# *Algoritmi e Strutture Dati (Mod. B)*

## Algoritmi su grafi

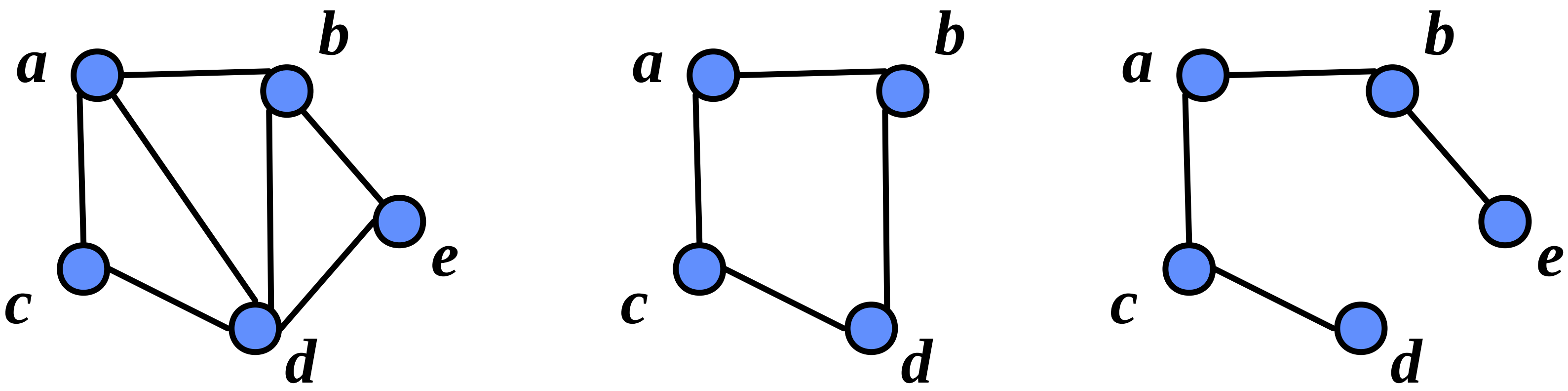
## Ricerca in profondità

## (Depth-First Search) Parte I

# *Sottografo di copertura*

Un *sottografo* di *G=(V,E)* è un grafo *H = (V*, E*)* tale che *V** Í *V* e *E** Í *E*.

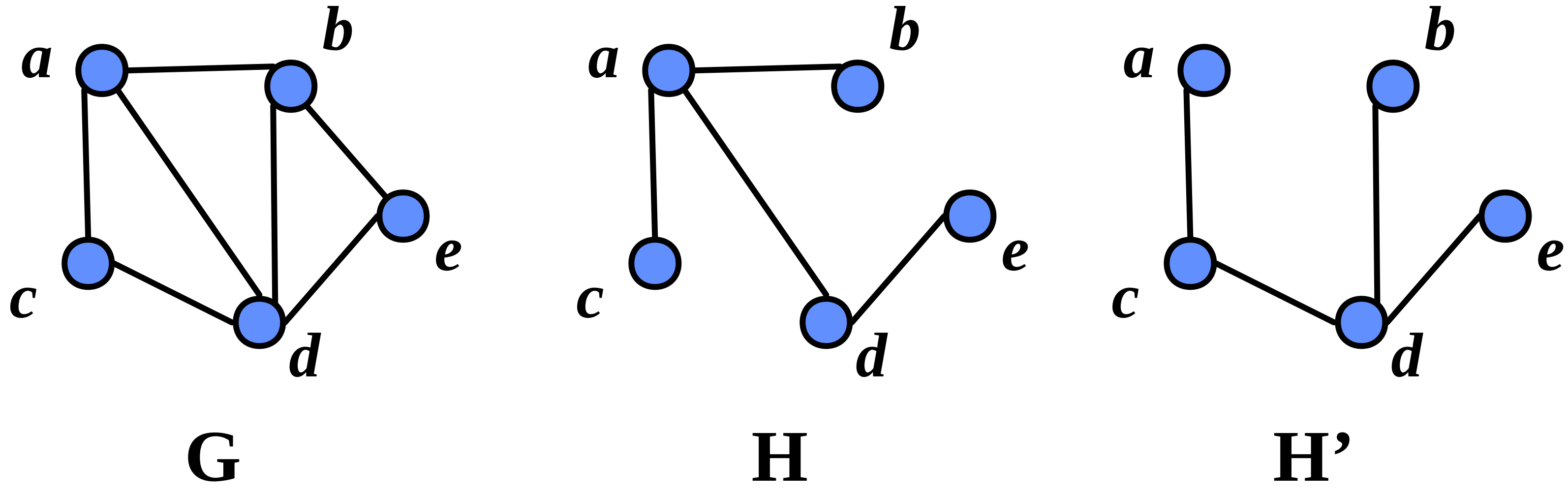
- *H'* è un *sottografo di copertura* (o *di supporto* o sotto-grafo *"spanning"*) di *G* se
  - $\boxed{V^* = V}$ e *E** Í *E*




G H H'

# *Albero di copertura*

- Un grafo *H = (V*, E*)* è un *albero di copertura* (o *albero "spanning"*) *del grafo* *G=(V,E)* se
  - *H* è un *grafo di copertura* di *G*
  - *H* è un *albero*



# *Visita in Profondità (DFS)*

- **Tecnica di visita di un grafo**
  - **È una variazione della *visita in profondità* per alberi binari**
- **La visita di s procede come segue:**
  - **Si visitano ricorsivamente tutti i vertici adiacenti ad *s*;**
  - **Si termina la visita del vertice *s* e si ritorna.**
- **Bisogna evitare di rivisitare vertici già visitati**
  - **Bisogna anche qui evitare i cicli**
  - **Nuovamente, quando un vertice è stato scoperto e (poi) visitato viene marcato opportunamente (*colorandolo*)**

# *Algoritmo DFS*

**Manterremo traccia del *momento* (`tempo`) in cui ogni vertice *v* viene *scoperto* e del momento in cui viene *visitato* (o *terminato*).**

**Useremo inoltre due array *d*[*v*] e *f*[*v*] che registrano il momento in cui *v* verrà scoperto e quello in cui verrà visitato.**

**La variabile globale *tempo* serve a registrare il passaggio del tempo.**

**Il tempo viene usato per *studiare* le *proprietà* di *DFS***

# *DFS: intuizioni*

**I passi dell'algoritmo *DFS***

- **si parte da un vertice *non visitato* *s* e lo si visita**
- **si sceglie un vertice *non scoperto* adiacente ad *s*.**
- **da *s* si attraversa quindi un percorso di vertici adiacenti (visitandoli) finché possibile (*DFS-Visita*):**
  - **cioè finché non si incontra un vertice già scoperto/visitsto**
- **appena si resta "*bloccati*" (tutti gli archi da un vertice sono stati scoperti), si torna indietro (*backtracking*) di un passo (vertice) nel percorso attraversato (aggiornando il vertice *s* al vertice corrente dopo il passo all'indietro).**
- **si ripete il processo ripartendo dal passo.**

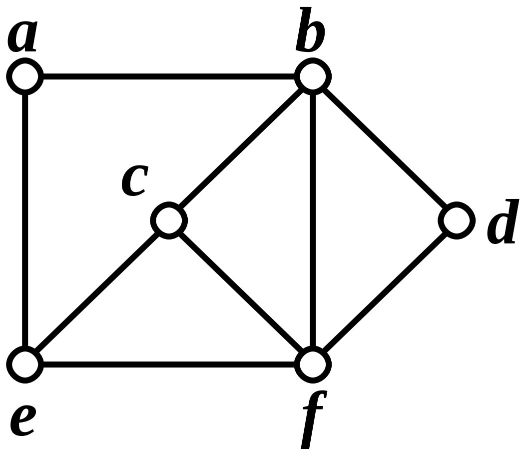
# *DFS: DFS-Visita*

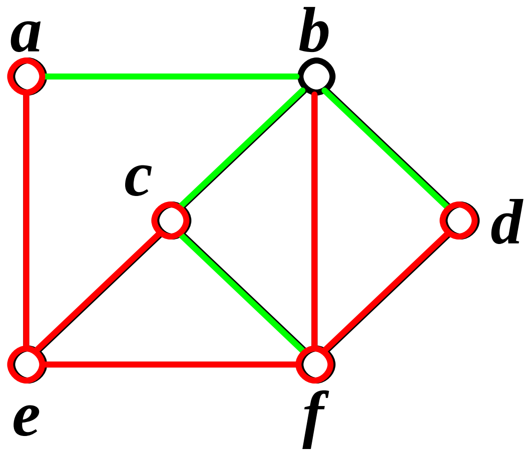
***DFS-Visita*: algoritmo principale della *DFS***

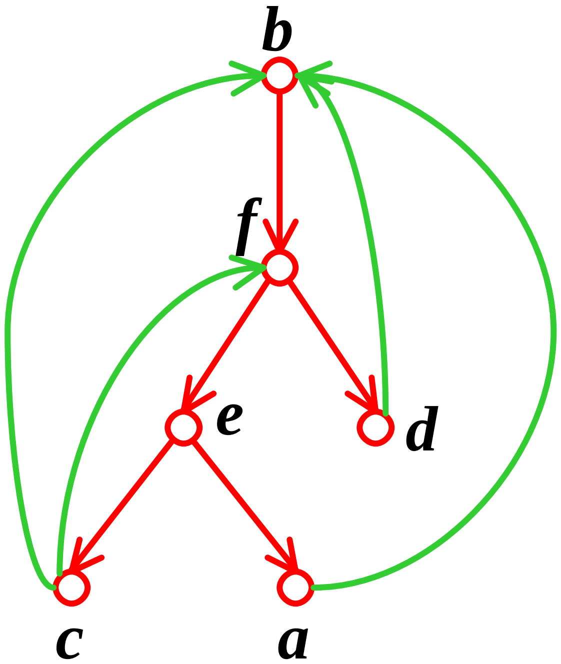
**sia dato un vertice *u* di colore bianco in ingresso**

- **visitare il vertice *u:* colorare *u* di grigio e assegnare il tempo di inizio visita *d*[*u*]**
- **visitare in *DFS ricorsivamente* ogni vertice bianco adiacente ad *u* con *DFS-Visita***
- **colorare di nero *u* e assegnare il tempo di fine visita *f*[*u*].**

**Chiamata ricorsiva**




*b f e c a d*

**Albero di copertura Depth-first**

**Archi dell'albero**
**Archi di ritorno**

# Algoritmo DFS

```
DSF(G:grafo)
   for each vertice u Î V
         do  colore[u] = Bianco
             pred[u] = NIL
   tempo = 0
   for each vertice u Î V
        do if  colore[u] = Bianco
               then  DFS-Visita(G,u)
```

Inizializzazione del grafo e della variabile tempo

```
DSF-Visita(G:grafo,u:vertice)
   colore[u] = Grigio
   d[u] = tempo = tempo + 1
   for each vertice v Î Adiac[u]
        do if colore[v] = Bianco
               then pred[v] = u
                    DFS-Visit(G,v)
  colore[u] = Nero
  f[u] = tempo = tempo + 1
```

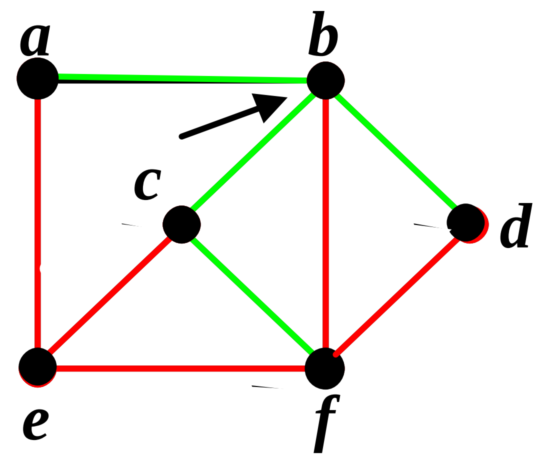
Abbreviazione per:
`tempo=tempo+1`
`d[u]=tempo`

Abbreviazione per:
`tempo=tempo+1`
`f[u]=tempo`

# DFS: simulazone

```
DSF(G:grafo)
  for each vertice u Î V
       do colore[u] = Bianco
          pred[u] = NIL
  tempo = 0
  for each vertice u Î V
       do if colore[u] = Bianco
             then DFS-Visita(G,u)
```

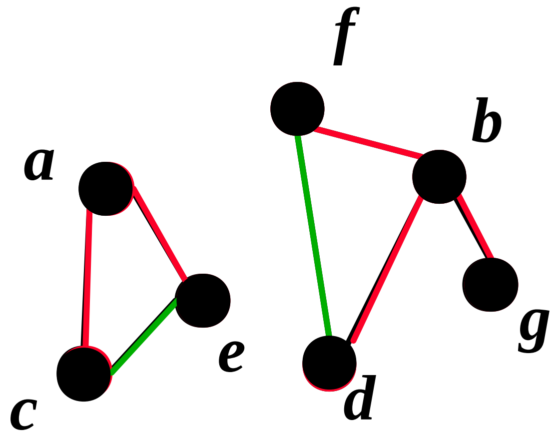
```
DSF-Visita(G:grafo,u:vertice)
  colore[u] = Grigio
  d[u] = tempo = tempo + 1
  for each vertice v Î Adiac[u]
      do if colore[v] = Bianco
             then pred[v] = u
                  DFS-Visit(G,v)
 colore[u] = Nero
 f[u] = tempo = tempo + 1
```

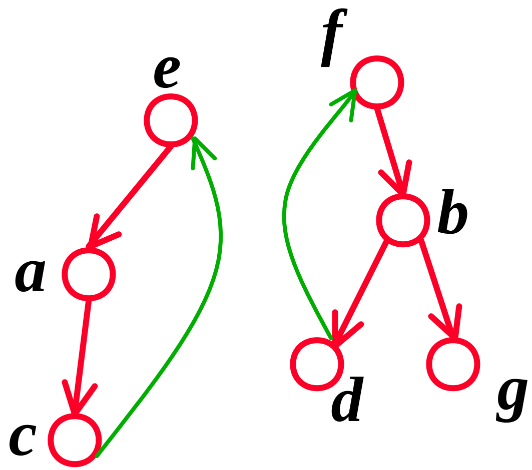


# *Alberi di copertura multipli*

```
DSF(G:grafo)
  for each vertice u Î V
      do  colore[u] = Bianco
          pred[u] = NIL
  tempo = 0
  for each vertice u Î V
      do if  colore[u] = Bianco
             then  DFS-Visita(G,u)
```

```
DSF-Visita(G:grafo,u:vertice)
  colore[u] = Grigio
  d[u] = tempo = tempo + 1
  for each vertice v Î Adiac[u]
      do if colore[v] = Bianco
             then pred[v] = u
                  DFS-Visit(G,v)
 colore[u] = Nero
 f[u] = tempo = tempo + 1
```



# Tempo di esecuzione di DFS

```
DSF(G:grafo)
   for each vertice u Î V
        do colore[u] = Bianco
           pred[u] = NIL
   tempo = 0
   for each vertice u Î V
        do if colore[u] = Bianco
              then DFS-Visita(G,u)
```

Q(|V|)

Q(|V|)

|V| volte

```
DSF-Visita(G:grafo,u:vertice)
   colore[u] = Grigio
   d[u] = tempo = tempo + 1
   for each vertice v Î Adiac[u]
       do if colore[v] = Bianco
              then pred[v] = u
                   DFS-Visit(G,v)
  colore[u] = Nero
  f[u] = tempo = tempo + 1
```

Q( $|E_u|$ )

**Chiamata solo per vertici non ancora visitati**

# Tempo di esecuzione di DFS

```
DSF(G:grafo)
  for each vertice u Î V
       do  colore[u] = Bianco
           pred[u] = NIL
  tempo = 0
  for each vertice u Î V
       do if  colore[u] = Bianco
          then  DFS-Visita(G,u)
```

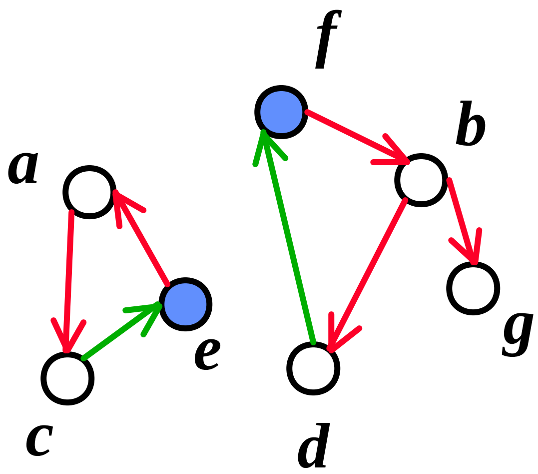
$Q(|V|+|E|)$

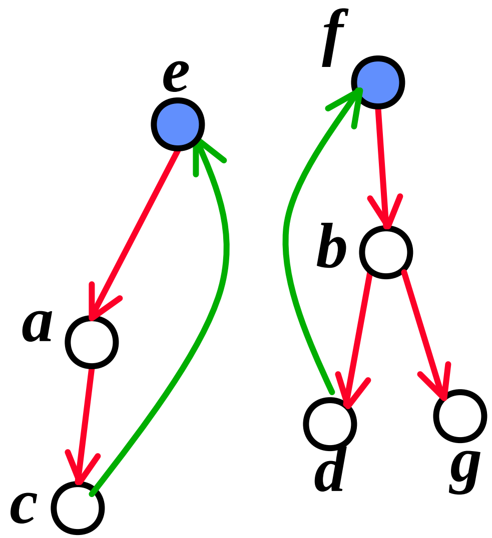
# *Proprietà di DFS: struttura a parentesi*

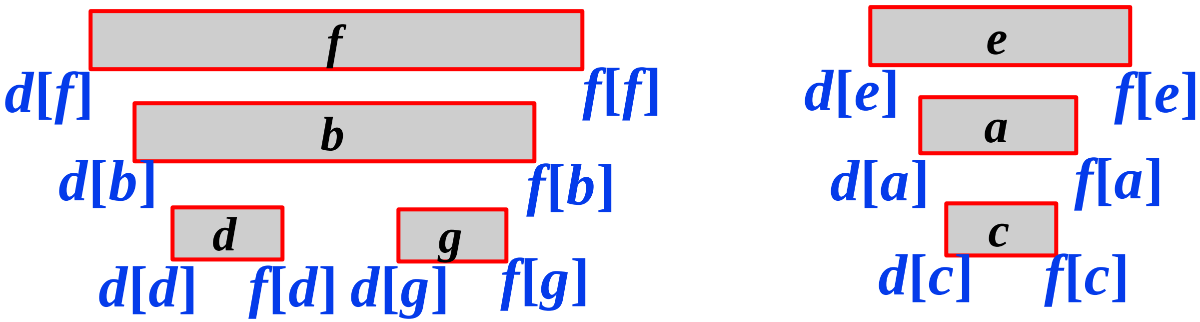
***Teorema:*** **In ogni DFS di un grafo $G$, per ogni coppia di vertici $u$ e $v$, *una sola* delle condizioni seguenti vale:**

- **Gli intervalli [ $d[u], f[u]$ ] e [$d[v], f[v]$ ] sono interamente disgiunti**
- **L'intervallo [ $d[u], f[u]$ ] è interamente contenuto nell'intervallo [$d[v], f[v]$ ] e $u$ è in *discendente* di $v$ nell'albero DF.**
- **L'intervallo [ $d[v], f[v]$ ] è interamente contenuto nell'intervallo [$d[u], f[u]$ ] e $v$ è in *discendente* di $u$ nell'albero DF.**

# Struttura a parentesi: intuizione



# *Proprietà di DFS: struttura a parentesi*

***Dimostrazione:*** **Due sono i casi**

- $d[u] < d[v]$

  **Due sottocasi:**

  ① $d[v] < f[u]$. **Quindi** $v$ **è scoperto mentre** $u$ **è ancora grigio. Questo implica che** $v$ **è** ***discendente*** **di** $u$ **(*perché?*)**

  **Inoltre,** $v$ **è stato scoperto più recentemente di (dopo)** $u$**; perciò la sua lista di archi uscenti viene esplorata, e** $v$ **viene visitato (terminato) e a** $f[v]$ **assegnato un valore.**

  **Quindi** $[d[v], f[v]]$ **è totalmente incluso in** $[d[u], f[u]]$

  ② $f[u] < d[v]$. **Poiché** $d[u] < f[u]$**, segue che** $[d[u], f[u]]$ **e** $[d[v], f[v]]$ **sono totalmente disgiunti**

- $d[u] > d[v]$

# *Proprietà di DFS: struttura a parentesi*

***Dimostrazione:*** **Due sono i casi**

- $d[u] < d[v]$ ✓

- $d[u] > d[v]$

  **Due sottocasi: il ragionamento è simile a prima ma con i ruoli di $u$ e $v$ invertiti**

  ① $d[u] < f[v]$.

  **Risulta che** $[d[u], f[u]]$ **è completamente incluso in** $[d[v], f[v]]$ **e** ***u discendente*** **di** $v$

  ② $f[v] < d[u]$.

  **Poiché** $d[u] < f[u]$, **segue che** $[d[v], f[v]]$ **e** $[d[u], f[u]]$ **sono totalmente disgiunti (e in due sottoalberi distinti)**

# *Proprietà di DFS: struttura a parentesi*

*Corollario:* **Un vertice** ***v*** **è un** ***discendente*** **di** ***u*** **nella** ***foresta DF*** **di un grafo** ***G*** **se e solo se**

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u].$$

*Dimostrazione:* **Immediata conseguenza del teorema precedente.**

# *Proprietà di DFS: percorso bianco*

***Teorema:*** **Nella *foresta DF* di un grafo *G*, un vertice *v* è *discendente* del vertice *u* <u>*se e solo se*</u> al tempo *d*[*u*] in cui la ricerca visita *u*, il vertice *v* può essere raggiunto da *u* lungo un *percorso composto* da *soli vertici bianchi*.**

***Dimostrazione:***

***solo se:*** **Assumiamo che *v* sia discendente di *u* nella *foresta DF* e che *w* sia un arbitrario vertice nel percorso percorso tra *u* e *v* nella *foresta DF*.**

**Allora anche *w* è discendente di *u* nella *foresta DF*.**

**Per il corollario precedente, *d*[*u*] < *d*[*w*], quindi *w* è bianco al tempo *d*[*u*]**

# *Proprietà di DFS: percorso bianco*

***Teorema:*** **Nella *foresta DF* di un grafo *G*, un vertice *v* è *discendente* del vertice *u* *se e solo se* al tempo *d*[*u*] in cui la ricerca visita *u*, il vertice *v* può essere raggiunto da *u* lungo un *percorso composto da soli vertici bianchi*.**

***Dimostrazione:***

- ***se:*** **Assumiamo che *v* sia il *primo* vertice *raggiungibile* da *u* *lungo un percorso bianco* al tempo *d*[*u*], ma che non diventi un discendente di *u* nell'*albero DF*.**

  **Quindi tutti i vertici che precedono *v* nel percorso saranno discendenti di *u*.**

  **Sia *w* il predecessore di *v* nel percorso (*v* è quindi adiacente a *w*).**

# *Proprietà di DFS: percorso bianco*

***Teorema:*** **Nella *foresta DF* di un grafo *G*, un vertice *v* è *discendente* del vertice *u* se e solo se al tempo *d*[*u*] in cui la ricerca visita *u*, il vertice *v* può essere raggiunto da *u* lungo un *percorso composto* da *soli vertici bianchi*.**

***Dimostrazione:***

***se:*** **per il *Corollario precedente*, abbiamo che $f[w]<f[u]$.**

**Poiché *v* Î *Adiac*[*w*], la chiamata a *DFS-Visita(w)* garantisce che *v* venga visitato (e *terminato*) prima di *w*.**

**Perciò, $f[v]<f[w]<f[u]$.**

**Poiché quindi *v* è *bianco* al tempo $d[u]$, vale $d[u]< d[v]$,**

**e il *Corollario precedente* garantisce che *v* deve essere un discendente di *u* nell'*albero DF*.**