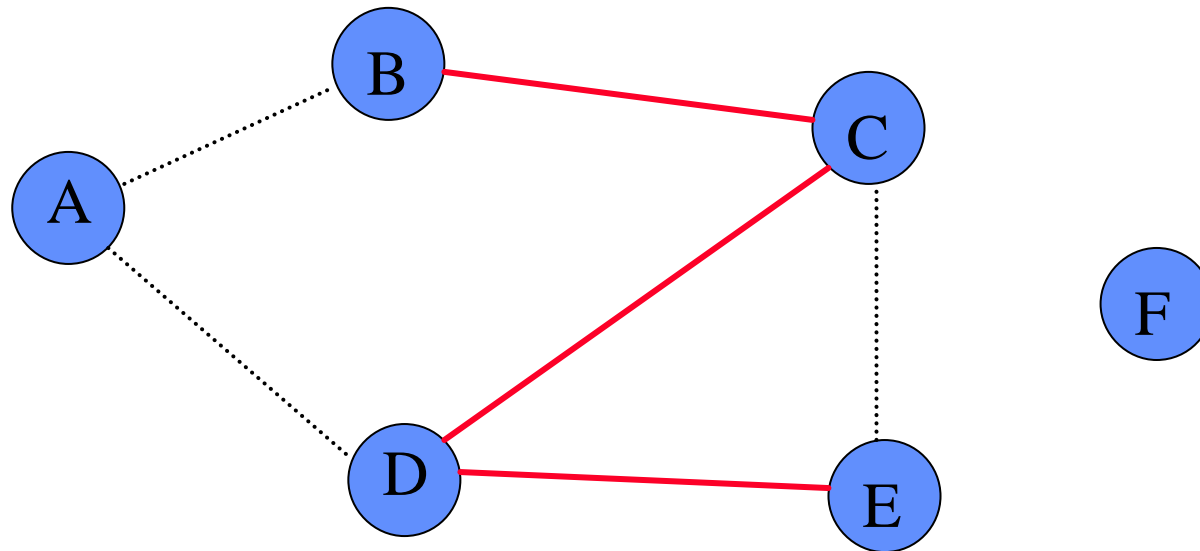


Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* $H = (V^*, E^*)$ di G è detto *di supporto* se:

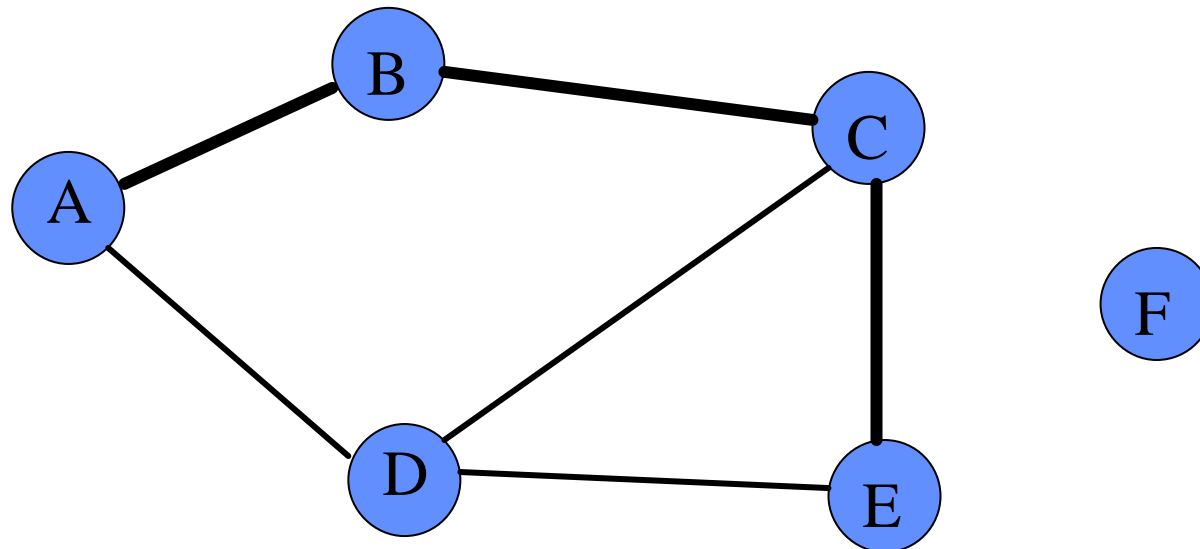
$$V^* = V$$



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

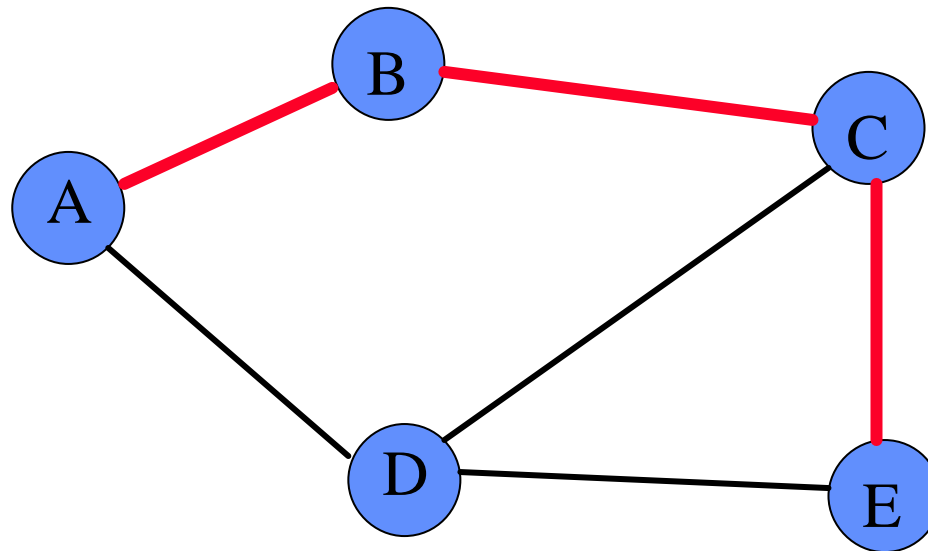
Un **percorso** nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **percorso** nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Es.,

$\langle A, B, C, E \rangle$

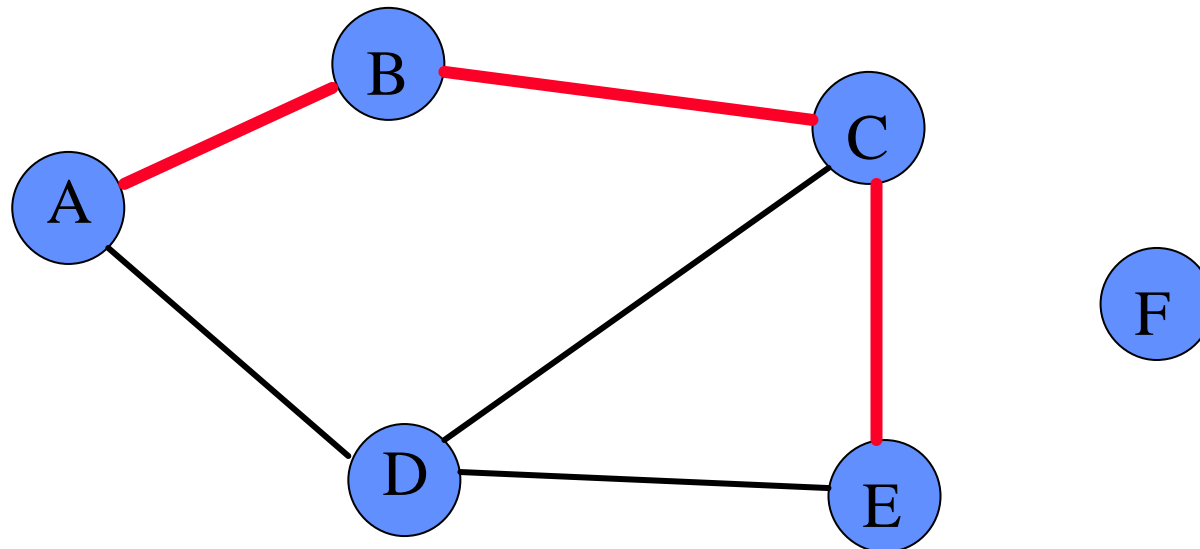
è un percorso nel
grafo

Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **percorso** nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.

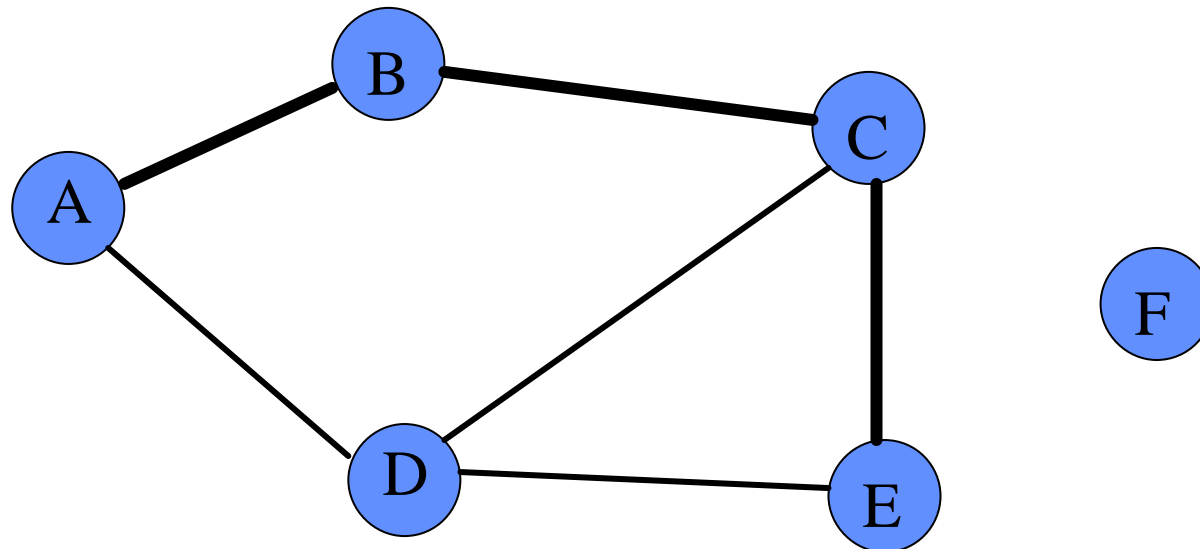
Il **percorso** $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ si dice che **contiene** i vertici w_1, w_2, \dots, w_n e gli archi $(w_1, w_2) (w_2, w_3) \dots (w_{n-1}, w_n)$



Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso*.

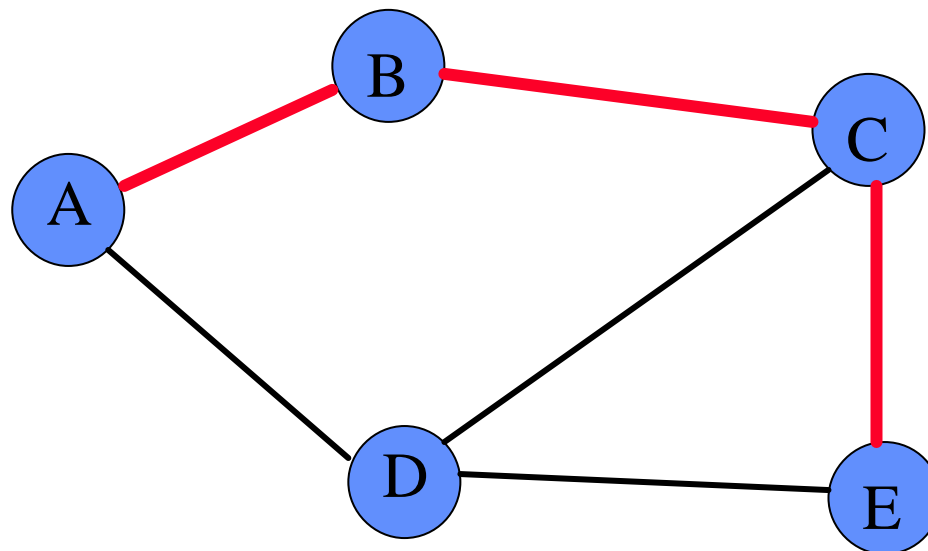
La *lunghezza* del percorso è il *numero totale di archi* che connettono i vertici nell'ordine della sequenza (se il numero di vertici nella sequenza è n , il numero di archi sarà $n-1$).



Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso*.

La *lunghezza* del percorso è il *numero totale di archi* che connettono i vertici nell'ordine della sequenza (se il numero di vertici nella sequenza è n , il numero di archi sarà $n-1$).

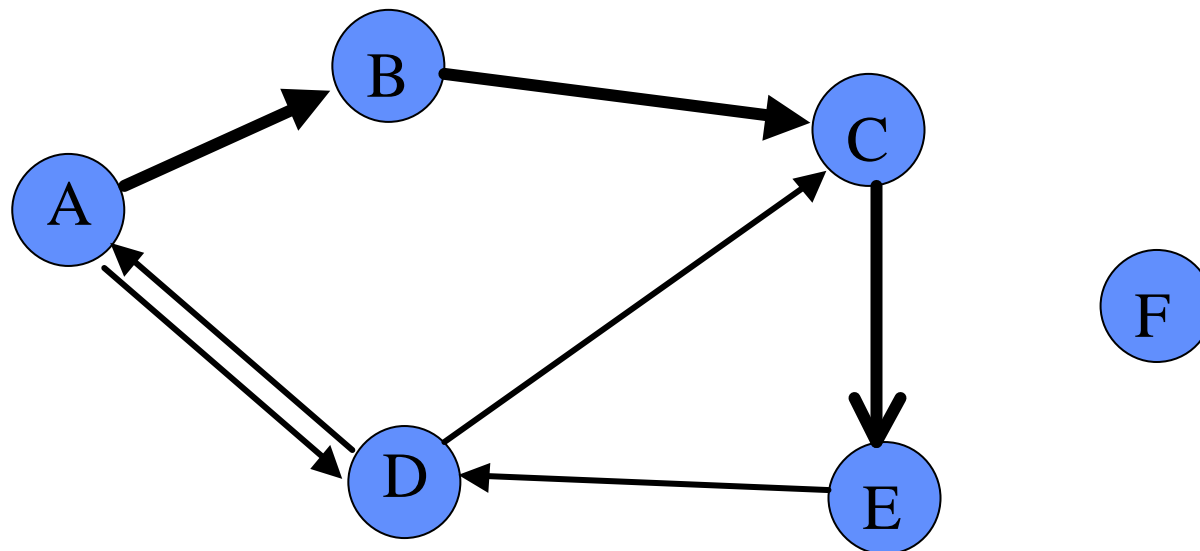


Es., la lunghezza
del percorso
 $\langle A, B, C, E \rangle$ è 3.

Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

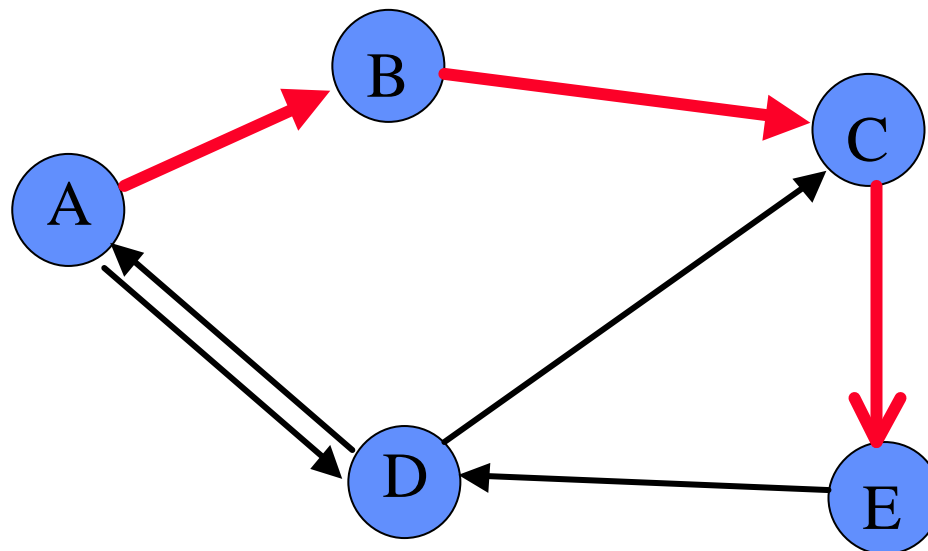
Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è una *coppia ordinata di vertici*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.



Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è una *coppia ordinata di vertici*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.

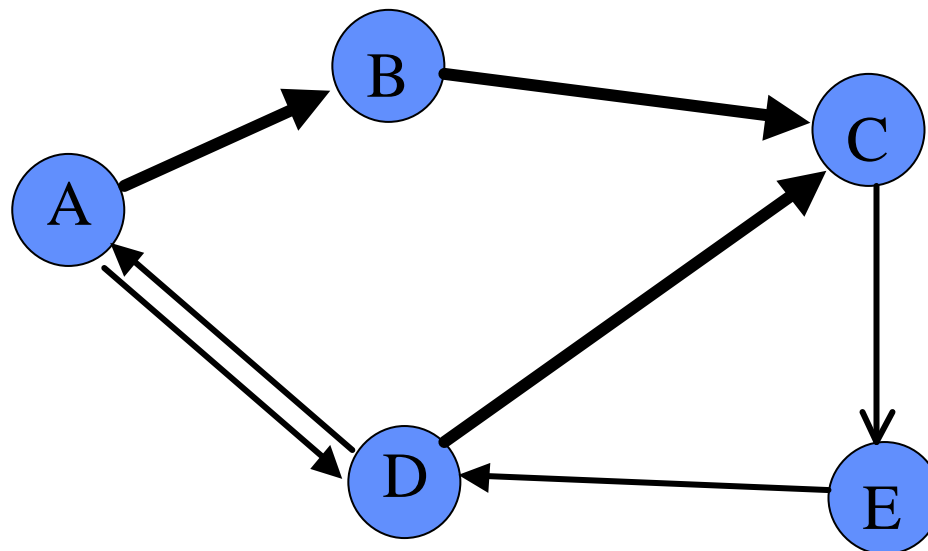


Es., $\langle A, B, C, E \rangle$
è un percorso in
questo grafo
orientato, ma ...

Definizioni sui grafi

Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è una *coppia ordinata di vertici*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.

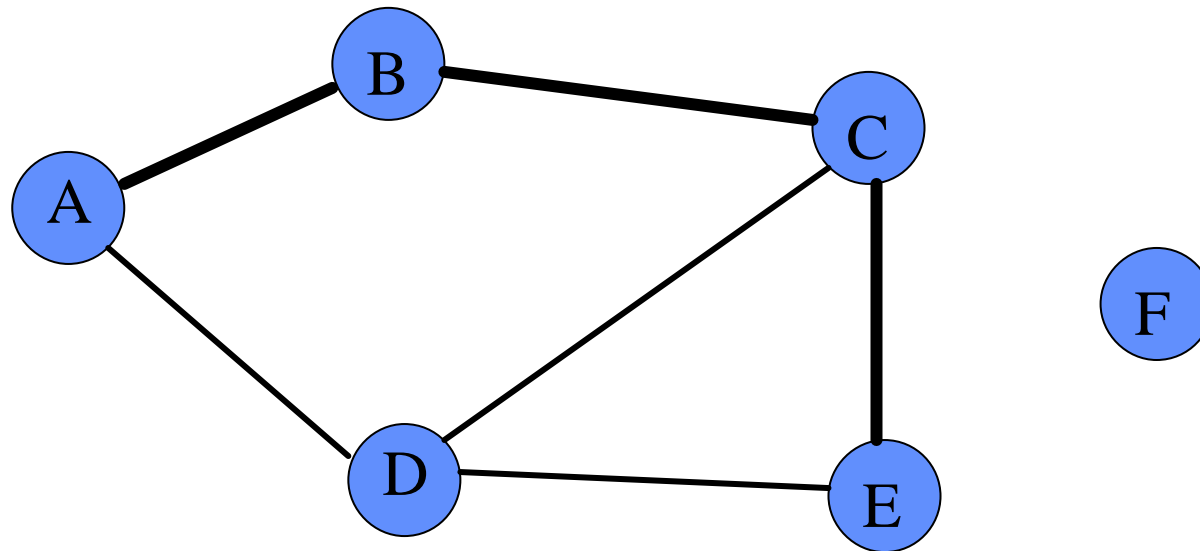


... ma $\langle A, B, C, D \rangle$
non è un percorso,
poiché (C, D) non è
un arco.



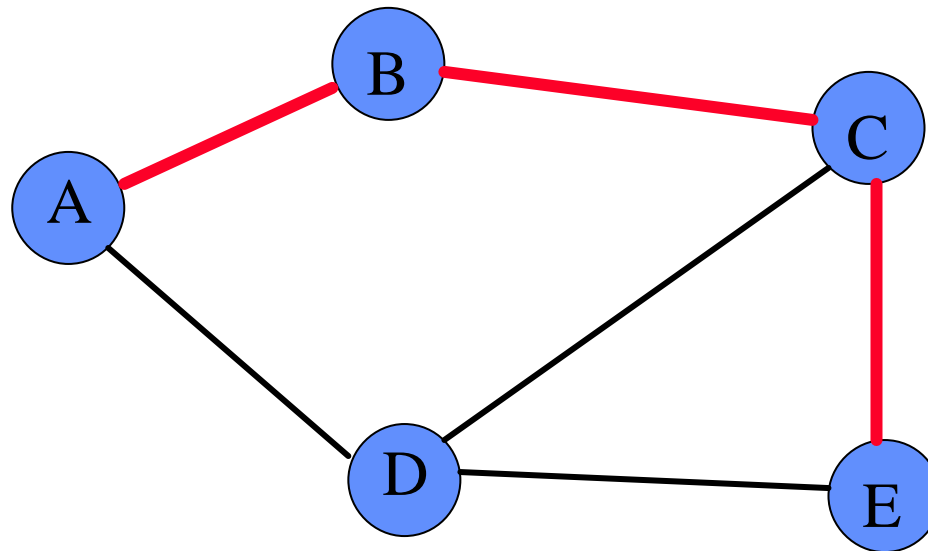
Definizioni sui grafi

Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), *eccetto* al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.



Definizioni sui grafi

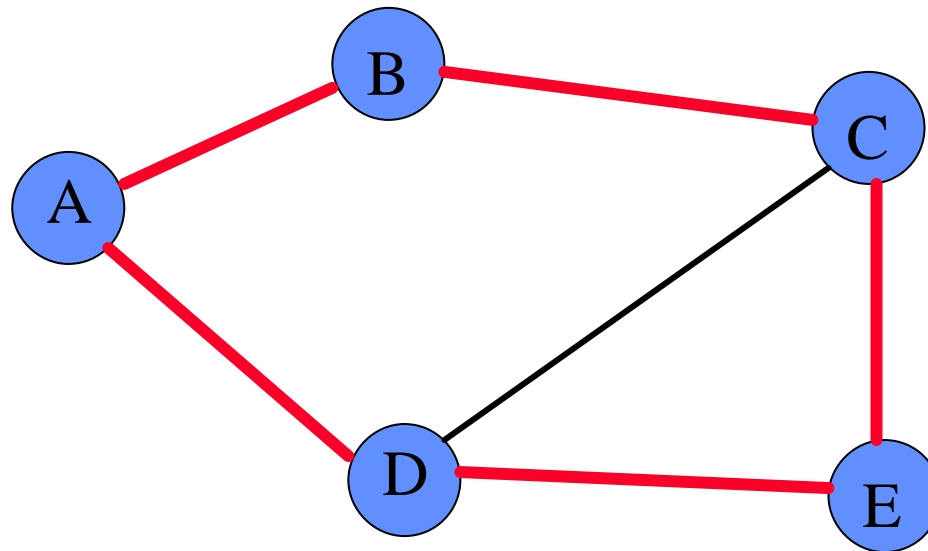
Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), *eccetto* al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.



Es., il percorso
 $\langle A, B, C, E \rangle$
è *semplice* ...

Definizioni sui grafi

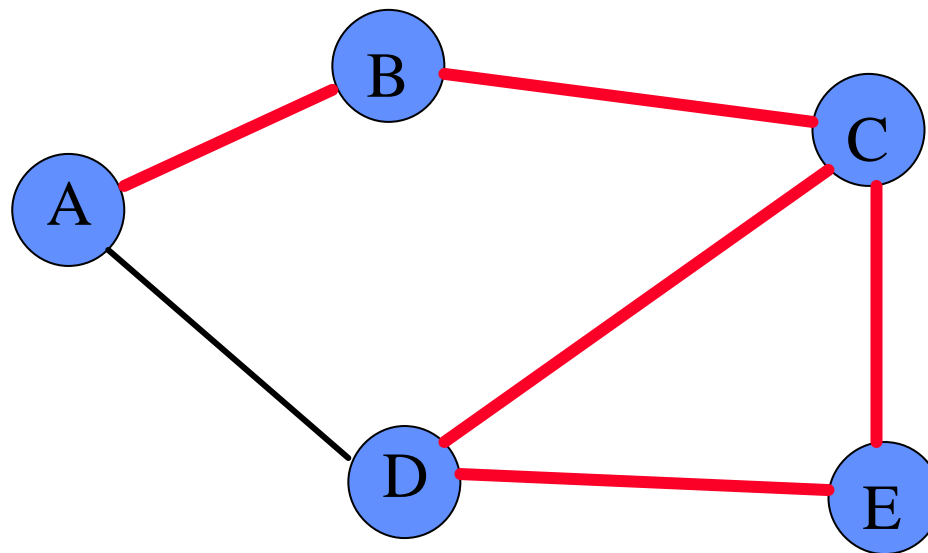
Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), *eccetto* al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.



... così come anche
 $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$.

Definizioni sui grafi

Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), *eccetto* al più il primo e l'ultimo che possono coincidere.



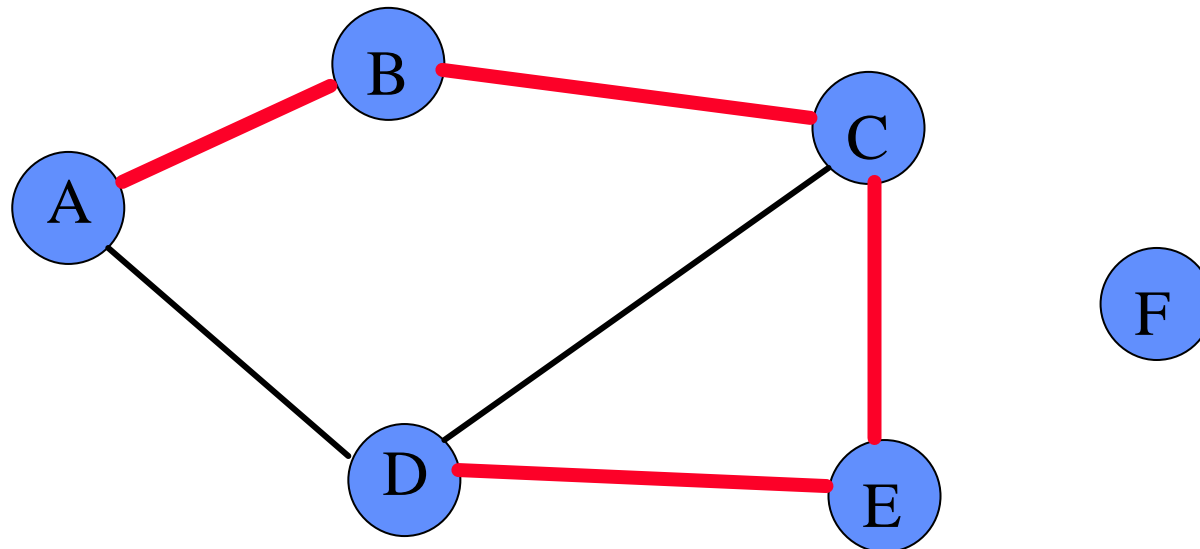
... ma il percorso
<A, B, C, E, D, C>
non è semplice,
poiché C è ripetuto.

Definizioni sui grafi

Se esiste un percorso p tra i vertici v e w , si dice che w è *raggiungibile da* v tramite p

$$v \xrightarrow[p]{} w$$

Es.: A è *raggiungibile* da D e vice versa

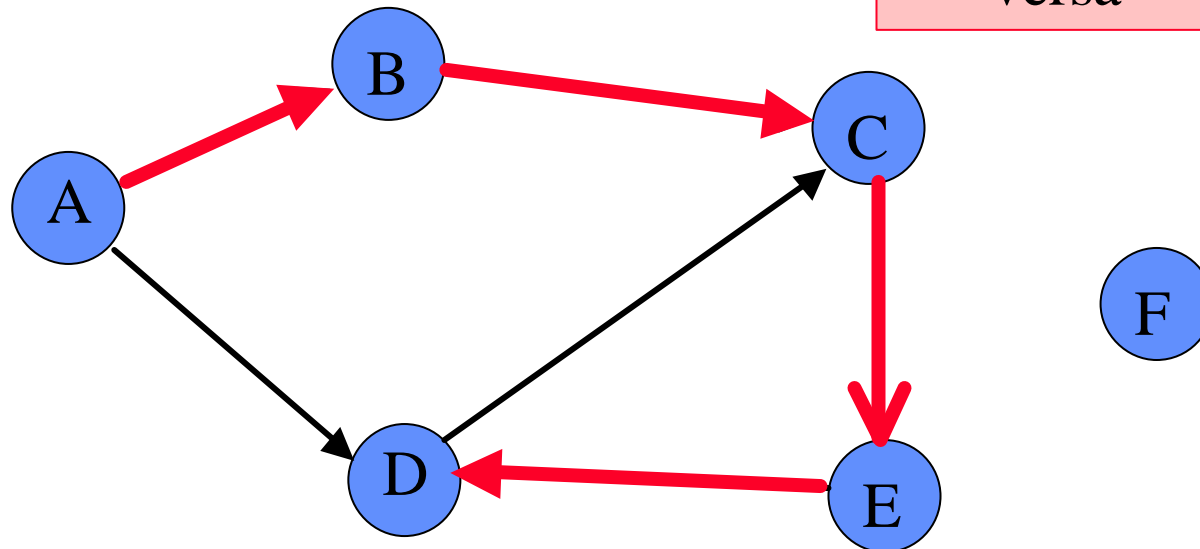


Definizioni sui grafi

Se esiste un percorso p tra i vertici v e w , si dice che w è *raggiungibile da* v tramite p

$$v \xrightarrow[p]{} w$$

Es.: A è *raggiungibile* da D ma non viceversa

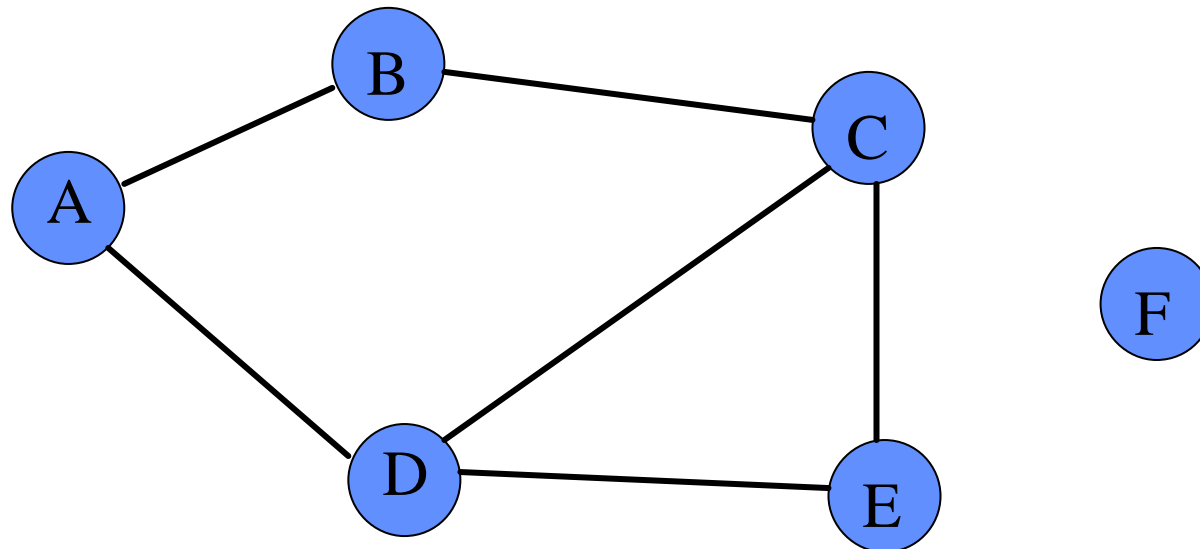


Definizioni sui grafi

Se G è un *grafo non orientato*, diciamo che G è *connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

Un grafo non orientato *non connesso* si dice *sconnesso*.

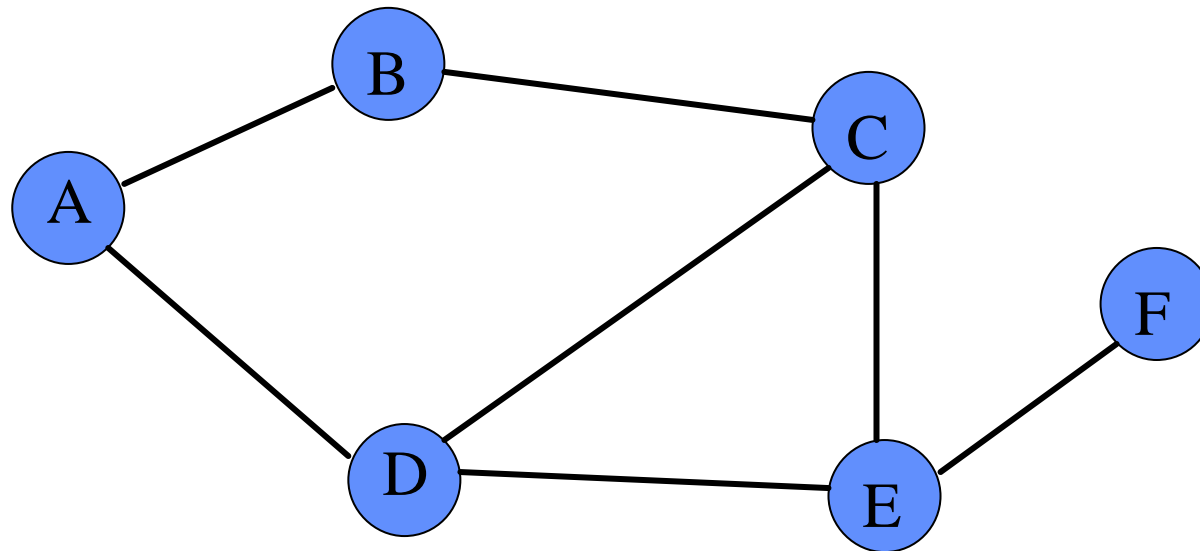
Questo grafo non orientato *non è connesso*.



Definizioni sui grafi

Se G è un *grafo non orientato*, diciamo che G è *connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

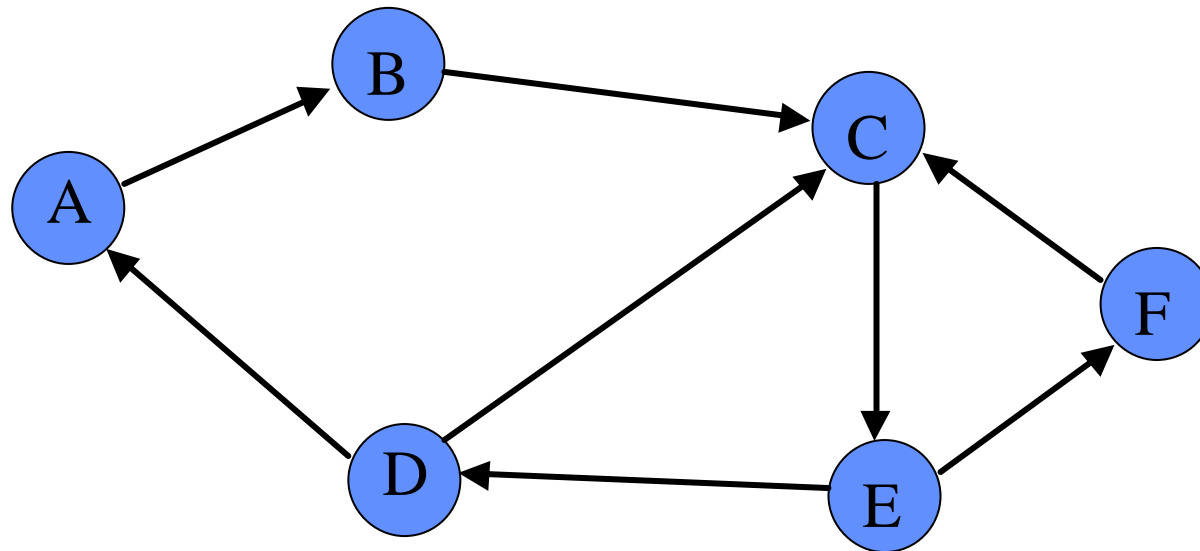
Questo *è connesso*.



Definizioni sui grafi

Se G è un *grafo orientato*, diciamo che G è *fortemente connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

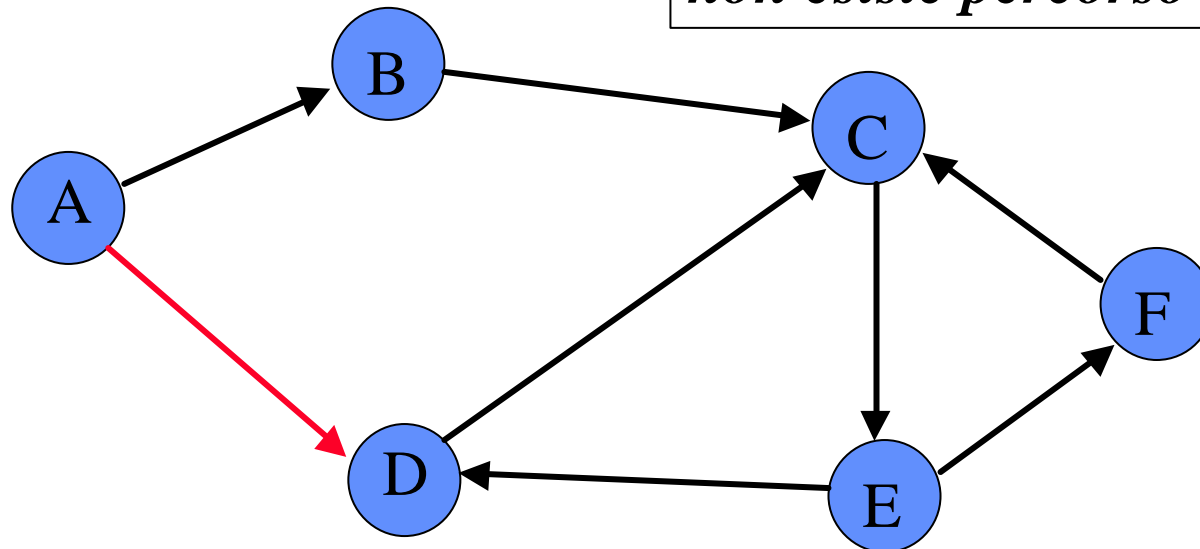
Questo grafo orientato *è fortemente connesso*.



Definizioni sui grafi

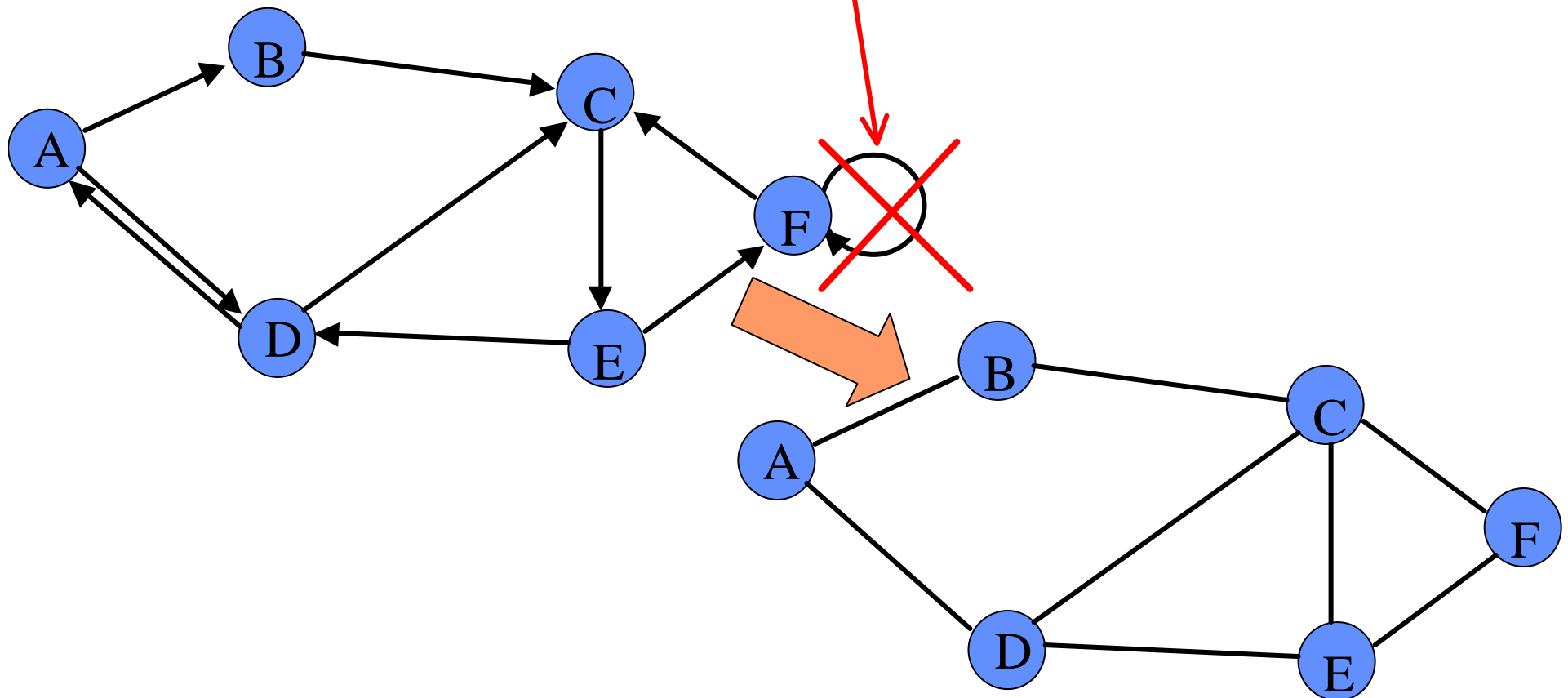
Se G è un *grafo orientato*, diciamo che G è *fortemente connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

Questo grafo orientato **non è fortemente connesso**; ad es., non esiste percorso da **D** a **A**.



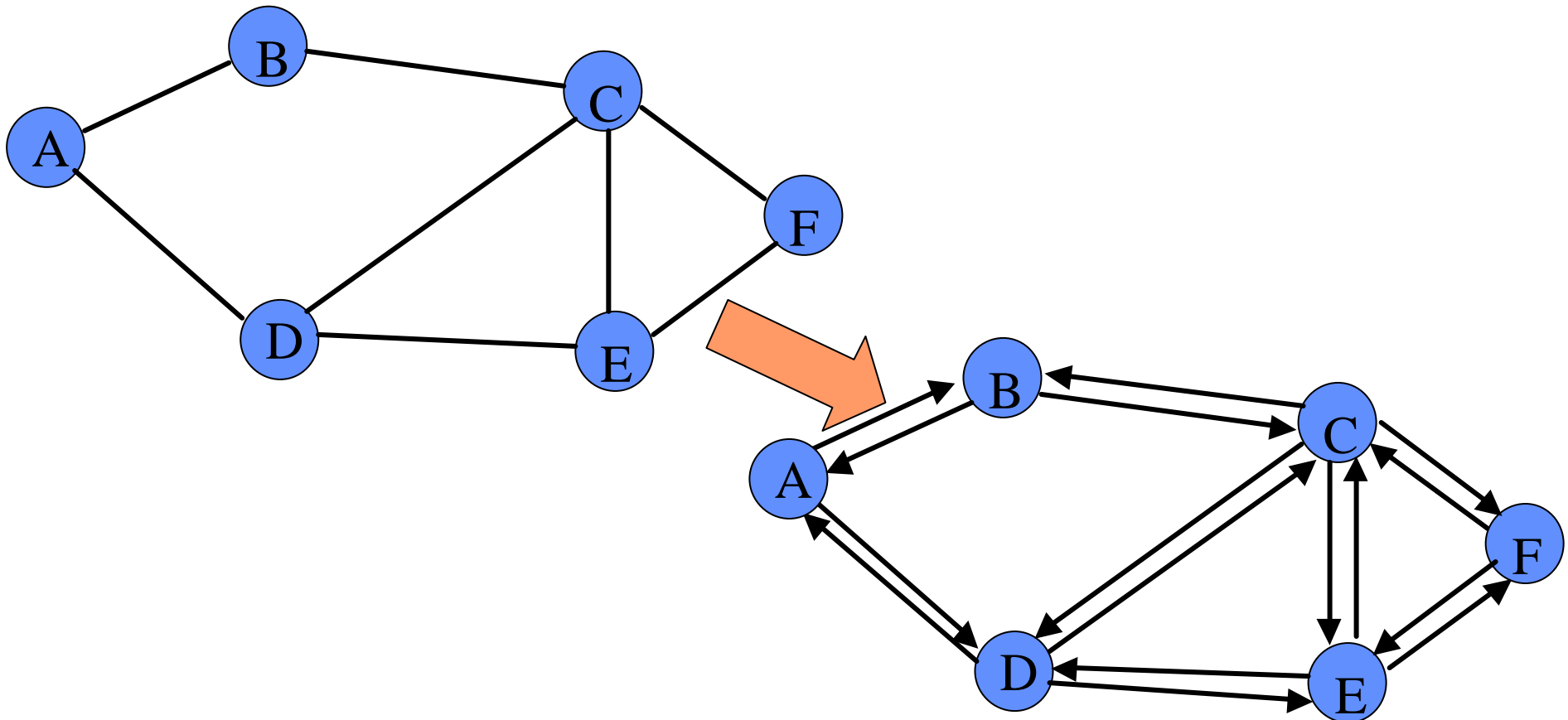
Definizioni sui grafi

Se G è un *grafo orientato*, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e i archi ciclici è detto il *grafo non orientato sottostante* o anche *versione non orientata di G* .



Definizioni sui grafi

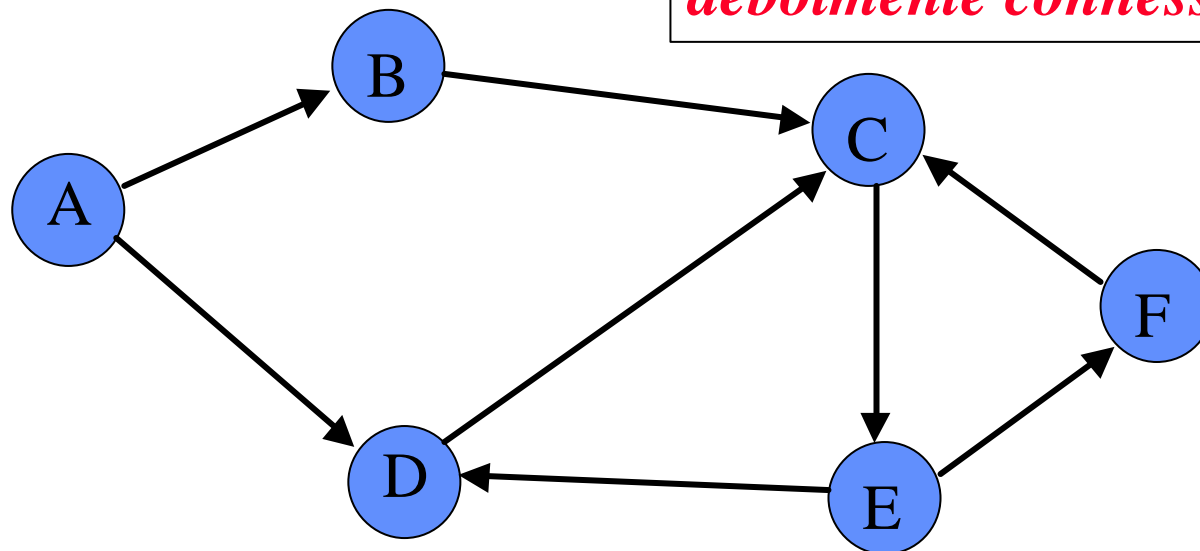
Se G è un *grafo non orientato*, il grafo ottenuto inserendo due archi orientati per ogni arco non orientato del grafo è detto il *versione orientata di G* .



Definizioni sui grafi

Se G è un *grafo orientato non fortemente connesso*, ma se il *grafo non orientato sottostante* (cioè senza la direzione degli archi) è *connesso*, diciamo che G è *debolmente connesso*.

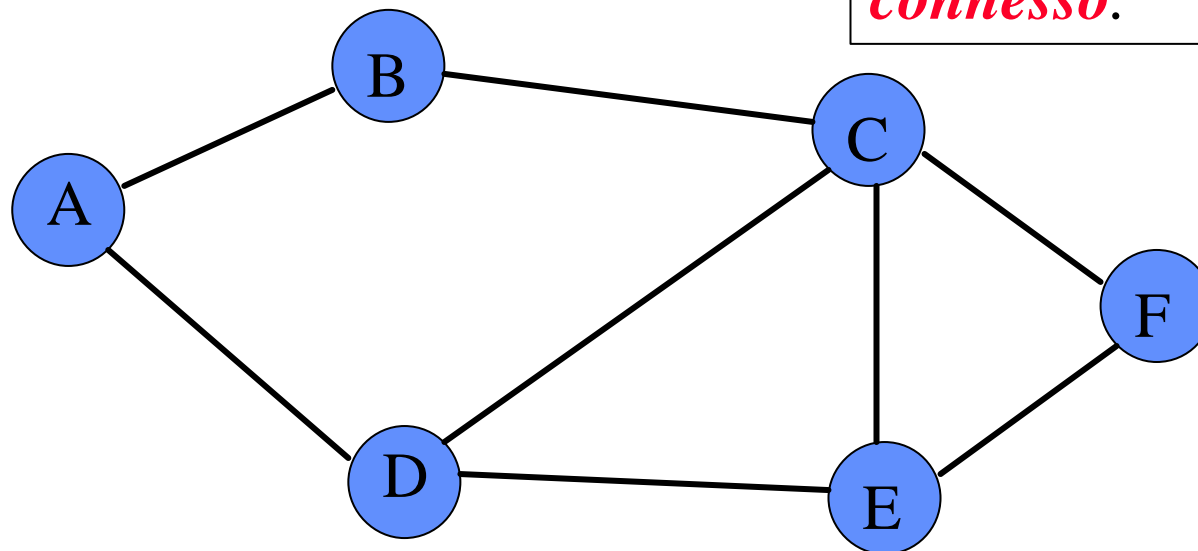
Questo grafo orientato *non è fortemente connesso*, ma *è debolmente connesso*, poiché...



Definizioni sui grafi

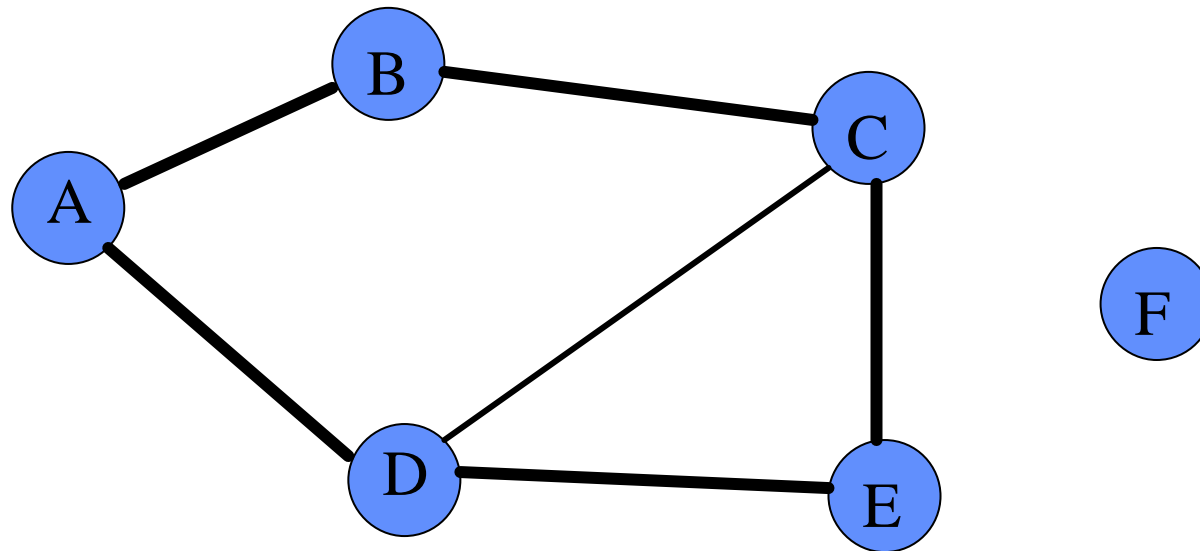
Se **G** è un *grafo orientato non fortemente connesso*, ma se il *grafo non orientato sottostante* (cioè senza la direzione degli archi) è *connesso*, diciamo che **G** è *debolmente connesso*.

... poiché il *grafo* non orientato *sottostante* è *connesso*.



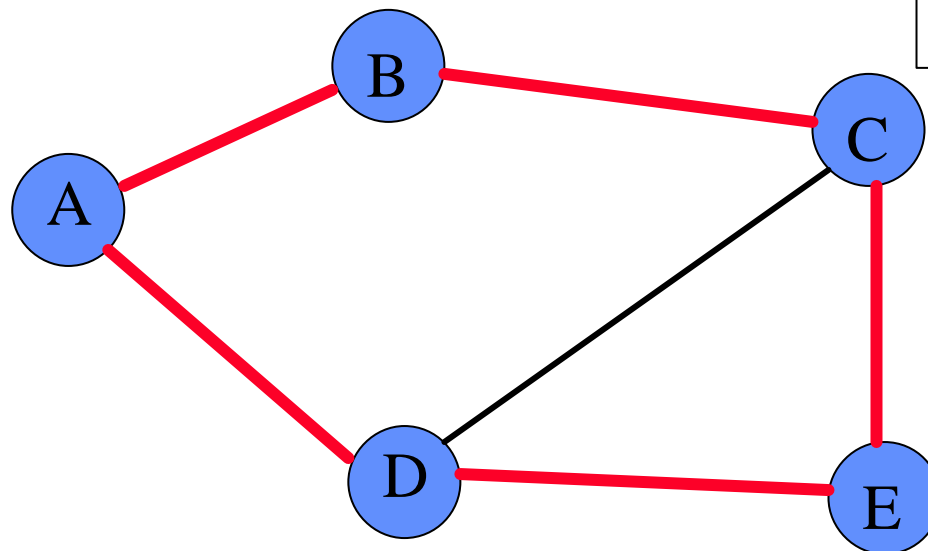
Definizioni sui grafi

Un *ciclo* in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.



Definizioni sui grafi

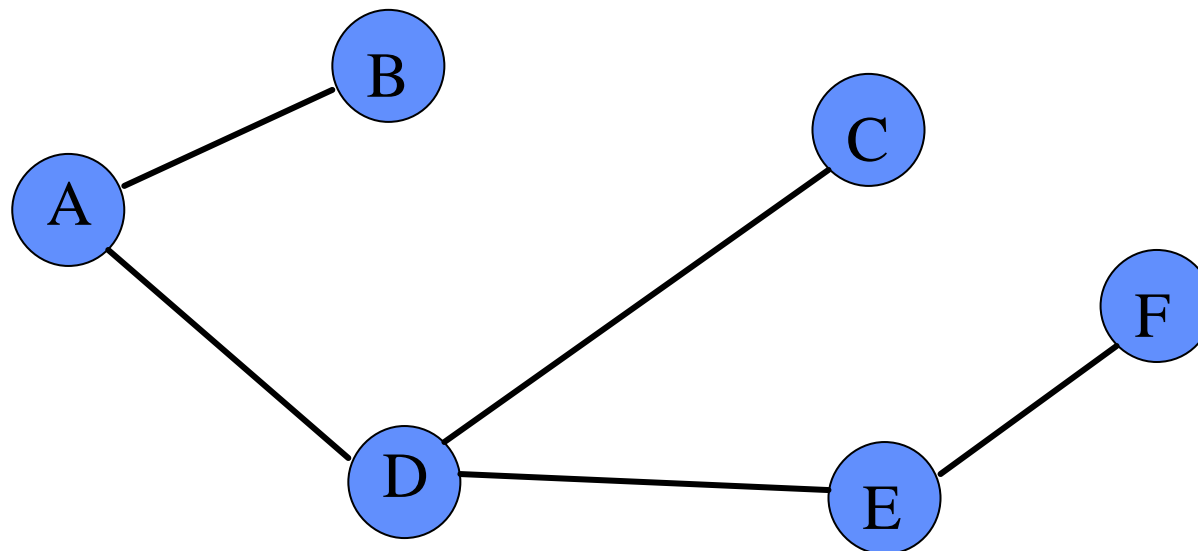
Un *ciclo* in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.



Es.: il percorso
 $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$
è un *ciclo*.

Definizioni sui grafi

Un *grafo senza cicli* è detto *aciclico*.

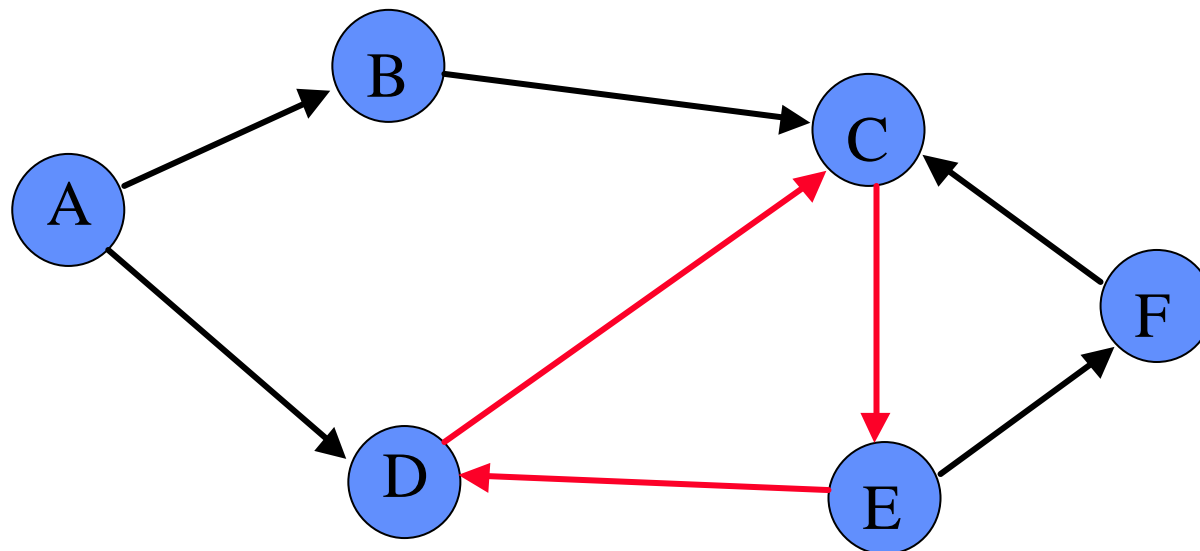


Questo grafo è
aciclico.

Definizioni sui grafi

Un *grafo senza cicli* è detto *aciclico*.

Questo grafo orientato *non*
è aciclico, ...

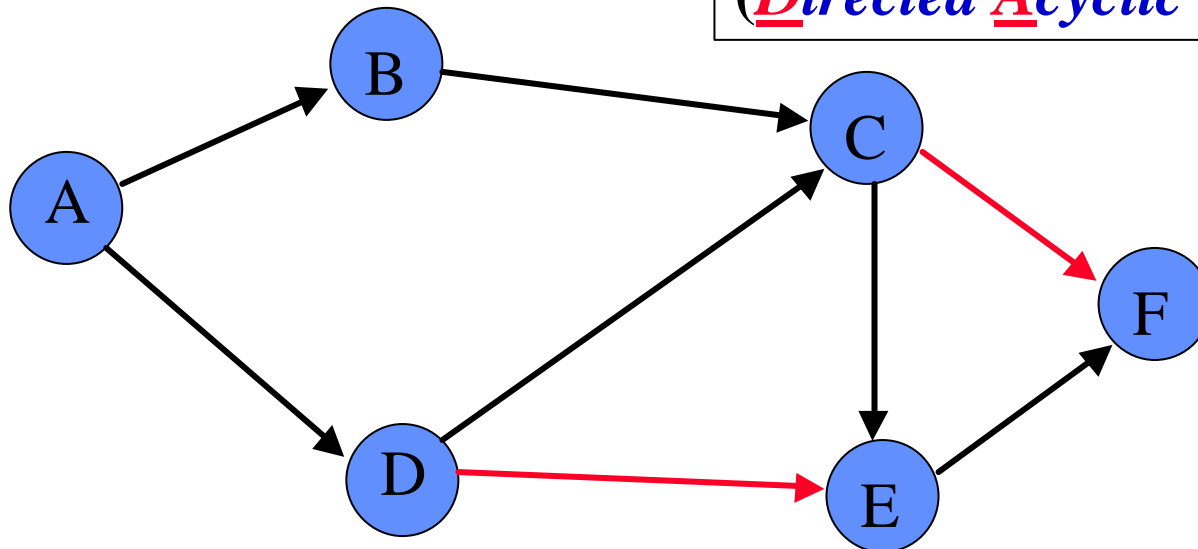


Definizioni sui grafi

Un *grafo senza cicli* è detto **aciclico**.

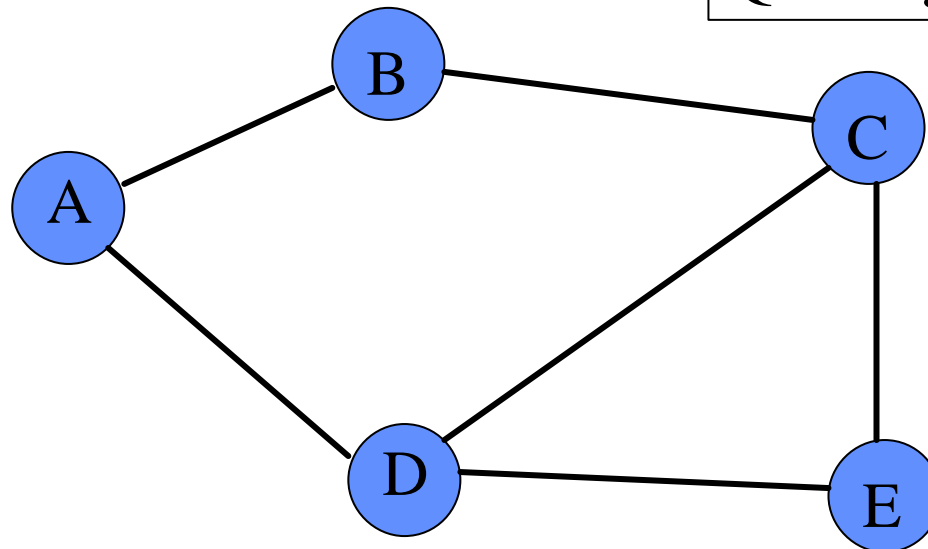
... ma questo lo è.

Un *grafo orientato aciclico*
è spesso chiamato **DAG**
(**D***irected* **A***cylic* **G***raph*).



Definizioni sui grafi

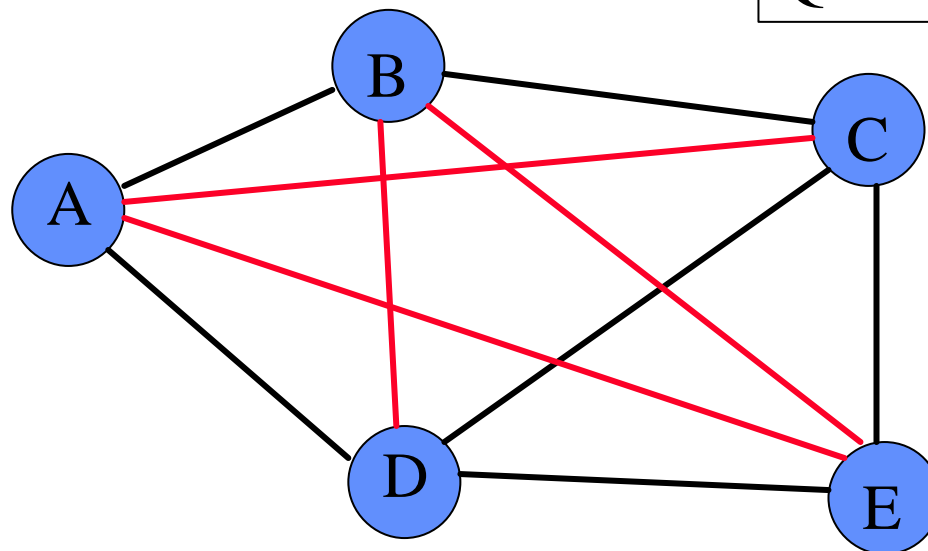
Un *grafo completo* è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.



Questo grafo *non è completo*

Definizioni sui grafi

Un *grafo completo* è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.



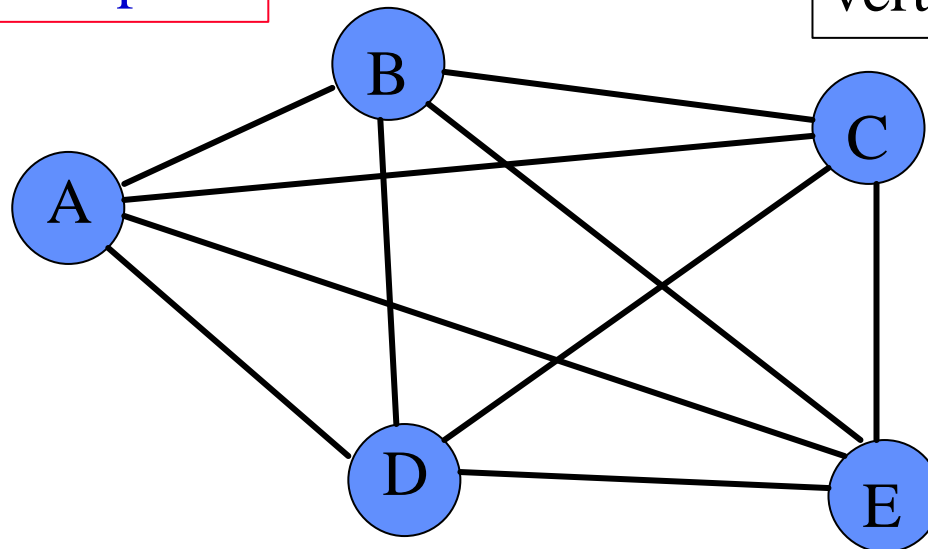
Questo grafo *è completo*

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo completo



Questo grafo ha $|V| = 5$ vertici e $|E| = 10$ archi.

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



Usiamo una Tabella:

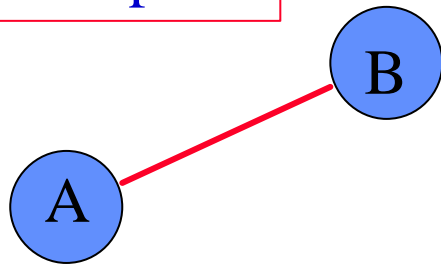
$ V $	$ E $
1	0

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



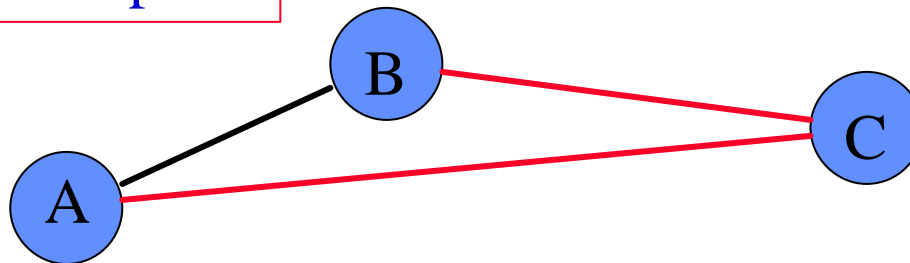
$ V $	$ E $
1	0
2	1

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



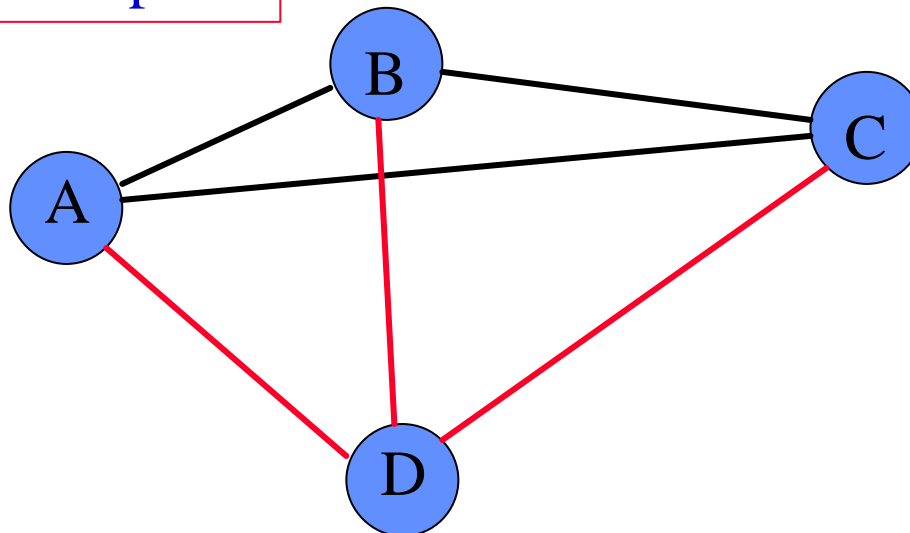
$ V $	$ E $
1	0
2	1
3	3

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo



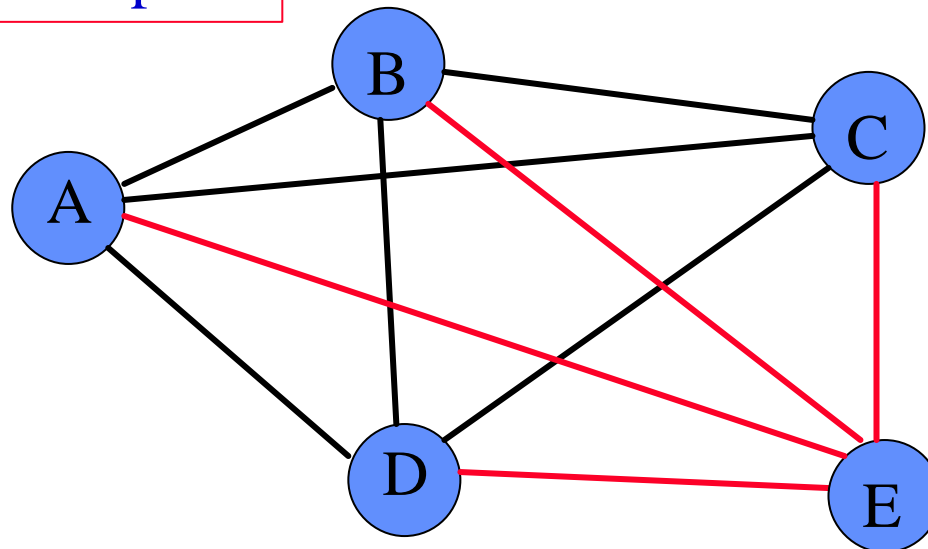
$ V $	$ E $
1	0
2	1
3	3
4	6

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Grafo Completo

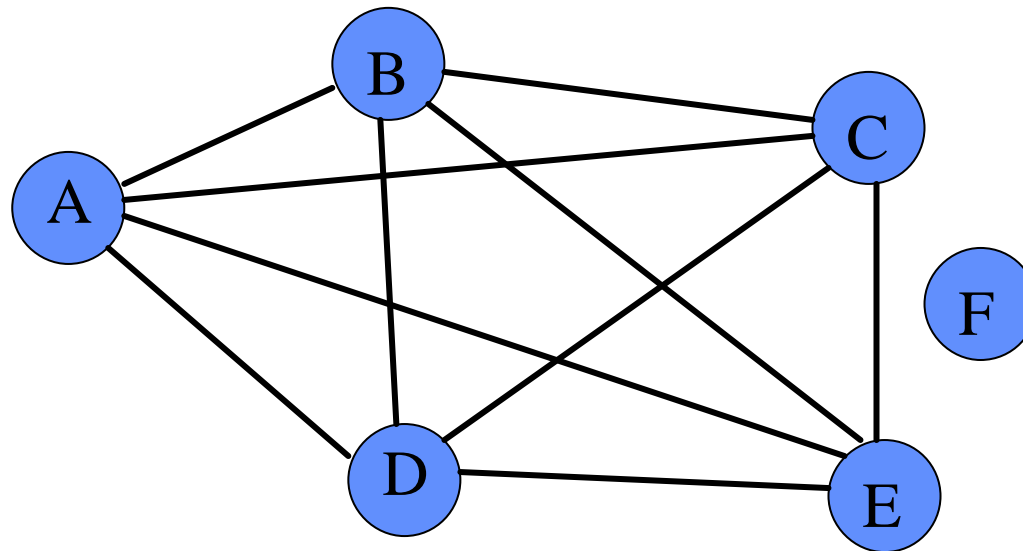


$ V $	$ E $
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

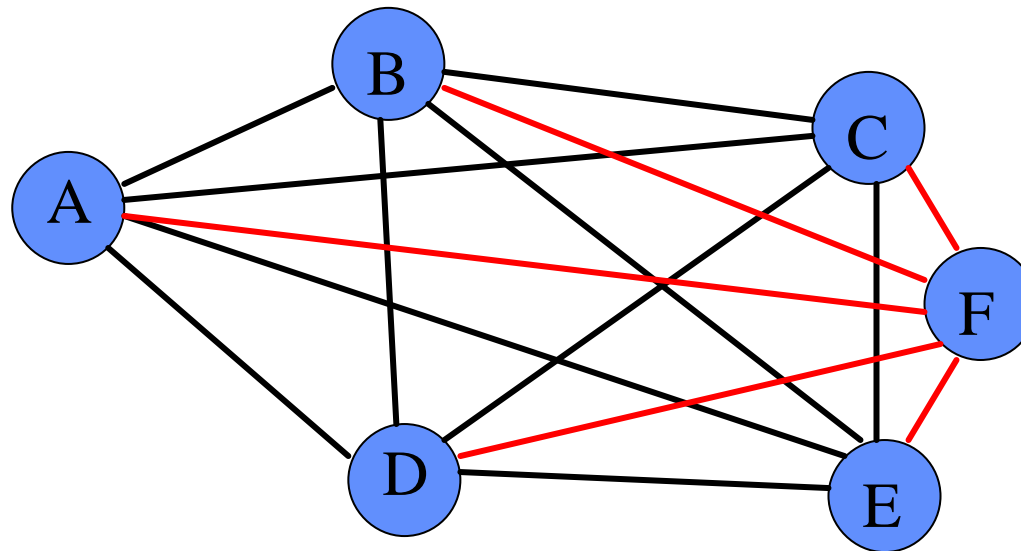


$ V $	$ E $
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	?

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?



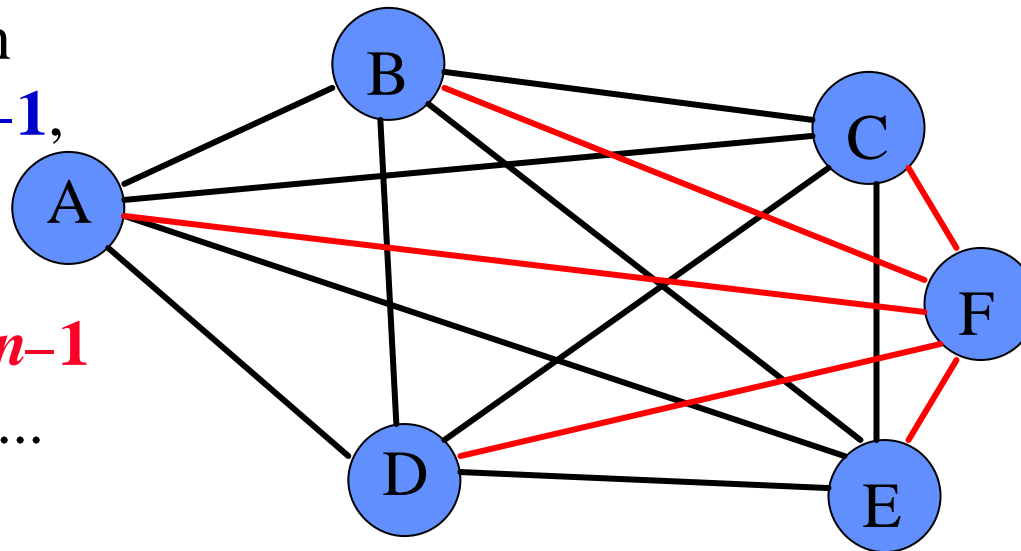
$ V $	$ E $
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

Per ottenere un grafo con n vertici da un grafo con $n-1$, si devono aggiungere $n-1$ nuovi archi ...



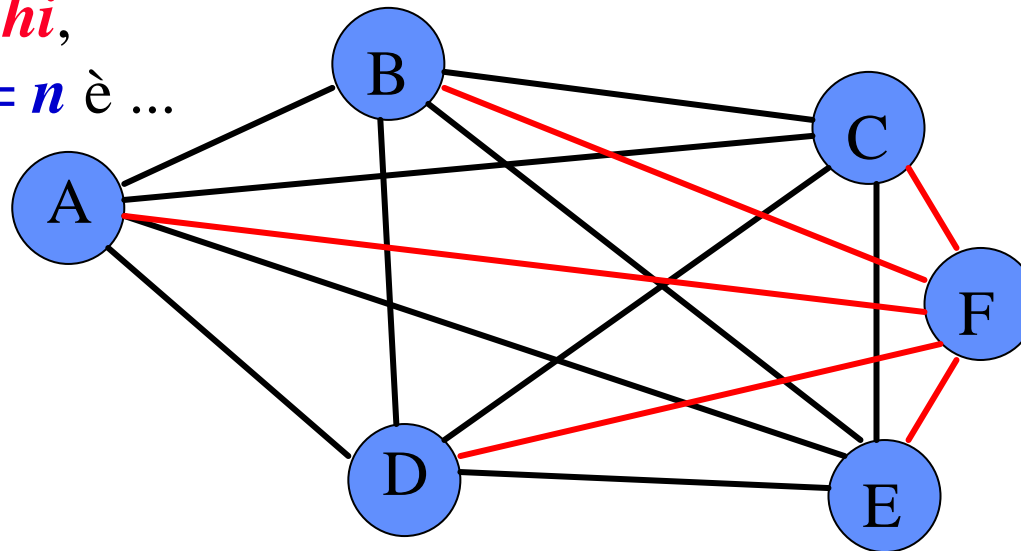
$ V $	$ E $	
1	0	$+1$
2	1	$+2$
3	3	$+3$
4	6	$+4$
5	10	$+5$
6	15	

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

...quindi il **numero totale di archi**,
quando $|V| = n$ è ...



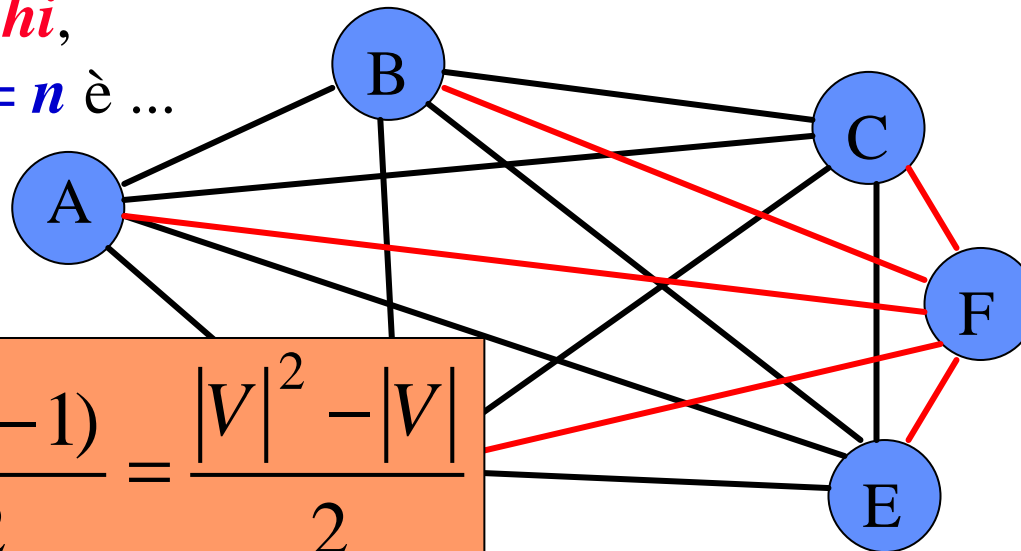
$ V $	$ E $	
1	0	
2	1	$+1$
3	3	$+2$
4	6	$+3$
5	10	$+4$
6	15	$+5$

Definizioni sui grafi

Un **grafo completo** è un grafo che ha un **arco tra ogni coppia di vertici**.

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia **completo**. In questo caso è possibile esprimere $|E|$ come funzione di $|V|$?

...quindi il **numero totale di archi**,
quando $|V| = n$ è ...



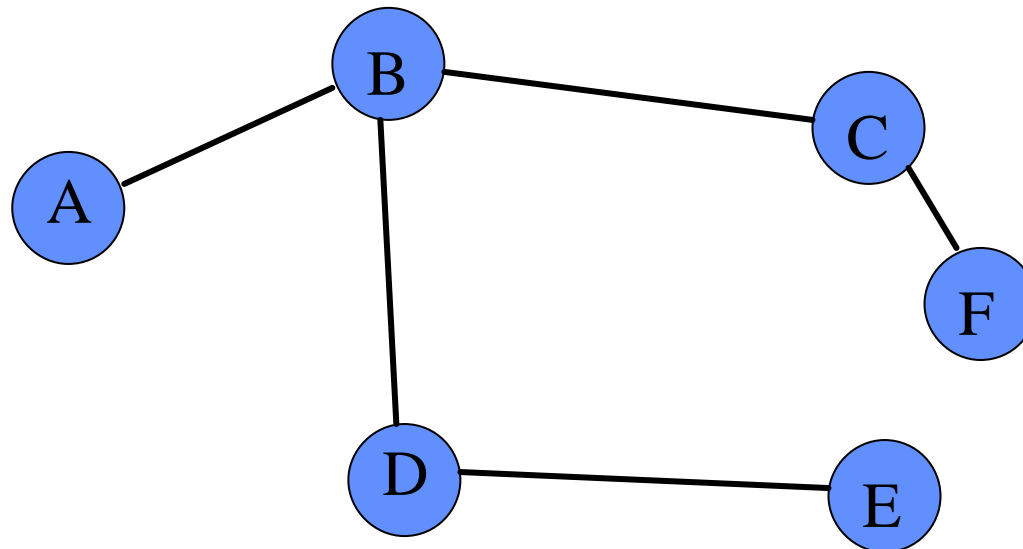
$ V $	$ E $	
1	0	
2	1	+1
3	3	+2
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

Definizioni sui grafi

Un *albero libero* è un *grafo non orientato connesso, aciclico*.

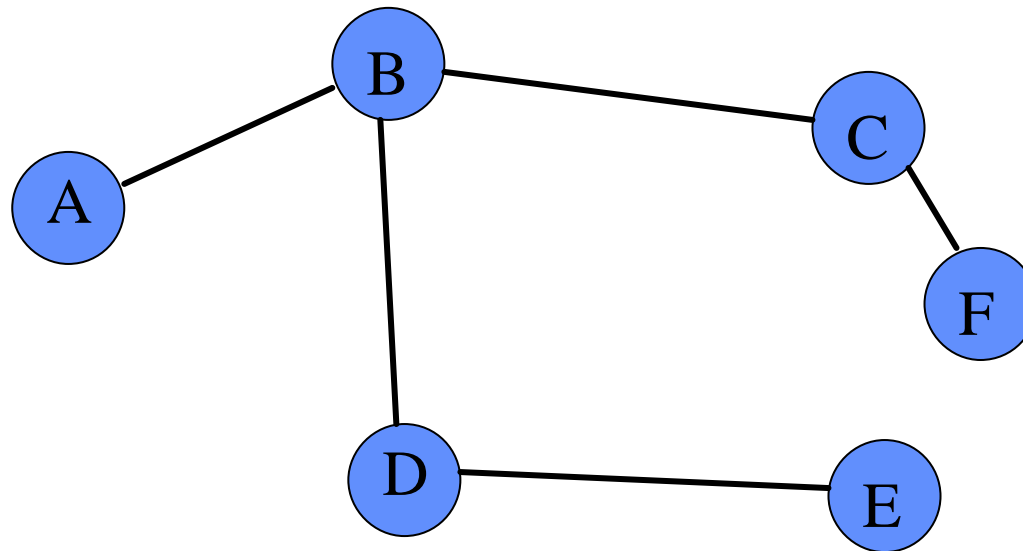
Questo è un *albero libero*



Definizioni sui grafi

Un *albero libero* è un *grafo non orientato connesso, aciclico*.

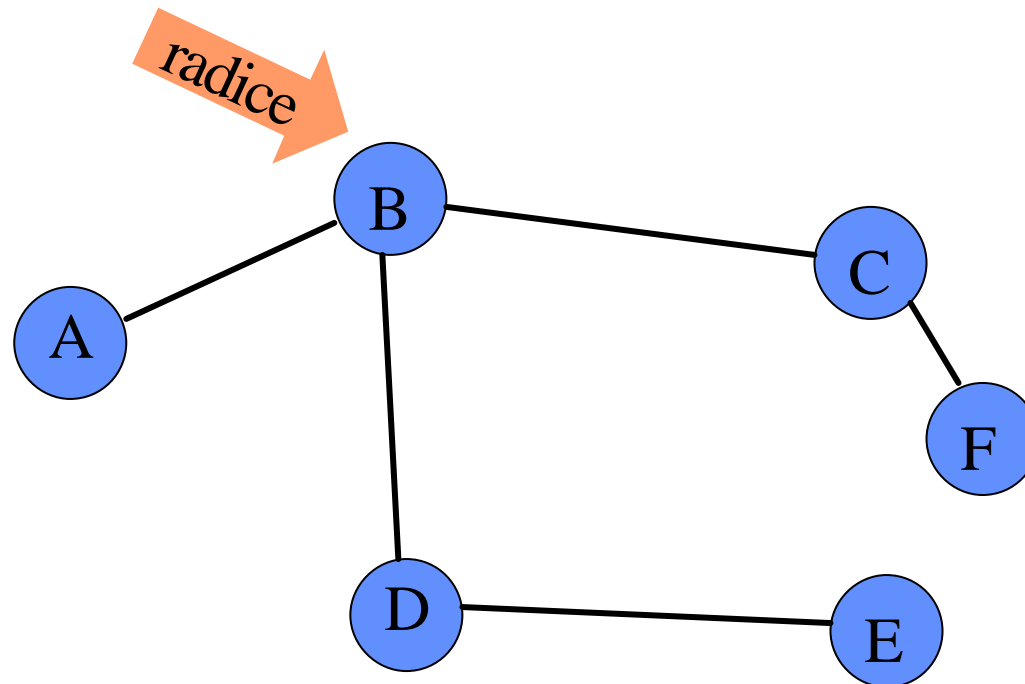
“*libero*” si riferisce al fatto che non esiste un vertice designato ad essere la “*radice*”



Definizioni sui grafi

Un **albero libero** è un **grafo non orientato connesso, aciclico**.

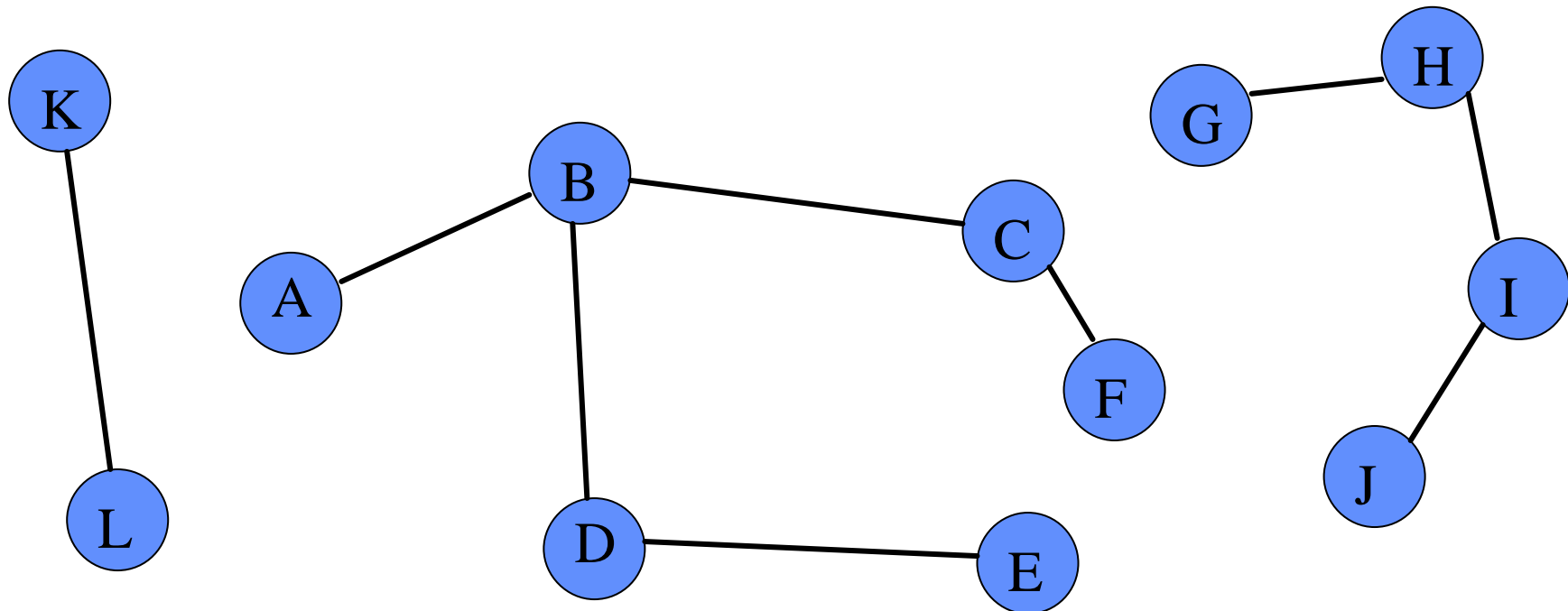
Se qualche **vertice** è designato ad essere la **radice**, otteniamo un **albero radicato**.



Definizioni sui grafi

Se un *grafo non orientato* è *aciclico* ma *sconnesso*, prende il nome di *foresta*.

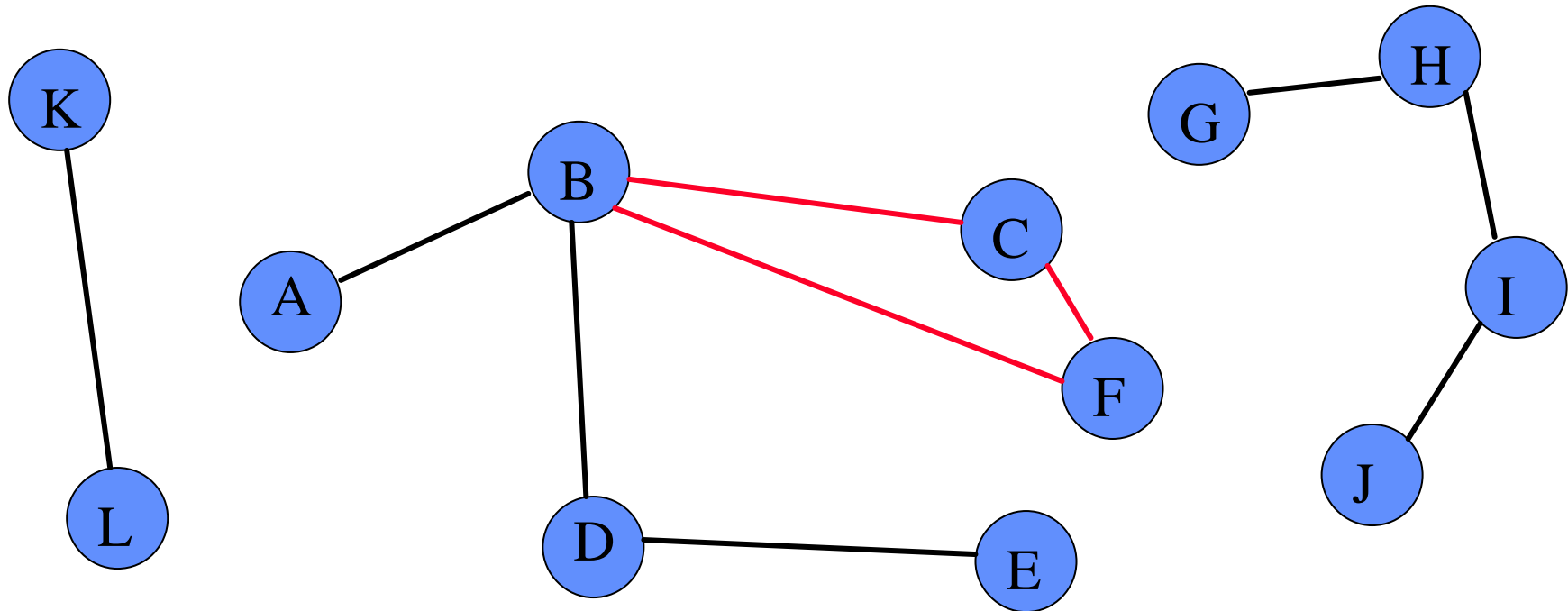
Questa è una *foresta*. Contiene tre alberi liberi.



Definizioni sui grafi

Se un *grafo non orientato* è *aciclico* ma *sconnesso*, prende il nome di *foresta*.

Questo *grafo contiene un ciclo*. Perciò *non é* un *né albero libero* *né* una *foresta*.



Rappresentazione di grafi

Ci sono due tipi di rappresentazione *standard* per grafi in un computer:

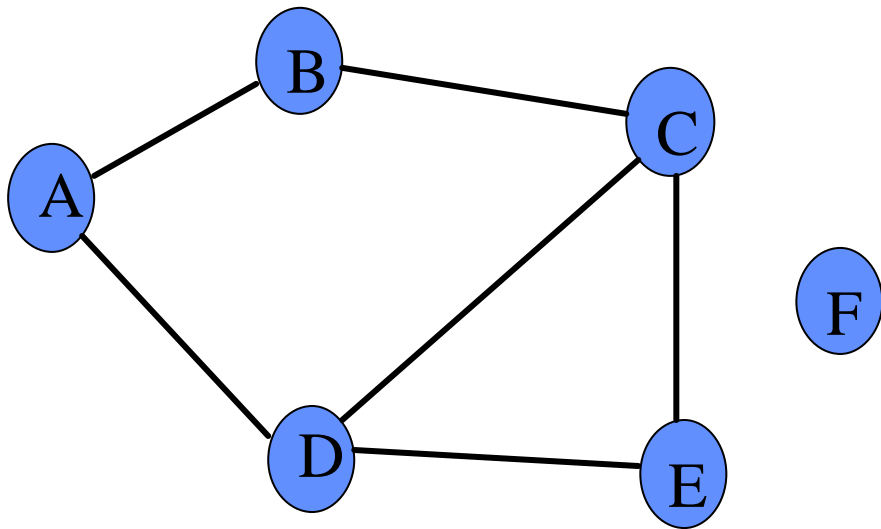
- **Rappresentazione a *matrice di adiacenza***
- **Rappresentazione a *liste di adiacenza***

Rappresentazione di grafi non orientati

Rappresentazione a *matrice di adiacenza*:

$$M(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spazio: $|V|^2$

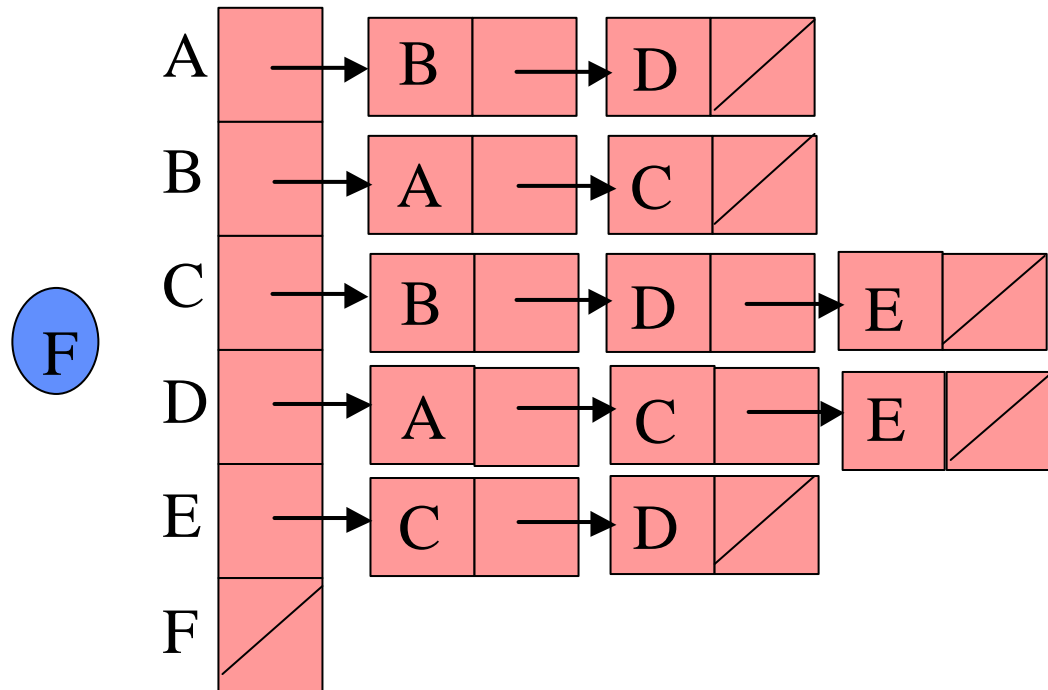
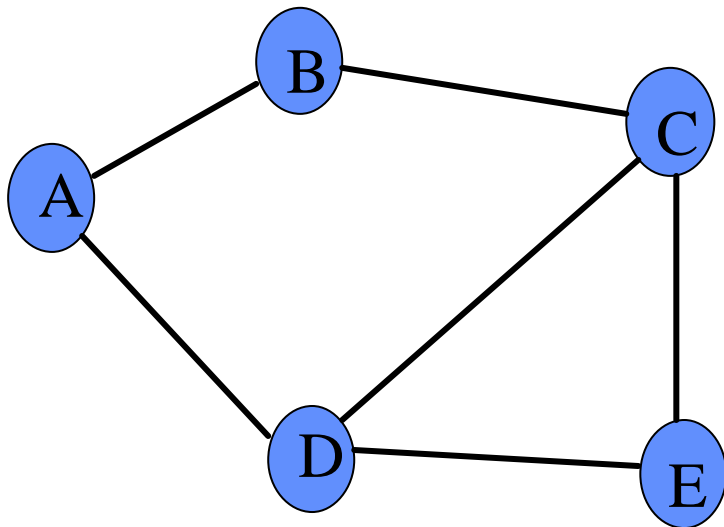


	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Rappresentazione di grafi non orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza*:

$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

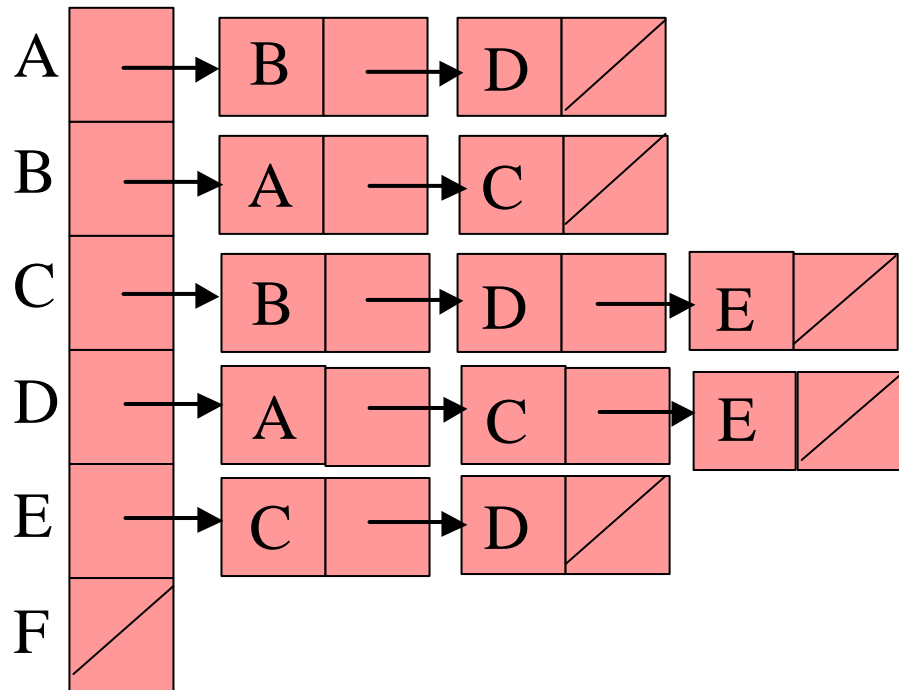
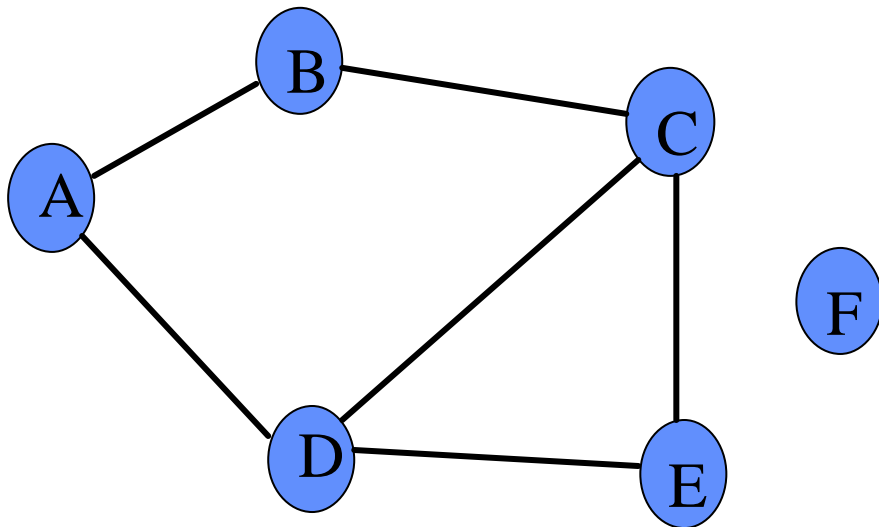


Rappresentazione di grafi non orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza*:

$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

Quanto spazio ?

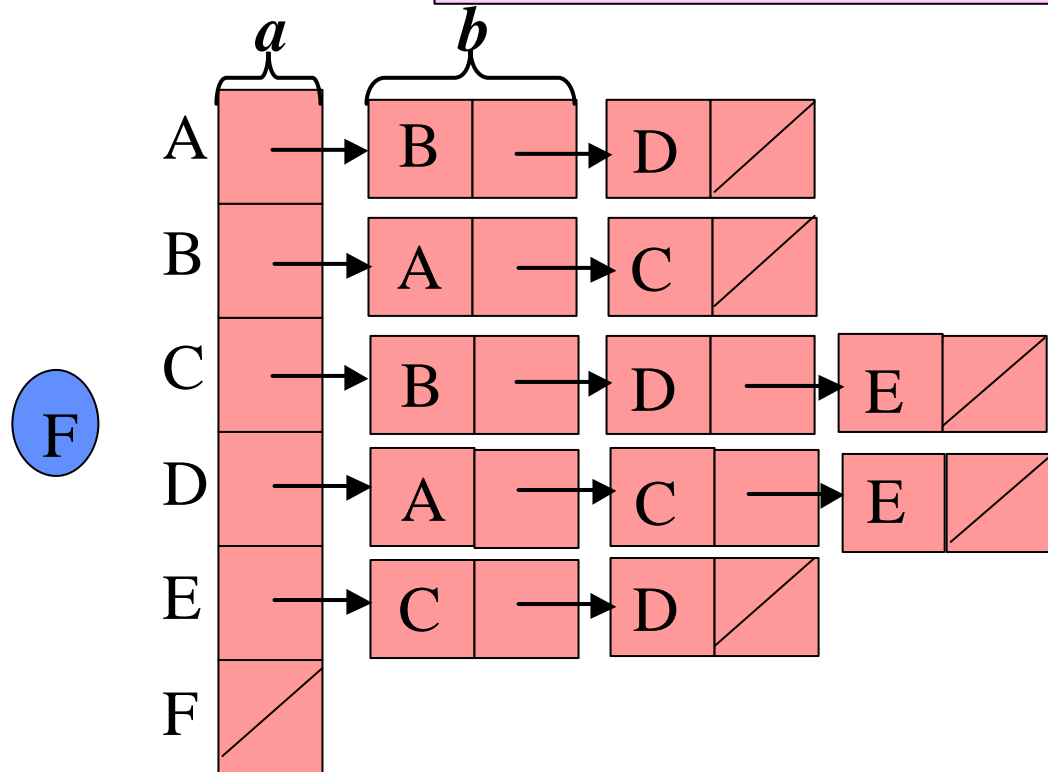
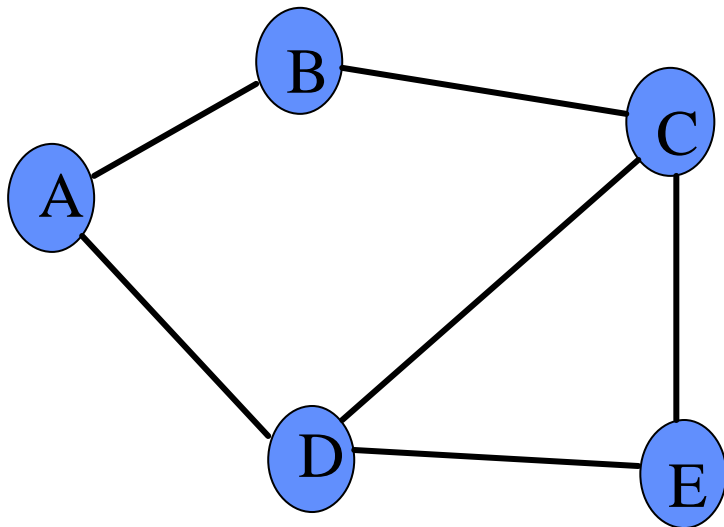


Rappresentazione di grafi non orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza*:

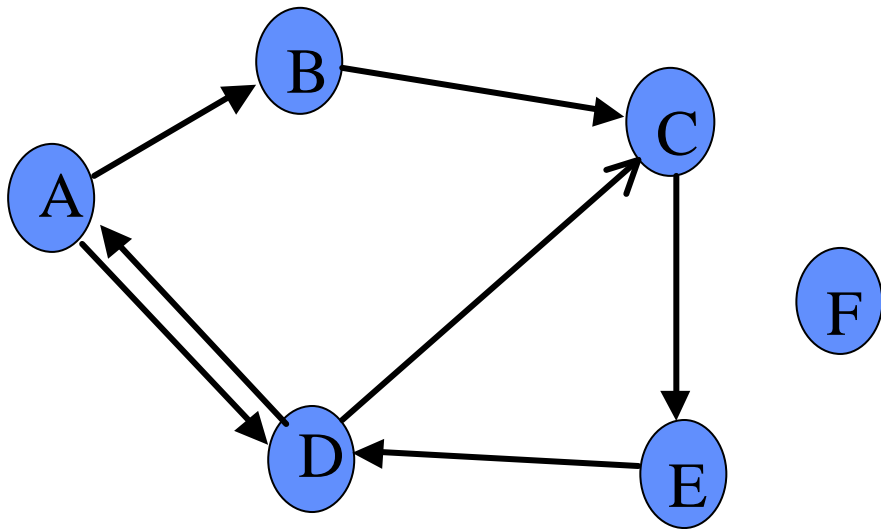
$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

Spazio: $a |V| + 2 b |E|$



Rappresentazione di grafi orientati

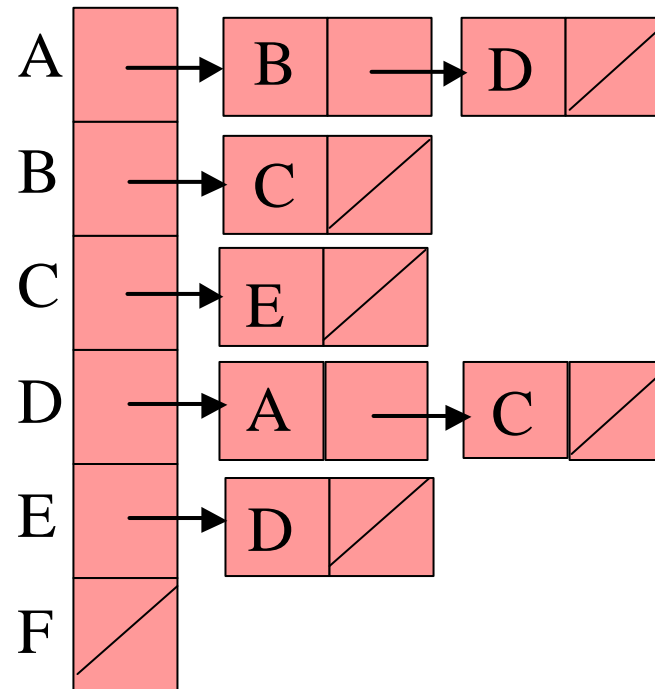
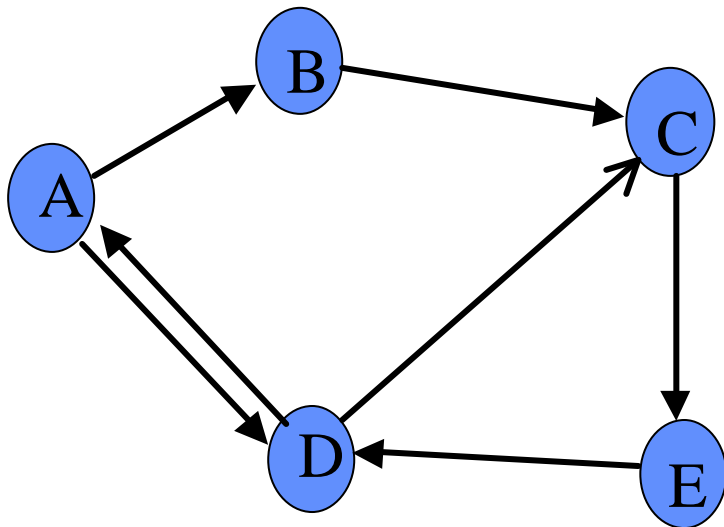
Rappresentazione a *matrice di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

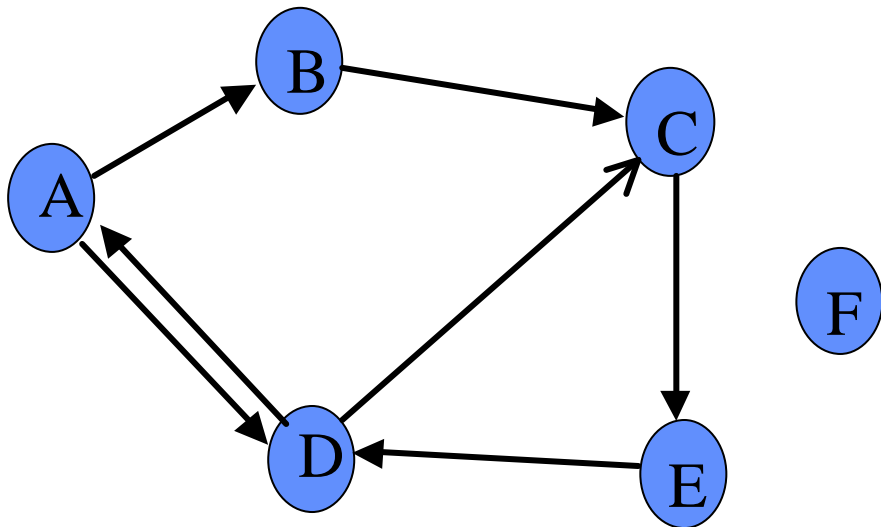
Rappresentazione di grafi orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.

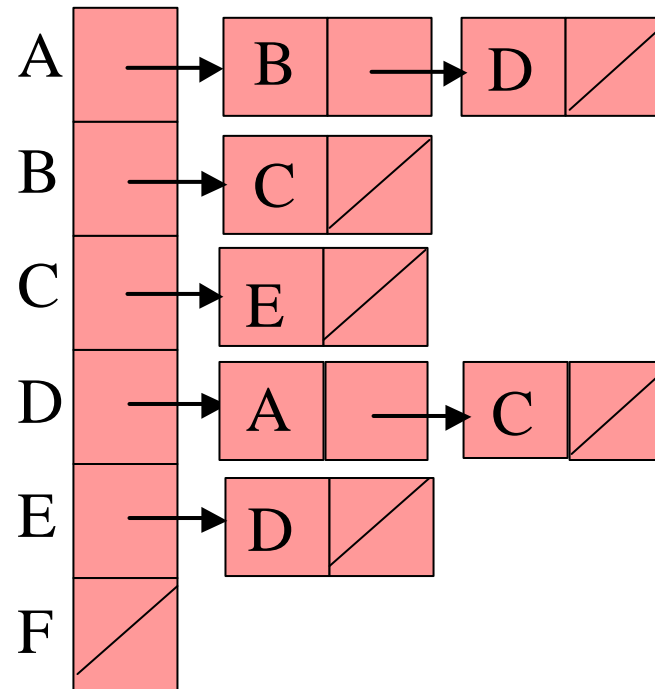


Rappresentazione di grafi orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.

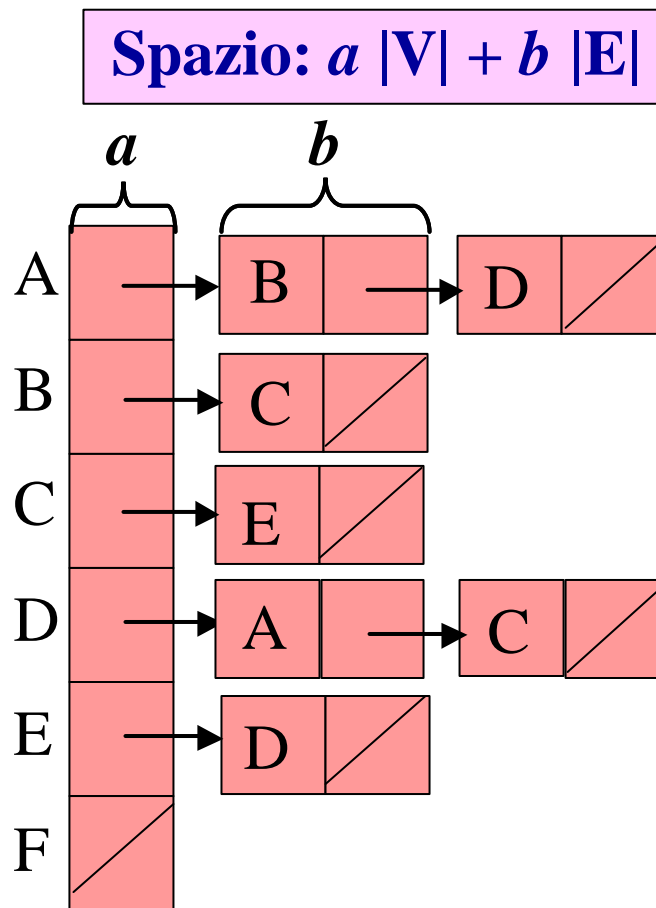
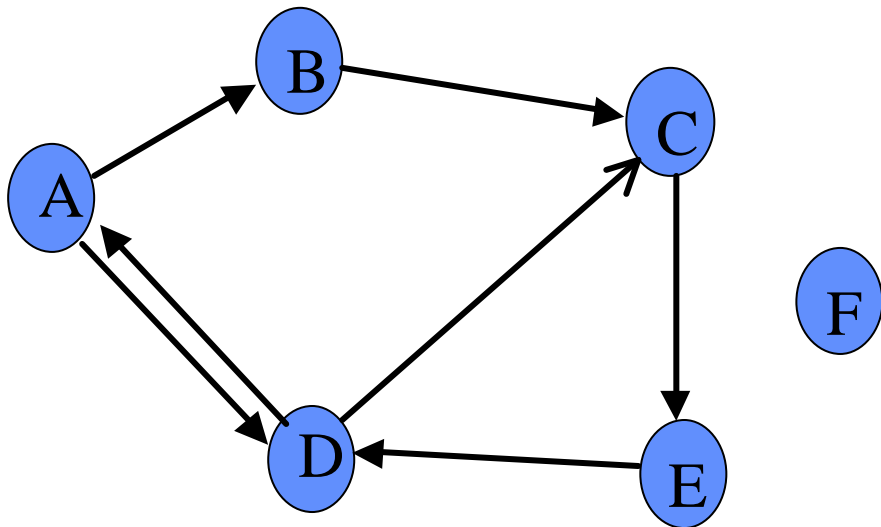


Quanto spazio?



Rappresentazione di grafi orientati

Rappresentazione a *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.



Rappresentazione di grafi

- **Matrice di adiacenza**
 - Spazio richiesto $O(|V|^2)$
 - Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(1)$.
 - Molti **0** nel caso di *grafi sparsi*
- **Liste di adiacenza**
 - Spazio richiesto $O(|E|+|V|)$
 - Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(|V|)$.