

# *Algoritmi e Strutture Dati*

## **QuickSort**

# QuickSort

Algoritmo di ordinamento “*sul posto*” che ha tempo di esecuzione che *asintoticamente* è:

- $O(n^2)$  nel *caso peggiore*
- $O(n \log n)$  nel *caso medio*

Nonostante le cattive prestazioni nel *caso peggiore*, rimane il miglior algoritmo di ordinamento *in media*

# QuickSort

È basato sulla metodologia Divide et Impera:

**Dividi:** L'array  $A[p\dots r]$  viene “**partizionato**” (tramite spostamenti di elementi) in due sottoarray **non vuoti**  $A[p\dots q]$  e  $A[q+1\dots r]$  in cui:

- ogni elemento di  $A[p\dots q]$  è minore o uguale ad ogni elemento di  $A[q+1\dots r]$

**Conquista:** i due sottoarray  $A[p\dots q]$  e  $A[q+1\dots r]$  vengono ordinati ricorsivamente con QuickSort

**Combina:** i sottoarray vengono ordinati anche reciprocamente, quindi non è necessaria alcuna combinazione.  $A[p\dots r]$  è già ordinato.

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

# Algoritmo QuickSort

**Indice mediano**

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF  $p < r$ 
    THEN  $q =$  Partiziona (A, p, r)
         Quick-Sort (A, p,  $q$ )
         Quick-Sort (A,  $q + 1$ , r)
```

$q$  è l'indice che **divide** l'array in due **sottoarray** dove

- tutti gli elementi a sinistra di  $q$  (compreso l'elemento in posizione  $q$ ) sono minori o uguali tutti gli elementi a destra di  $q$

# Algoritmo QuickSort

**Ordinamento dei  
due sottoarray**

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

Poiché il **sottoarray** di **sinistra** contiene elementi tutti **minori o uguali** a tutti quelli del **sottoarray** di **destra**, **ordinare** i due sottoarray **separatamente** fornisce la **soluzione del problema**

# Algoritmo QuickSort

**passo Dividi**

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF  $p < r$ 
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
        Quick-Sort (A, p, q)
        Quick-Sort (A, q + 1, r)
```

**Partition** è la **chiave** di tutto l'algoritmo !

IMPORTANTE: **q** *deve* essere **strettamente minore** di **r**:

**$q < r$**

# Algoritmo Partiziona

L'array  $A[p\dots r]$  viene “**suddiviso**” in due sotto-array “**non vuoti**”  $A[p\dots q]$  e  $A[q+1\dots r]$  in cui ogni elemento di  $A[p\dots q]$  è **minore o uguale** ad ogni elemento di  $A[q+1\dots r]$ :

- ❑ l'algoritmo sceglie un valore dell'array che fungerà da elemento “**spartiacque**” tra i due sotto-array, detto valore **pivot**.
- ❑ sposta i **valori maggiori** del **pivot** verso l'estremità destra dell'array e i **valori minori** verso quella sinistra.

**q** dipenderà dal valore **pivot** scelto: sarà l'estremo della partizione a partire da sinistra nella quale, alla fine, si troveranno solo elemento **minori o uguali** al **pivot**.

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
    x = A[p]
    i = p - 1
    j = r + 1
    REPEAT
        REPEAT j = j - 1
            UNTIL A[j] ≤ x
        REPEAT i = i + 1
            UNTIL A[i] ≥ x
        IF i < j
            THEN "scambia A[i] con A[j]"
    UNTIL i ≥ j
return j
```

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j
```

```
      UNTIL A[j]
```

```
    REPEAT i = i
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

**Elemento Pivot**

**Gli elementi minori o uguali al Pivot verranno spostati tutti verso sinistra**

**Gli elementi maggiori o uguali al Pivot verranno spostati tutti verso destra**

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT ←
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

*Il ciclo continua finché  
i incrocia j*

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

**Cerca il primo elemento da destra che sia minore o uguale al Pivot x**



# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

**Cerca il primo elemento da sinistra che sia maggiore o uguale al Pivot x**

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
  x = A[p]
  i = p - 1
  j = r + 1
  REPEAT
    REPEAT j = j
      UNTIL A[j] ≤ x
    REPEAT i = i + 1
      UNTIL A[i] ≥ x
    IF i < j
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
  UNTIL i ≥ j
  return j
```

*Se l'array non è stato scandito completamente  $i < j$  (i due non indici si incrociano) allora :*

- $A[i] \leq x$
- $A[j] \geq x$

*gli elementi vengono scambiati*



**IF  $i < j$**

**THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "**

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
  x = A[p]
  i = p - 1
  j = r + 1
  REPEAT
    REPEAT j = j - 1
      UNTIL A[j] ≤ x
    REPEAT i = i + 1
      UNTIL A[i] ≥ x
    IF i < j
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
  UNTIL i ≥ j
return j
```

*Se l'array è stato scandito completamente  $i \geq j$  (i due indici si incrociano) allora termina il ciclo*

**UNTIL  $i \geq j$**

# Algoritmo Partiziona

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

*Alla fine j è ritornato  
come indice mediano  
dell'array*

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT  $j = j - 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[j] \leq x$ 
```

```
    REPEAT  $i = i + 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

```
    IF  $i < j$ 
```

```
      THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "
```

```
    UNTIL  $i \geq j$ 
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	14	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22

↑  
*i*

↑  
*j*

# Algoritmo Partiziona: partiziona (A, 1, 12)

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT  $j = j - 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[j] \leq x$ 
```

```
    REPEAT  $i = i + 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

```
    IF  $i < j$ 
```

```
      THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "
```

```
    UNTIL  $i \geq j$ 
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	14	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22

↑  
 $i$

↑  
 $j$

# Algoritmo Partiziona: partiziona (A, 1, 12)

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

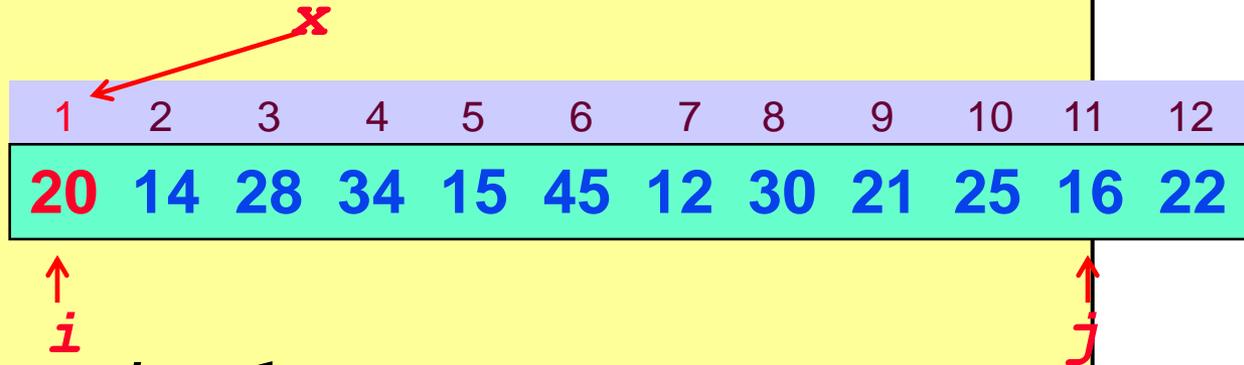
```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
    UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```



# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	28	34	15	45	12	30	21	25	20	22

↑  
*i*

↑  
*j*

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT  $j = j - 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[j] \leq x$ 
```

```
    REPEAT  $i = i + 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

```
    IF  $i < j$ 
```

```
      THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "
```

```
  UNTIL  $i \geq j$ 
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	28	34	15	45	12	30	21	25	20	22

↑  
 $i$

↑  
 $j$

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	28	34	15	45	12	30	21	25	20	22

↑  
*i*

↑  
*j*

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	12	34	15	45	28	30	21	25	20	22

The pivot element  $x$  is at index 11. The pointer  $i$  starts at index 3 and moves right. The pointer  $j$  starts at index 7 and moves left. The elements 12 and 28 are highlighted in red in the original image, indicating they are being compared to the pivot.

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
    UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	12	34	15	45	28	30	21	25	20	22

↑  
i

↑  
j

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	12	34	15	45	28	30	21	25	20	22

↑  
i

↑  
j

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	12	15	34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
i

↑  
j

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
    UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	14	12	15	34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
j

↑  
i

# Algoritmo Partiziona: $\text{partiziona}(A, 1, 12)$

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
16	14	12	15		34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
j

↑  
i

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

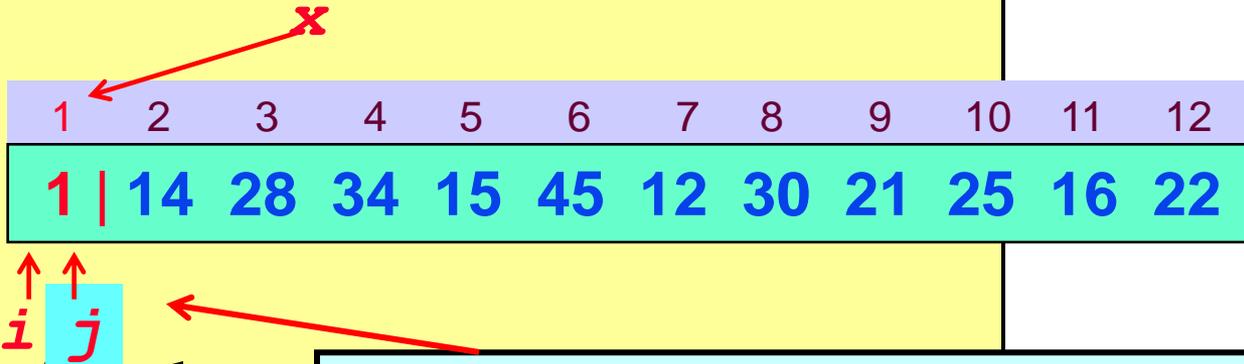
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22

**Se esiste un solo elemento minore o uguale al pivot, ...**



# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
  x = A[p]
  i = p - 1
  j = r + 1
  REPEAT
    REPEAT j = j - 1
      UNTIL A[j] ≤ x
    REPEAT i = i + 1
      UNTIL A[i] ≥ x
    IF i < j
      THEN "scambia A[i] e A[j]"
  UNTIL i ≥ j
  return j
```



**Se esiste un solo elemento minore o uguale al pivot, l'array è partizionato in due porzioni: quella sinistra ha dimensione 1 e quella destra ha dimensione  $n-1$**

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22

*Se esistono solo due elementi minori o uguali al pivot, ...*

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT  $j = j - 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[j] \leq x$ 
```

```
    REPEAT  $i = i + 1$ 
```

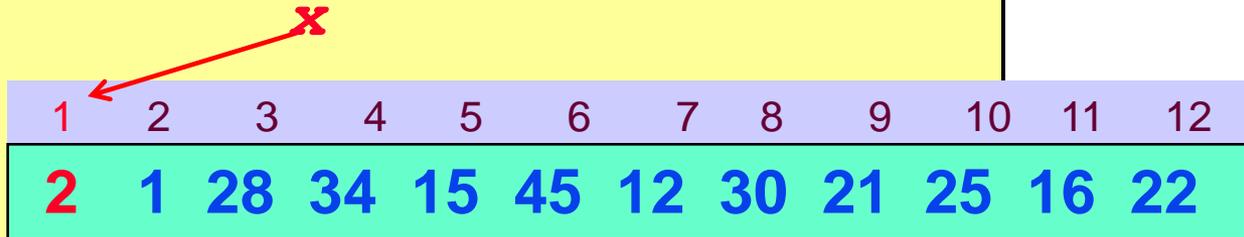
```
      UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

```
    IF  $i < j$ 
```

```
      THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "
```

```
  UNTIL  $i \geq j$ 
```

```
  return j
```



*Se esistono solo due elementi minori o uguali al pivot, ...*

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22

*Se esistono solo due  
elementi minori o uguali al  
pivot, ...*

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT  $j = j - 1$ 
```

```
      UNTIL  $A[j] \leq x$ 
```

```
    REPEAT  $i = i + 1$ 
```

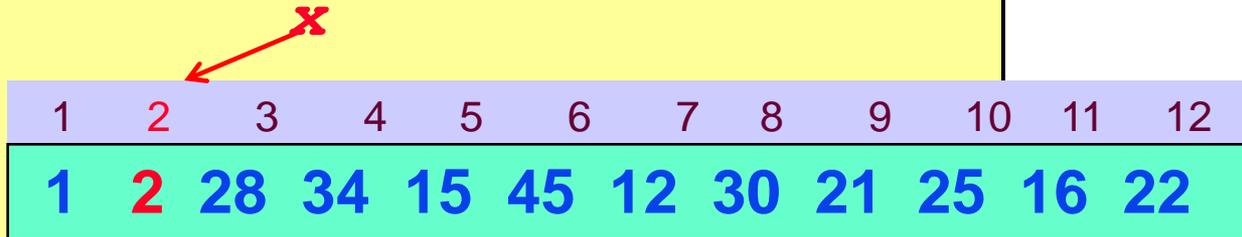
```
      UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

```
    IF  $i < j$ 
```

```
      THEN "scambia  $A[i]$  con  $A[j]$ "
```

```
  UNTIL  $i \geq j$ 
```

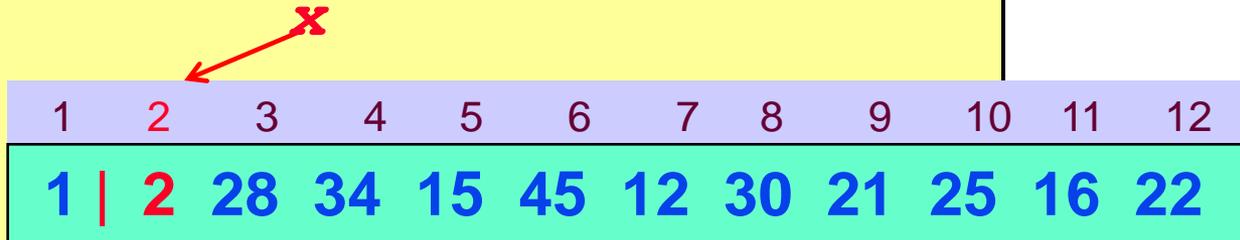
```
  return j
```



**Se esistono solo due elementi minori o uguali al pivot, ...**

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

```
int Partiziona(A, p, r)
  x = A[p]
  i = p - 1
  j = r + 1
  REPEAT
    REPEAT j = j - 1
      UNTIL A[j] ≤ x
    REPEAT i = i + 1
      UNTIL A[i] ≥ x
    IF i < j
      THEN "scambia A[i] e A[j]"
  UNTIL i ≥ j
  return j
```



*Se esistono solo due elemento minori o uguali al pivot, l'array è partizionato in due porzioni: quella sinistra ha dimensione 1 e quella destra ha dimensione  $n-1$*

# Algoritmo Partiziona: casi estremi

**Partiziona** è quindi tale che:

**SE** il numero di elementi dell'array minori o uguali all'elemento  $A[p]$ , scelto come *pivot*, è pari a **1** (cioè  $A[p]$  è l'elemento minimo) o a **2**,

**ALLORA** le *dimensioni* delle partizioni restituite sono **1** per la *partizione di sinistra* e  **$n-1$**  per *quella di destra*.

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
        Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
        Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

20	14	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

20	14	28	34	15	45	12	30	21	25	16	22
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

16 14 12 15 | 34 45 28 30 21 25 20 22

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$



# Algoritmo QuickSort

**Quick-Sort** ( $A, p, r$ )

**IF**  $p < r$

**THEN**  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$

**Quick-Sort** ( $A, p, q$ )

**Quick-Sort** ( $A, q+1, r$ )

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
16	14	12	15		34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
16	14	12	15		34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $r$



# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	14	12	16	34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

**Quick-Sort** ( $A, p, r$ )

**IF**  $p < r$

**THEN**  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$

**Quick-Sort** ( $A, p, q$ )

**Quick-Sort** ( $A, q+1, r$ )

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
15	14	12		16		34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort (A, p, r)
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort (A, p, q)
```

```
      Quick-Sort (A, q+1, r)
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	14	15	16	34	45	28	30	21	25	20	22

↑    ↑    ↑  
 $p$     $q$     $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

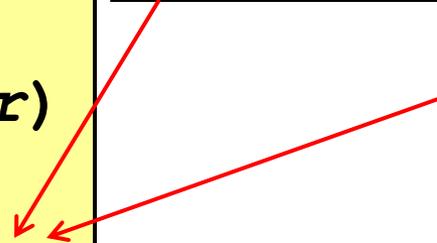
```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	14	15	16	34	45	28	30	21	25	20	22

↑    ↑    ↑  
 $p$     $q$     $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16

3  
15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
12	14		15		16		34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16

3  
15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	14	15	16	34	45	28	30	21	25	20	22

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

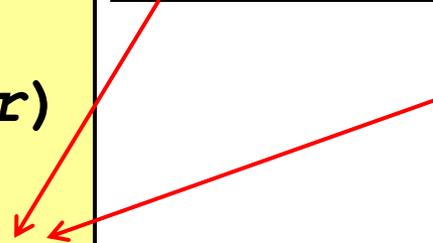
```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

12	14	15		16		34	45	28	30	21	25	20	22
----	----	----	--	----	--	----	----	----	----	----	----	----	----

↑   ↑   ↑  
 $p$     $q$     $r$

# Algoritmo QuickSort

**Quick-Sort** ( $A, p, r$ )

**IF**  $p < r$

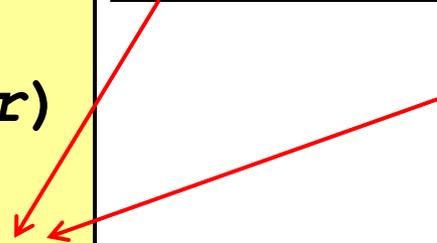
**THEN**  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$

**Quick-Sort** ( $A, p, q$ )

**Quick-Sort** ( $A, q+1, r$ )

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
12	14	15		16		34	45	28	30	21	25	20	22

↑ ↑  
*pr*

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

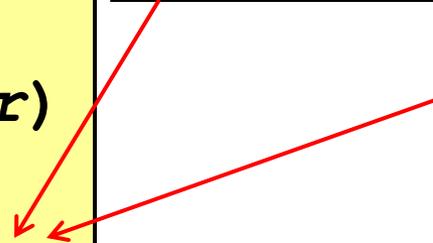
```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22

4  
16



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
12	14	15		16		34	45	28	30	21	25	20	22

↑ ↑  
 $pr$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

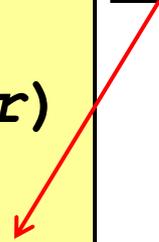
```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

5	6	7	8	9	10	11	12
34	45	28	30	21	25	20	22



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
12	14	15	16		34	45	28	30	21	25	20	22

↑ ↑  
*pr*

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
        Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
        Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 34 45 28 30 21 25 20 22

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 34 45 28 30 21 25 20 22

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 22 20 28 30 21 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 22 20 28 30 21 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 21 20 | 28 30 22 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 21 20 | 28 30 22 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

**Quick-Sort** ( $A, p, r$ )

**IF**  $p < r$

**THEN**  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$

**Quick-Sort** ( $A, p, q$ )

**Quick-Sort** ( $A, q+1, r$ )

11 12

45 34

7 8 9 10

28 30 22 25

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 21 20 | 28 30 22 25 | 45 34

↑ ↑  
 $p$   $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

7 8 9 10

28 30 22 25

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 | 20 | 21 | 28 30 22 25 | 45 34

↑ ↑ ↑  
 $p$   $q$   $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 | 28 30 22 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

**Quick-Sort** ( $A, p, r$ )

**IF**  $p < r$

**THEN**  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$

**Quick-Sort** ( $A, p, q$ )

**Quick-Sort** ( $A, q+1, r$ )

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 | 28 30 22 25 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 | 25 22 | 30 28 | 45 34

↑ ↑ ↑  
 $p$   $q$   $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

11 12

45 34

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 | 22 25 | 28 30 | 45 34

↑ ↑ ↑  
 $p$   $q$   $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 22 25 28 30 | 45 34

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

12	14	15	16	20	21	22	25	28	30		45	34
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--	----	----

↑    ↑  
 $p$     $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
IF  $p < r$ 
```

```
THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 22 25 28 30 | 34 45

↑ ↑ ↑  
 $p$   $q$   $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12 14 15 16 20 21 22 25 28 30 | 34 45

↑  
 $p$

↑  
 $q$

↑  
 $r$

# Algoritmo QuickSort

```
Quick-Sort ( $A, p, r$ )
```

```
  IF  $p < r$ 
```

```
    THEN  $q = \text{Partiziona}(A, p, r)$ 
```

```
      Quick-Sort ( $A, p, q$ )
```

```
      Quick-Sort ( $A, q+1, r$ )
```

L'array  $A$  ora è ordinato!

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

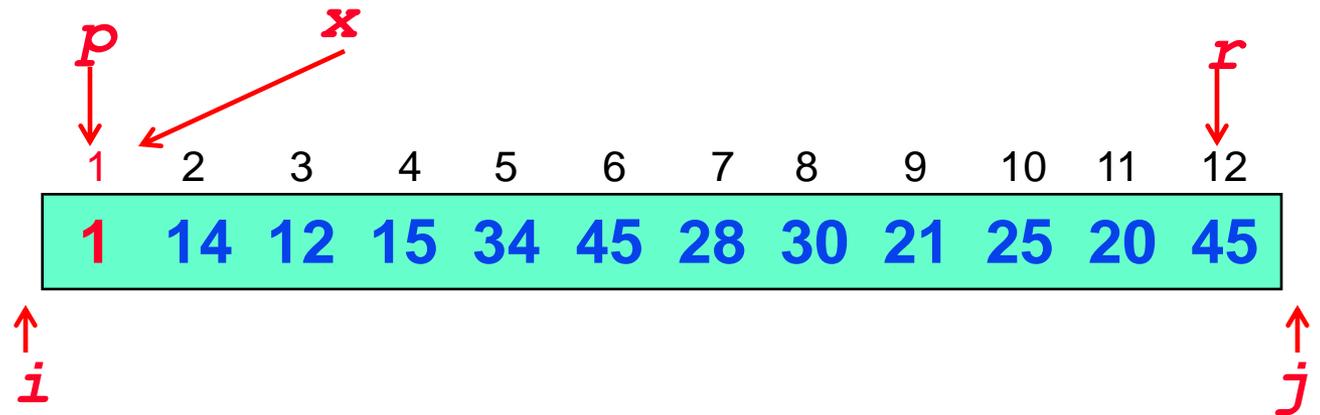
12 14 15 16 20 21 22 25 28 30 34 45

## *Algoritmo Partiziona: analisi*

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$

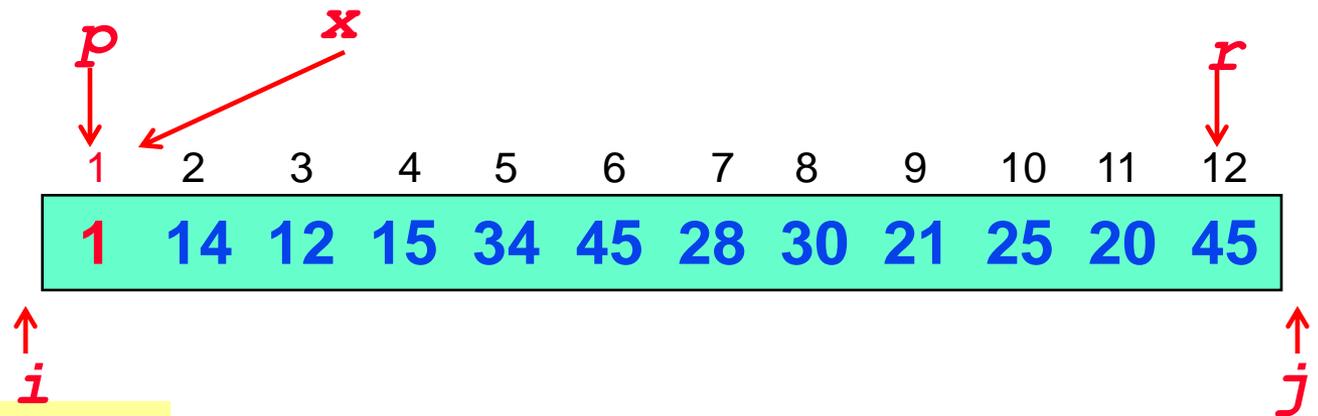


**2 Casi. Partiziona effettua:**

- nessuno spostamento
- almeno uno spostamento

# Algoritmo Partiziona: analisi

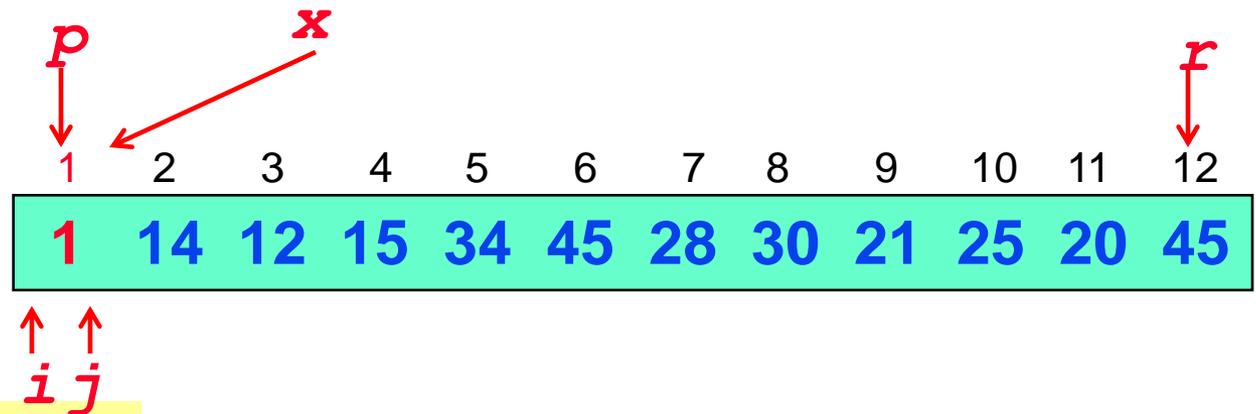
Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



```
...  
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



```
...  
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

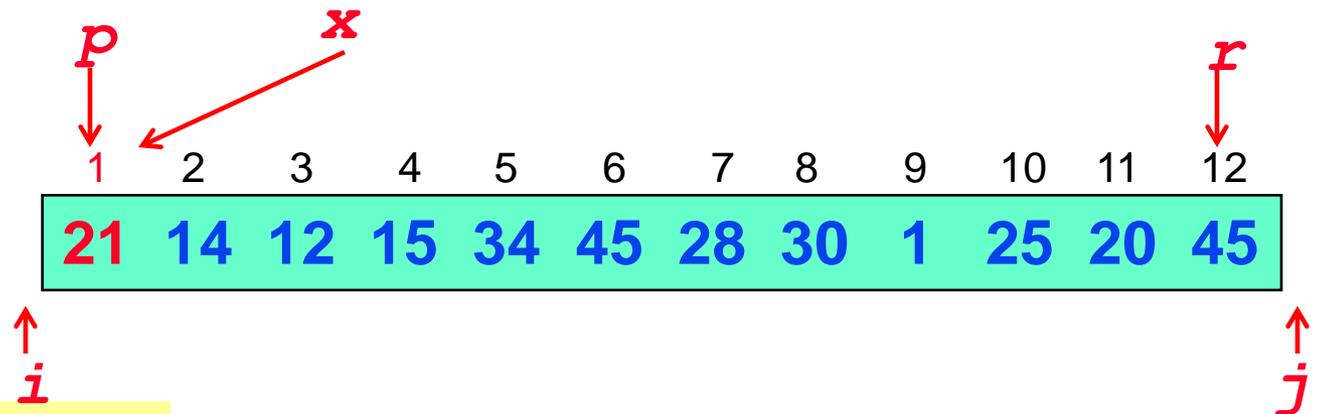
*nessuno spostamento*

$A[j] \leq x$  per  $j \geq p$

$A[i] \geq x$  per  $i \leq p$

# Algoritmo Partiziona: analisi

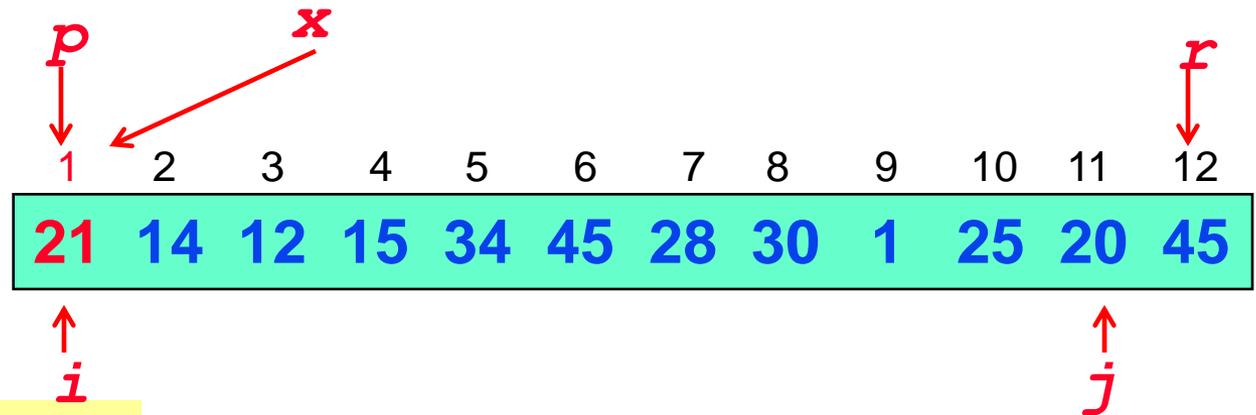
Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



```
...  
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

# Algoritmo Partiziona: analisi

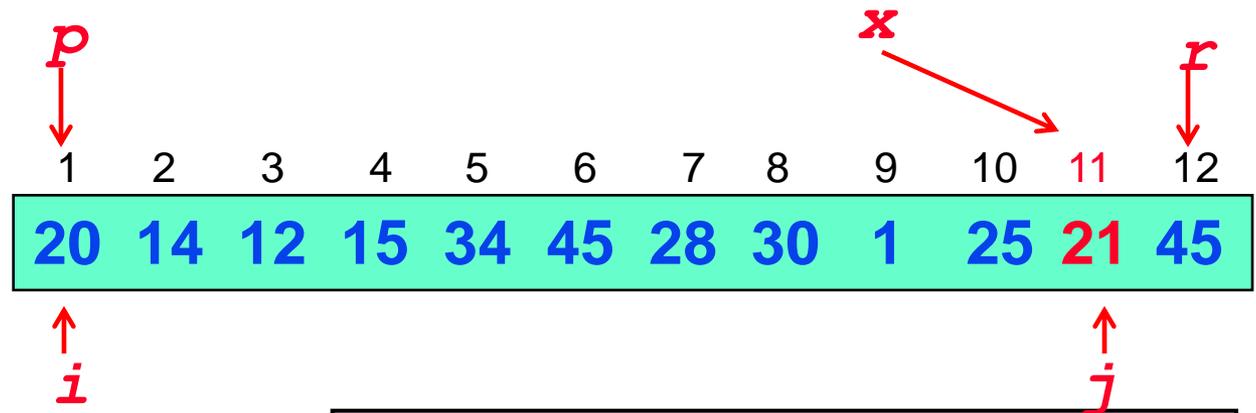
Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



```
...  
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$

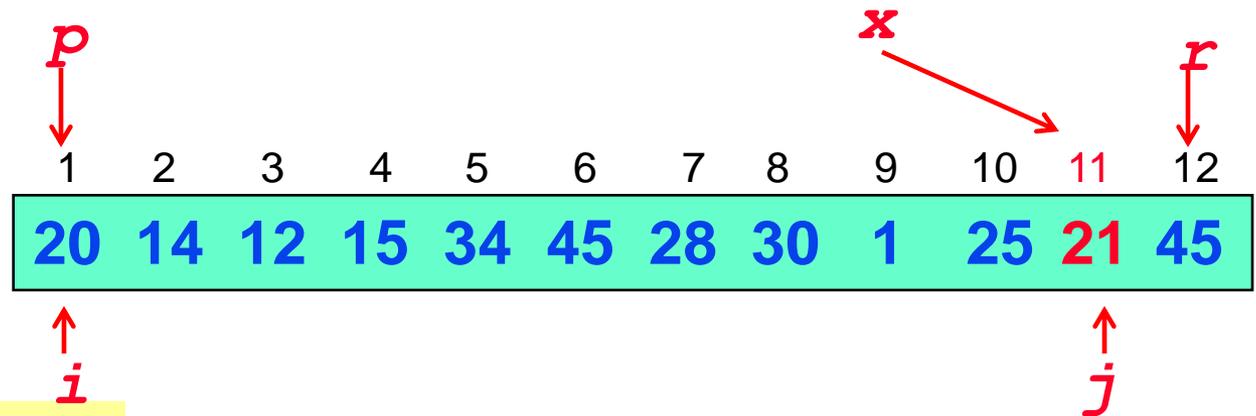


```
...  
IF  $i < j$   
  THEN "scambia  
         $A[i]$  con  $A[j]$ "  
...  
...
```

dopo il primo spostamento,  
esiste un  $k$  tale che  
 $A[k] \leq x$  con  $p \leq k \leq j$   
esiste un  $z$  tale che  
 $A[z] \geq x$  con  $i \leq z \leq r$

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



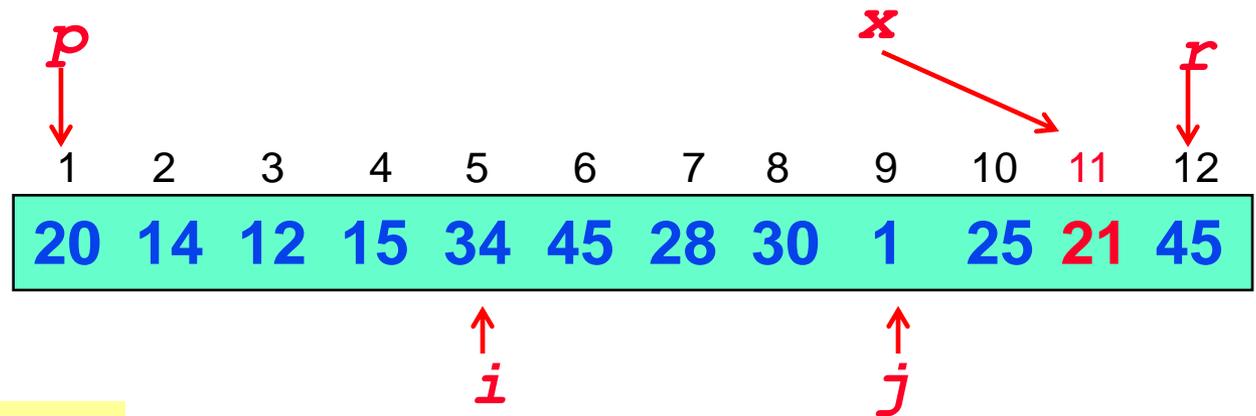
```
...  
REPEAT   $j = j - 1$   
        UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT   $i = i + 1$   
        UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

*In generale, dopo ogni scambio:*

- un elemento minore o uguale ad  $x$  viene spostato tra  $p$  e  $j-1$
- un elemento maggiore o uguale ad  $x$  viene spostato tra  $i+1$  e  $r$

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



...

```
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$ 
```

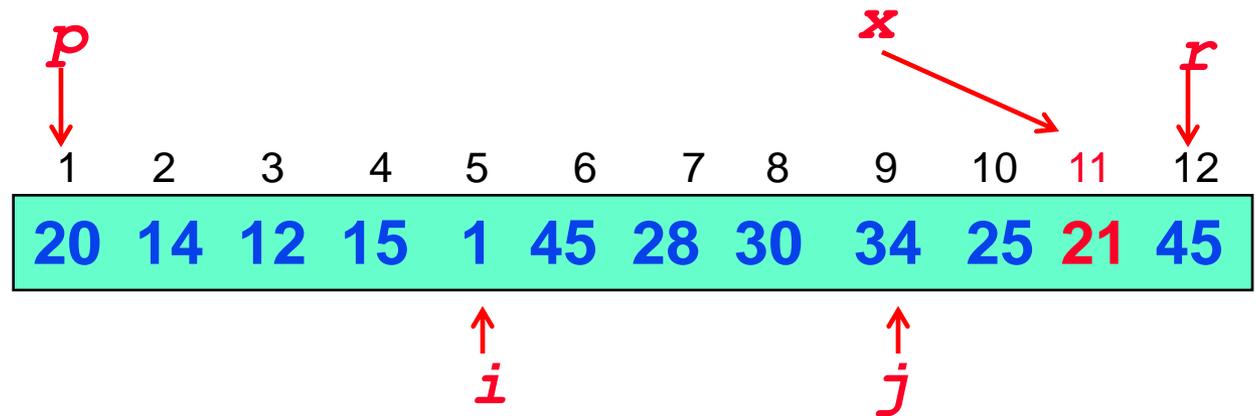
...

*In generale, dopo ogni scambio:*

- tra  $p$  e  $j-1$  ci sarà sicuramente un elemento minore o uguale ad  $x$
- tra  $i+1$  e  $r$  ci sarà sicuramente un elemento maggiore o uguale ad  $x$

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



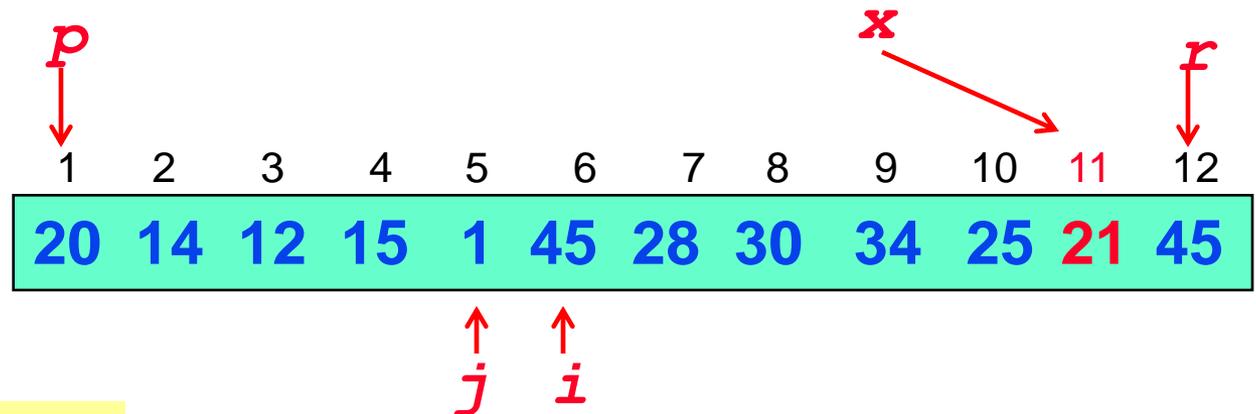
```
...  
IF  $i < j$   
  THEN "scambia  
         $A[i]$  con  $A[j]$ "  
...  
...
```

*In generale, dopo ogni scambio:*

- tra  $p$  e  $j-1$  ci sarà sicuramente un elemento minore o uguale ad  $x$
- tra  $i+1$  e  $r$  ci sarà sicuramente un elemento maggiore o uguale ad  $x$

# Algoritmo Partiziona: analisi

Gli indici  $i$  e  $j$  che scandiscono la sequenza non ne eccedono mai i limiti. Cioè vale sempre che  $i \leq r$  e  $j \geq p$



```
...  
REPEAT  $j = j - 1$   
  UNTIL  $A[j] \leq x$   
REPEAT  $i = i + 1$   
  UNTIL  $A[i] \geq x$   
...
```

*In generale, dopo ogni scambio:*

- tra  $p$  e  $j-1$  ci sarà sicuramente un elemento minore o uguale ad  $x$
- tra  $i+1$  e  $r$  ci sarà sicuramente un elemento maggiore o uguale ad  $x$

# Algoritmo Partiziona: analisi

```
int Partiziona (A, p, r)
```

```
  x = A[p]  
  i = p - 1  
  j = r + 1  
  REPEAT
```

} =  $\Theta(1)$

```
    REPEAT j = j - 1  
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1  
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j  
      THEN "scambia A[i] con A[j]"  
    UNTIL i ≥ j  
  } =  $\Theta(1)$ 
```

```
return j
```

# Algoritmo Partiziona: analisi

```
int Partiziona (A, p, r)
```

```
  x = A[p]
```

```
  i = p - 1
```

```
  j = r + 1
```

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = i - 1
```

```
      UNTIL A[j]
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

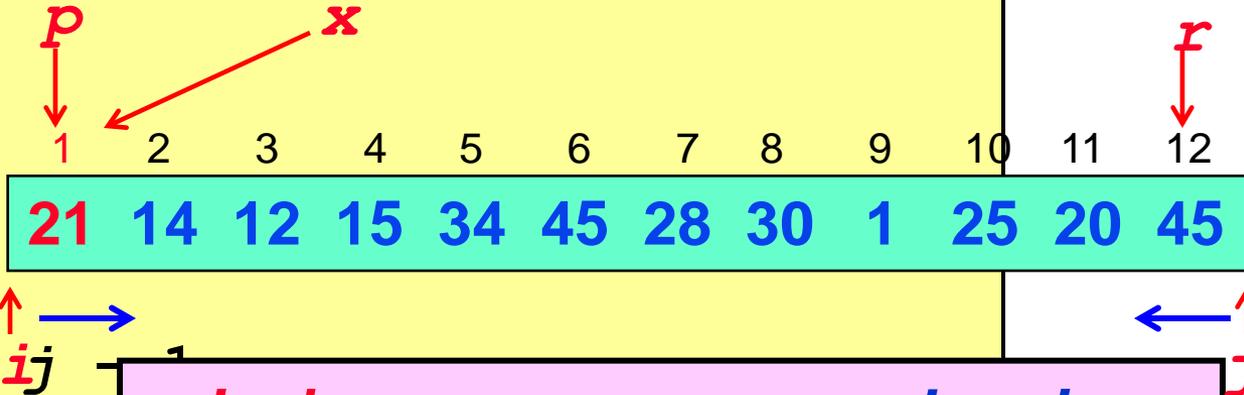
```
      UNTIL A[i]
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambio"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```



- ❑  $i$  e  $j$  non possono eccedere i limiti dell'array,
- ❑  $i$  e  $j$  sono sempre rispettivamente crescente e decrescente
- ❑ l'algoritmo termina quando  $i \geq j$  quindi il costo del REPEAT sarà proporzionale ad  $n$ , cioè  $\Theta(n)$

# Algoritmo Partiziona: analisi

```
int Partiziona(A, p, r)
```

```
  x = A[p]  
  i = p - 1  
  j = r + 1
```

} =  $\Theta(1)$

```
  REPEAT
```

```
    REPEAT j = j - 1
```

```
      UNTIL A[j] ≤ x
```

```
    REPEAT i = i + 1
```

```
      UNTIL A[i] ≥ x
```

```
    IF i < j
```

```
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
```

```
  UNTIL i ≥ j
```

```
  return j
```

} =  $\Theta(n)$

# Algoritmo Partiziona: analisi

```
int Partiziona (A, p, r)
  x = A[p]
  i = p - 1
  j = r + 1
  REPEAT
    REPEAT j = j - 1
      UNTIL A[j] ≤ x
    REPEAT i = i + 1
      UNTIL A[i] ≥ x
    IF i < j
      THEN "scambia A[i] con A[j]"
  UNTIL i ≥ j
return j
```

$$T(n) = \Theta(n)$$

# Analisi di QuickSort: intuizioni

Il **tempo di esecuzione** di QuickSort dipende dalla **bilanciamento** delle partizioni effettuate dall'algoritmo **partiziona**:

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(q) + T(n - q) + \Theta(n) \quad \text{se } n > 1$$

- Il **caso migliore** si verifica quando le partizioni sono **perfettamente bilanciate**, entrambe di dimensione  $n/2$
- Il **caso peggiore** si verifica quando una partizione è sempre di dimensione **1** (la seconda è quindi di dimensione  $n-1$ )

# Analisi di QuickSort: caso migliore

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF p < r
    THEN q = Partiziona (A, p, r)
         Quick-Sort (A, p, q)
         Quick-Sort (A, q + 1, r)
```

Le partizioni sono di uguale dimensione:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

e per il **caso 2** del **metodo principale**:

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

# Analisi di QuickSort: caso migliore

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF p < r
    THEN q = Partiziona (A, p, r)
         Quick-Sort (A, p, q)
         Quick-Sort (A, q + 1, r)
```

**Quando si verifica il caso migliore, ad esempio?**

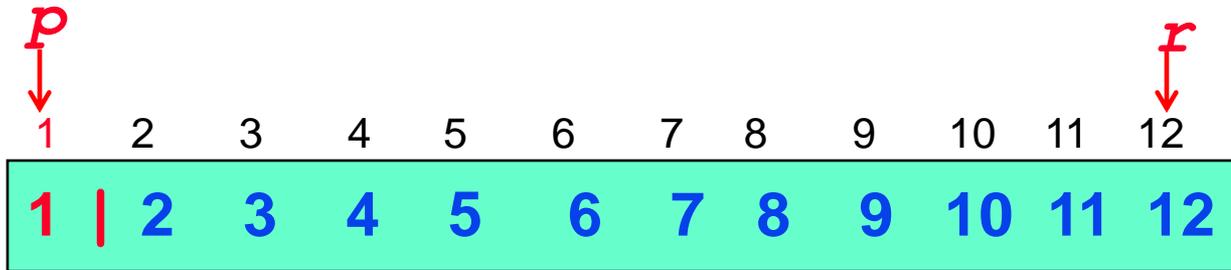
Le partizioni sono di uguale dimensione:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

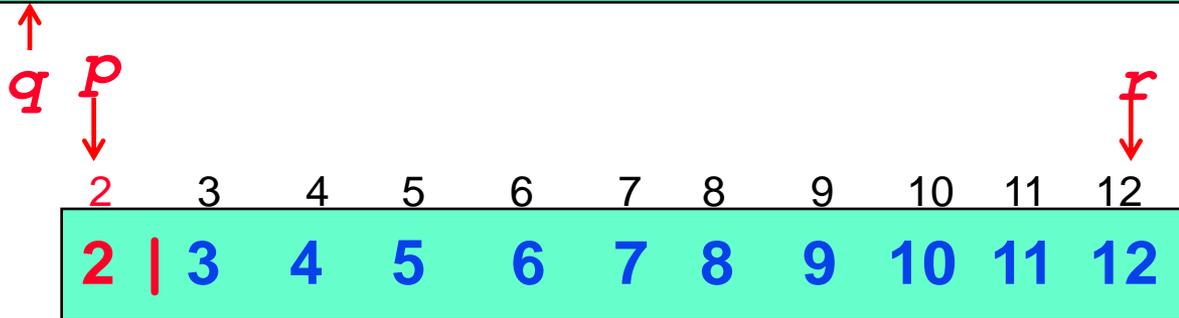
e per il **caso 2** del **metodo principale**:

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

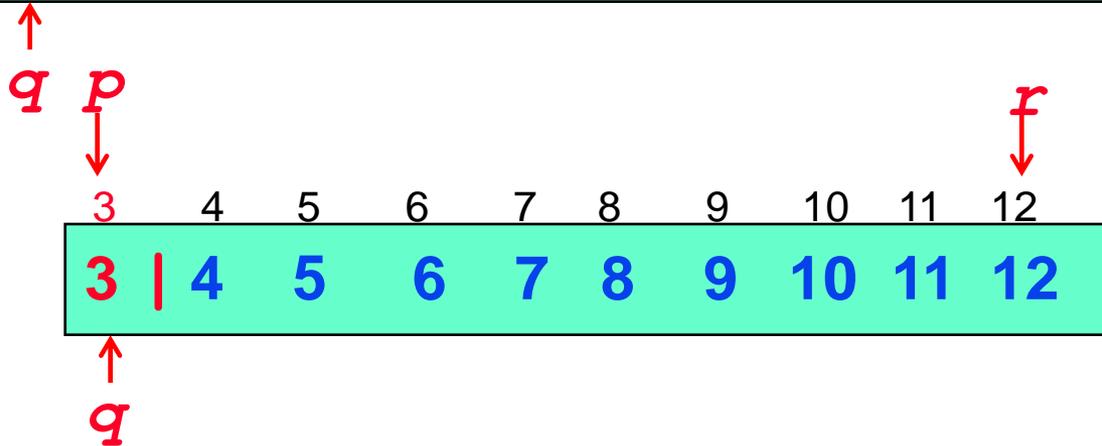
# Analisi di QuickSort: caso peggiore



**Pivot = 1**



**Pivot = 2**



**Pivot = 3**

# Analisi di QuickSort: caso peggiore

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF p < r
    THEN q = Partiziona (A, p, r)
         Quick-Sort (A, p, q)
         Quick-Sort (A, q + 1, r)
```

La partizione sinistra ha dimensione **1** mentre quella destra ha dimensione  **$n-1$** :

$$T(n) = T(1) + T(n-1) + \Theta(n)$$

poiché  **$T(1) = 1$**  otteniamo

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

# Analisi di QuickSort: caso peggiore

L'equazione di ricorrenza può essere risolta facilmente col *metodo iterativo*

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Theta(k) =$$

$$= \Theta\left(\sum_{k=1}^n k\right) =$$

$$= \Theta(n^2)$$

# Analisi di QuickSort: caso peggiore

```
Quick-Sort (A, p, r)
  IF p < r
    THEN q = Partiziona (A, p, r)
         Quick-Sort (A, p, q)
         Quick-Sort (A, q+1, r)
```

*Quando si verifica il caso peggiore, ad esempio?*

La partizione sinistra ha dimensione **1** mentre quella destra ha dimensione  **$n-1$** :

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \Theta(n) = \\ &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$