Algoritmi e Strutture Dati

Alberi Bilanciati: Alberi Red-Black

Alberi bilanciati di ricerca

- **Gli *alberi binari di ricerca* sono semplici da gestire (inserimenti e cancellazioni facili da implementare) ma hanno prestazioni poco prevedibili e potenzialmente basse**
- **Gli *alberi perfettamente bilanciati* hanno prestazioni ottimali (*log n* garantito) ma inserimenti e cancellazioni complesse (ri-bilanciamenti)**
- **Alberi AVL (*Adelson-Velskii e Landis*): *alberi quasi bilanciati*. Buone prestazioni e gestione relativamente semplice.**

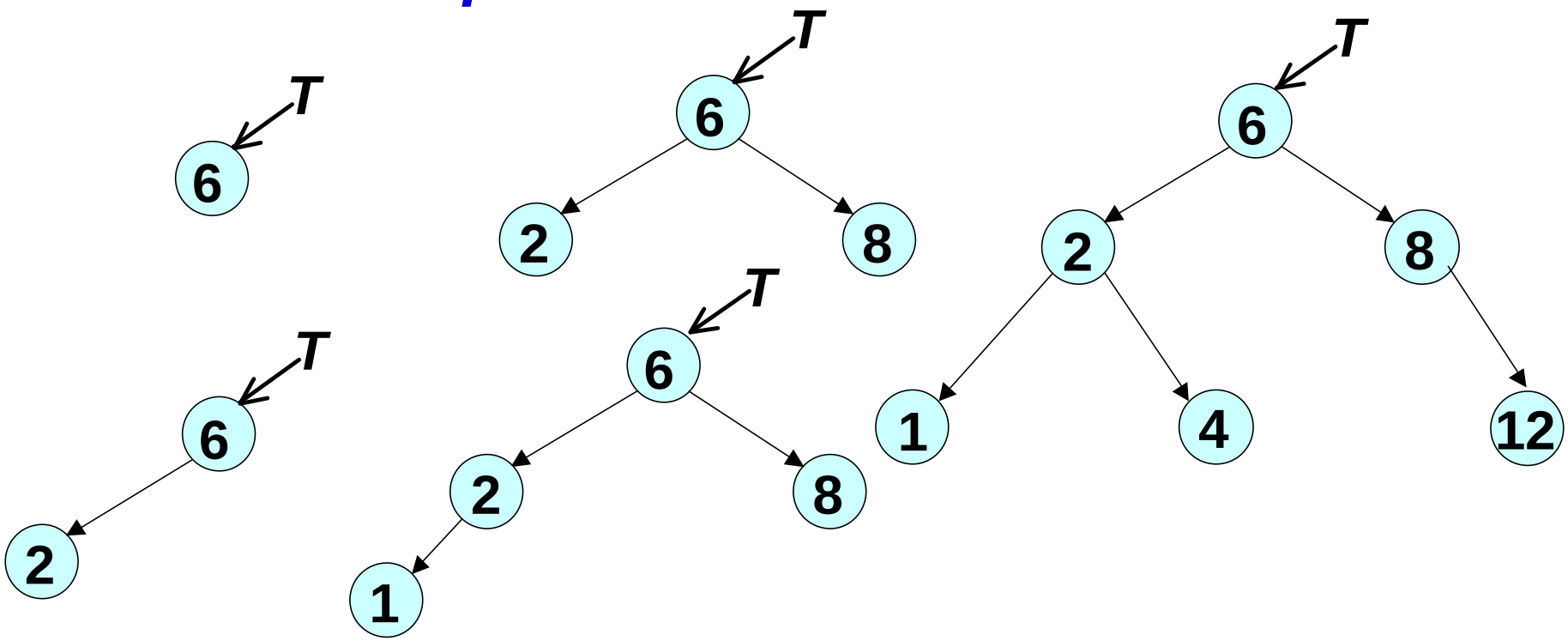
Alberi AVL: definizione

Definizione: **Un albero binario di ricerca è un *Albero AVL* se per ogni nodo *x*:**

- **l'*altezza* del *sottoalbero sinistro di x* e quella del *sottoalbero destro di x* differiscono al più di uno, e**
- ***entrambi i sottoalberi* sinistro e destro di *x* sono *alberi AVL***

Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice *Perfettamente Bilanciato* se, per ogni nodo *i*, il *numero dei nodi* nel suo *sottoalbero sinistro* e il *numero dei nodi* del suo *sottoalbero destro* differiscono *al più* di 1**



Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice *Perfettamente Bilanciato* se, per ogni nodo *i*, il *numero dei nodi* nel suo *sottoalbero sinistro* e il *numero dei nodi* del suo *sottoalbero destro differiscono al più* di 1**

L'*altezza* di un *albero perfettamente bilanciato (APB)* con *n nodi* è $h = \log_2 n$

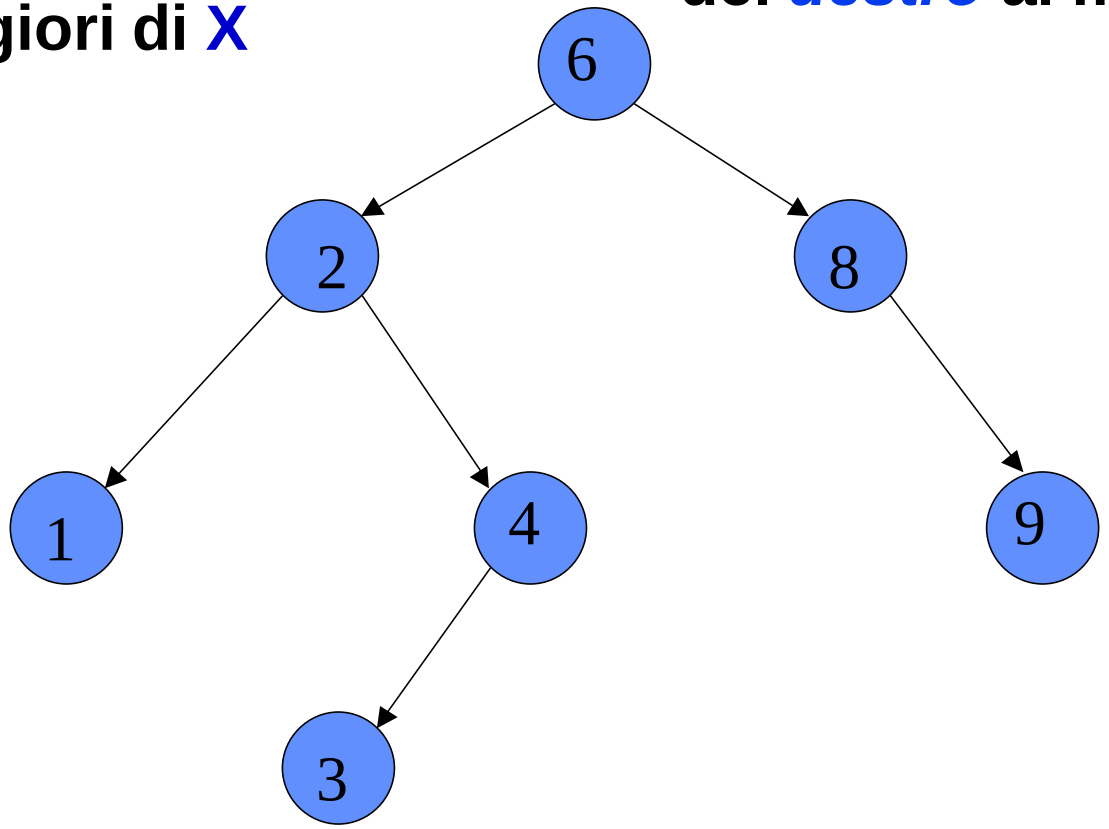
Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i nodi del sottoalbero sinistro sono minori del nodo X, e i nodi del sottoalbero destro sono maggiori di X

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.

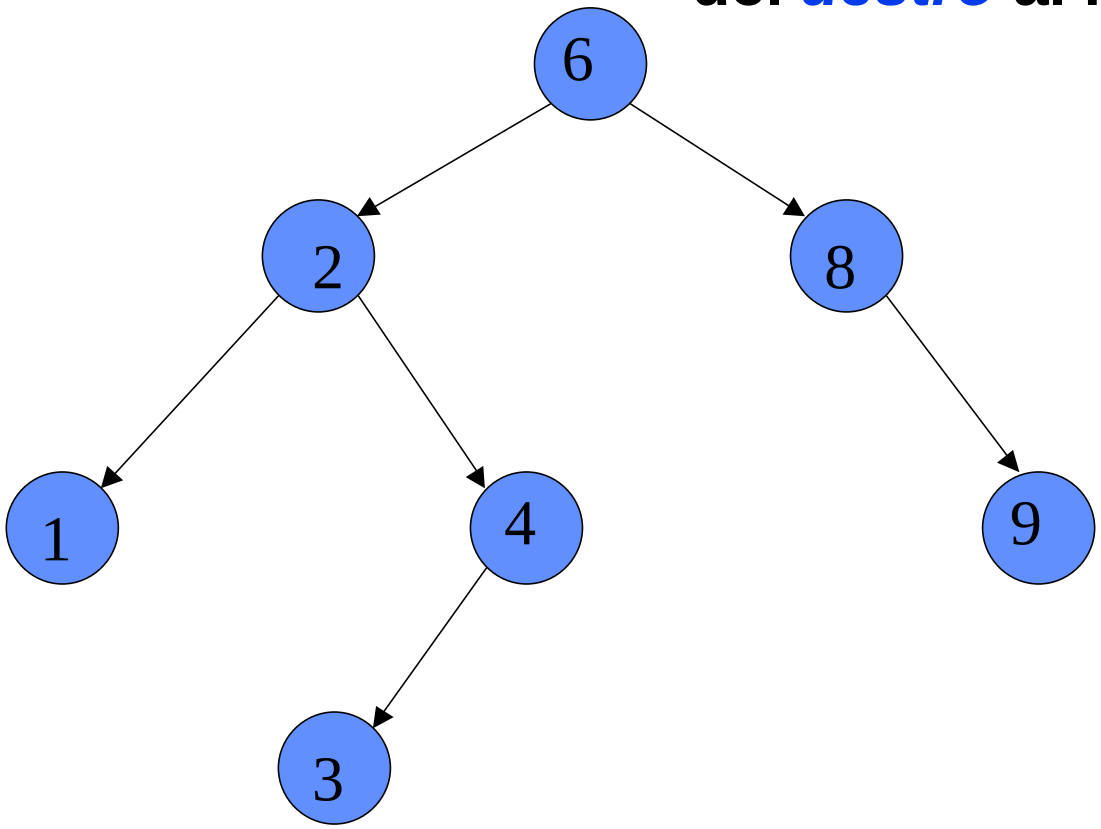


Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.

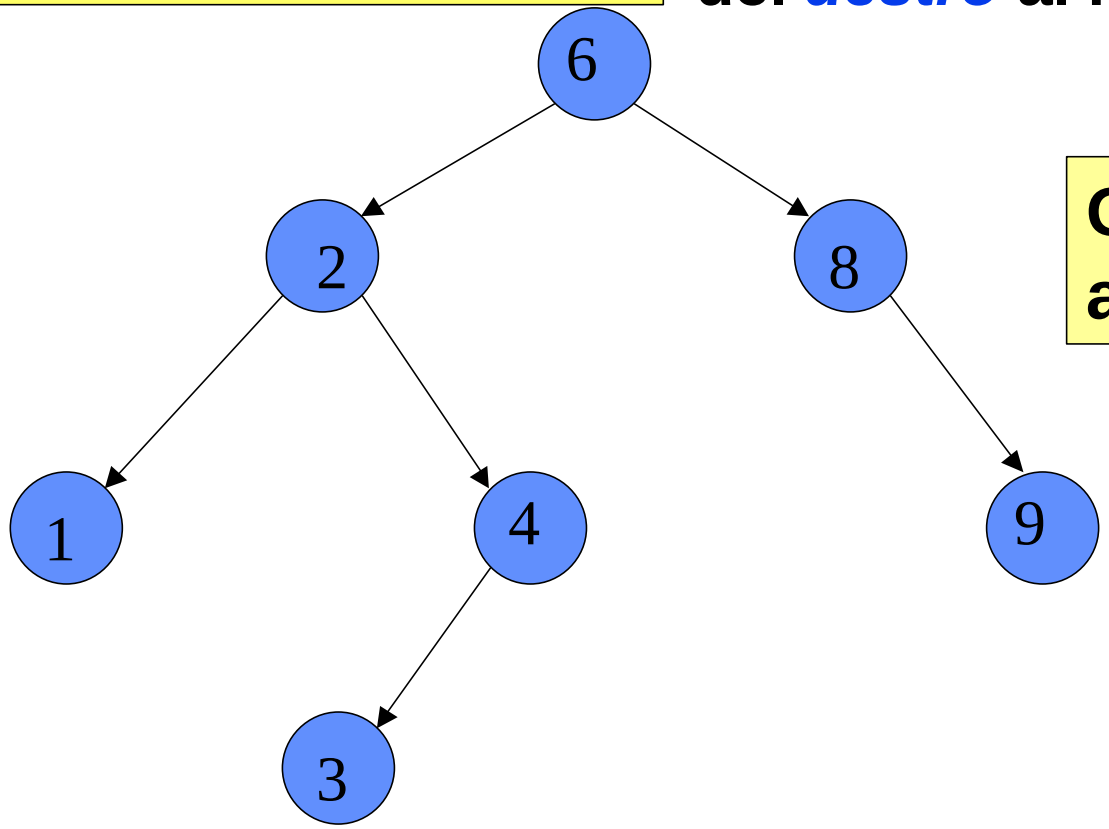


Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1
Altezza(Æ) = -1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.



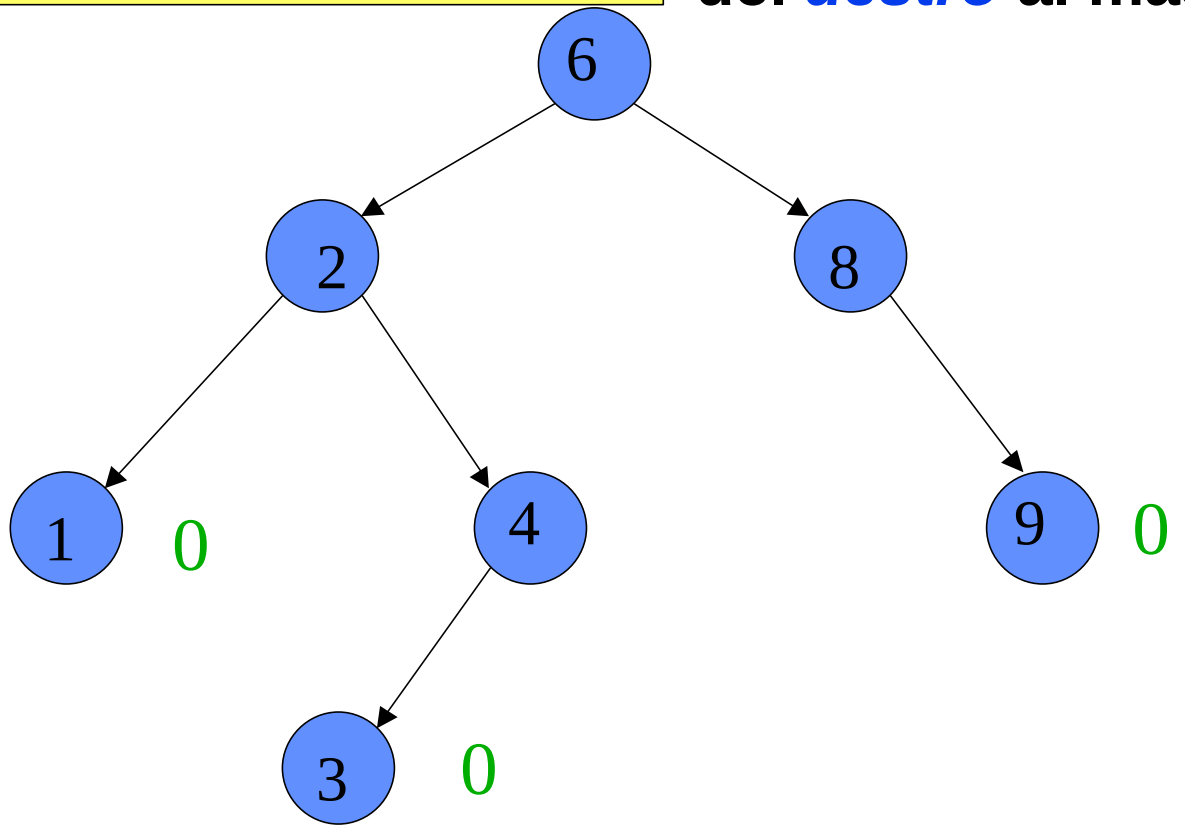
Questo è un albero AVL?

Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1
Altezza(Æ) = -1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.

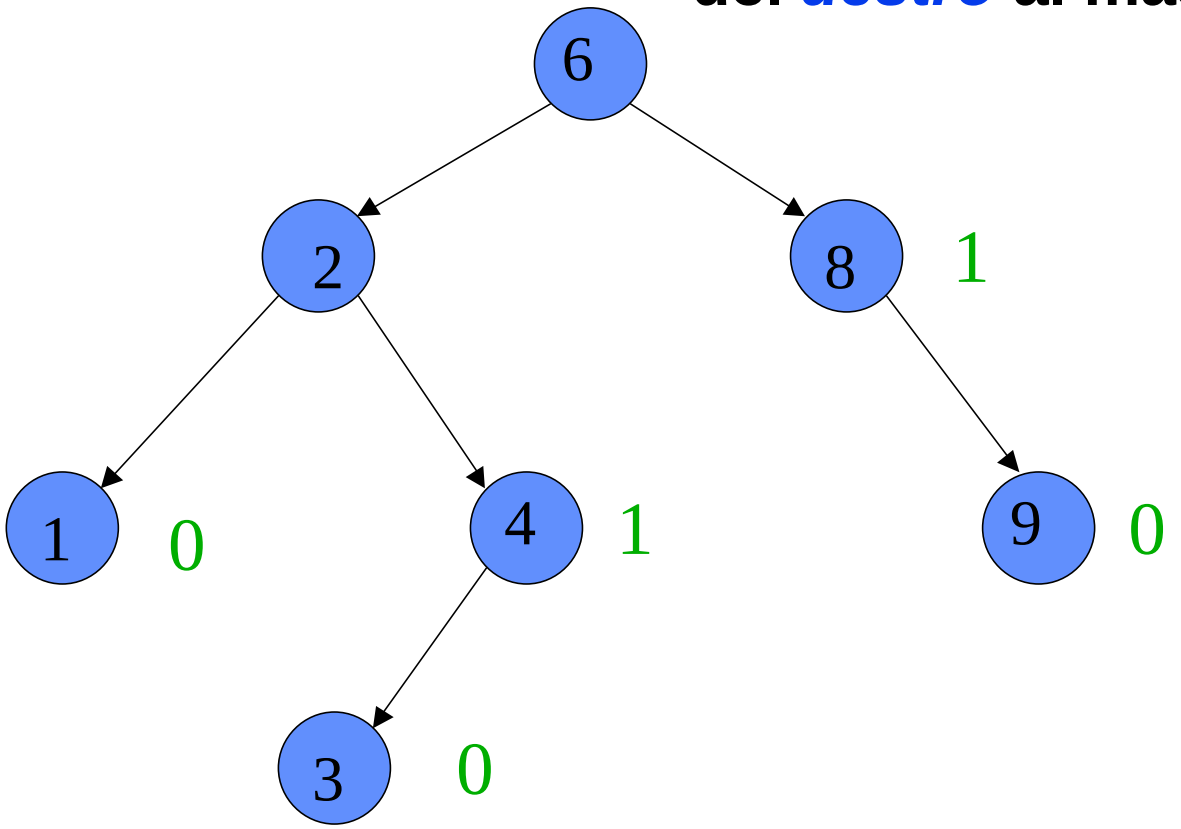


Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.

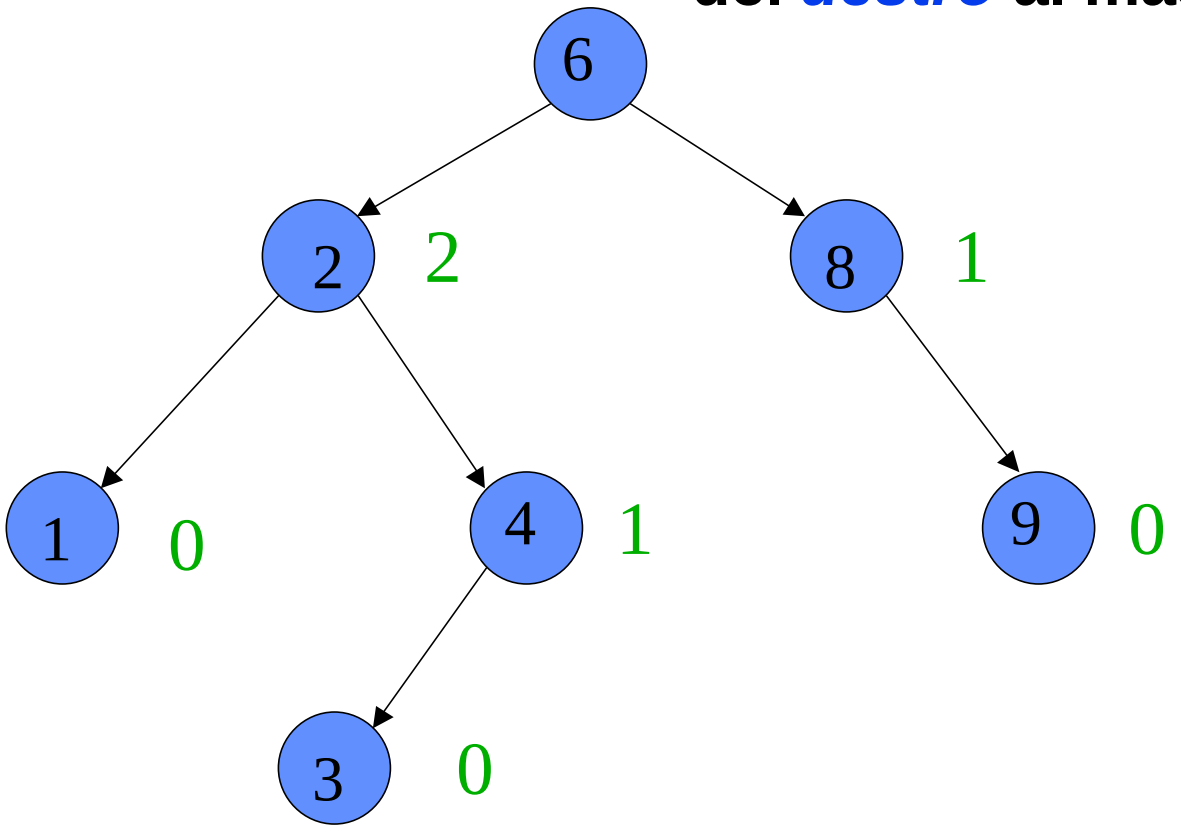


Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.

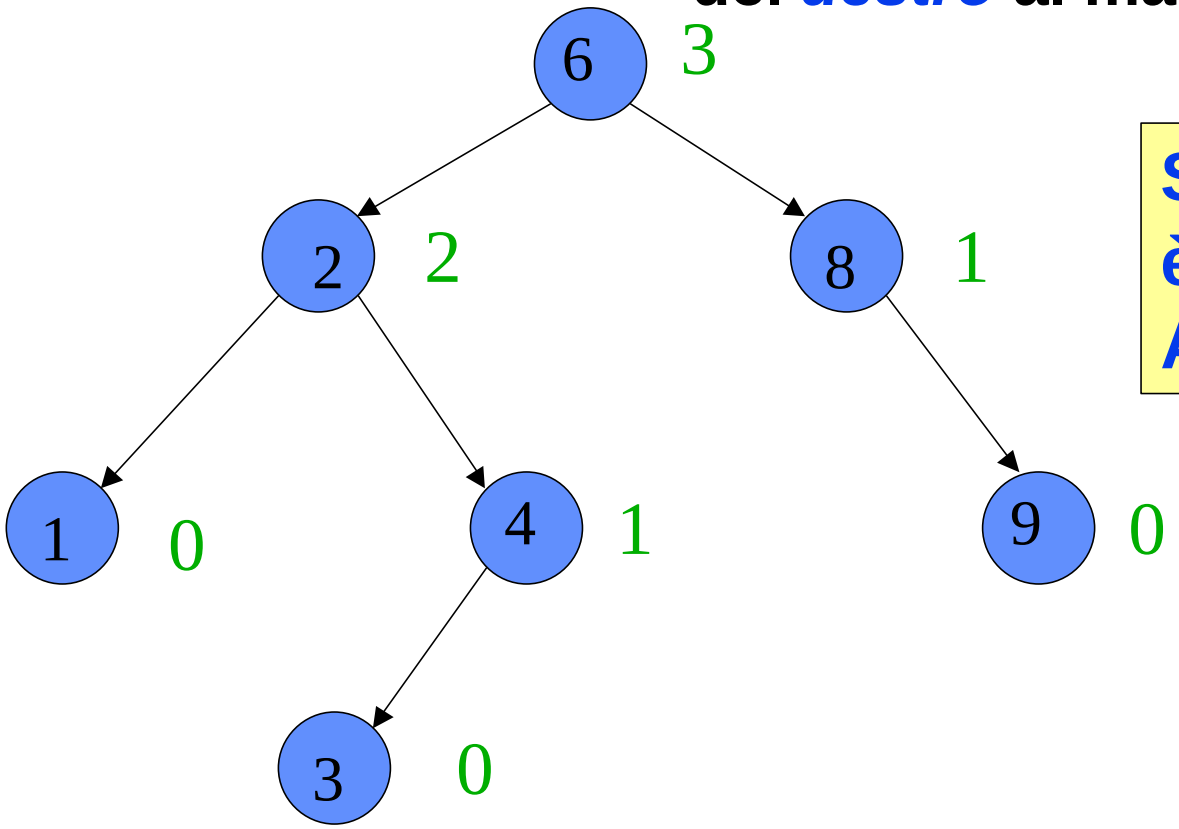


Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.



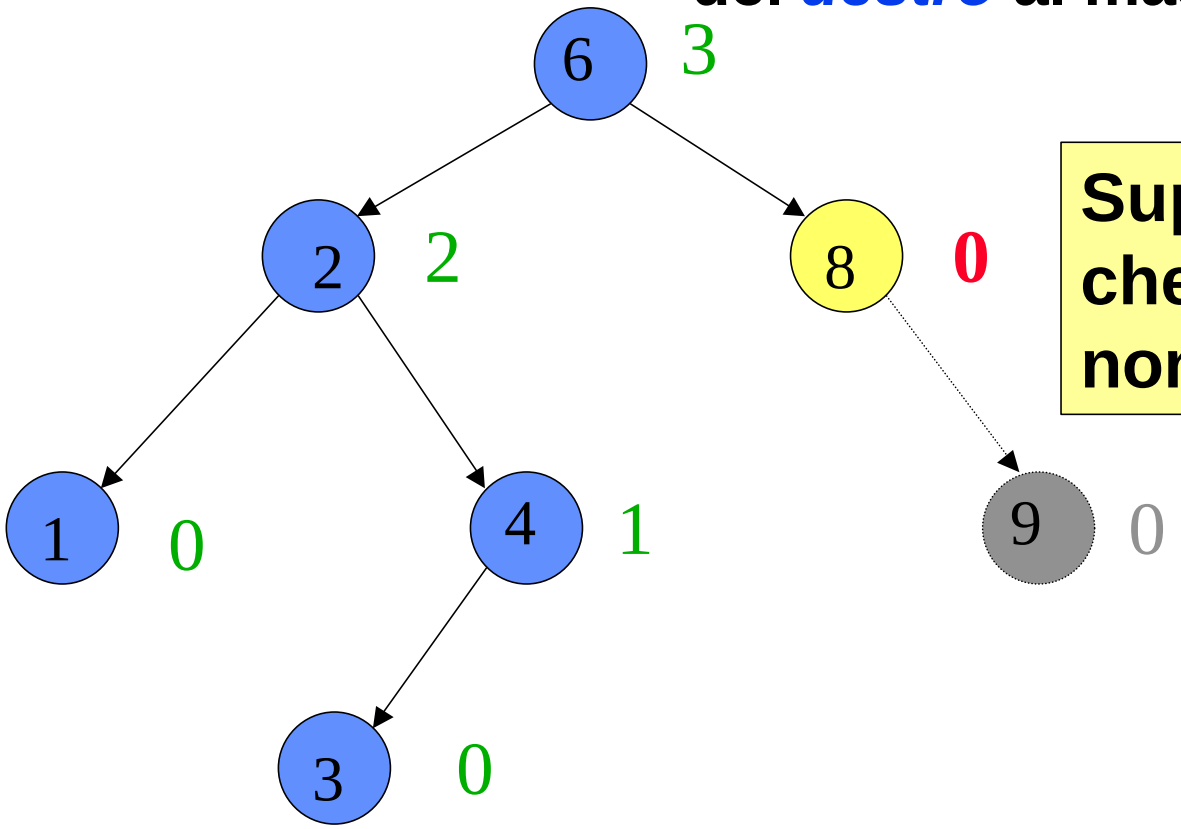
Sì! Questo è un albero AVL.

Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.



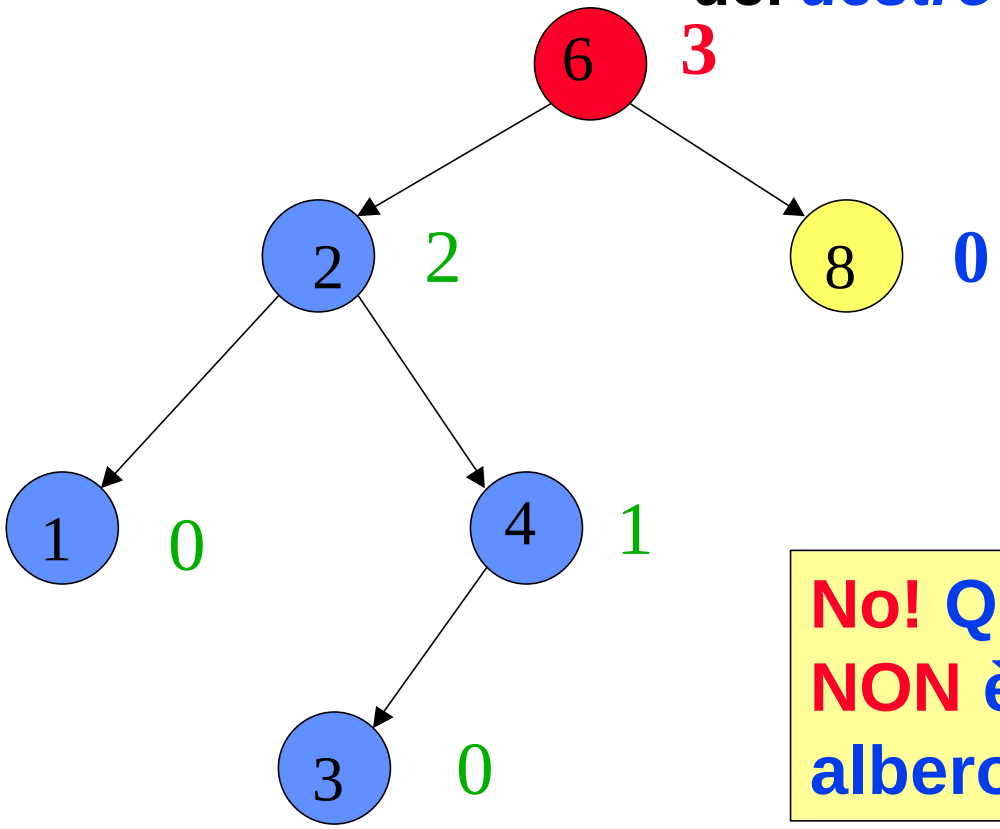
Supponiamo che il nodo 9 non ci sia.

Alberi AVL: alberi binari bilanciati

Altezza(*X*) =
max(Altezza(sinistro(*X*)),
Altezza(destro(*X*))) + 1

Properietà AVL

ABR dove per ogni nodo *X*, l'*altezza* del *suttoalbero sinistro differisce* da quella del *destro* al massimo di 1.



La *Proprietà* AVL *non* è *soddisfatta* dal *nodo* 6.

No! Questo NON è un albero AVL.

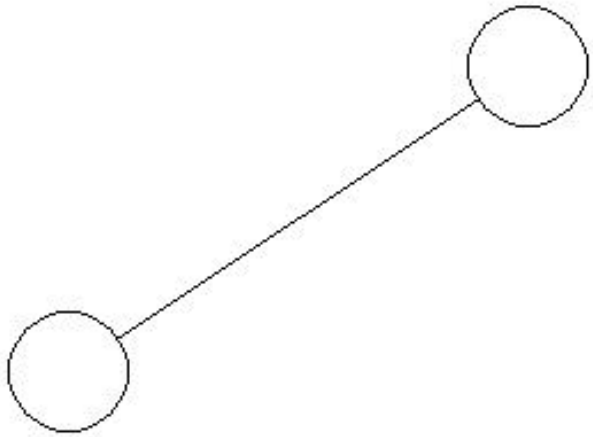
Alberi AVL: definizione

Definizione: **Un albero binario di ricerca è un *Albero AVL* se per ogni nodo *x*:**

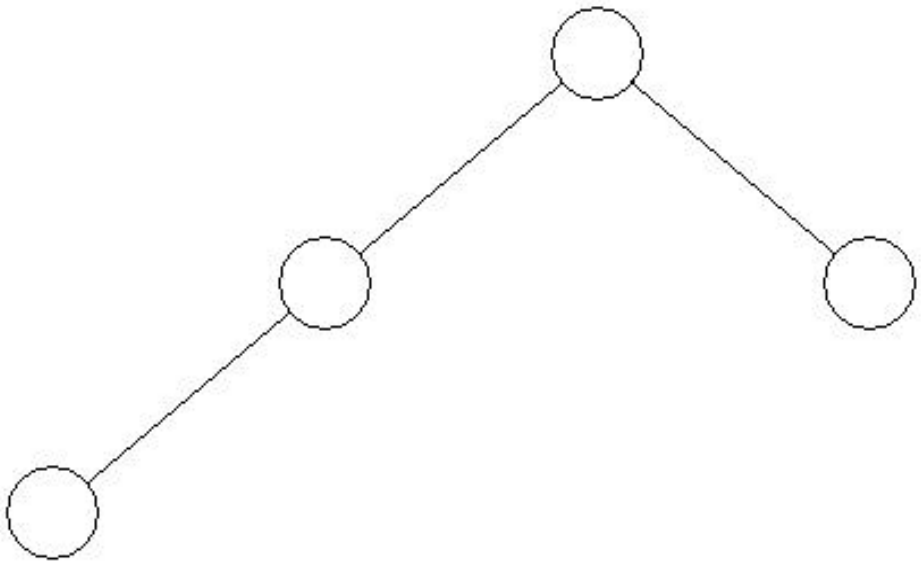
- **l'*altezza* del *sottoalbero sinistro di x* e quella del *sottoalbero destro di x* differiscono al più di uno, e**
- ***entrambi i sottoalberi* sinistro e destro di *x* sono *alberi AVL***

Esempi di alberi AVL minimi di diverse altezze (cioè con il numero minimo di nodi)

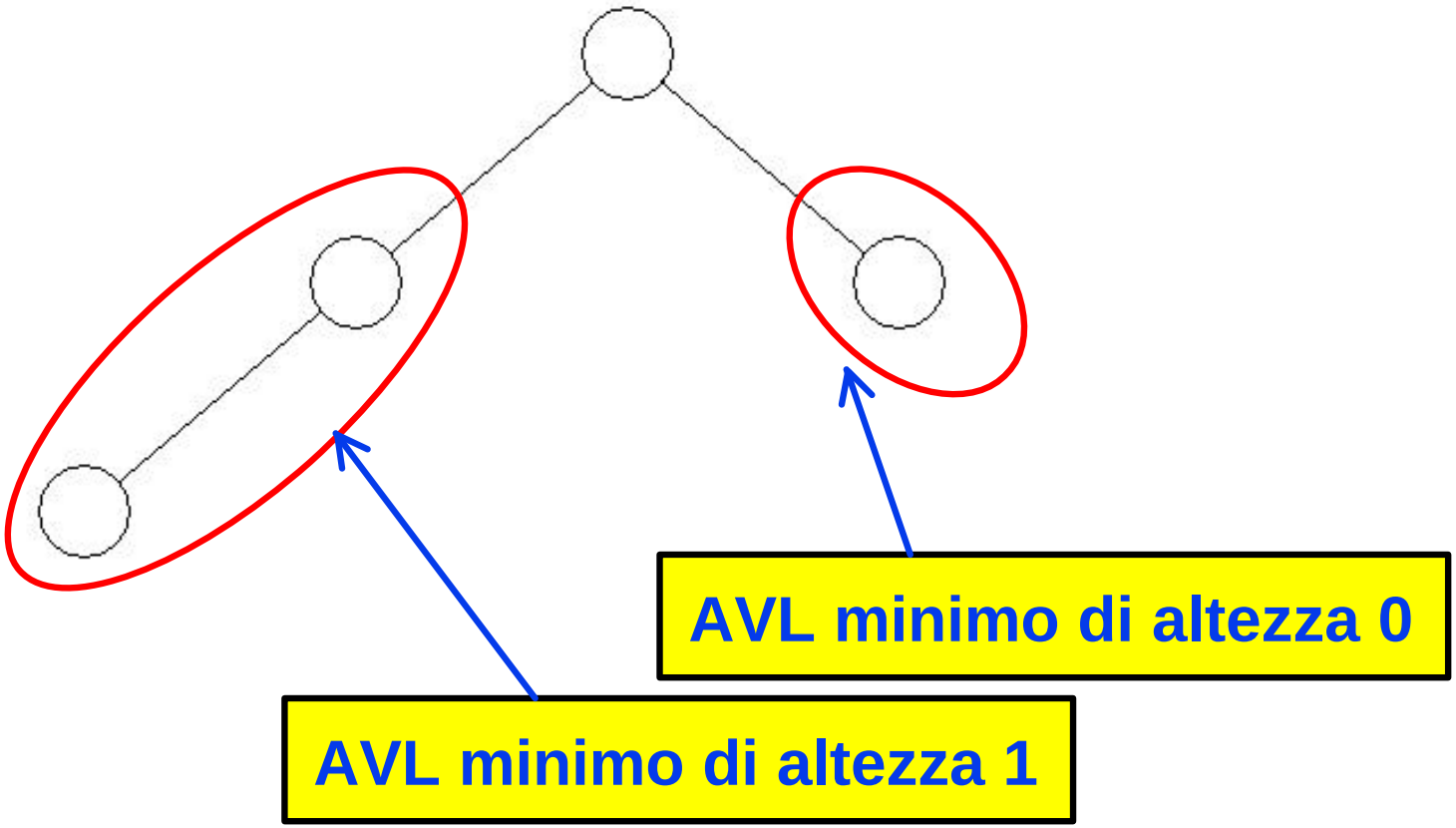
Albero AVL minimo di altezza 1



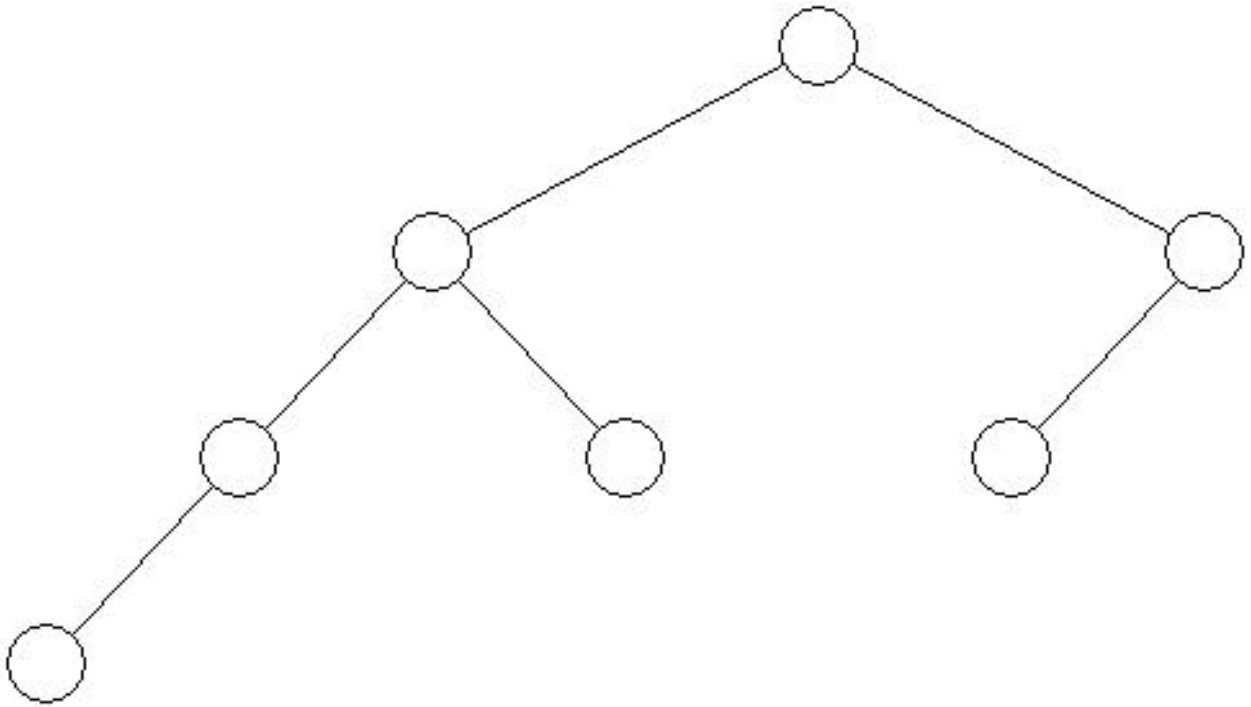
Albero AVL minimo di altezza 2



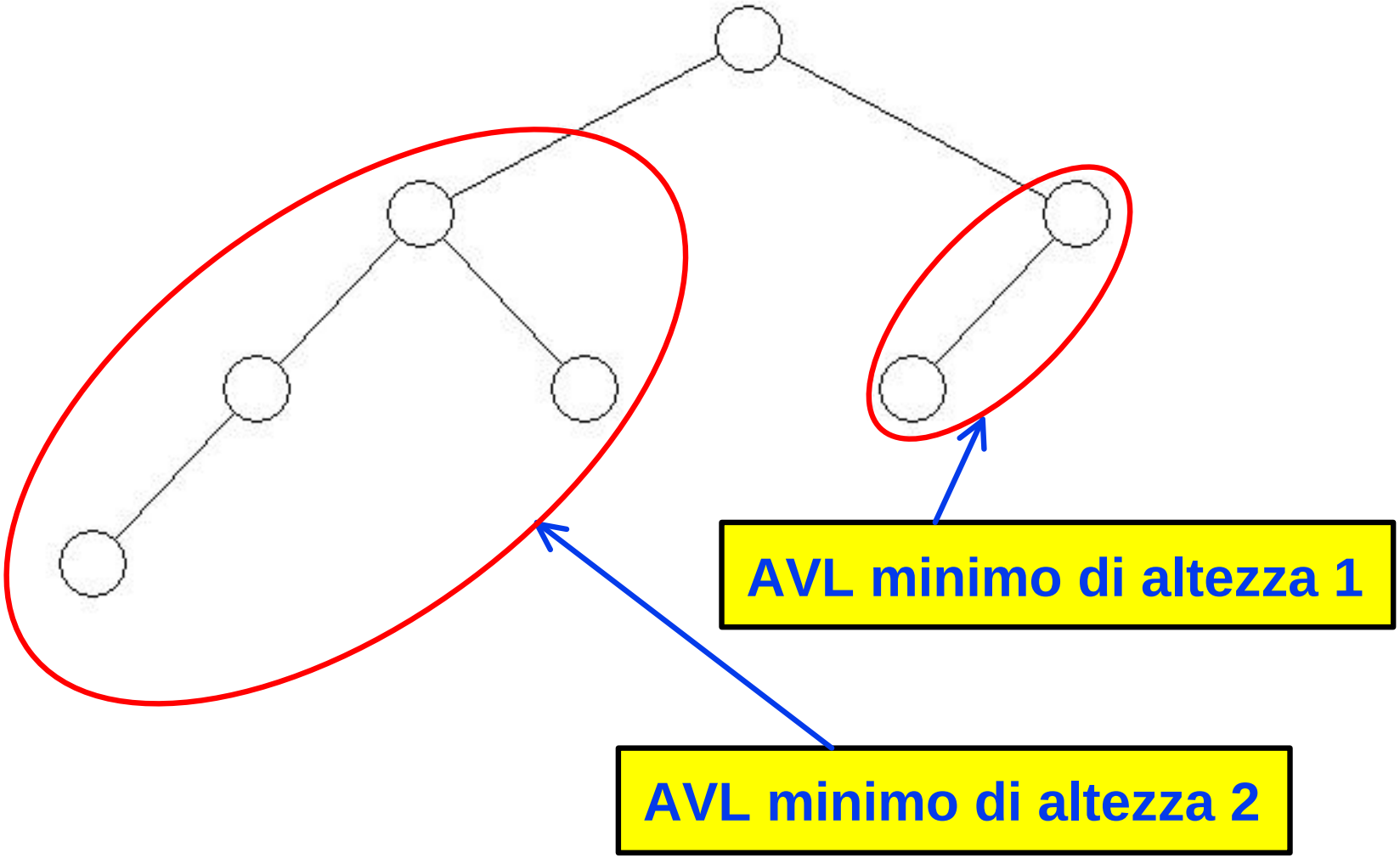
Albero AVL minimo di altezza 2



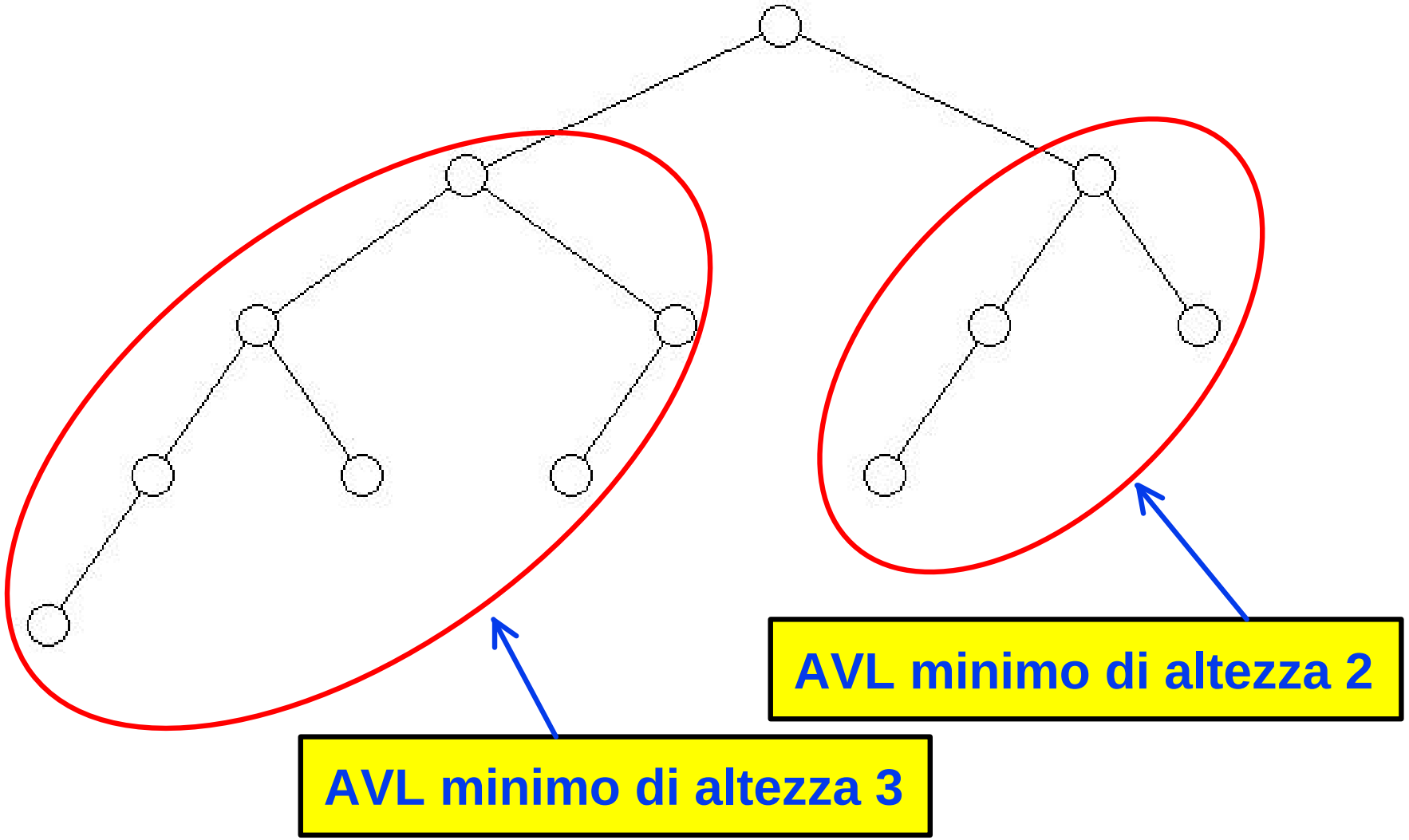
Albero AVL minimo di altezza 3



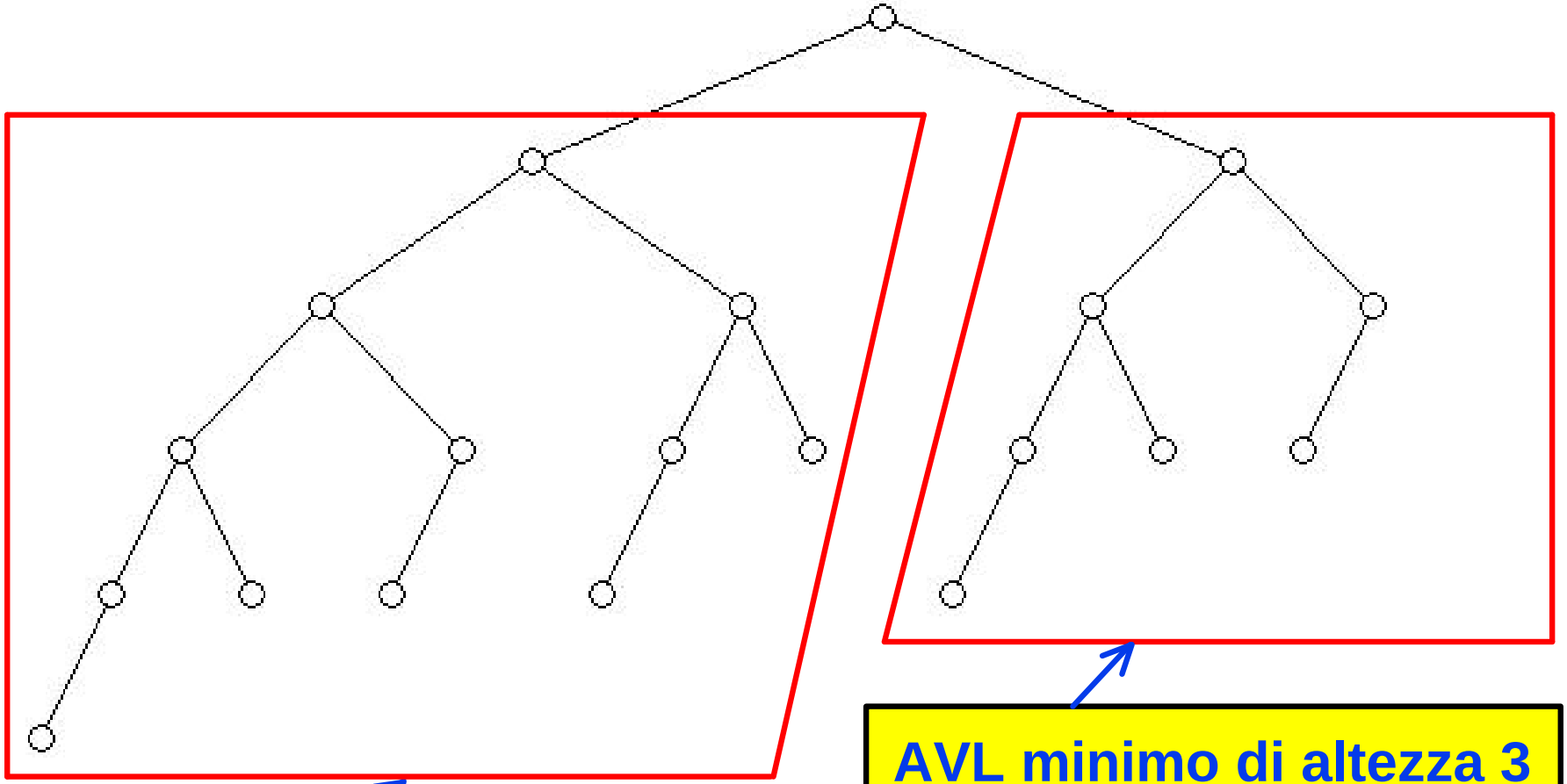
Albero AVL minimo di altezza 3



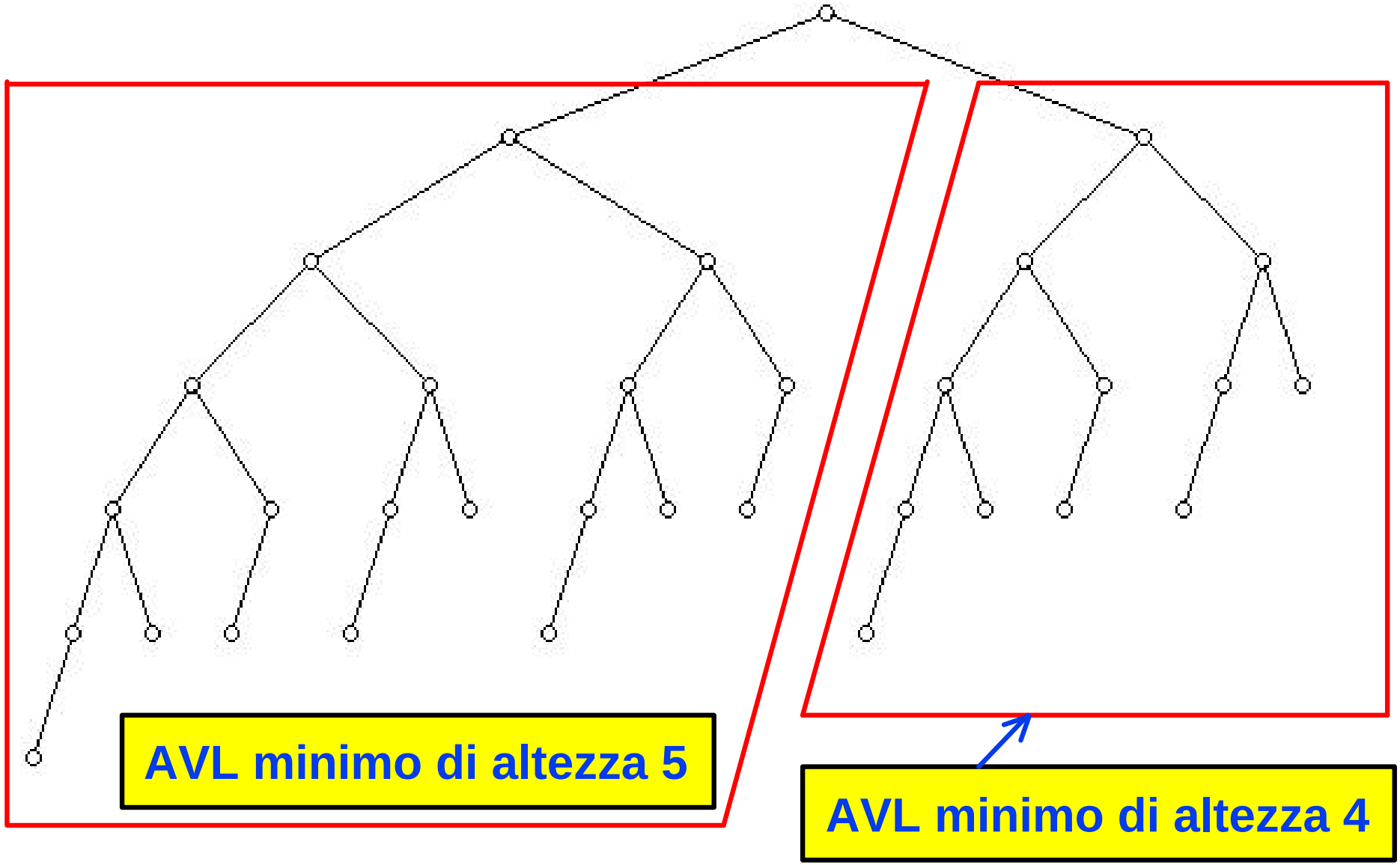
Albero AVL minimo di altezza 4



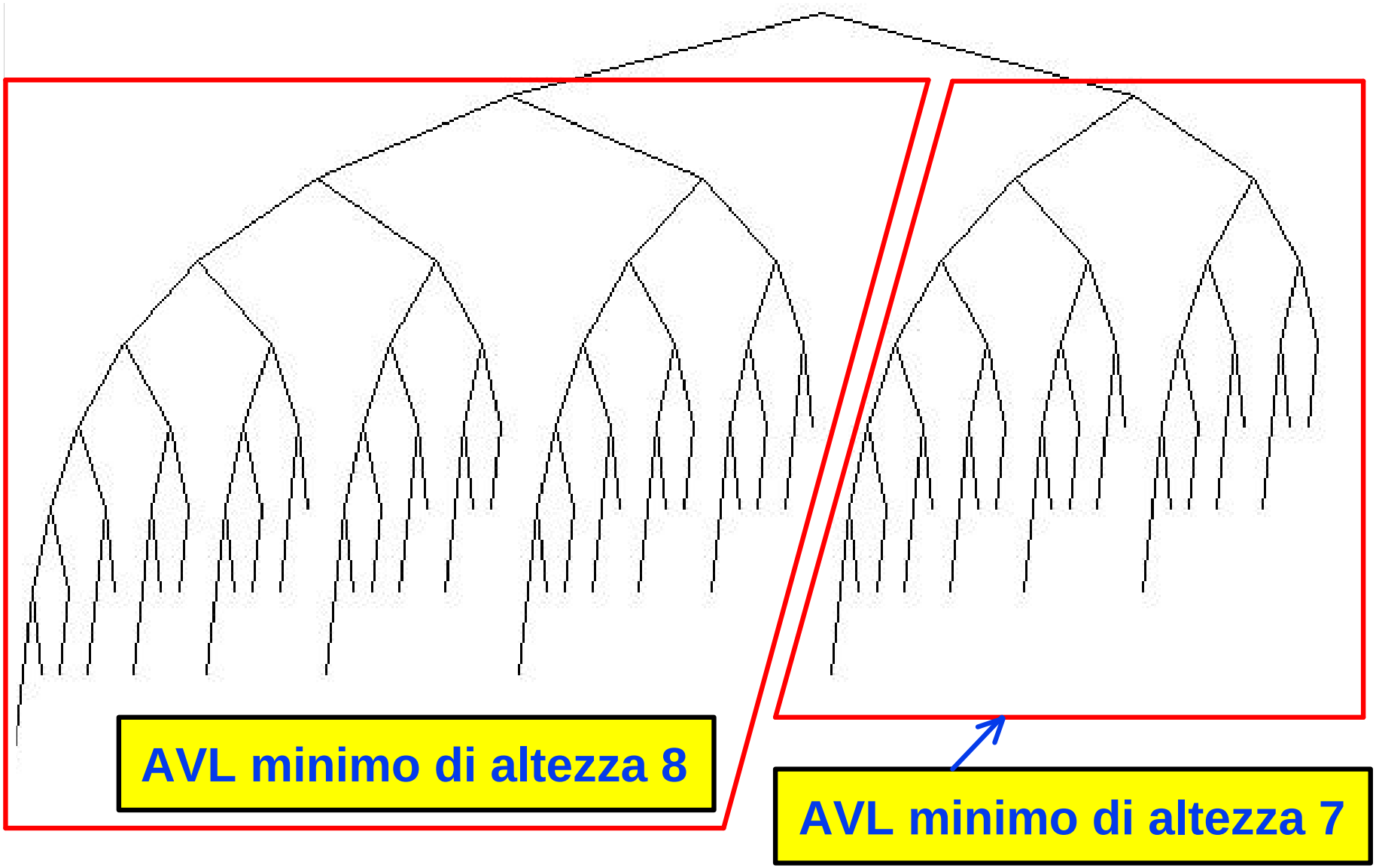
Albero AVL minimo di altezza 5



Albero AVL minimo di altezza 6



Albero AVL minimo di altezza 9



Alberi Red-Black (alberi rossi-neri)

Un *Albero Red-Black (rosso-nero)* è essenzialmente un albero binario di ricerca in cui:

1. **Le *chiavi* vengono mantenute *solo* nei *nodi interni* dell'albero**

2. **Le foglie sono costituite da *nodi NIL*, cioè nodi *sentinella* il cui contenuto è *irrilevante* e che evitano di trattare diversamente i puntatori ai nodi dai puntatori *NIL*.**
   - **In altre parole, al posto di un puntatore *NIL* si usa un puntatore ad un nodo *NIL*.**
   - **Quando un nodo ha come figli nodi *NIL*, quiel nodo sarebbe una foglia nell'albero binario di ricerca corrispondente.**

Altezza di un albero AVL

Dato un qualsiasi *albero AVL* con *n* nodi, si può dimostrare che la sua *altezza* è determinata dalla seguente formula:

$$h \cong 1.44 \log(n+2) - 0.328$$

Alberi Red-Black (alberi rossi-neri)

Un *Albero Red-Black (rosso-nero)* deve soddisfare le seguenti proprietà (vincoli):

1. ***Ogni nodo* è colorato o di *rosso* o di *nero*;**
2. **Per convezione, i *nodi NIL* si considerano *nodi neri*;**
3. **Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;**
4. **Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* (figlio di una foglia) ha lo *stesso numero* di *nodi neri*;**

Alberi Red-Black (alberi rossi-neri)

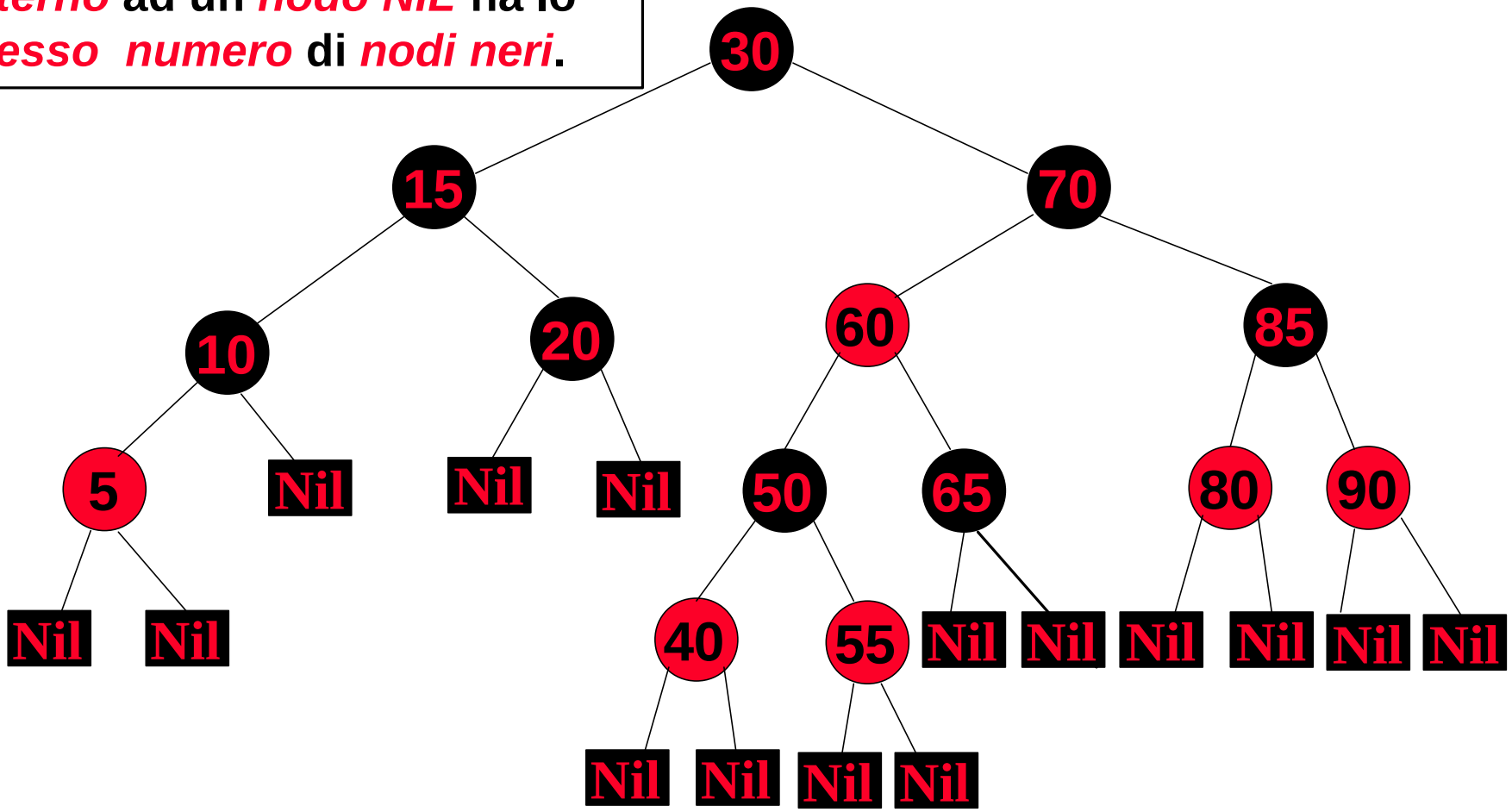
Un *Albero Red-Black (rosso-nero)* deve soddisfare le seguenti proprietà (vincoli):

1. ***Ogni nodo* è colorato o di *rosso* o di *nero*;**
2. **Per convezione, i *nodi NIL* si considerano *nodi neri*;**
3. **Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;**
4. **Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* (figlio di una foglia) ha lo *stesso numero* di *nodi neri*;**

Considereremo solo *alberi Red-Black* in cui la *radice è nera*.

Alberi Red-Black: esempio I

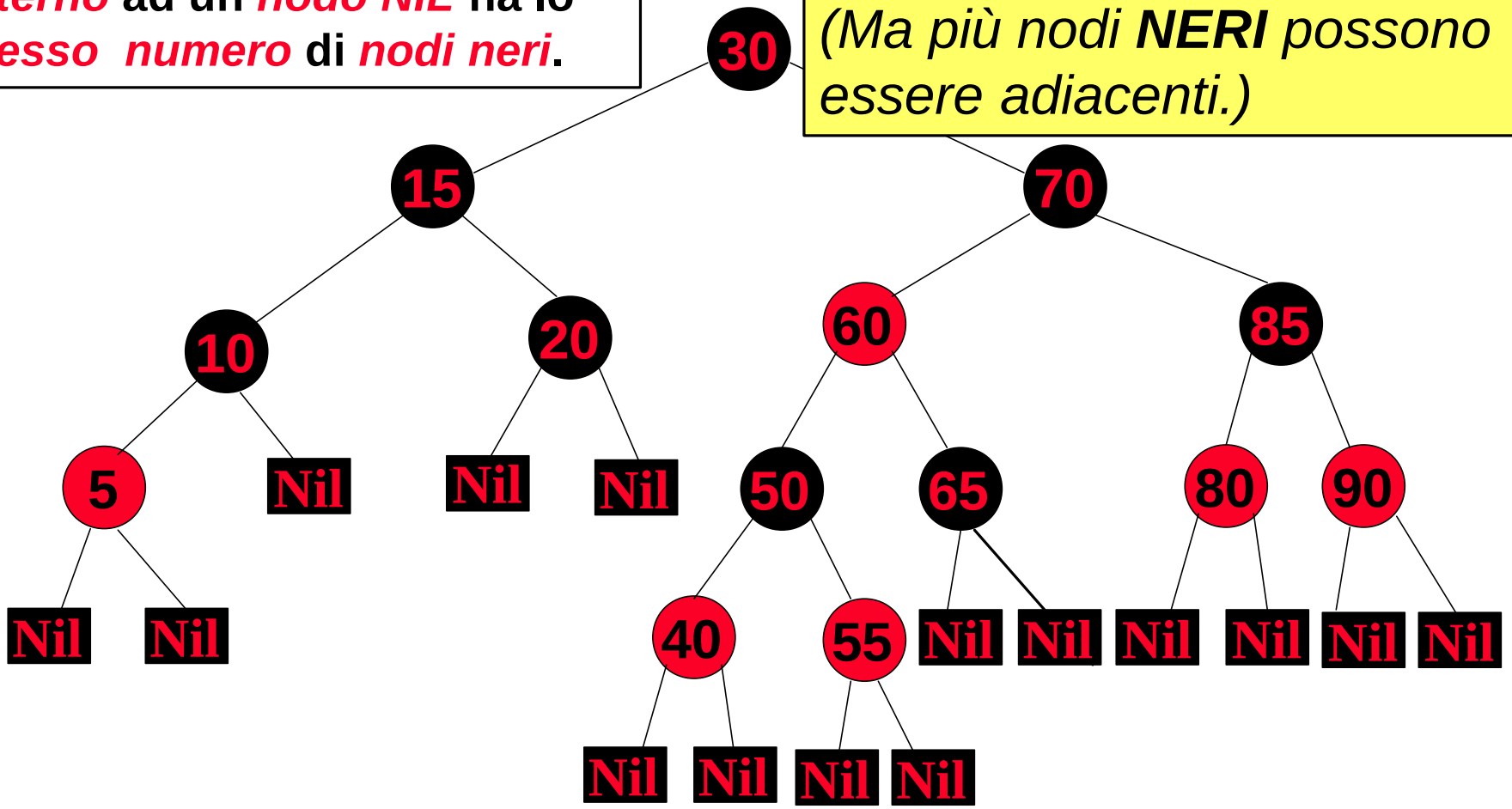
3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.



Alberi Red-Black: esempio I

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

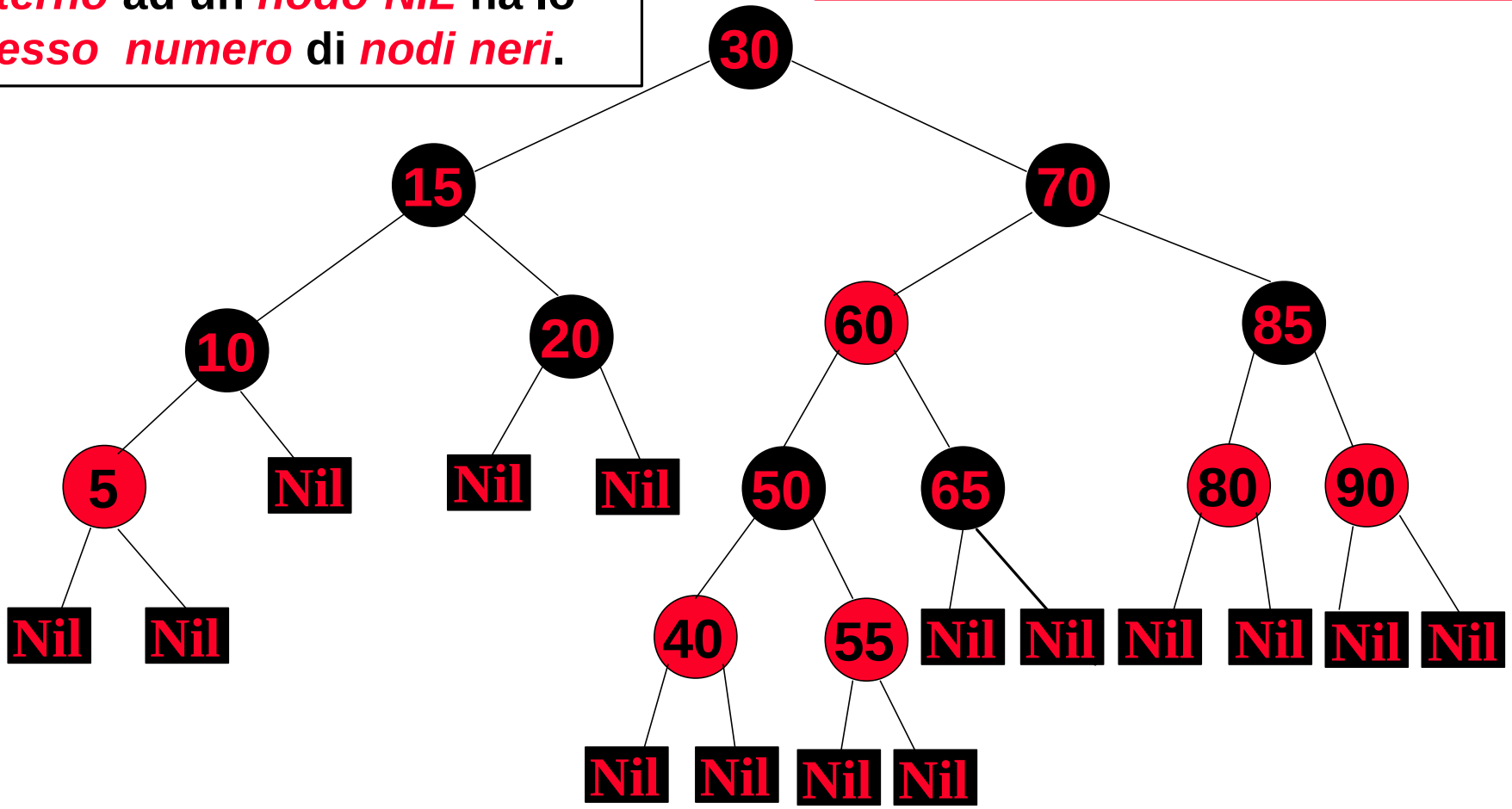
***Vincolo 3* impone che *non* possano esserci *due nodi ROSSI adiacenti*.**
*(Ma più nodi **NERI** possono essere adiacenti.)*



Alberi Red-Black: esempio I

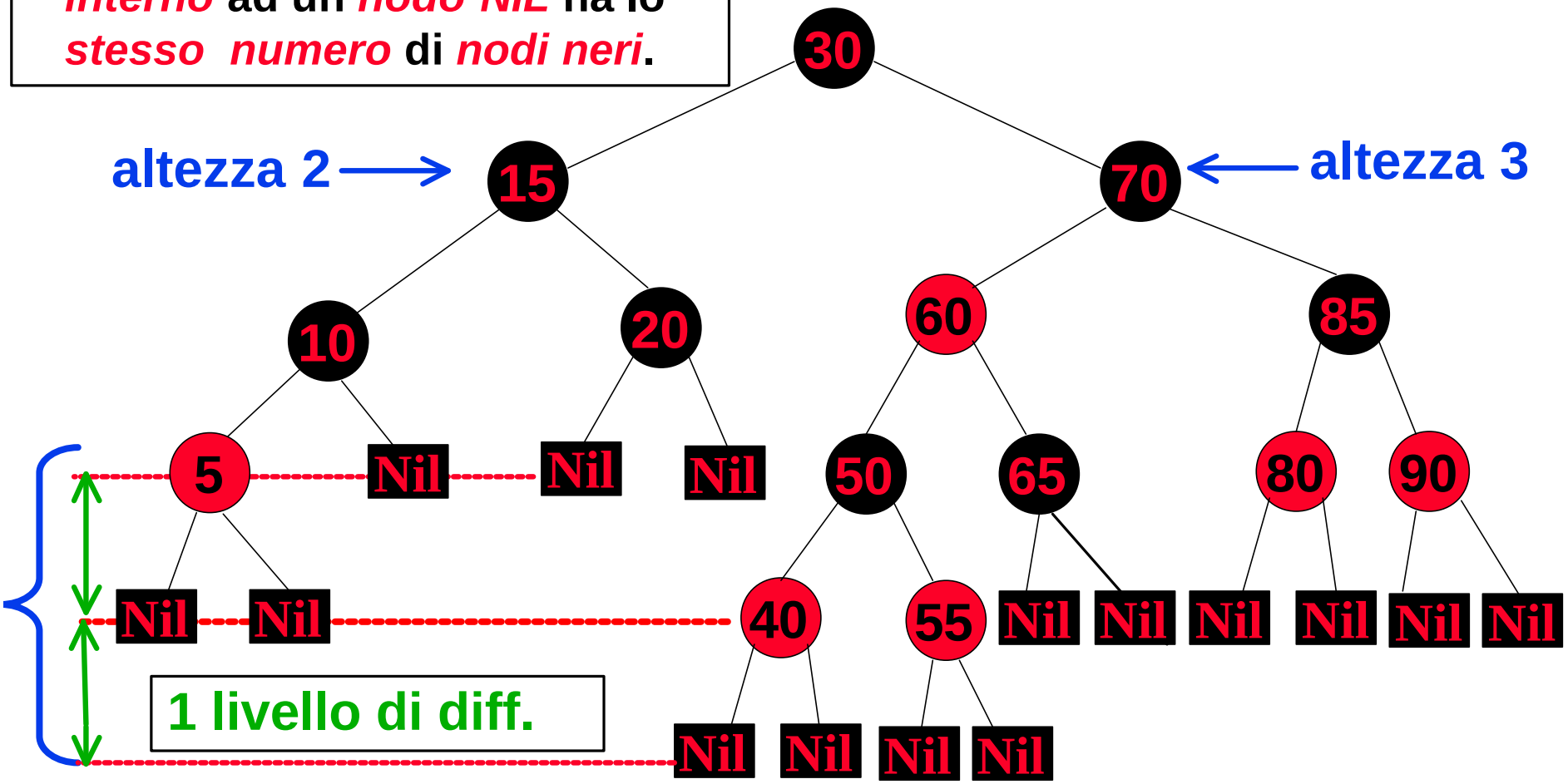
3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Ci sono *3 nodi neri* lungo *ogni percorso* dalla radice ad un *nodo NIL*



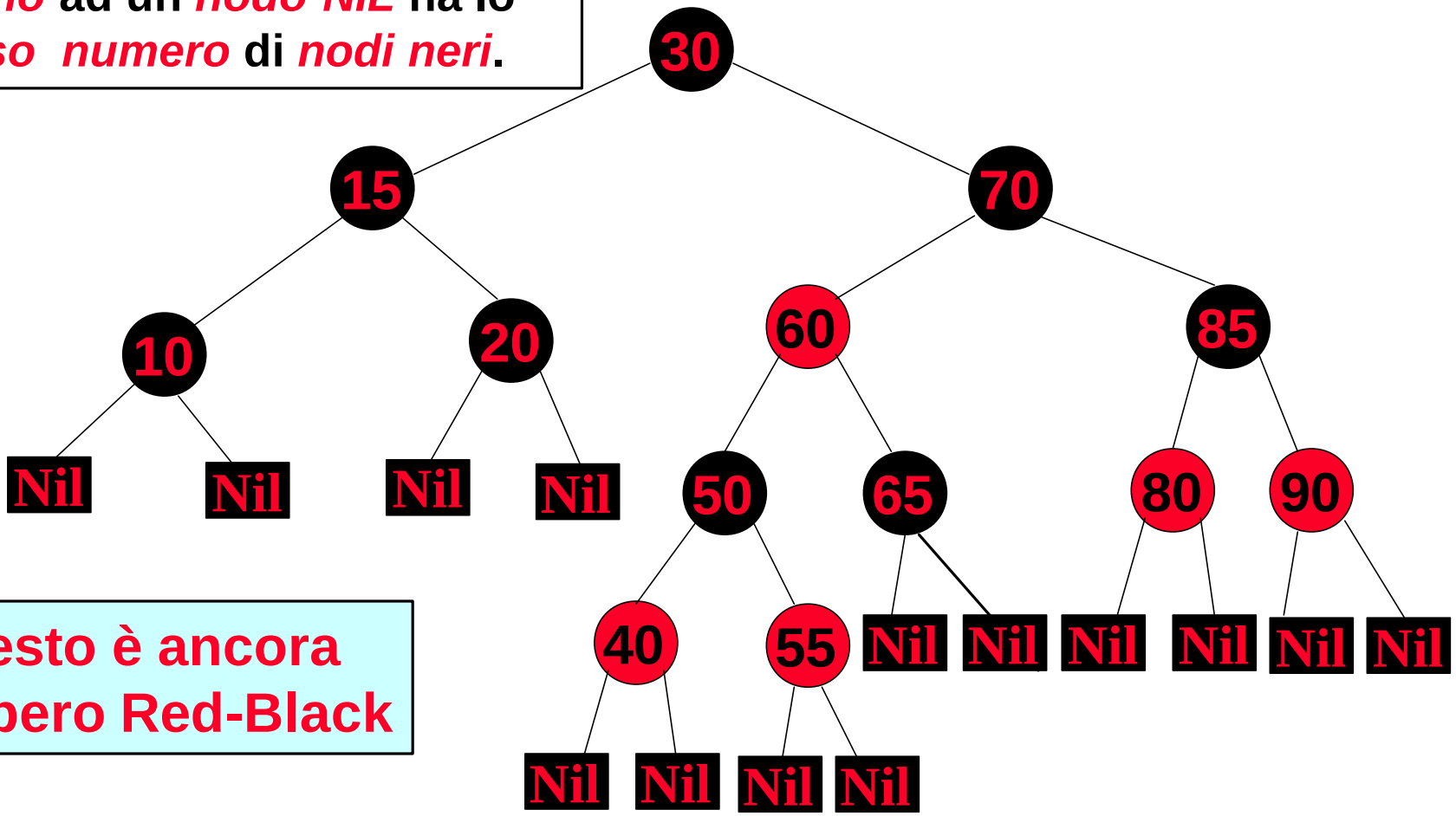
Alberi Red-Black: esempio I

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.



Alberi Red-Black: esempio II

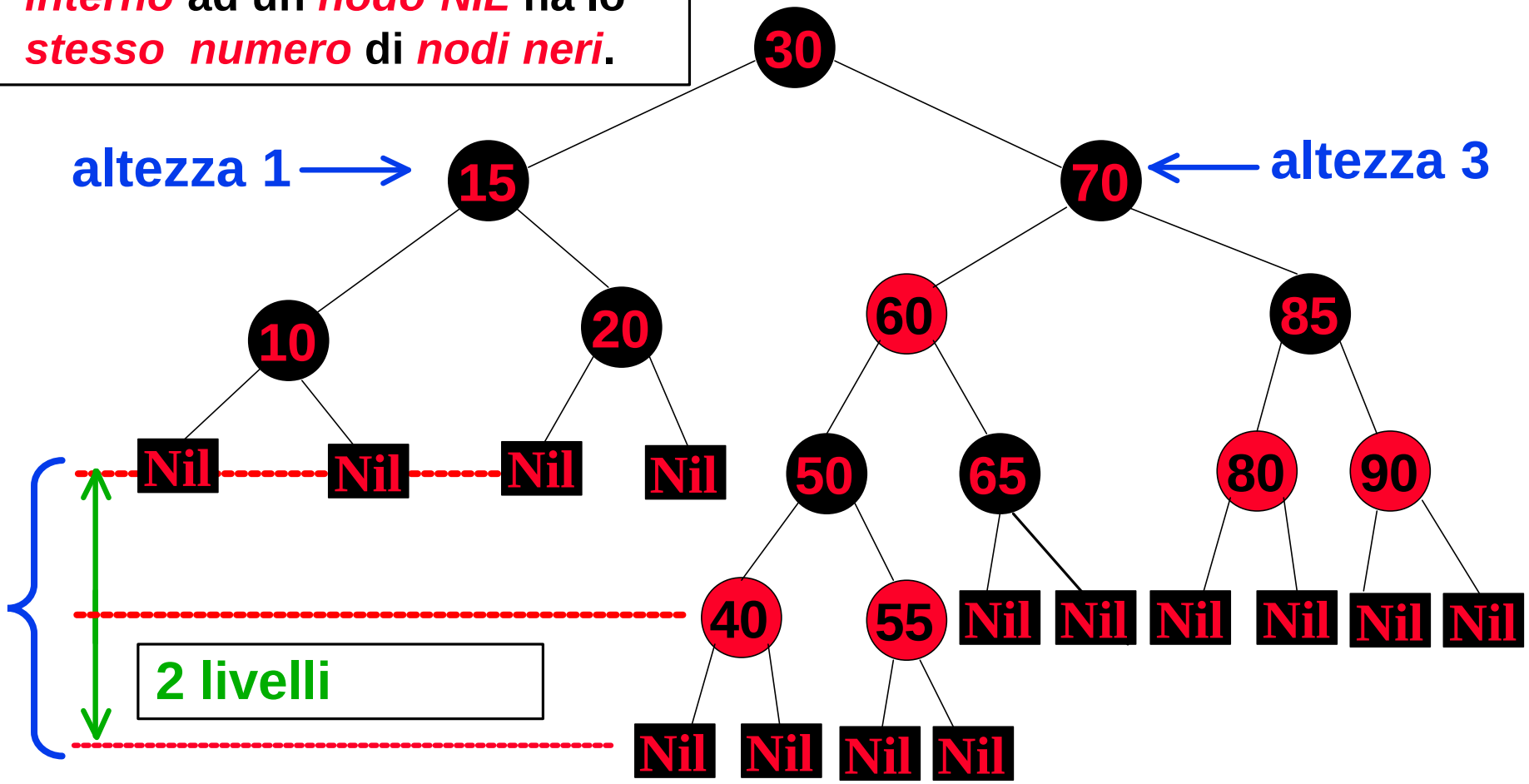
3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.



Questo è ancora un albero Red-Black

Alberi Red-Black: esempio II

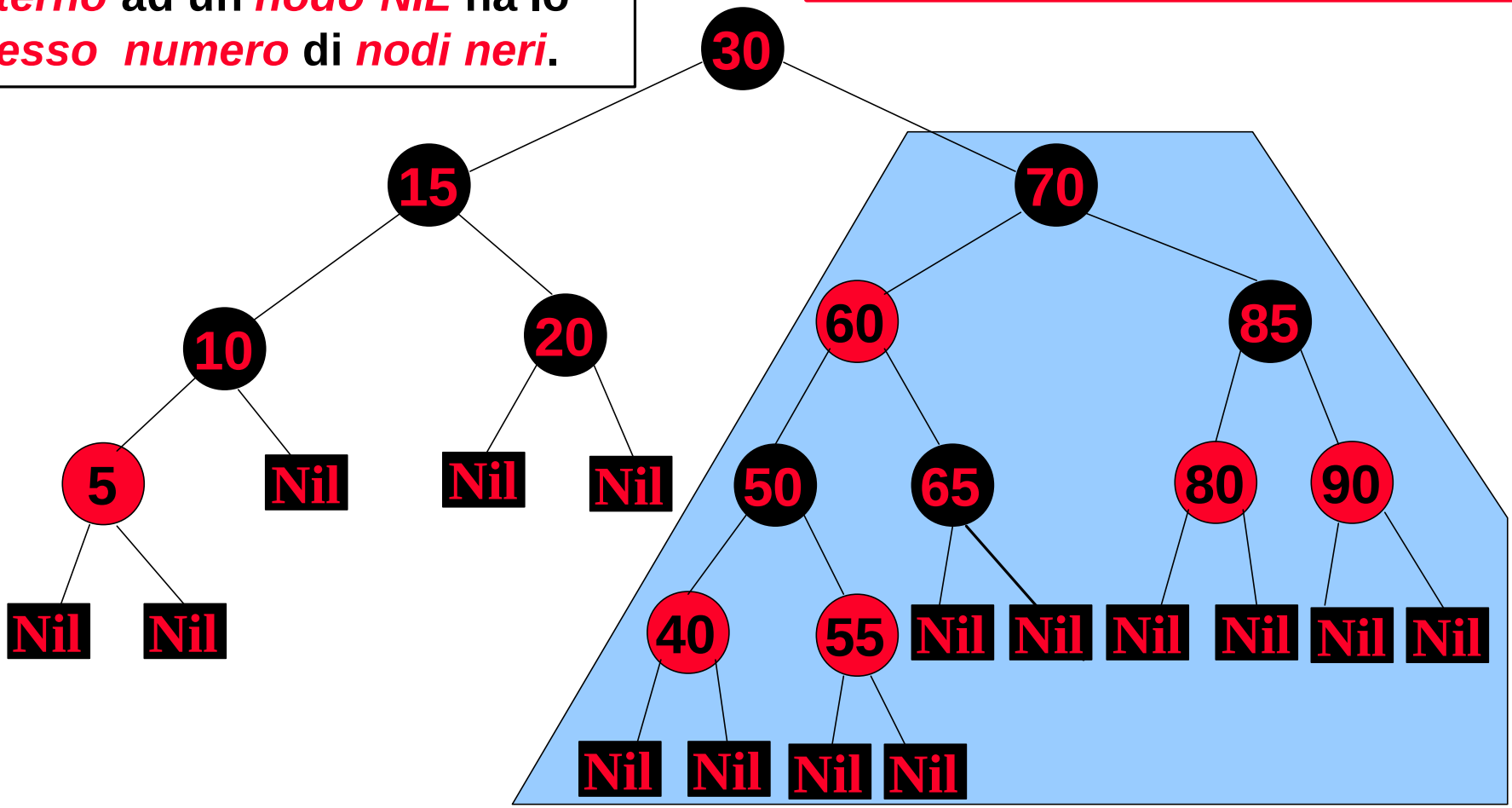
3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.



Alberi Red-Black: esempio I

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

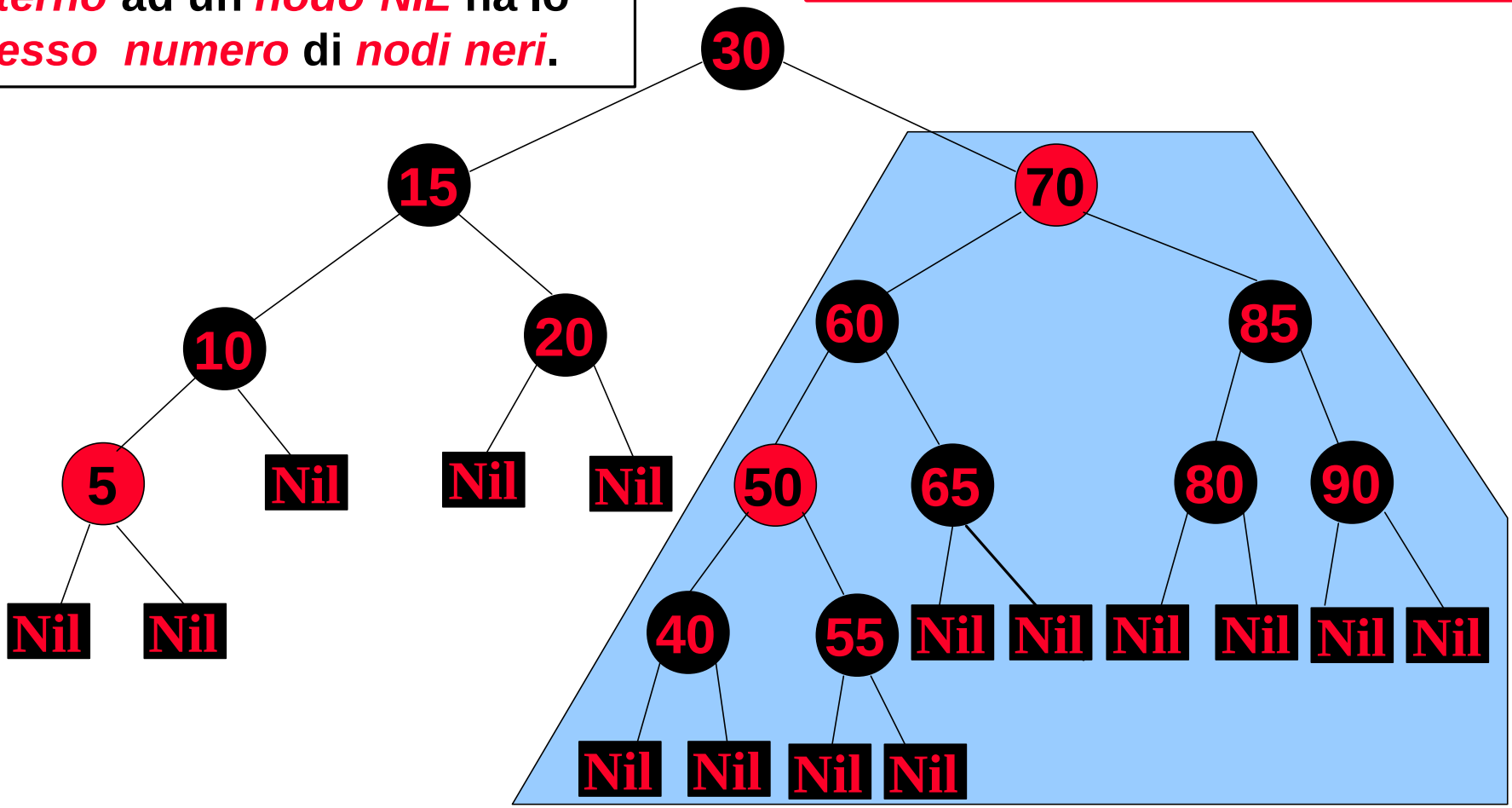
Ci sono *3 nodi neri* lungo *ogni percorso* dalla radice ad un *nodo NIL*



Alberi Red-Black: esempio III

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

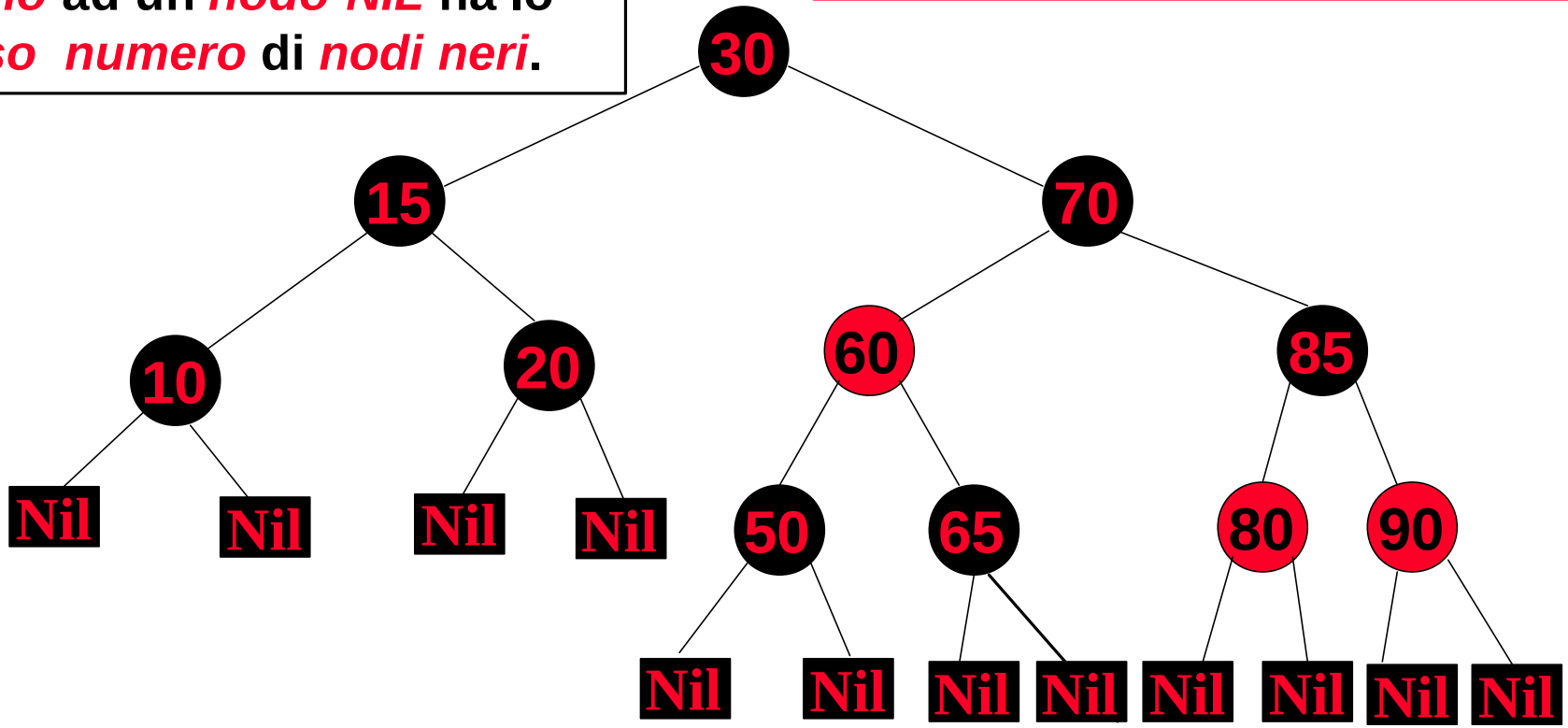
Ci sono *3 nodi neri* lungo *ogni percorso* dalla radice ad un *nodo NIL*



Alberi Red-Black: esempio IV

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

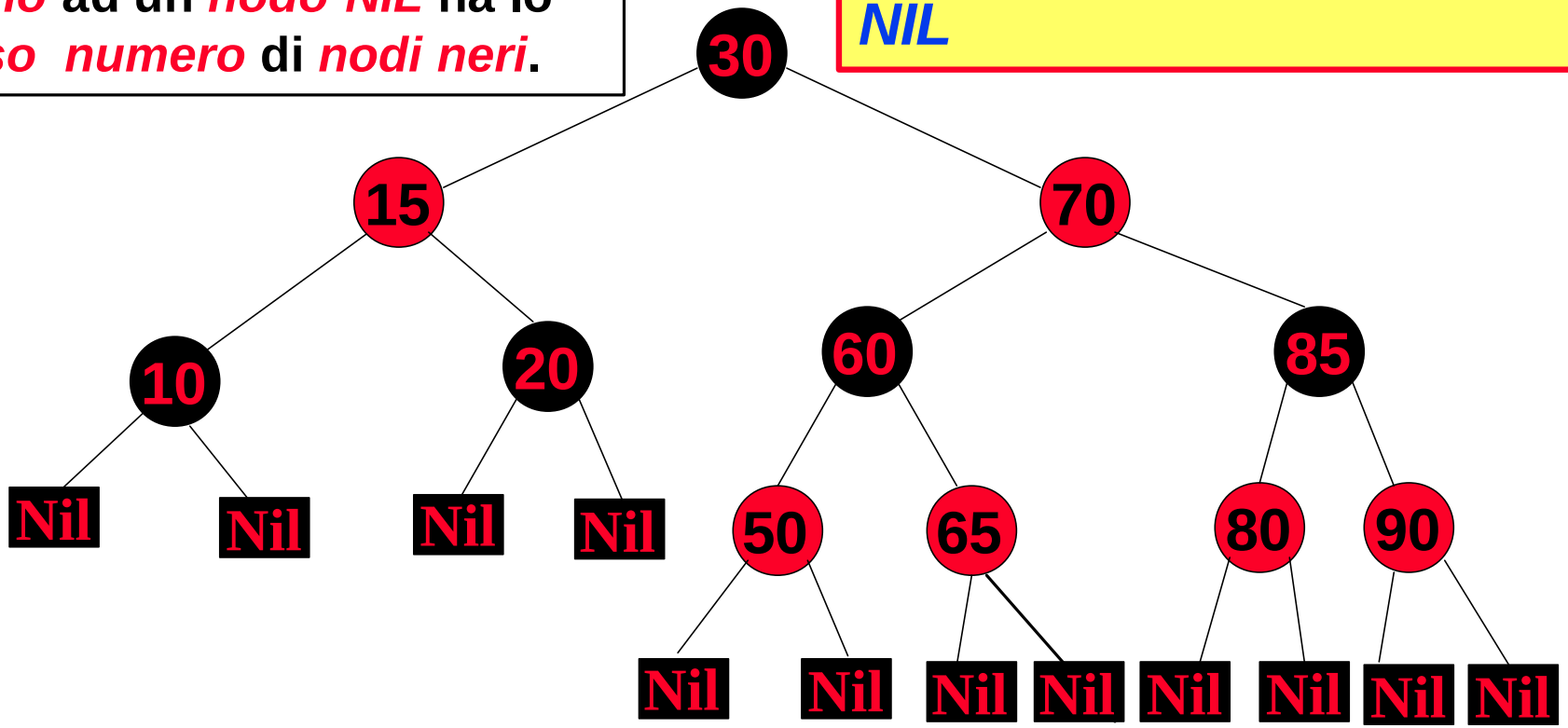
Albero RB con *3 nodi neri* lungo *ogni percorso* dalla radice ad un *nodo NIL*



Alberi Red-Black: esempio V

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

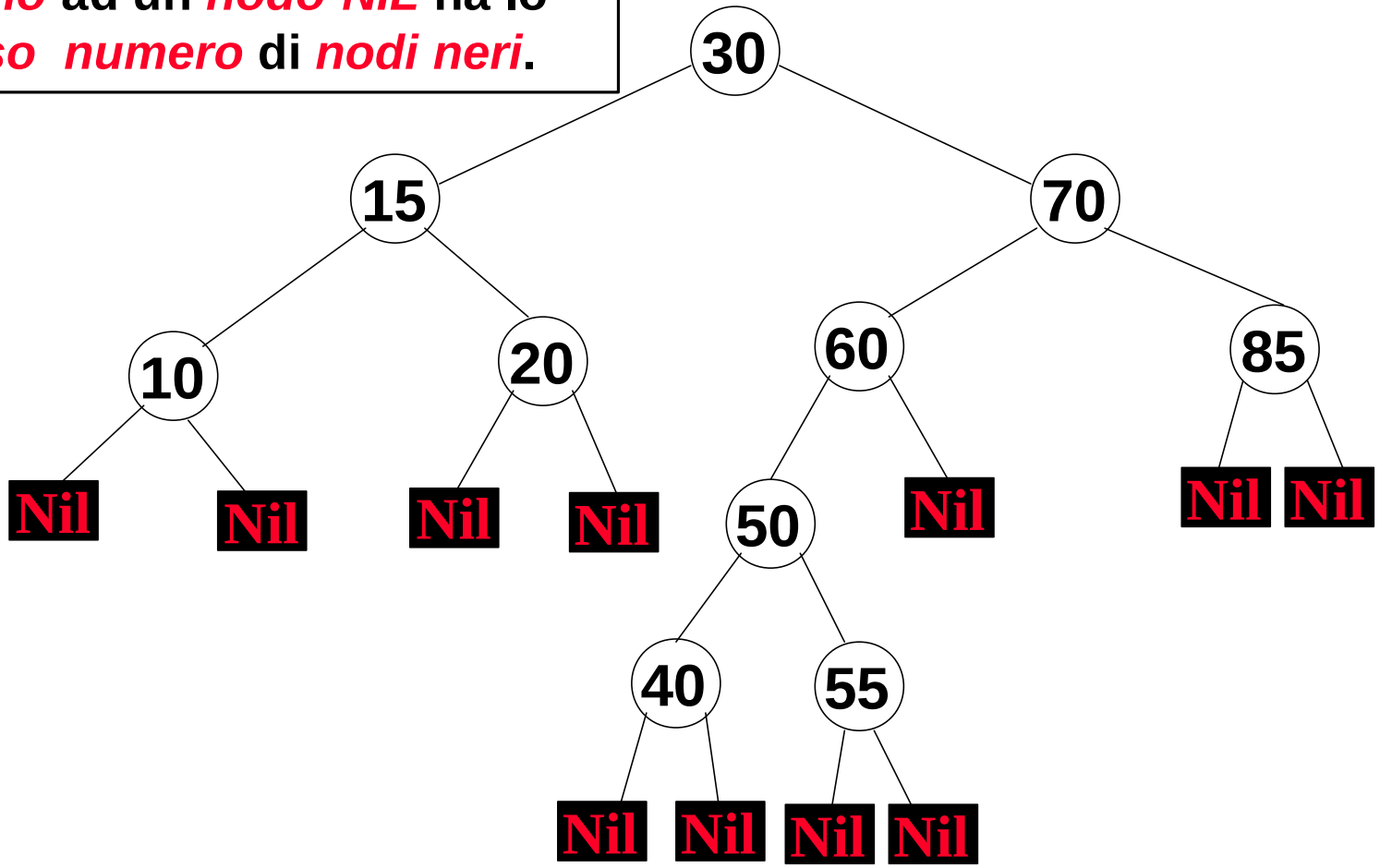
Stesso albero con *2 nodi neri* lungo *ogni percorso* dalla radice ad un *nodo NIL*



Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

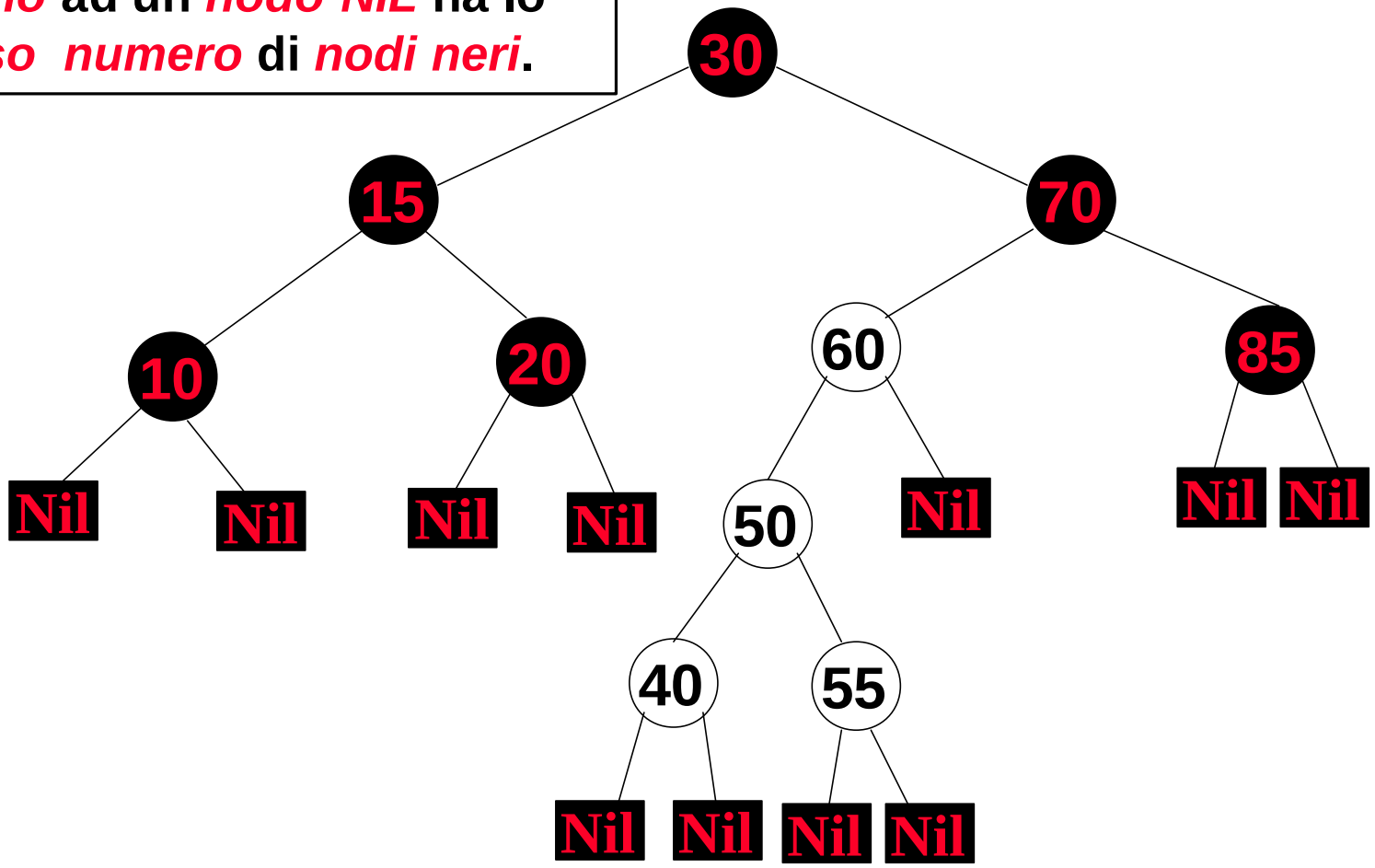
Questo albero può essere un albero Red-Black?



Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

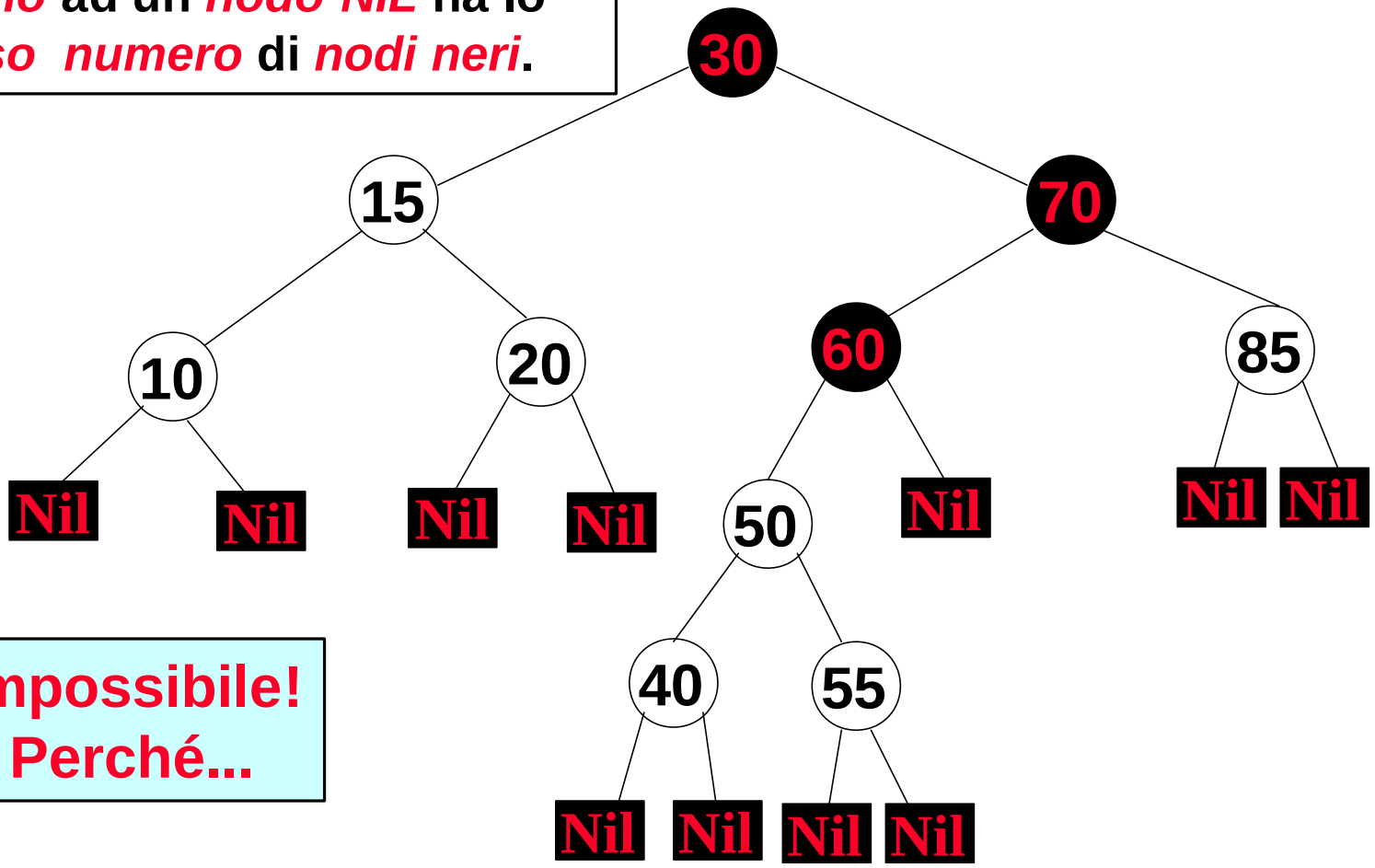
Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!



Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!

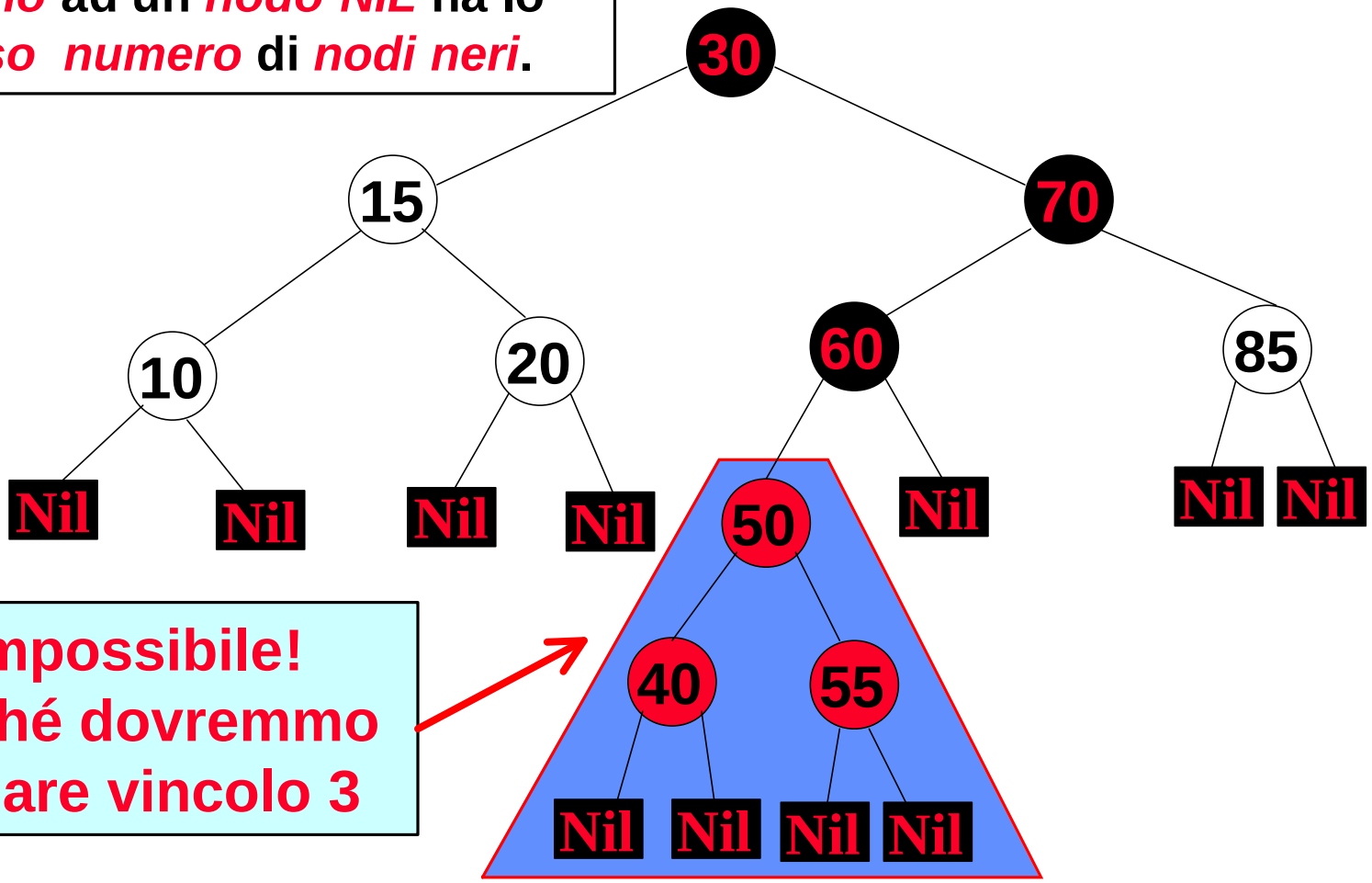


Impossibile! Perché...

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!

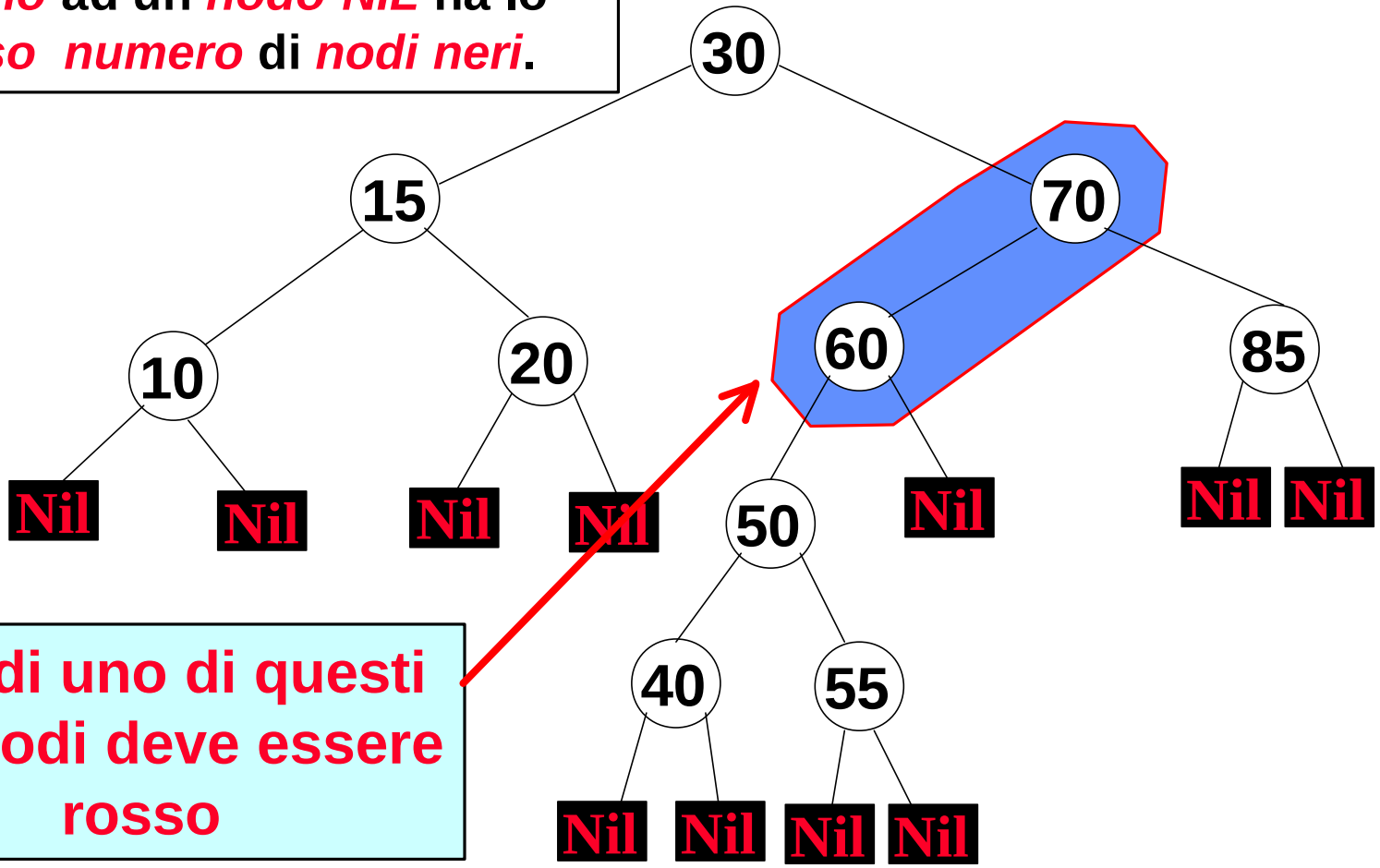


Impossibile! Perché dovremmo violare vincolo 3

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!

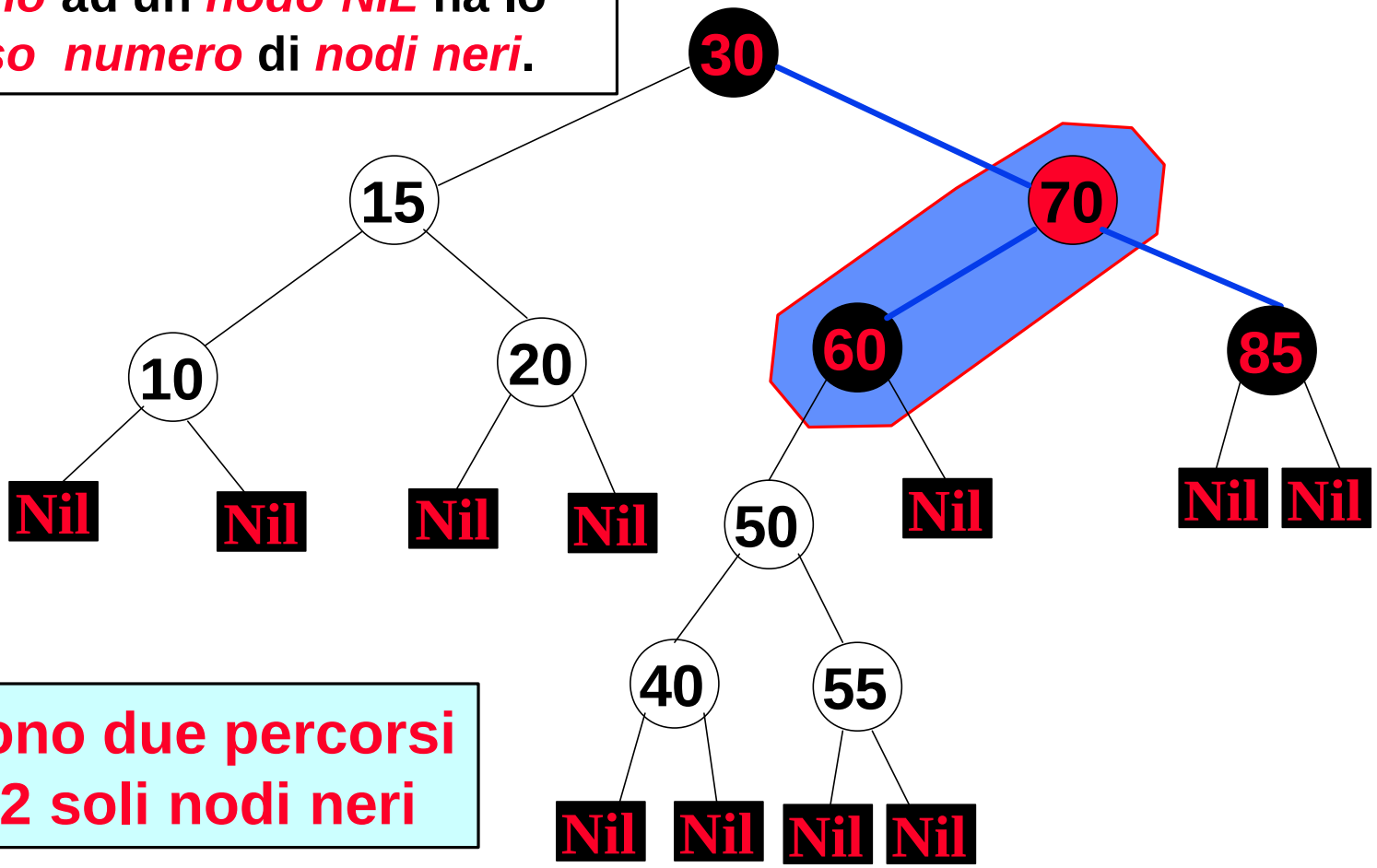


Quindi uno di questi due nodi deve essere rosso

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!

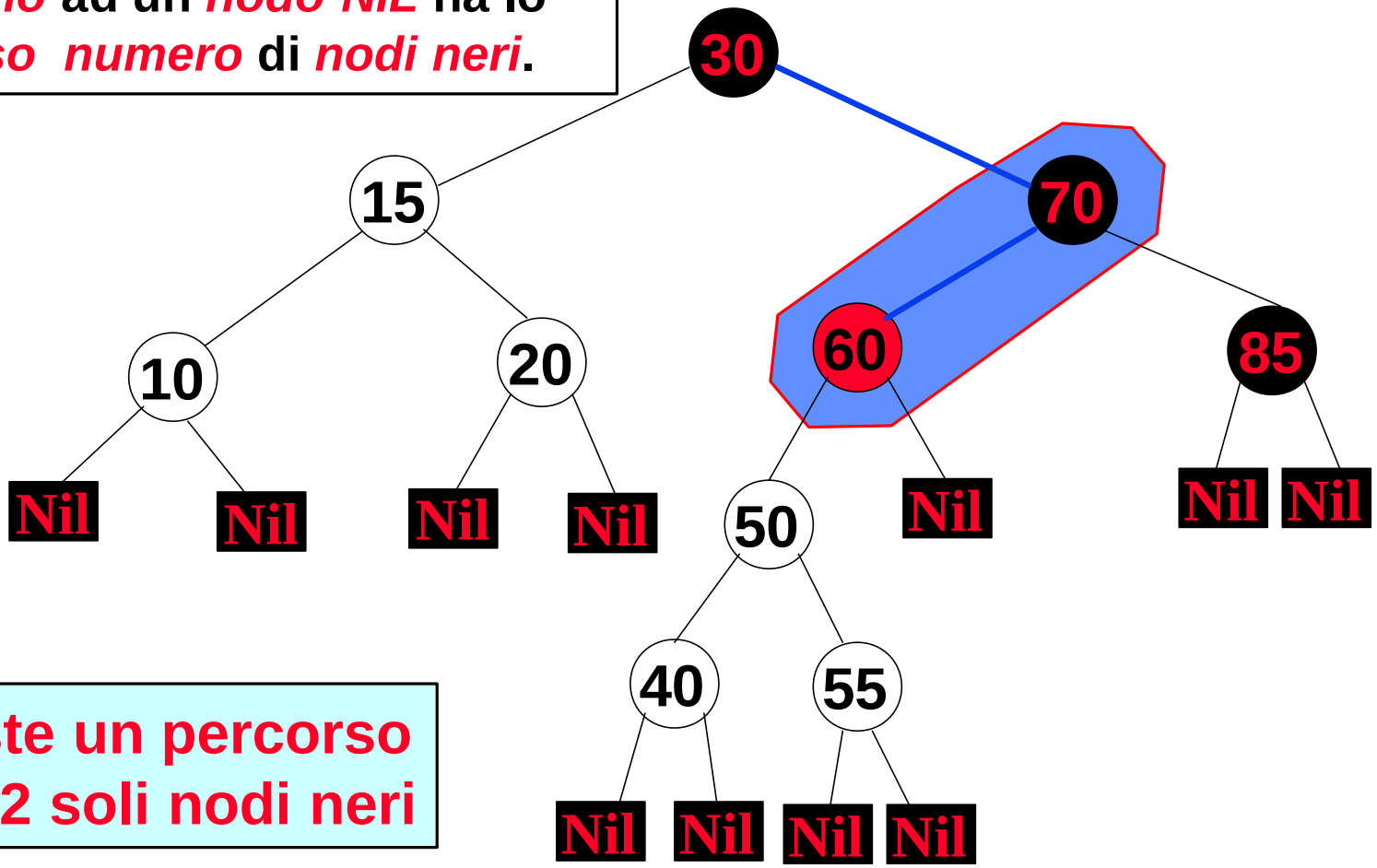


Esistono due percorsi con 2 soli nodi neri

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!

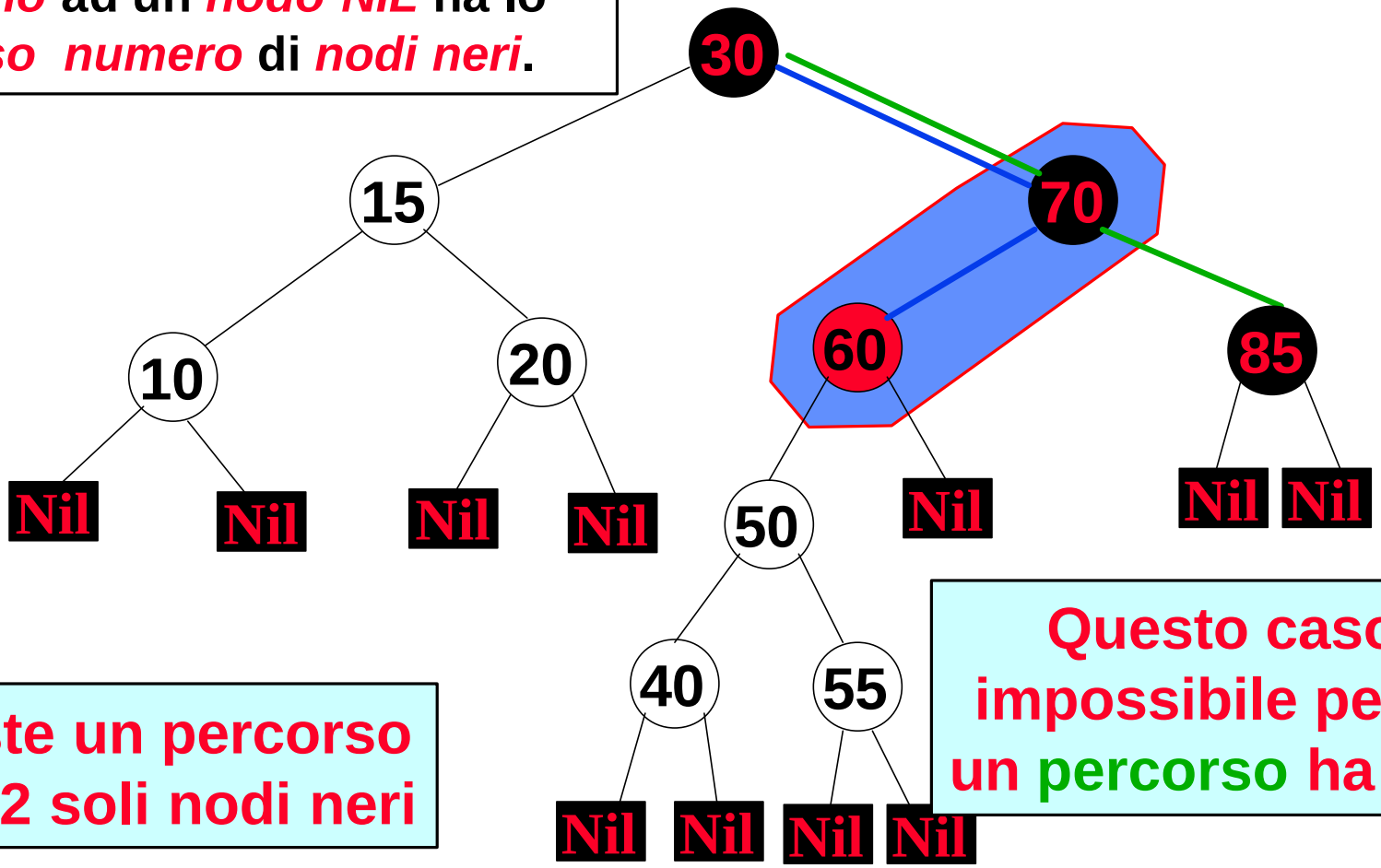


Esiste un percorso con 2 soli nodi neri

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 ci possono essere al più 3 nodi neri lungo un percorso!



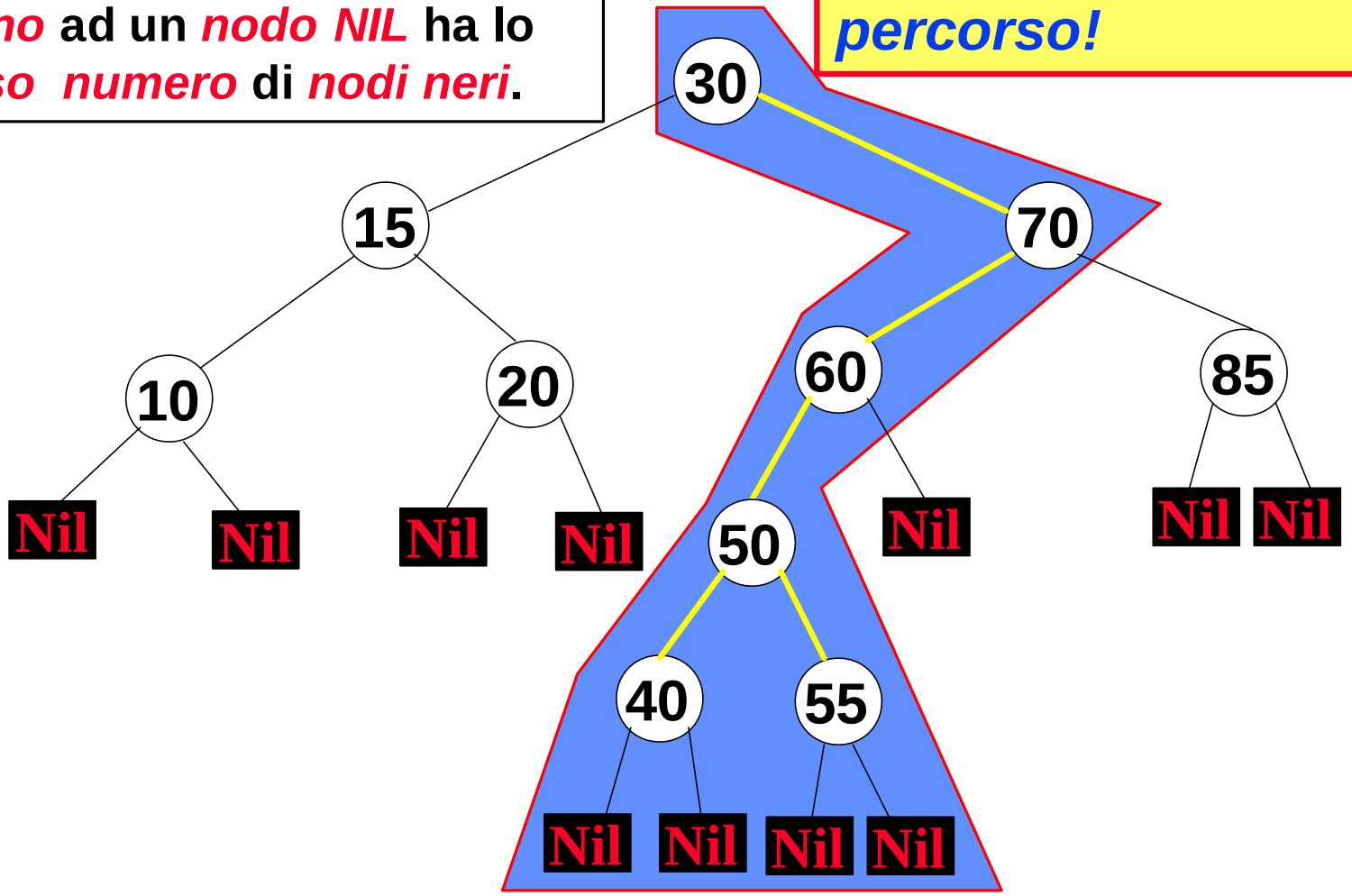
Esiste un percorso con 2 soli nodi neri

Questo caso è impossibile perchè un percorso ha 3 neri

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

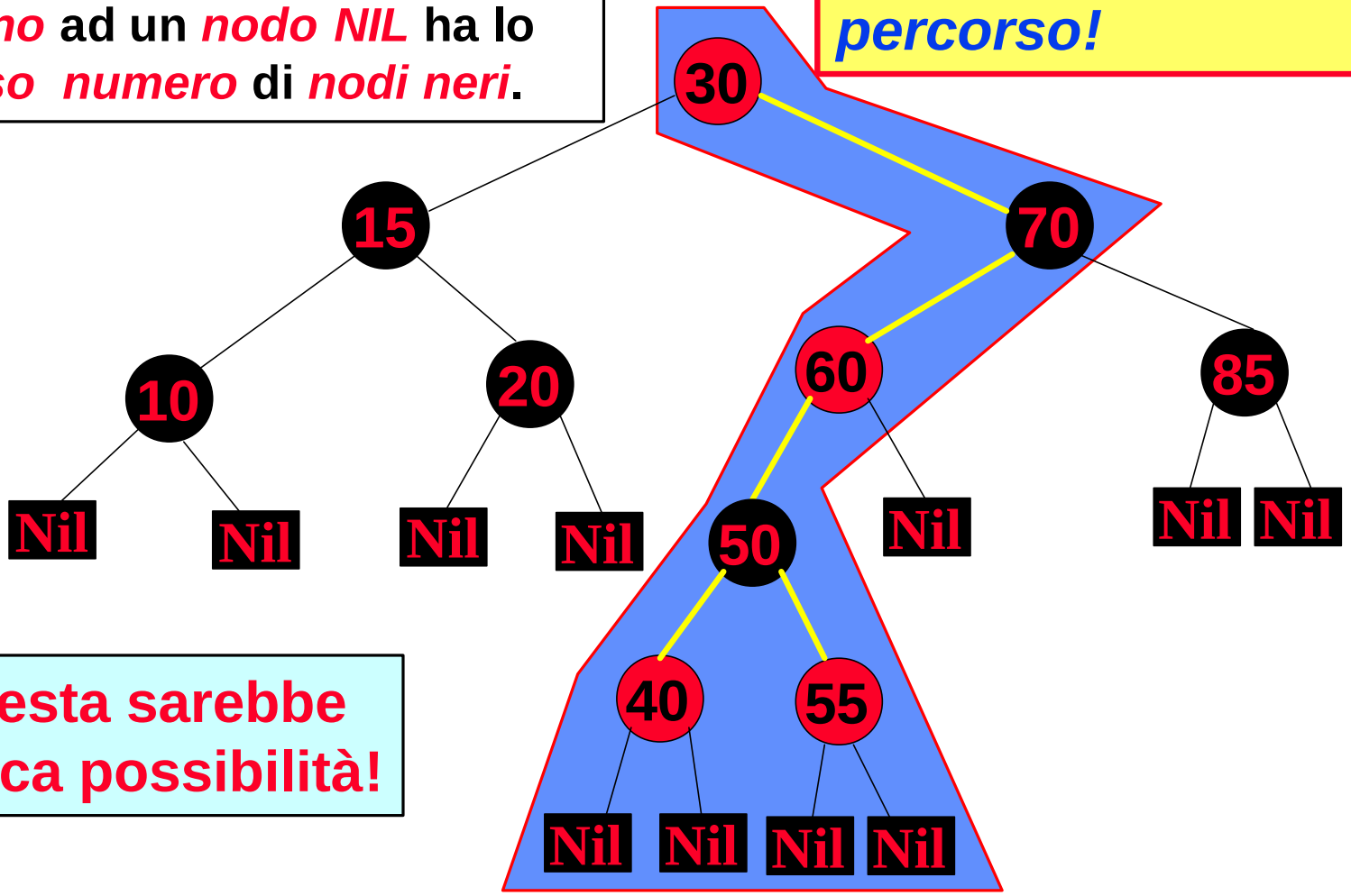
Per vincolo 4 e il vincolo 3, ci possono essere al più 2 nodi neri lungo un percorso!



Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 e il vincolo 3, ci possono essere al più 2 nodi neri lungo un percorso!

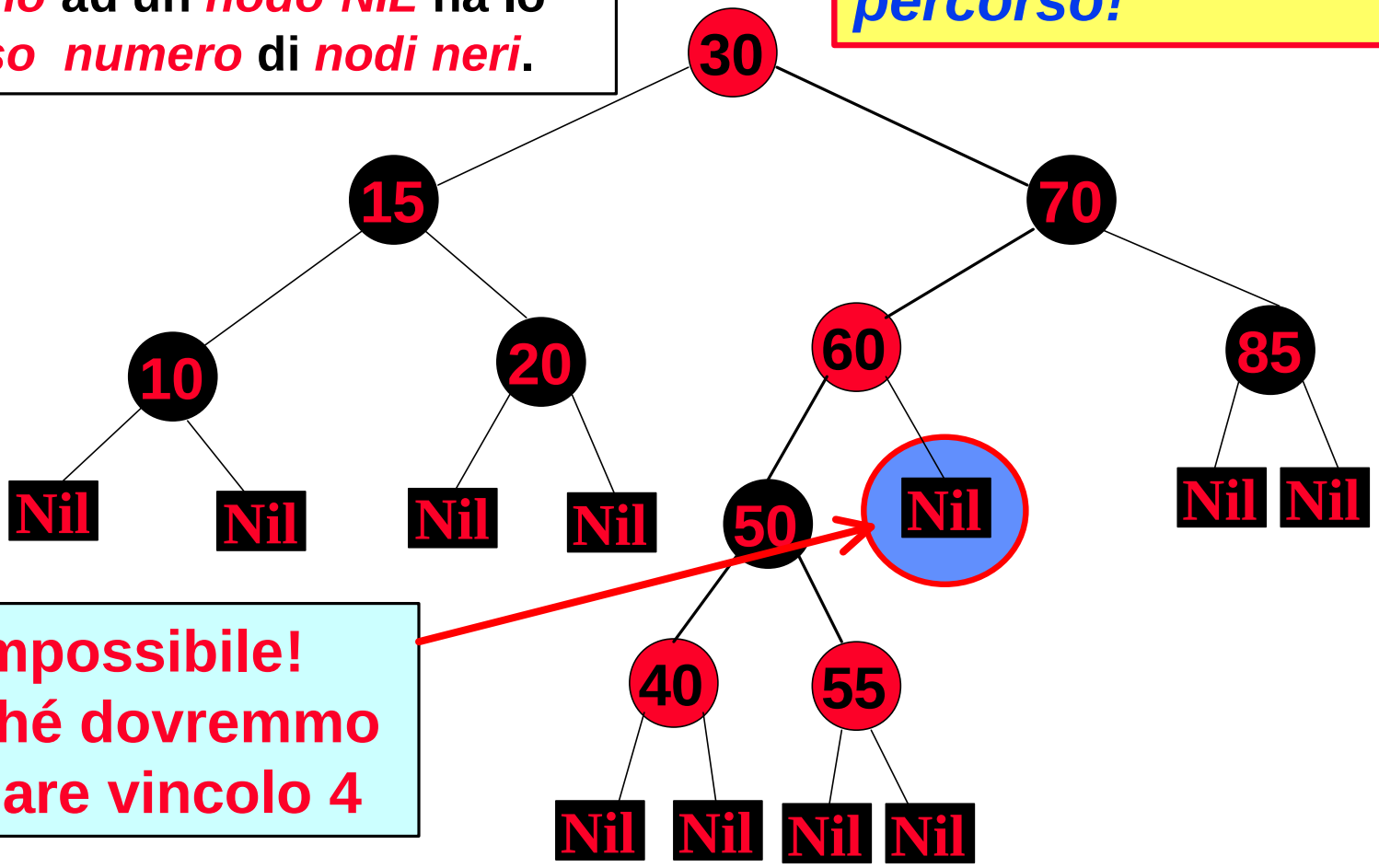


Questa sarebbe l'unica possibilità!

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Per vincolo 4 e il vincolo 3, ci possono essere al più 2 nodi neri lungo un percorso!

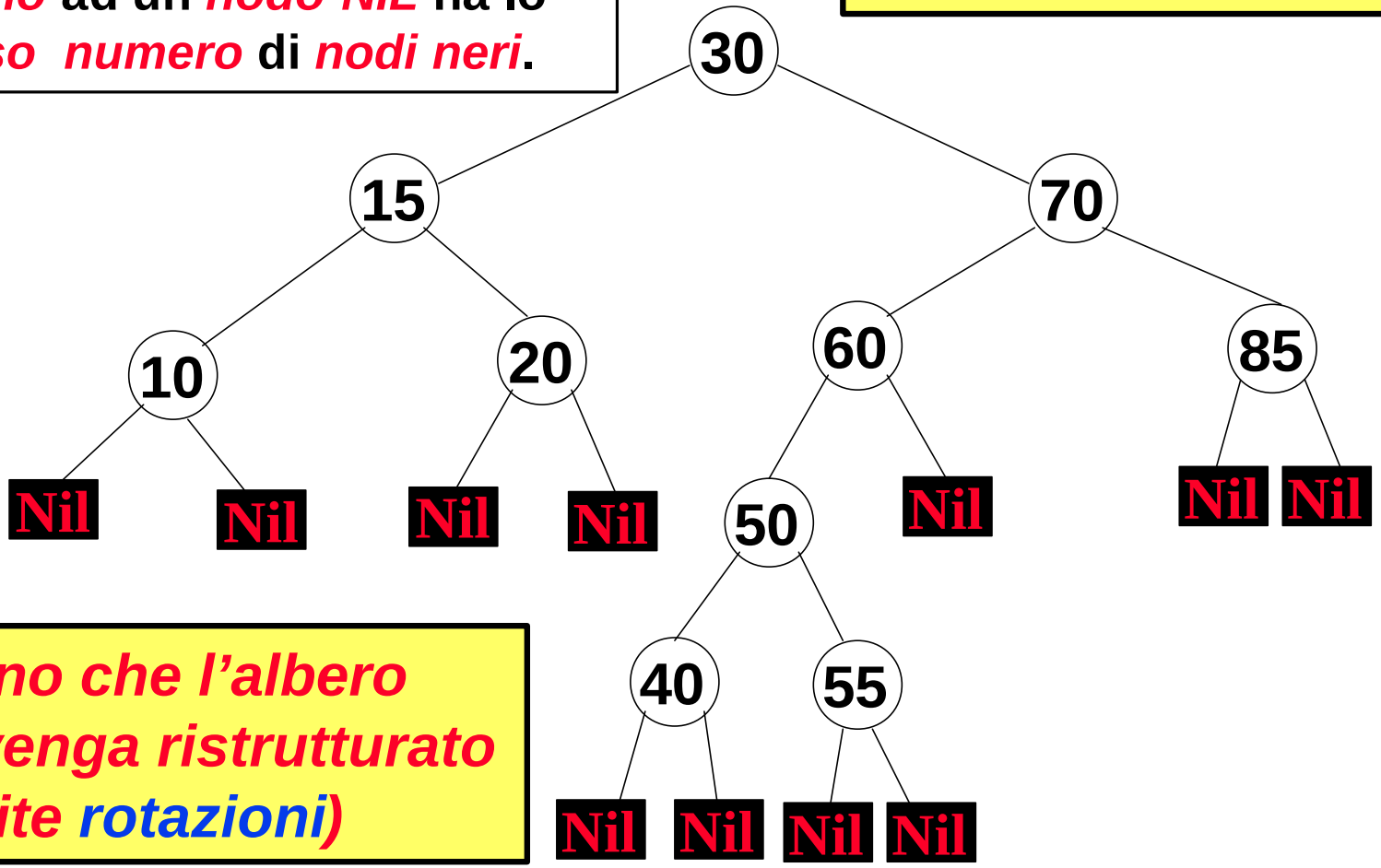


Impossibile! Perché dovremmo violare vincolo 4

Alberi Red-Black: esempio VI

3 Se un *nodo è rosso*, allora entrambi i *suoi figli sono neri*;
4 Ogni percorso da un *nodo interno* ad un *nodo NIL* ha lo *stesso numero* di *nodi neri*.

Questo albero NON può essere un albero Red-Black!



A meno che l'albero non venga ristrutturato (tramite rotazioni)

Percorso Nero in alberi Red-Black

Definizione: **Il *numero* di *nodi neri* lungo ogni percorso da un *nodo x* (escluso) ad una *foglia* (nodo *NIL*) è detto *altezza nera di x***

Definizione: **L'*altezza nera di un albero Red-Black* è l'*altezza nera della sua radice*.**

Percorso massimo in alberi Red-Black

Lemma: **Un *albero Red-Black* con *n* nodi ha altezza pari al più a:**

$$2\log(n+1)$$

Dimostrazione: ***Iniziamo col dimostrare per induzione che il sottoalbero con radice x ha almeno***

$$2^{bh(x)}-1$$

nodi interni

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

L'induzione sarà sull'altezza del nodo x.

Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

$$2^{bh(x)} - 1$$ *nodi interni*

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

Passo Base:

Se x ha altezza 0: allora x è una foglia NIL e il suo sottoalbero contiene 0 nodi interni.

La sua altezza nera è inoltre bh(x) = 0.

Otteniamo quindi:

$$0 \geq 2^{bh(x)} - 1 = 2^{0} - 1 = 0$$

Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

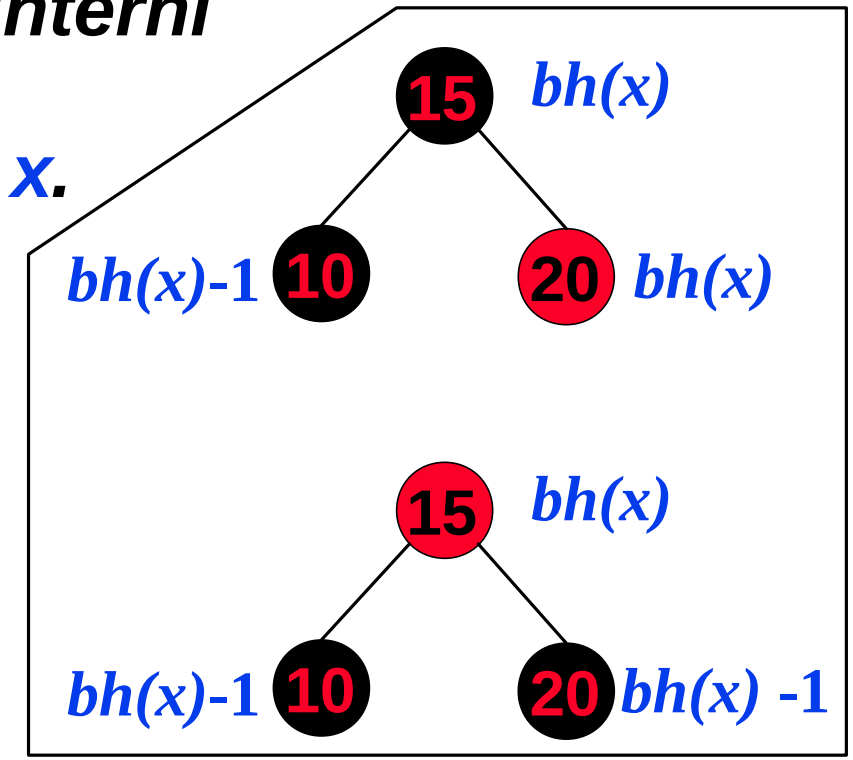
$$2^{bh(x)} - 1$$ *nodi interni*

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

Passo Induttivo:

Se x sia interno con 2 figli e abbia altezza bh(x)>1

Entrambi i suoi figli avranno altezza bh(x) o bh(x)-1



Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

$$2^{bh(x)} - 1$$ *nodi interni*

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

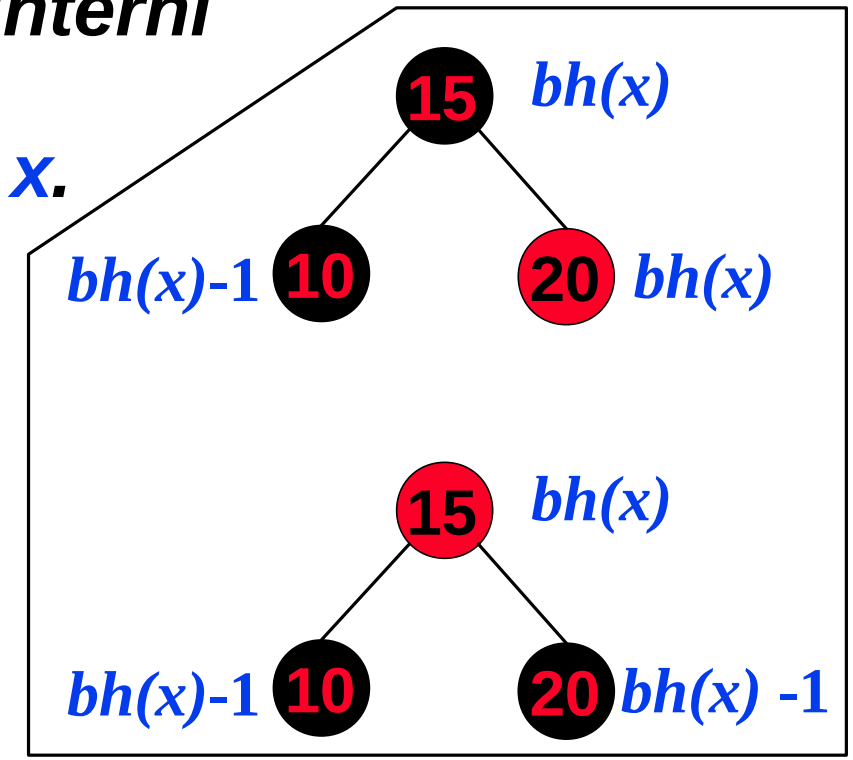
Passo Induttivo:

Sia x nodo interno con 2 figli

e abbia altezza > 0

Entrambi i suoi figli avranno

altezza nera bh(x) o bh(x)-1



Entrambi i suoi figli avranno certamente altezza minore di x, quindi possiamo usare ipotesi induttiva

Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

$$2^{bh(x)} - 1$$ *nodi interni*

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

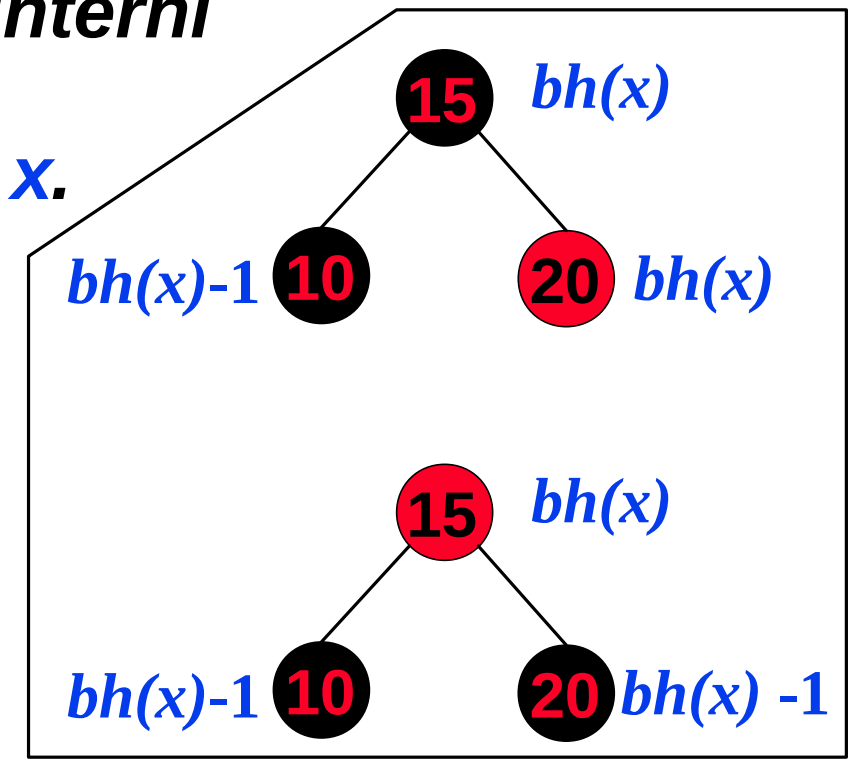
Passo Induttivo:

Se x sia interno con 2 figli e abbia altezza >0

Entrambi i suoi figli avranno altezza nera bh(x) o bh(x)-1

Ogni figlio avrà almeno

$$2^{bh(x)-1} - 1$$ *nodi interni*



Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

$$2^{bh(x)} - 1$$ ***nodi interni***

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

Passo Induttivo: Sia x nodo interno con 2 figli e abbia altezza >0. Ogni figlio avrà almeno

$$2^{bh(x)-1} - 1$$ ***nodi interni***

Quindi il sottoalbero con radice x conterrà almeno

$$(2^{bh(x)-1} - 1) + (2^{bh(x)-1} - 1) + 1 = (2^{bh(x)} - 1)$$ ***nodi interni***

Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha quindi almeno

$$2^{bh(x)} - 1$$ ***nodi interni***

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

Completiamo la dimostrazione del lemma.

Sia ora h l'altezza dell'albero.

Per il vincolo 3 almeno metà dei nodi lungo ogni percorso (esclusa la radice) sono neri.

Quindi l'altezza nera dell'albero dovrà essere almeno h/2 (cioè bh $\geq$ h/2).

Percorso massimo in alberi Red-Black

Il sottoalbero con radice x ha al meno

$$2^{bh(x)} - 1$$ *nodi interni*

dove bh(x) è l'altezza nera di x.

Completiamo la dimostrazione del lemma.

Sia ora h l'altezza dell'albero.

Quindi l'altezza nera dell'albero dovrà essere almeno h/2 (cioè bh $\geq$ *h/2).*

Ma allora, il numero di nodi dell'albero sarà

$$n \geq (2^{bh(x)} - 1) \geq 2^{h/2} - 1$$

Percorso massimo in alberi Red-Black

Lemma: **Un *albero Red-Black* con *n* nodi ha altezza al più *2 log(n + 1)***

Dimostrazione: **….**

Completiamo la dimostrazione del lemma.

Sia ora h l'altezza dell'albero.

Ma allora, il numero di nodi dell'albero sarà

$$n \geq (2^{bh(x)} - 1) \geq 2^{h/2} - 1$$

Portando 1 a sinistra e applicando il logaritmo:

$$\log(n+1) \geq h/2$$ ***cioè*** $$h \leq 2\log(n+1)$$

Costo operazioni su alberi Red-Black

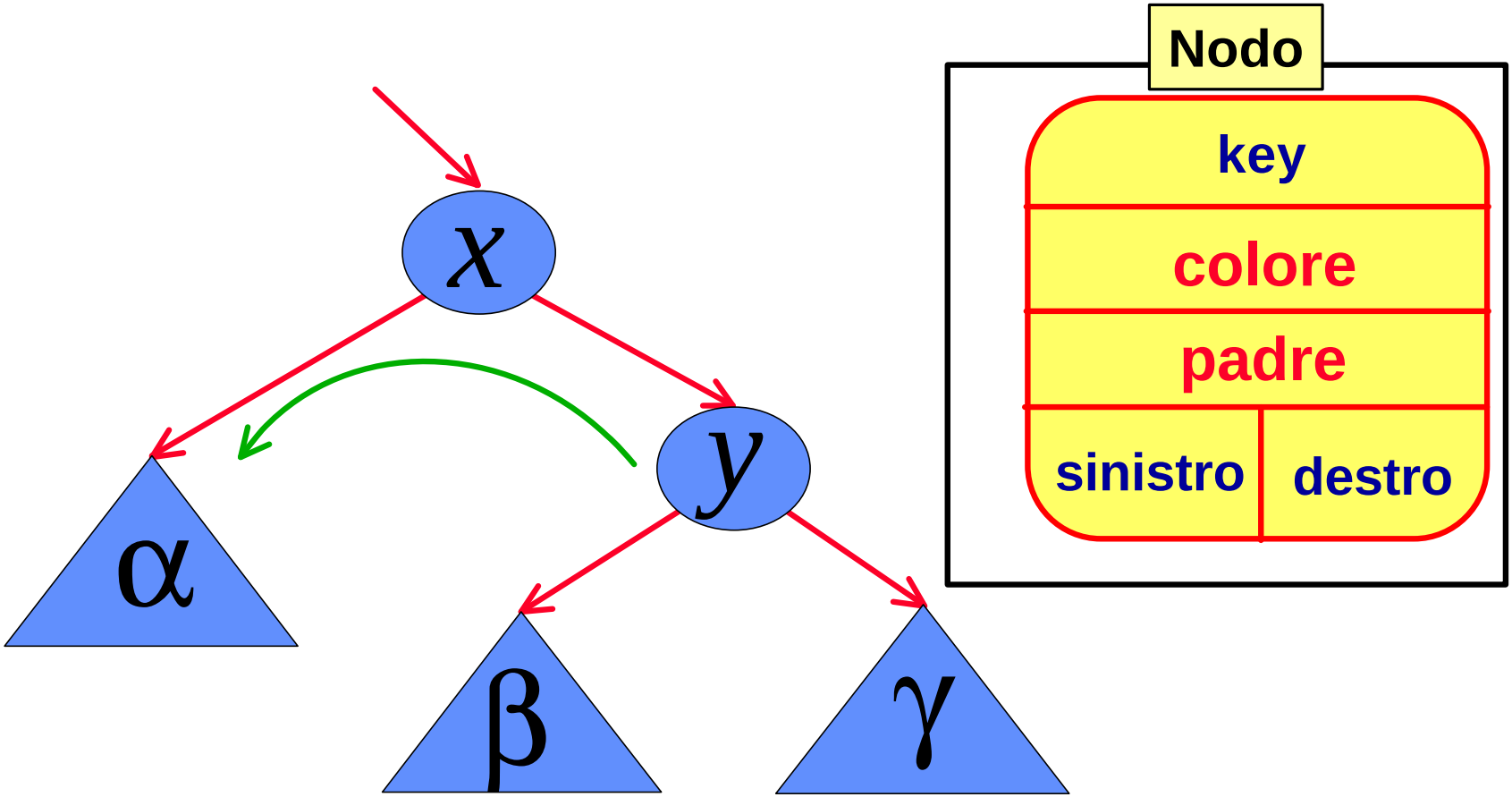
Teorema: **In un *albero Red-Black* le operazioni di *ricerca*, *inserimento* e *cancellazione* hanno *costo O(log(n)).***

Dimostrazione: ***Conseguenza diretta del Lemma precedente e dal fatto che tutte le operazioni hanno costo O(h), con h l'altezza dell'albero.***

Violazione delle proprietà per inserimento

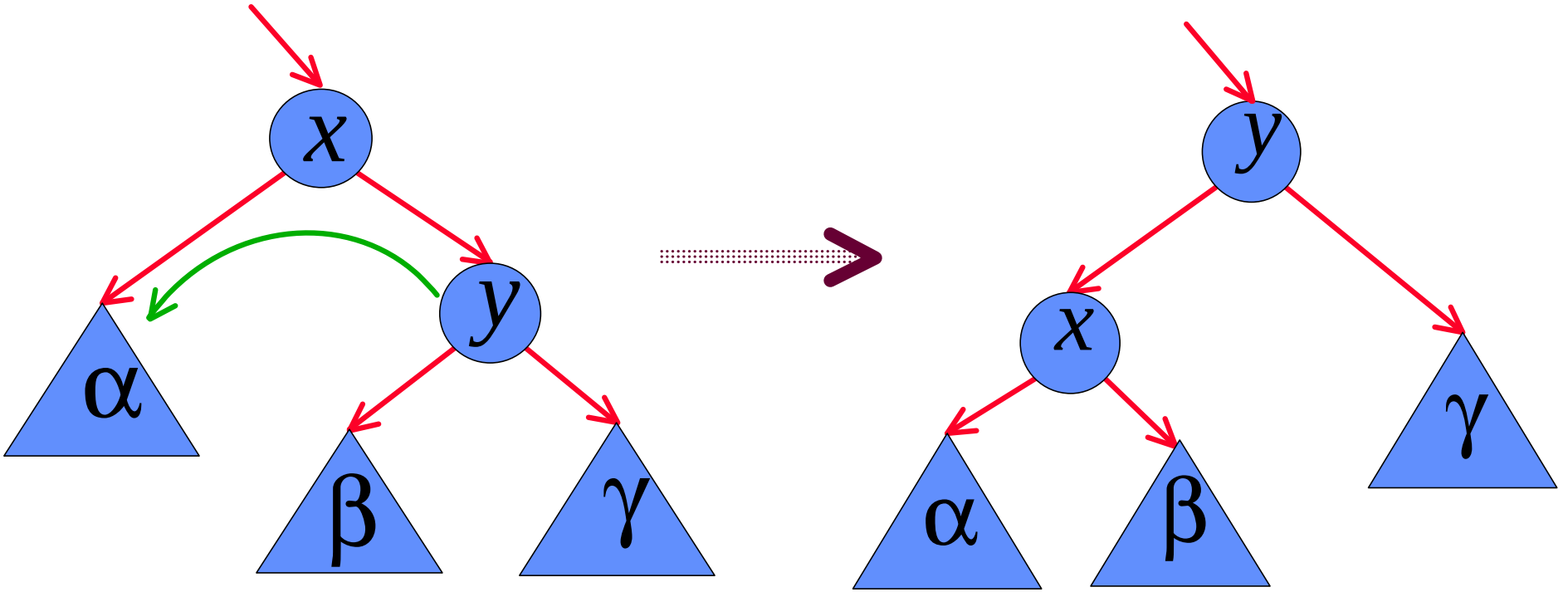
- **Durante la *costruzione* di un *albero Red-Black*, quando un *nuovo nodo* viene *inserito* è possibile che *le condizioni di bilanciamento* risultino *violate*.**
- **Lo stsso accade per le *cancellazioni*.**
- **Quando le *proprietà Red-Black* vengono *violate* si può agire:**
  - ***modificando i colori nella zona della violazione;***
  - ***operando dei ribilanciamenti dell'albero tramite rotazioni: Rotazione destra e Rotazione sinistra;***

Alberi Red-Black: Rotazione destra

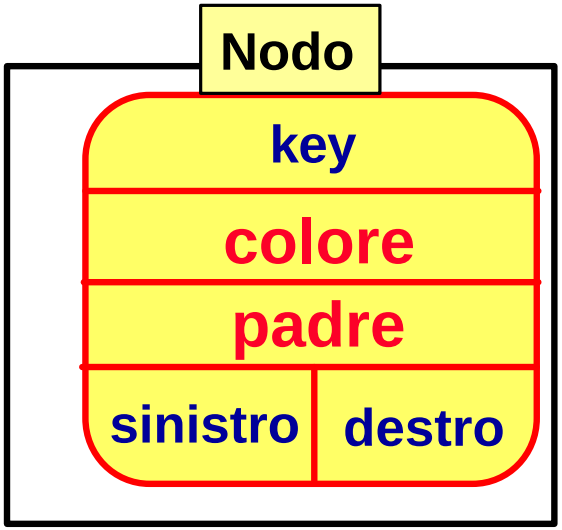


Rotazione col figlio destro
Rotazione va da destra a sinistra
Il Cormen la chiama Rotazione a Sinistra

Alberi Red-Black: Rotazione destra



Rotazione col figlio destro
Rotazione va da destra a sinistra
Il Cormen la chiama Rotazione a Sinistra



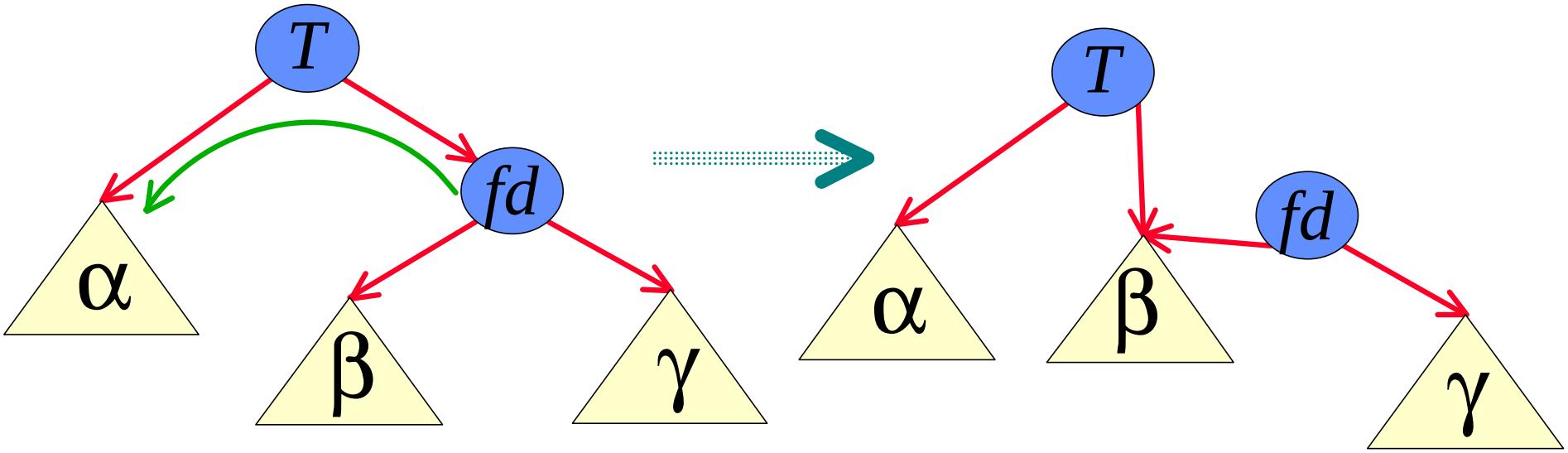
Alberi Red-Black: Rotazioni

```
albero-RB Ruota-destro(T:albero-RB)
    fd = figlio-dx[T]
    figlio-dx[T] = figlio-sx[fd]
    figlio-sx[fd] = T
    return fd
```

```
albero-RB Ruota-sinistro(T:albero-RB)
    fs = figlio-sx[T]
    figlio-sx[T] = figlio-dx[fs]
    figlio-dx[fs] = T
    return fs
```

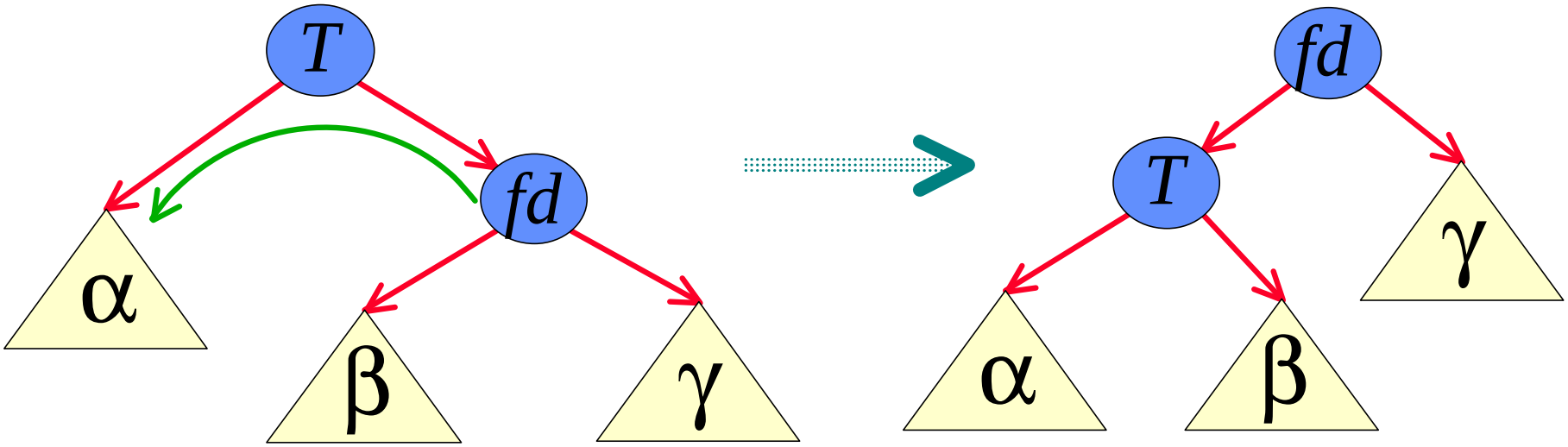
Alberi Red-Black: Rotazioni

```
albero-RB Ruota-destro(T:albero-RB)
    fd = figlio-dx[T]
    figlio-dx[T] = figlio-sx[fd]
    figlio-sx[fd] = T
    return fd
```



Alberi Red-Black: Rotazioni

```
albero-RB Ruota-destro(T:albero-RB)
    fd = figlio-dx[T]
    figlio-dx[T] = figlio-sx[fd]
    figlio-sx[fd] = T
    return fd
```



Inserimento in alberi Red-Black

- ***Inseriamo un nuovo nodo (chiave) usando la stessa procedura usata per gli ABR;***
- ***Coloriamo il nuovo nodo di rosso ;***
- ***La ritorno dalle chiamate rocorsive di inserimento, ripristiniamo la proprietà Red-Black se è il caso:***
  - ***spostiamo le violazioni verso l'alto rispettando sempre il vincolo 4 (mantenendo l'altezza nera dell'albero);***
- ***Al termine dell'inserimento, coloriamo sempre la "radice di nero".***

Le operazioni di ripristino sono necessarie solo quando due nodi consecutivi sono rossi!

Inserimento in alberi Red-Black

```
albero-RB INS_RB(k, T)
  IF   T ¹ NIL   THEN
       IF   k < K[T ]   THEN
            figlio_sx[T ] = INS_RB(k, figlio_sx[T]);
            T = Bilancia_sx(T );
       ELSE     /*   k ³ K[T ]   */
            figlio_dx[T ] = INS_RB(k, figlio_dx[T]);
            T = Bilancia_dx(T );
  ELSE
       T = alloca nodo;   K[T ] = k;
       figlio_dx[T ] = NIL;
       figlio_sx[T ] = NIL;
       color[T ] = red;
  return T;
```

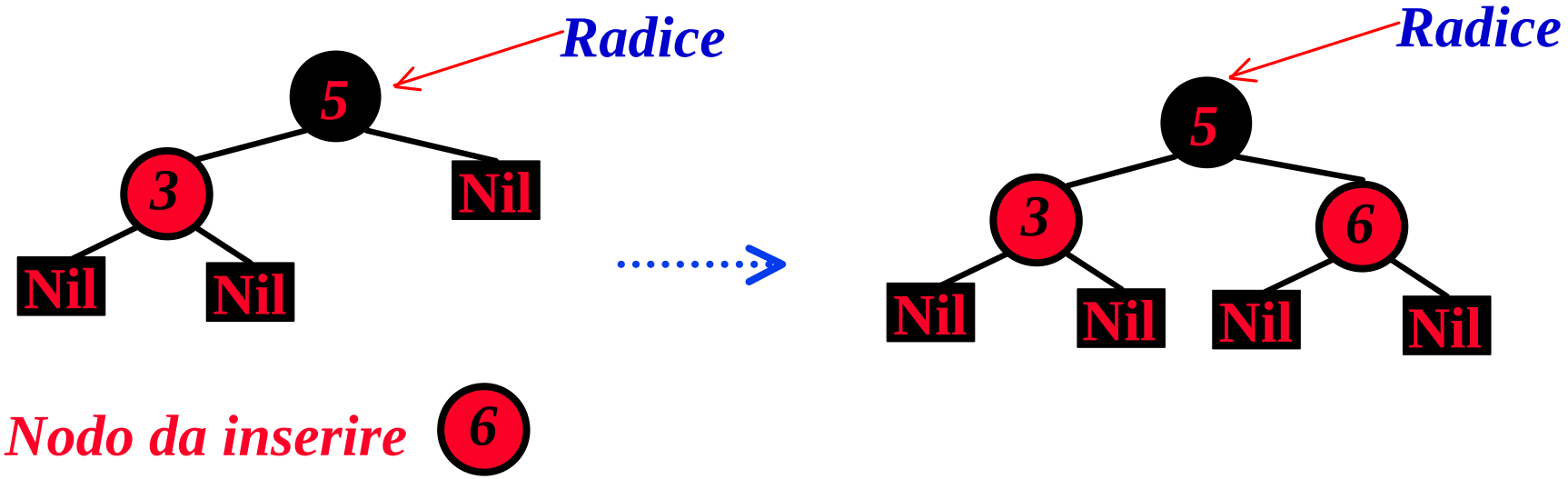
Al termine dell'inserimento, la proc. chiamante deve sempre colorare la "radice di nero".

Inserimento in alberi Red-Black

Le operazioni di ripristino sono necessarie solo quando due nodi consecutivi sono rossi!

Se la radice dell'albero è sempre nera, non si presenta mai la necessità di ribilanciare l'albero se la sua altezza è minore di 3!

Non si possono, infatti, verificare violazioni!

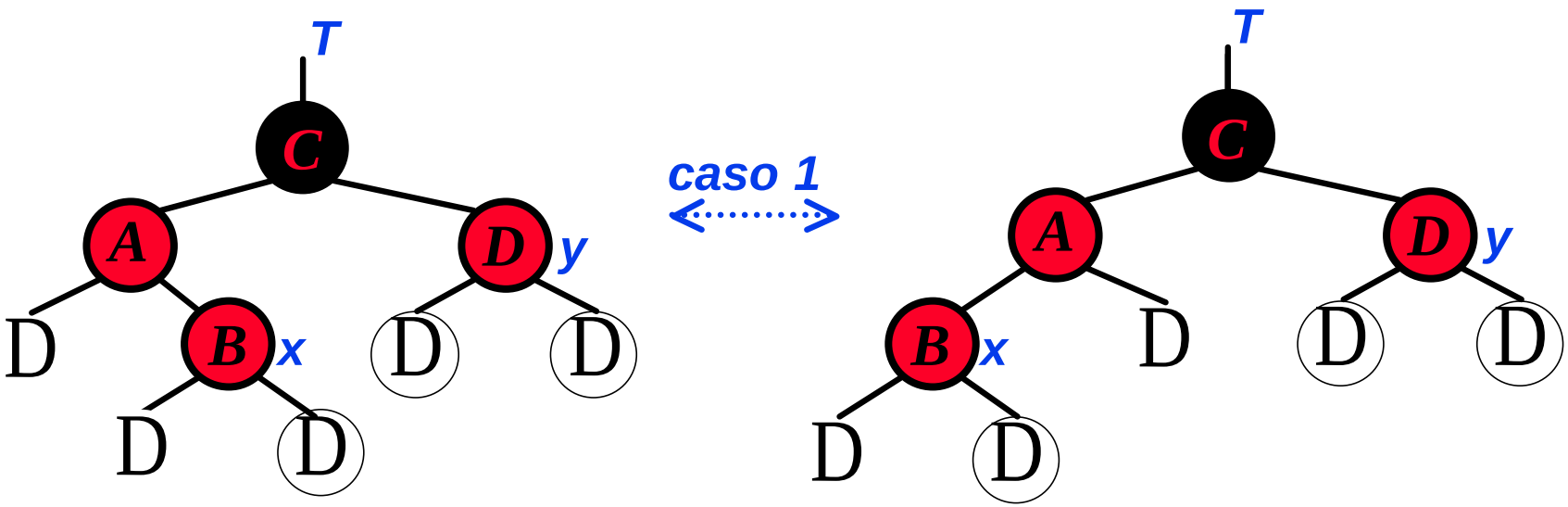


Bilanciamento del sottoalbero sinistro

Verifica se l'altezza del sottoalbero sinistro di T è maggiore di 0

```
albero-RB Bilancia_sx(T)
  IF ha_figlio(figlio_sx[T])
        v = Tipo_violazione_sx(figlio_sx[T],figlio_dx[T])
              /* v = 0   nessuna violazione */
         CASE v OF
               1:    T = Bilancia_sx_1(T);
               2:    T = Bilancia_sx_2(T);
                     T = Bilancia_sx_3(T);
               3:    T = Bilancia_sx_3(T);
  return T;
```

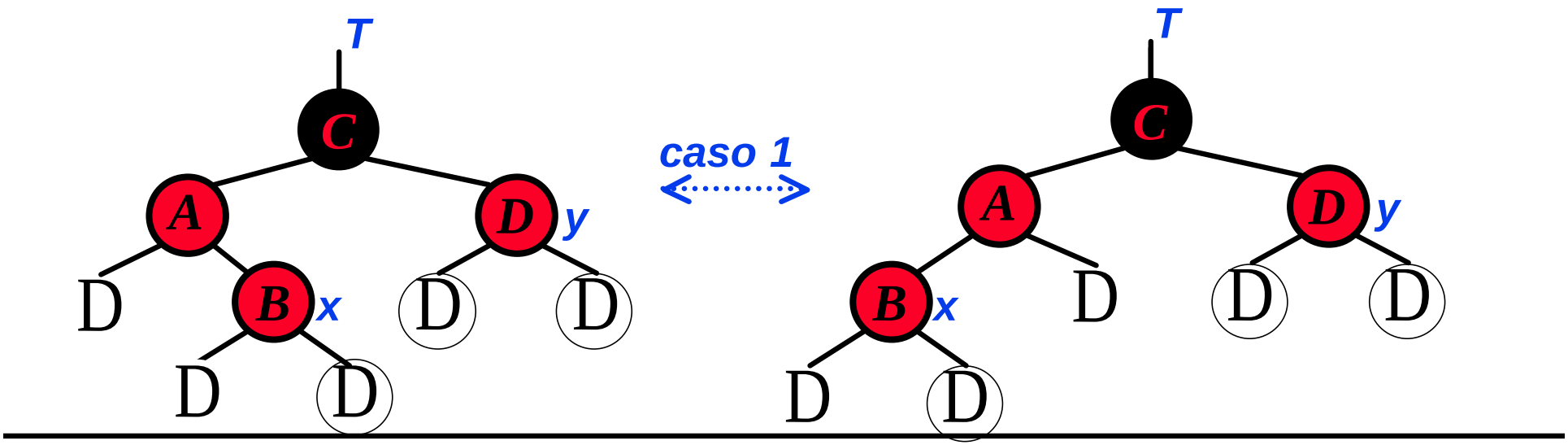
Ribilanciamenti: casi 1-3

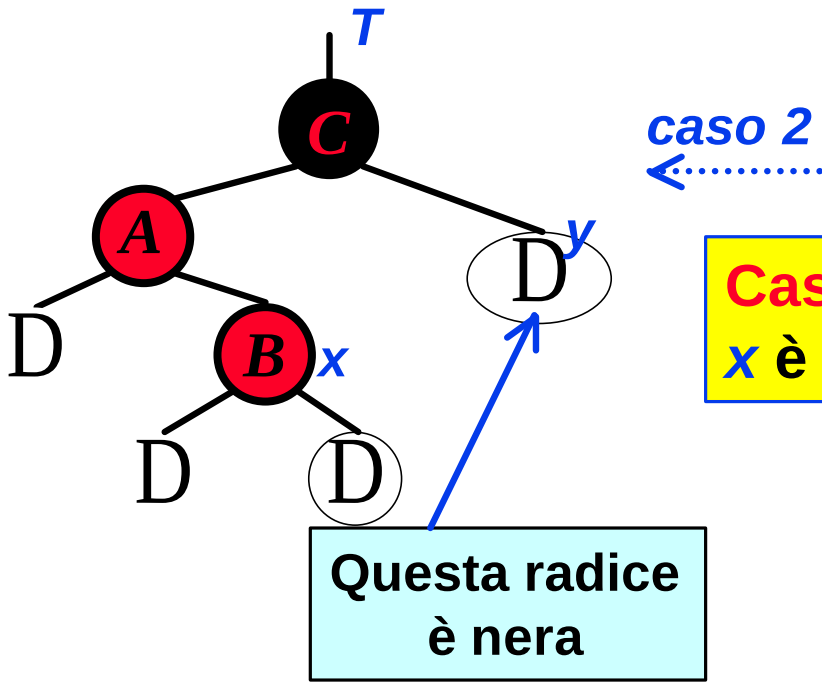


Caso 1: il figlio *y* di *T* è rosso

- **x è il *nodo modificato* che provoca la violazione Red-Black**
- **y è il figlio destro di T**

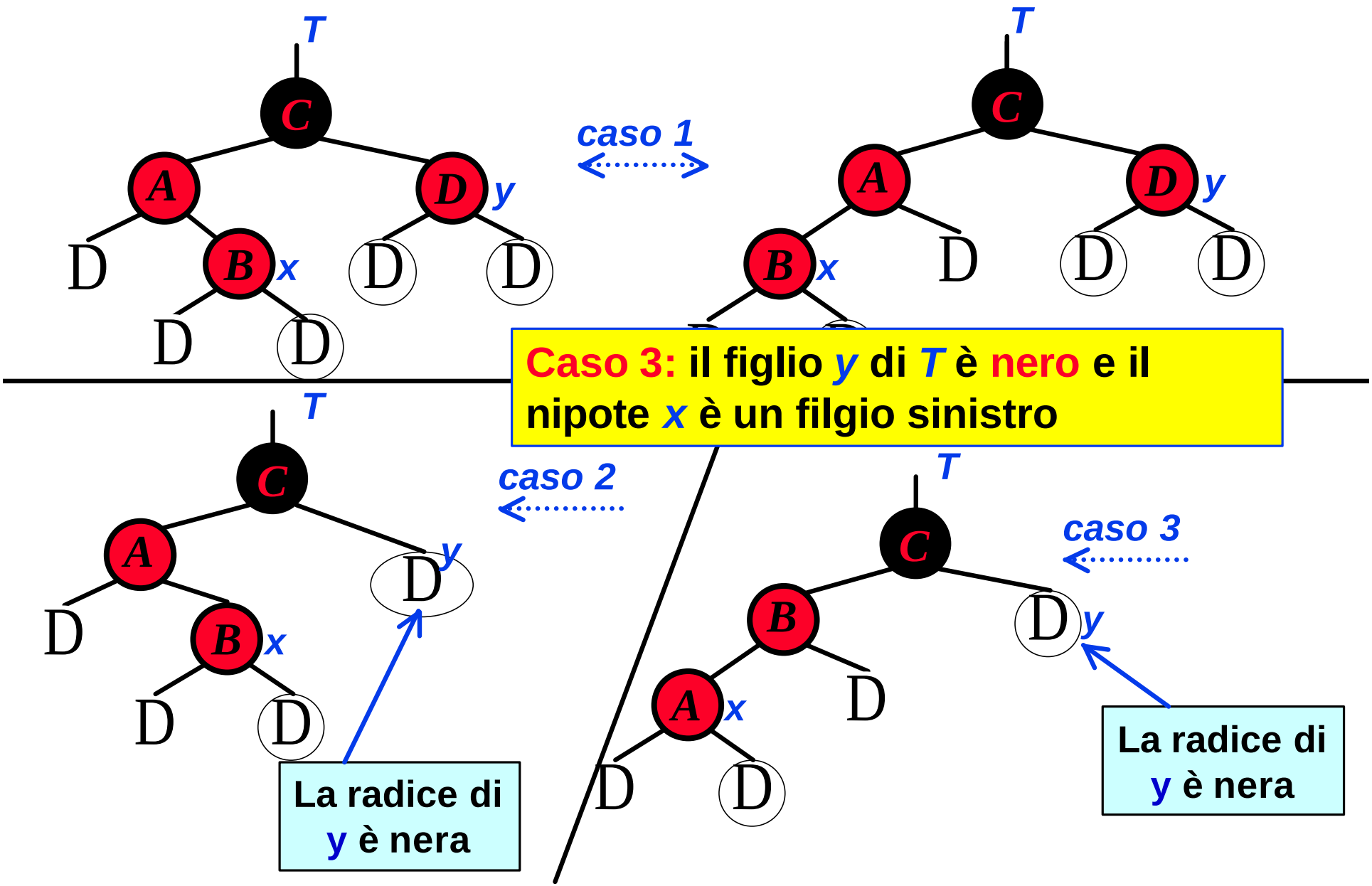
Ribilanciamenti: casi 1-3





Caso 2: il figlio *y* di *T* è nero e il nipote *x* è un filgio destro

Ribilanciamenti: casi 1-3



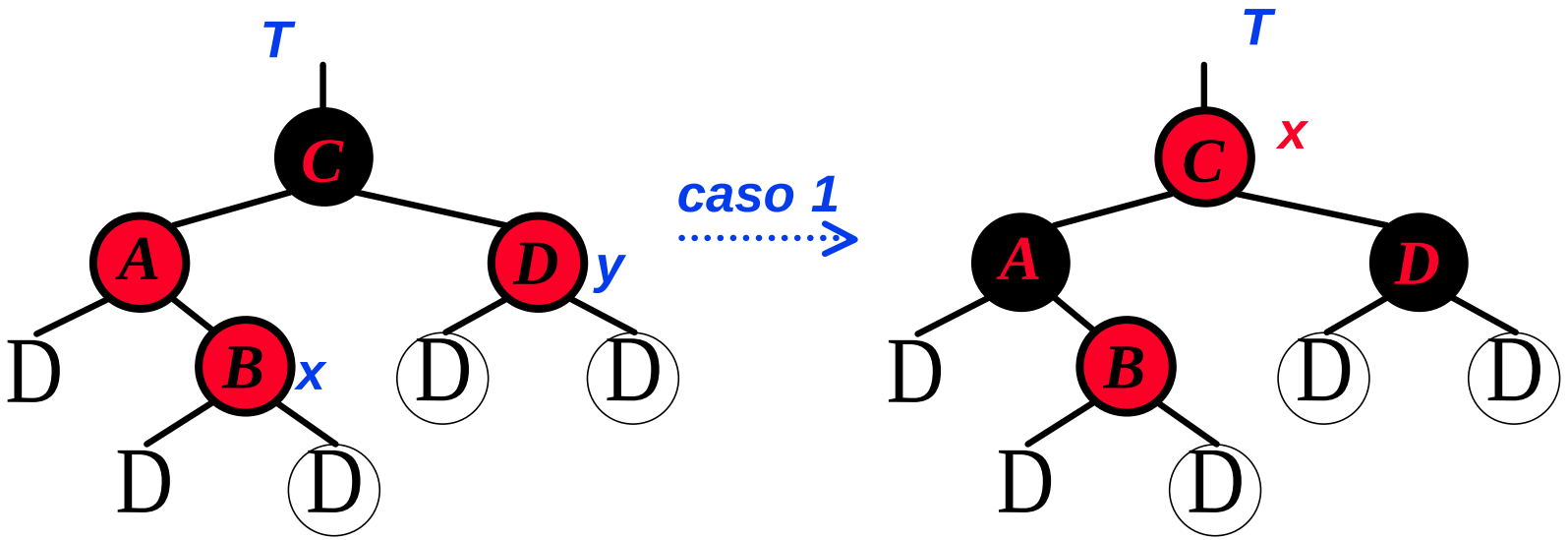
Calcolo del tipo di violazione

```
int Tipo_violazione_sx(s,d)
 violazione = 0
  IF color[s ] = red  && color[d ] = red THEN
     IF color[figlio_sx[s]] = red || color[figlio_dx[s]] = red
          violazione = 1;
     ELSE
          IF color[s ] = red THEN
               IF color[figlio_dx[s]] = red
                    violazione = 2;
               ELSE
                         IF color[figlio_sx[s]] = red
                              violazione = 3;
return violazione;
```

Inserimento in alberi RB: Caso 1

Caso 1: il figlio *y* di *T* è rosso

Tutti i D sono sottoalberi di uguale altezza nera



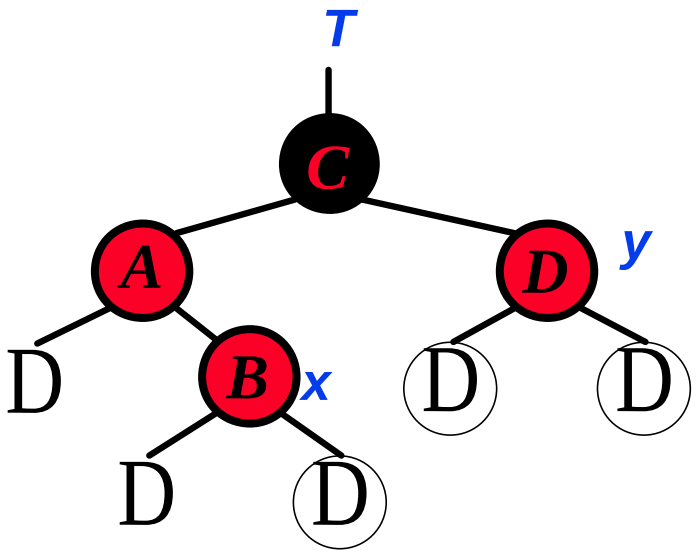
Cambiamo i colori di alcuni nodi, preservando vincolo 4: tutti i percorsi sotto a questi nodi hanno altezza nera uguale. Poi si continua verso l'alto facendo del padre del padre di x il nuovo x

Inserimento in alberi RB: Caso 1

```
color[figlio_dx[T]] = black;
color[figlio_sx[T]] = black;
color[T] = red;
return T;
```

Caso 1: il figlio *y* del di *T* è rosso

Tutti i D sono sottoalberi di uguale altezza nera



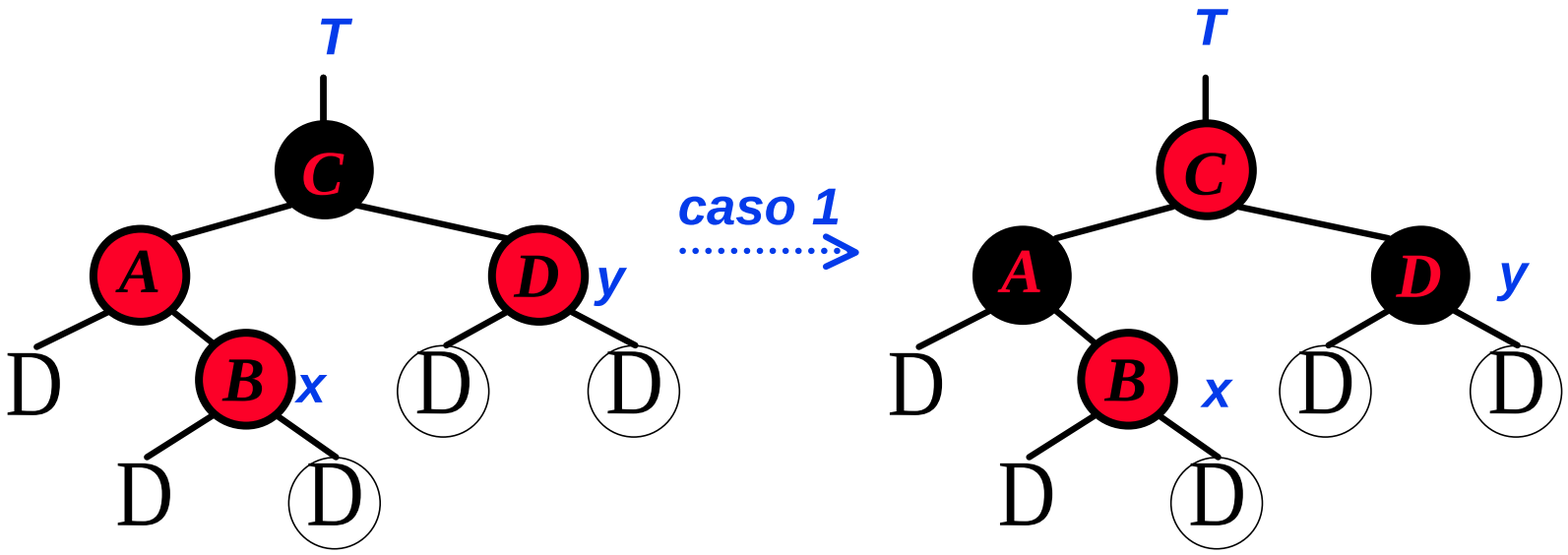
Cambiamo i colori di alcuni nodi, preservando vincolo 4:
tutti i percorsi sotto a questi nodi hanno altezza nera uguale.
Poi si continua verso l'alto facendo del padre del padre di x il nuovo x

Inserimento in alberi RB: Caso 1

```
color[figlio_dx[T]]=black;
color[figlio_sx[T]]=black;
color[T]=red;
return T;
```

Caso 1: il figlio *y* del di *T* è rosso

Tutti i D sono sottoalberi di uguale altezza nera

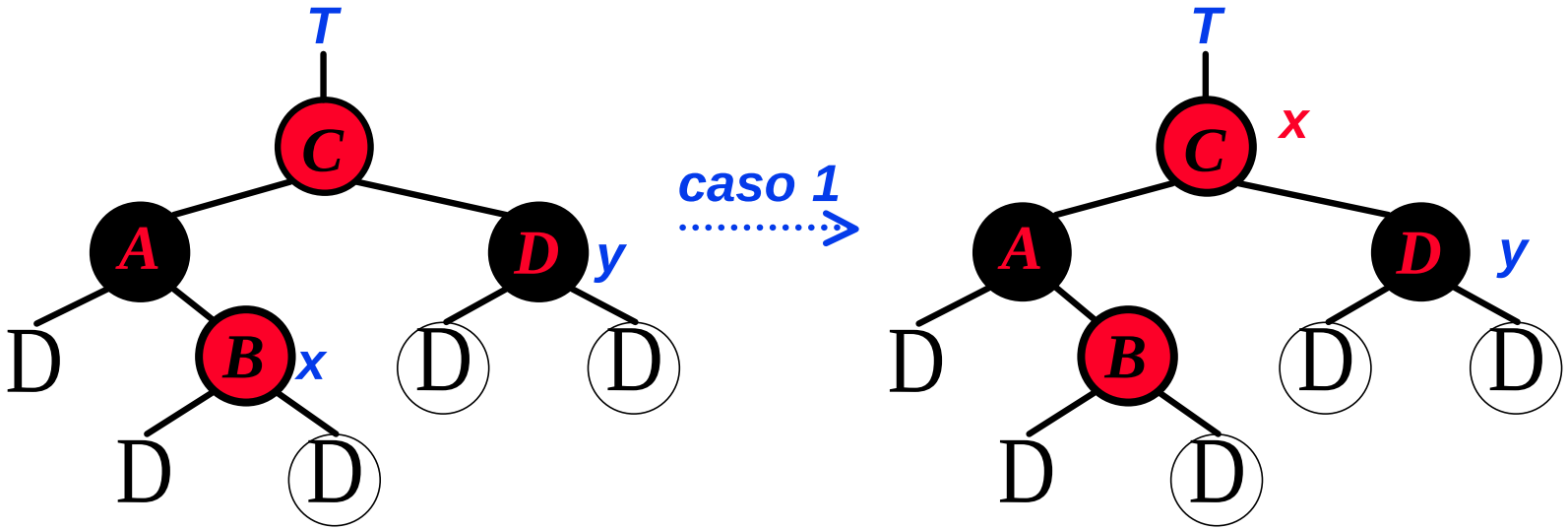


Cambiamo i colori di alcuni nodi, preservando vincolo 4: tutti i percorsi sotto hanno altezza nera uguale.
Poi si continua verso l'alto facendo del padre del padre di x il nuovo x

Inserimento in alberi RB: Caso 1

```
colore[figlio_dx[T]] = black;
colore[figlio_sx[T]] = black;
colore[T] = red;
return T;
```

Poiché il padre di C può essere rosso, può essere necessario ripristinare la proprietà RB più in alto



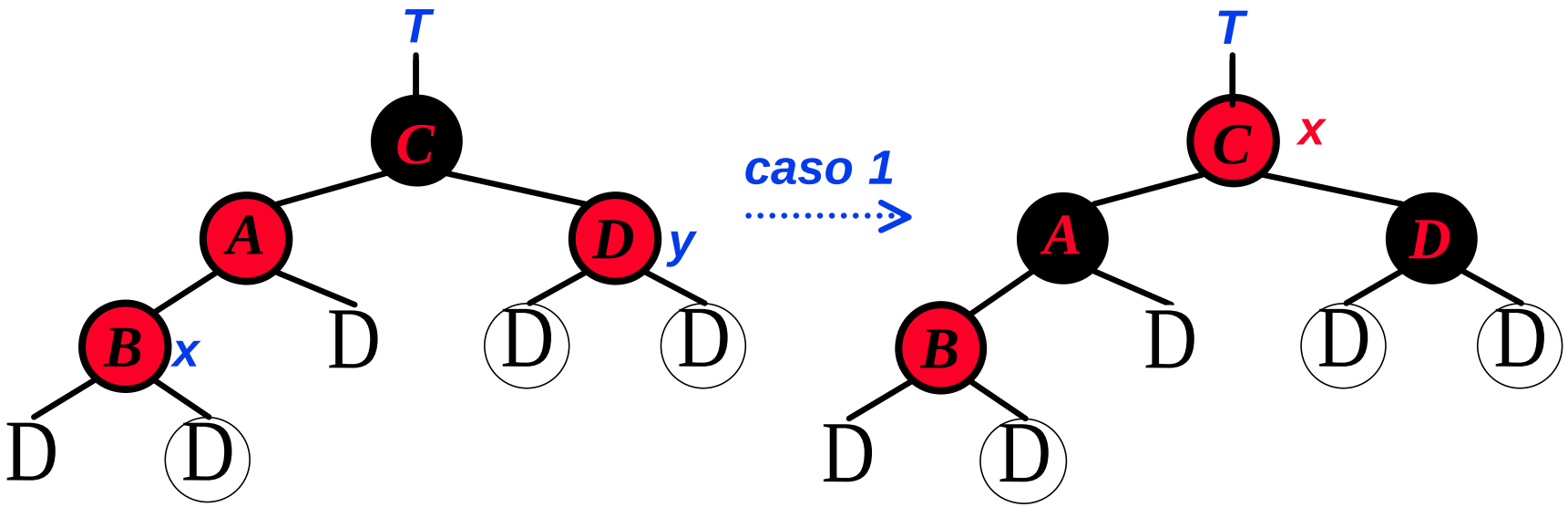
Cambiamo i colori di alcuni nodi, preservando vincolo 4: tutti i percorsi sotto hanno altezza nera uguale.
Poi si continua verso l'alto facendo del padre del padre di x il nuovo x

Inserimento in alberi RB: Caso 1

```
colore[figlio_dx[T]]=black;
colore[figlio_sx[T]]=black;
colore[T]=red;
return T;
```

Caso 1: il figlio *y* del padre del padre di *x* è rosso

Tutti i D sono sottoalberi di uguale altezza nera

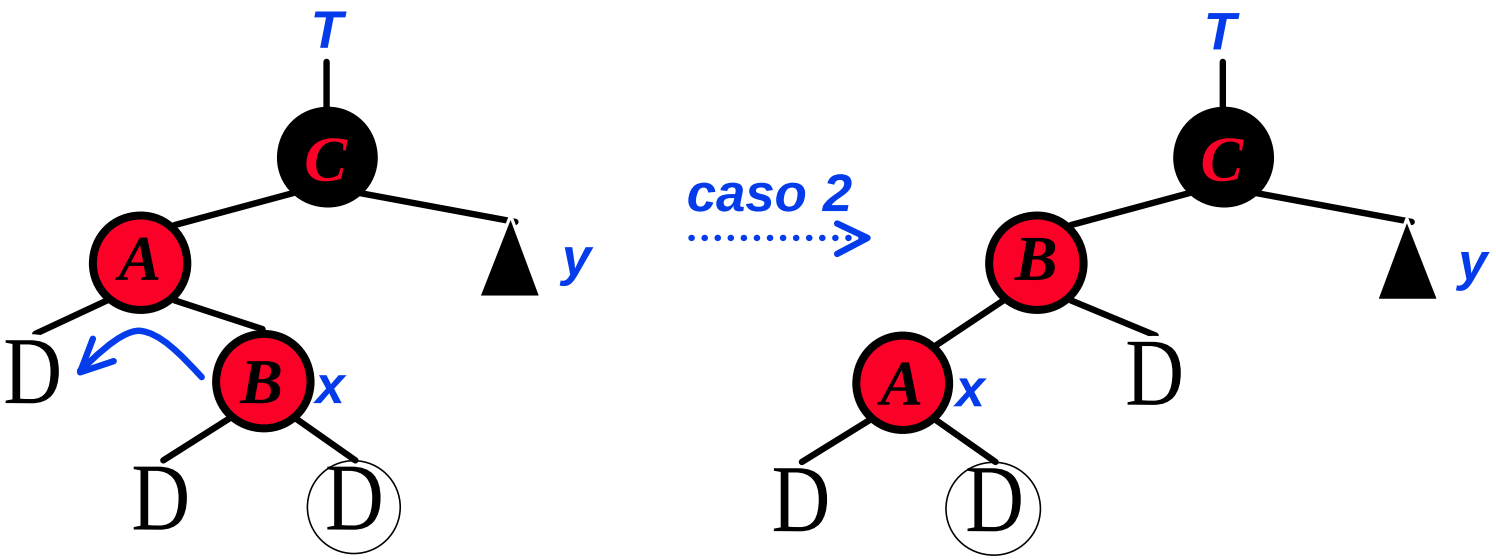


Si eseguono le stesse azioni sia quando x è un figlio sinistro o un figlio destro

Inserimento in alberi RB: Caso 2

Caso 2:

- **il figlio *y* di *T* è nero**
- ***x* è un filgio destro**
- **Trasformiamo nel caso 3 con rotazione destra**



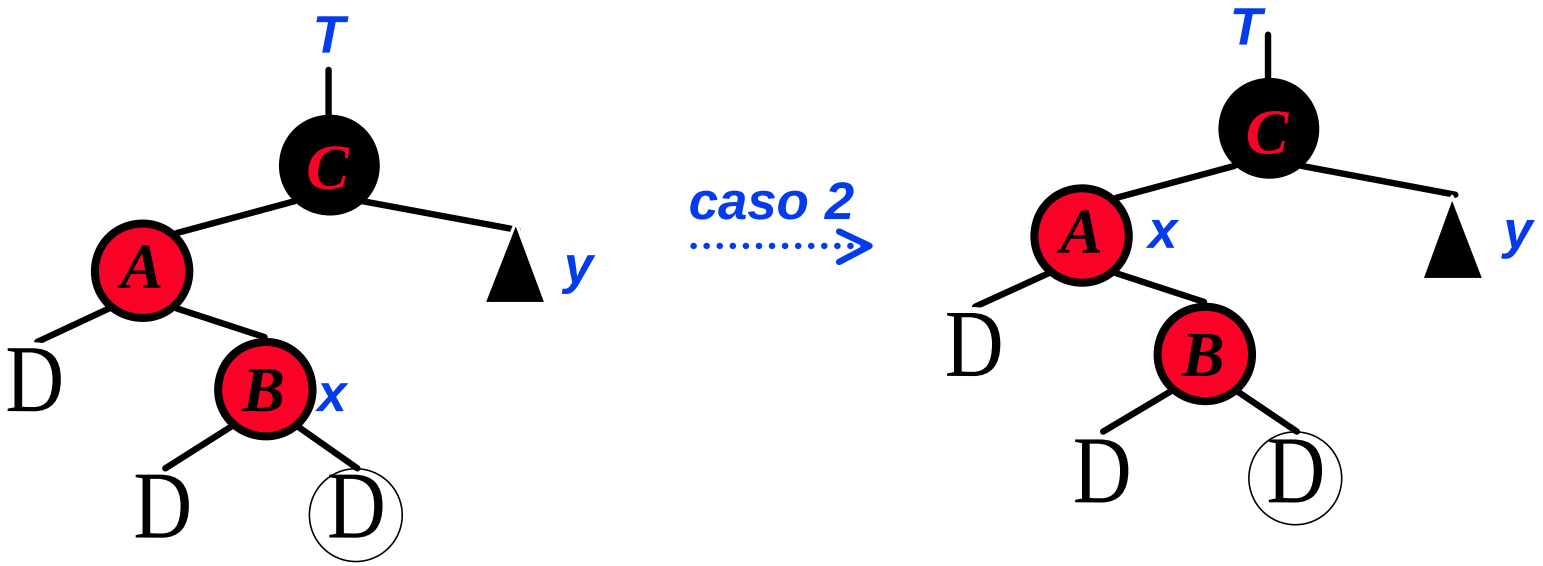
Trasformiamo il caso 2 nel caso 3 (x è figlio sinistro) con una rotazione destra. Ciò preserva il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengonolo stesso numero di nodi neri

Inserimento in alberi RB: Caso 2

```
figlio_sx[T] = Ruota-dx(figlio_sx[T])
return T
  // continua con caso 3
```

Caso 2:

- il figlio *y* di *T* è nero
- *x* è un filgio destro
- Trasformiamo nel caso 3 con rotazione destra



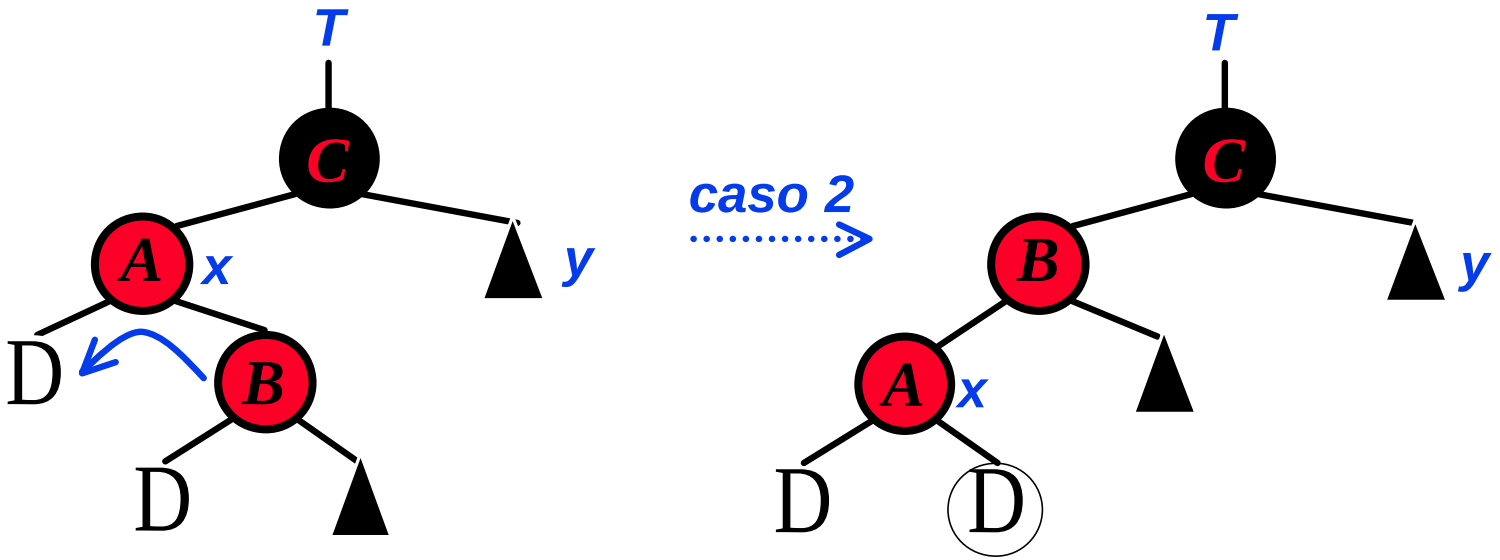
Trasformiamo il caso 2 nel caso 3 (x è figlio sinistro) con una rotazione destra. Ciò preserva il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengonolo stesso numero di nodi neri

Inserimento in alberi RB: Caso 2

```
figlio_sx[T] = Ruota-dx(figlio_sx[T])
return T
  // continua con caso 3
```

Caso 2:

- **il figlio *y* di *T* è nero**
- ***x* è un filgio destro**
- **Trasformiamo nel caso 3 con rotazione destra**

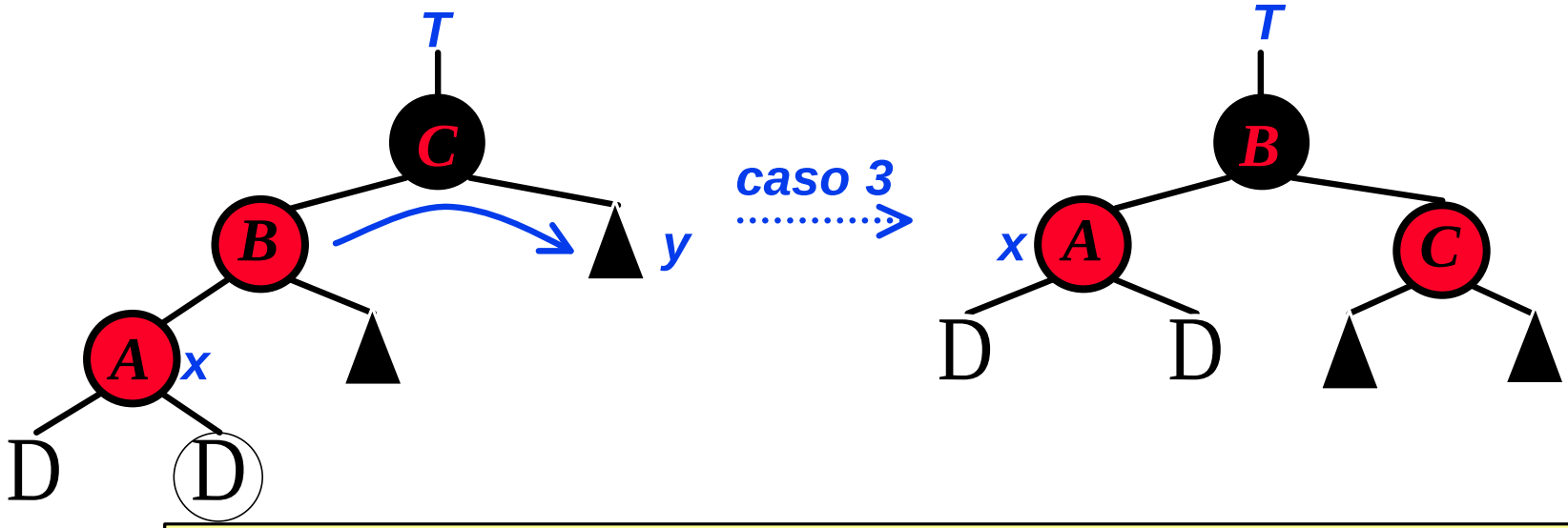


Trasformiamo il caso 2 nel caso 3 (x è figlio sinistro) con una rotazione destra. Ciò preserva il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengonolo stesso numero di nodi neri

Inserimento in alberi RB: Caso 3

Caso 3:

- il figlio *y* di *T* è nero
- *x* è un filgio sinistro
- Cambiare colori e rotazione sinistra



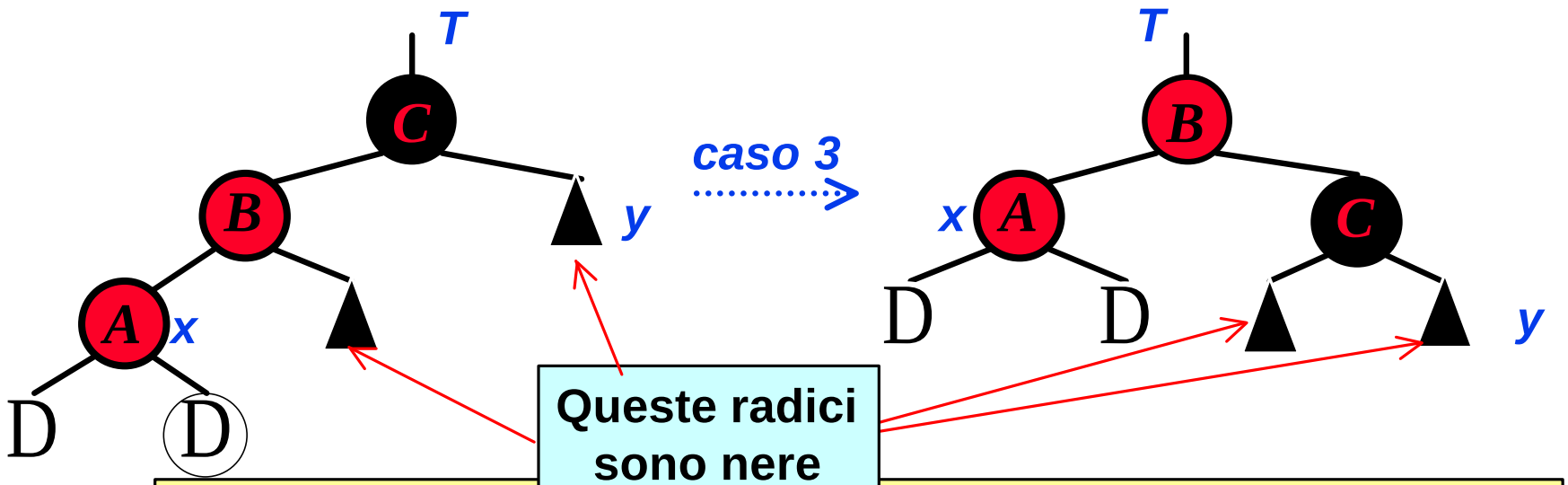
Eseguiamo alcuni cambi di colore e facciamo una rotazione sinistra. Di nuovo, preserviamo il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengono lo stesso numero di nodi neri.

Inserimento in alberi RB: Caso 3

```
T = Ruota_sx(T);
colore[T] = black;
colore[figlio_dx[T]] = red;
return T;
```

Caso 3:

- il figlio *y* del padre del padre di *x* è nero
- *x* è un filgio sinistro
- Cambiare colori e rotazione sinistra



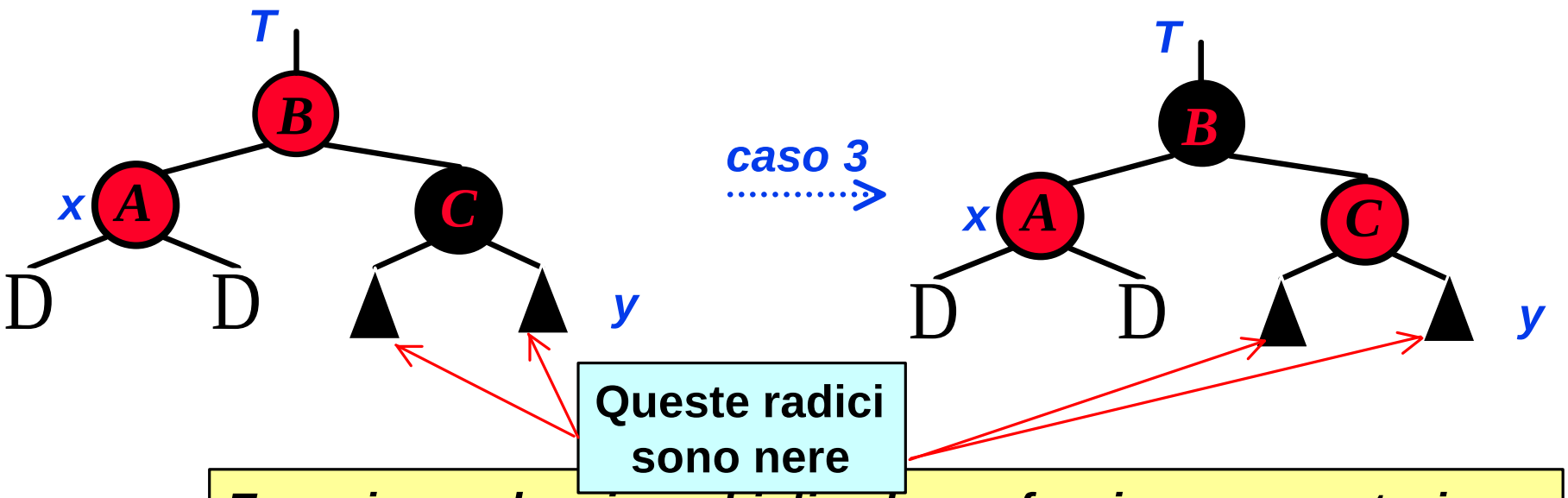
Eseguiamo alcuni cambi di colore e facciamo una rotazione sinistra. Di nuovo, preserviamo il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengono lo stesso numero di nodi neri.

Inserimento in alberi RB: Caso 3

```
T = Ruota_sx(T)
colore[T] = black;
colore[figlio_dx[T]] = red;
return T
```

Caso 3:

- il figlio *y* del padre del padre di *x* è nero
- *x* è un filgio sinistro
- Cambiare colori e rotazione sinistra



Eseguiamo alcuni cambi di colore e facciamo una rotazione sinistra. Di nuovo, preserviamo il vincolo 4: tutti i percorsi sotto x contengono lo stesso numero di nodi neri.

Bilanciamento in alberi Red-Black

```
albero-RB Bilancia_sx_1(T)
    colore[T]=red;
    colore[figlio_dx[T]]=black;
    colore[ figlio_sx[T]]=black;
    return T;
```

```
albero-RB Bilancia_sx_2(T)
    figlio_sx[T] = Ruota_dx(figlio_sx[T]);
    return T;
```

```
albero-RB Bilancia_sx_3(T)
    T = Ruota_sx(T)
    colore[T]=black;
    colore[figlio_dx[T]]=red;
    return T;
```

Bilanciamento del sottoalbero sinistro

```
albero-RB Bilancia_sx(T)
  IF ha_figlio(figlio_sx[T])
        v = Tipo_violazione_sx(figlio_sx[T],figlio_dx[T])
              /* v = 0   nessuna violazione */
         CASE v OF
              1:    T = Bilancia_sx_1(T);
              2:    T = Bilancia_sx_2(T);
                    T = Bilancia_sx_3(T);
              3:    T = Bilancia_sx_3(T);
  return T;
```

Inserimento in alberi RB: Casi 4-6

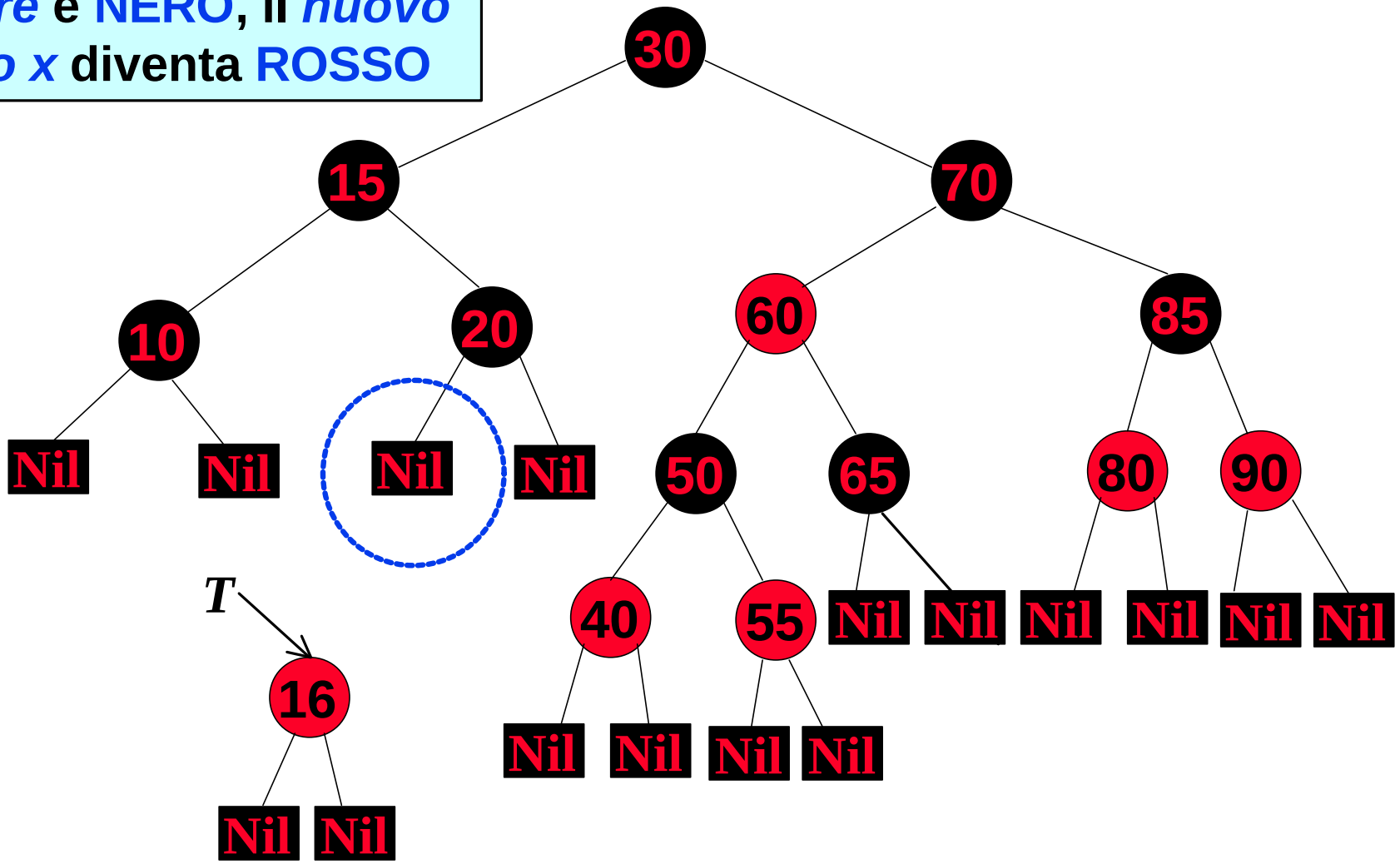
- **I casi 1-3 assumono che il figlio di T, che viola con un nipote di T, sia un figlio sinistro.**

- **Se il figlio di T, che viola con nipote di T, è un figlio destro si applicano i casi 4-6, che sono simmetrici (dobbiamo solo scambiare *sinistro* con *destro* e viceversa).**

L'estensione dell'algoritmo ai *casi 4-6* è lasciato come *esercizio*

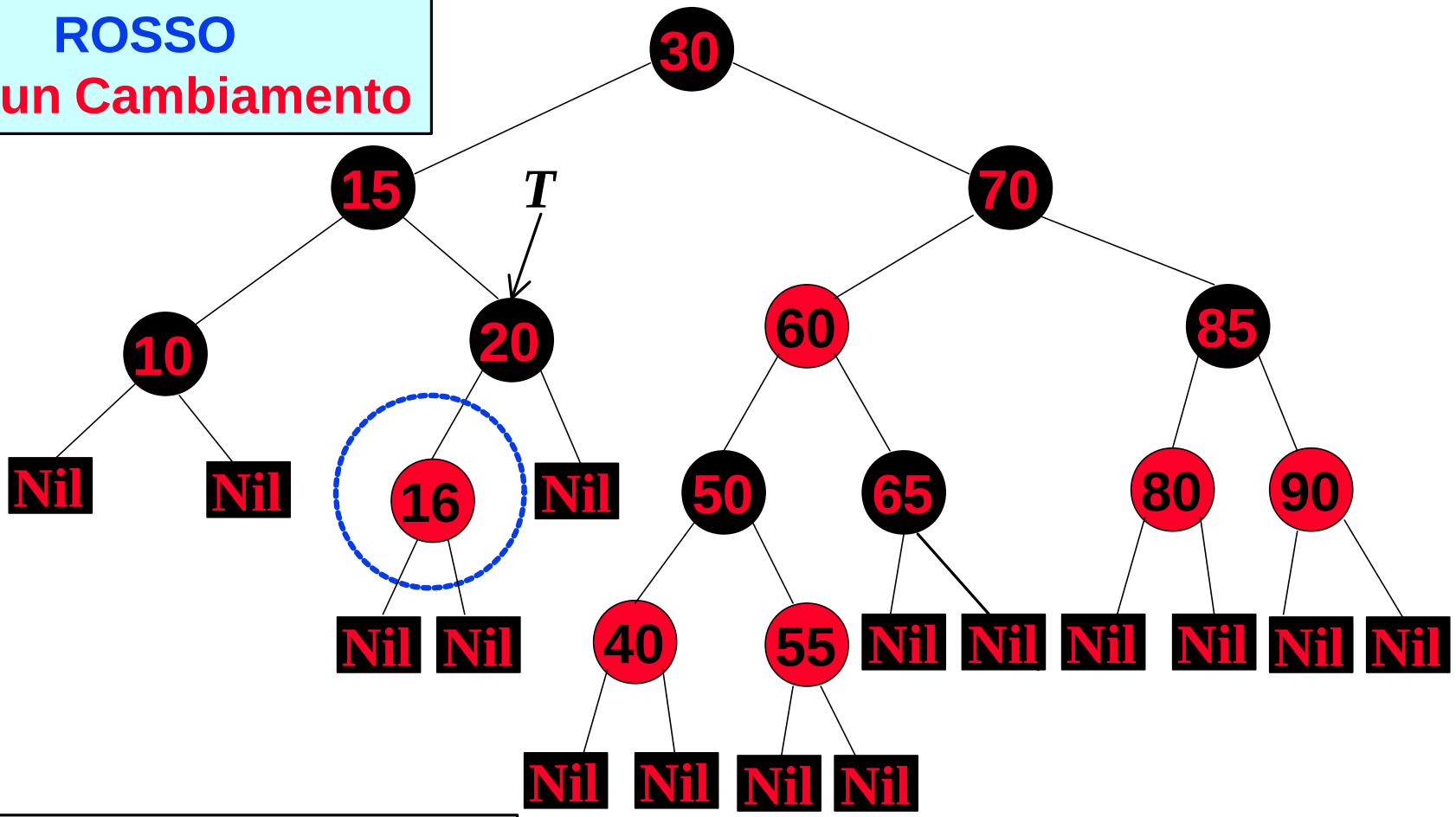
Inserimento in alberi Red-Black: I

Il *padre* è NERO, il *nuovo nodo x* diventa ROSSO



Inserimento in alberi Red-Black: I

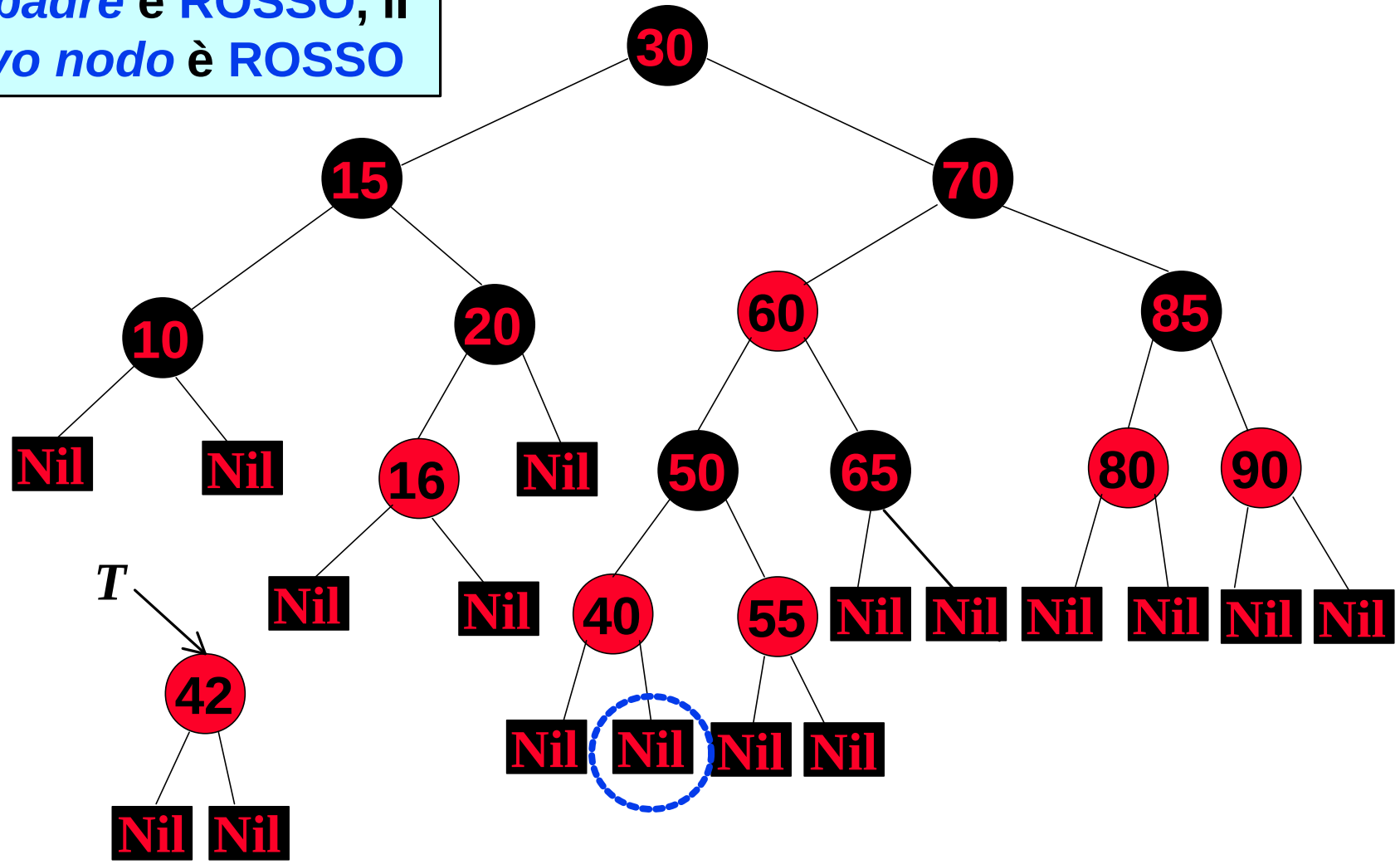
Il *T* è NERO, il *nuovo nodo inserito* diventa ROSSO
Nessun Cambiamento



Non cambia l'altezza nera di nessun nodo!

Inserimento in alberi Red-Black: II

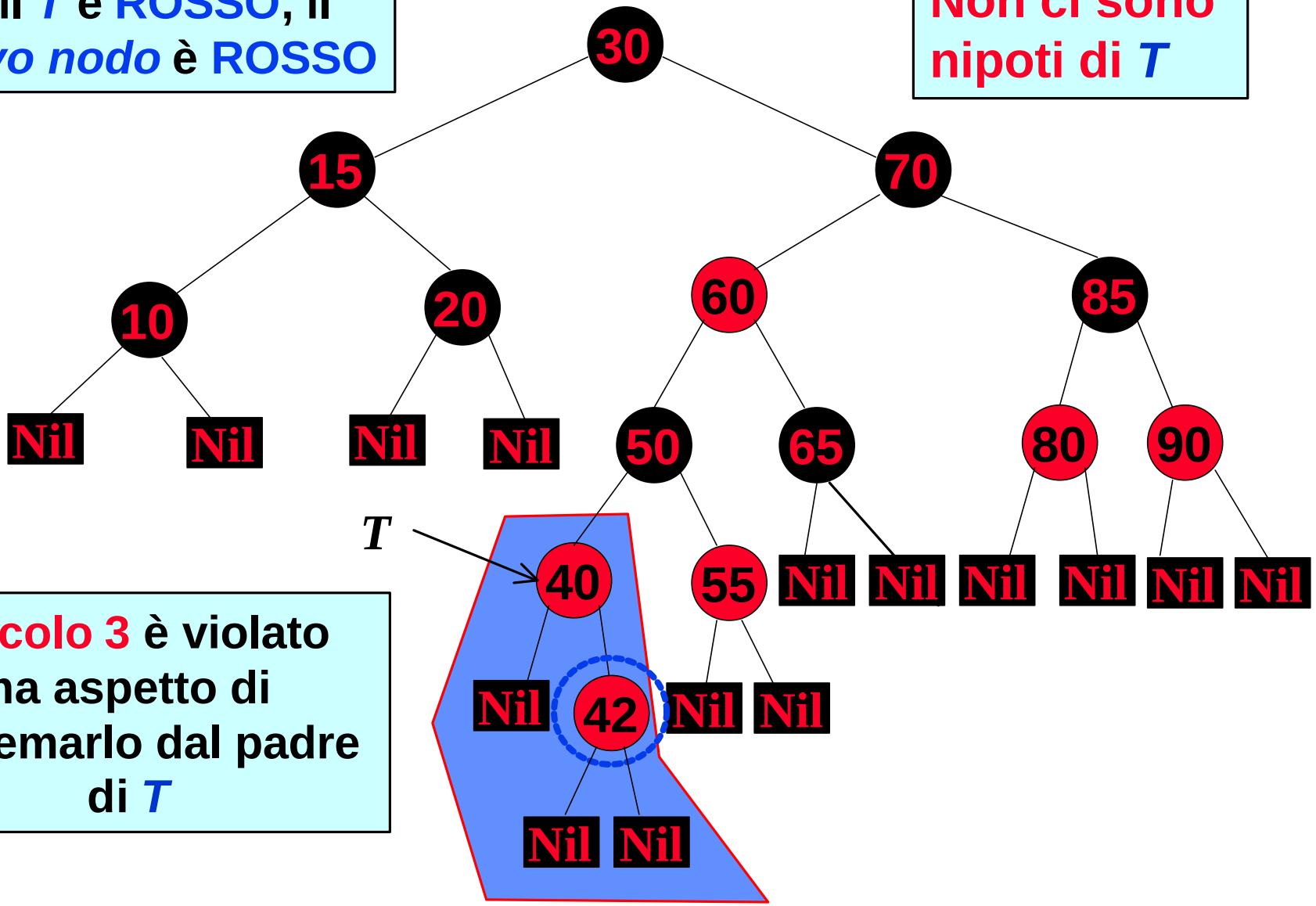
Se il *padre* è ROSSO, il *nuovo nodo* è ROSSO



Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *T* è ROSSO, il *nuovo nodo* è ROSSO

Non ci sono nipoti di *T*

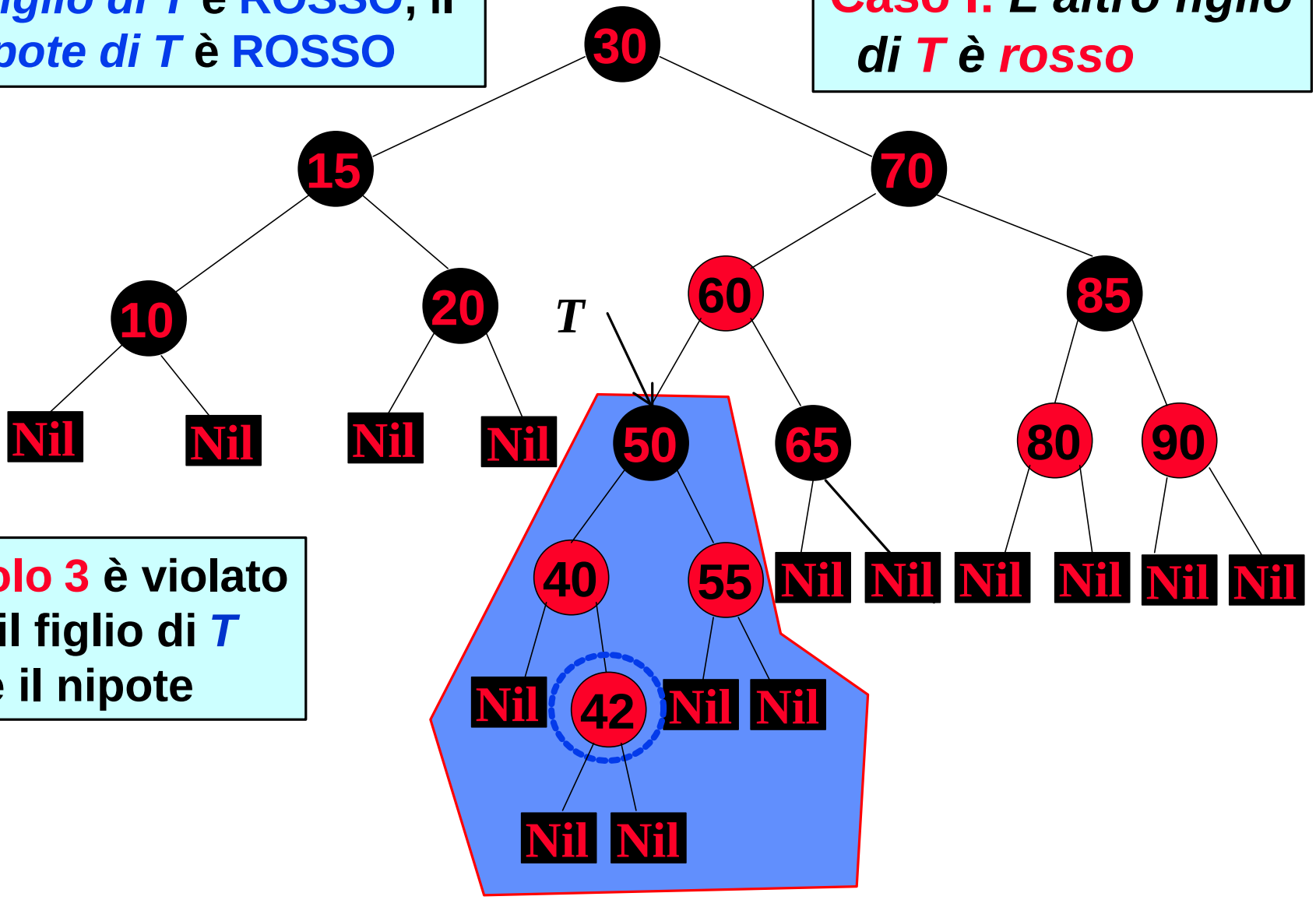


Vincolo 3 è violato ma aspetto di risistemarlo dal padre di *T*

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio di T* è ROSSO, il *nipote di T* è ROSSO

Caso I: *L'altro figlio di T* è *rosso*

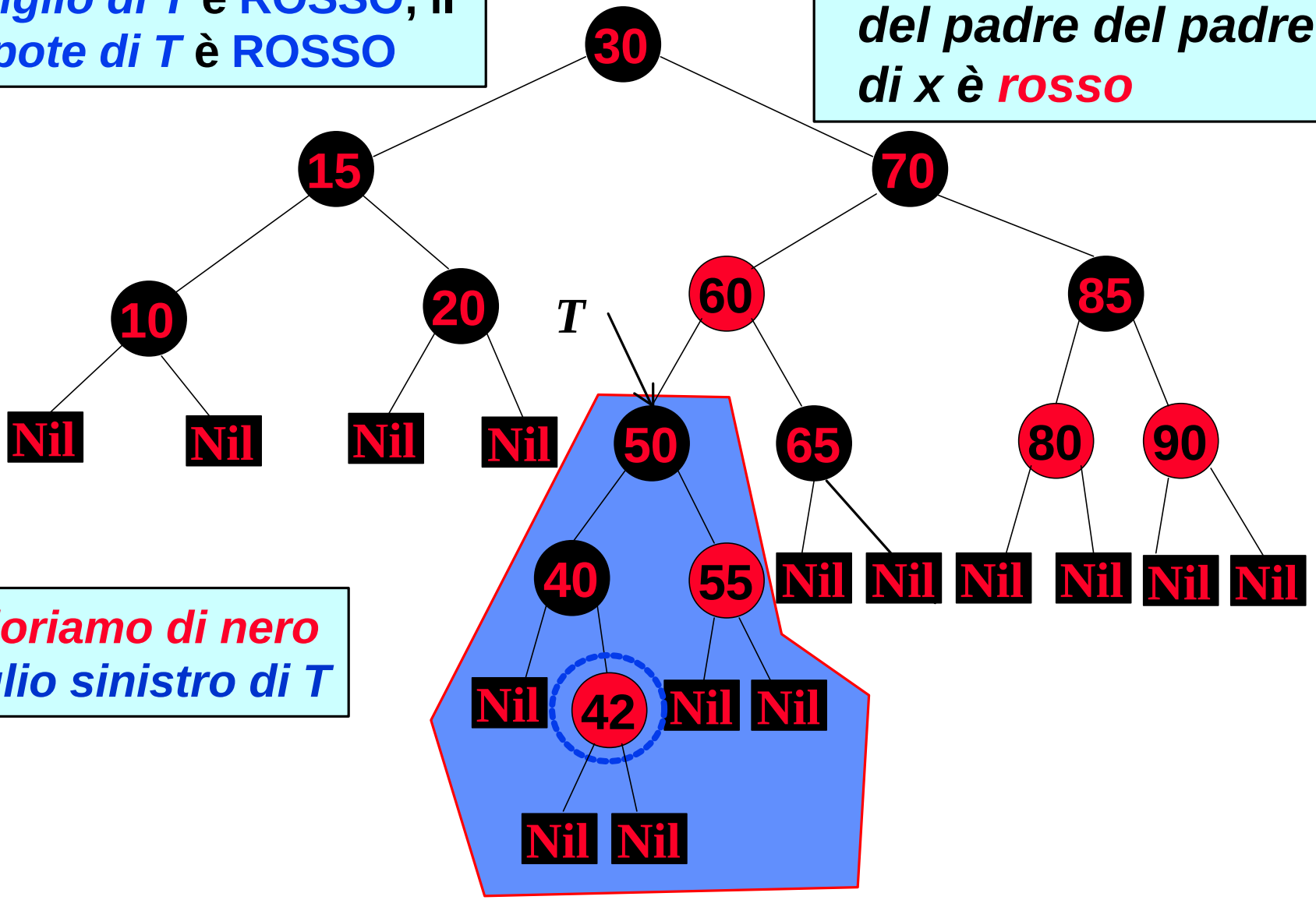


Vincolo 3 è violato tra il figlio di *T* e il nipote

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio di T* è ROSSO, il *nipote di T* è ROSSO

Caso I: ***L'altro figlio del padre del padre di x è rosso***

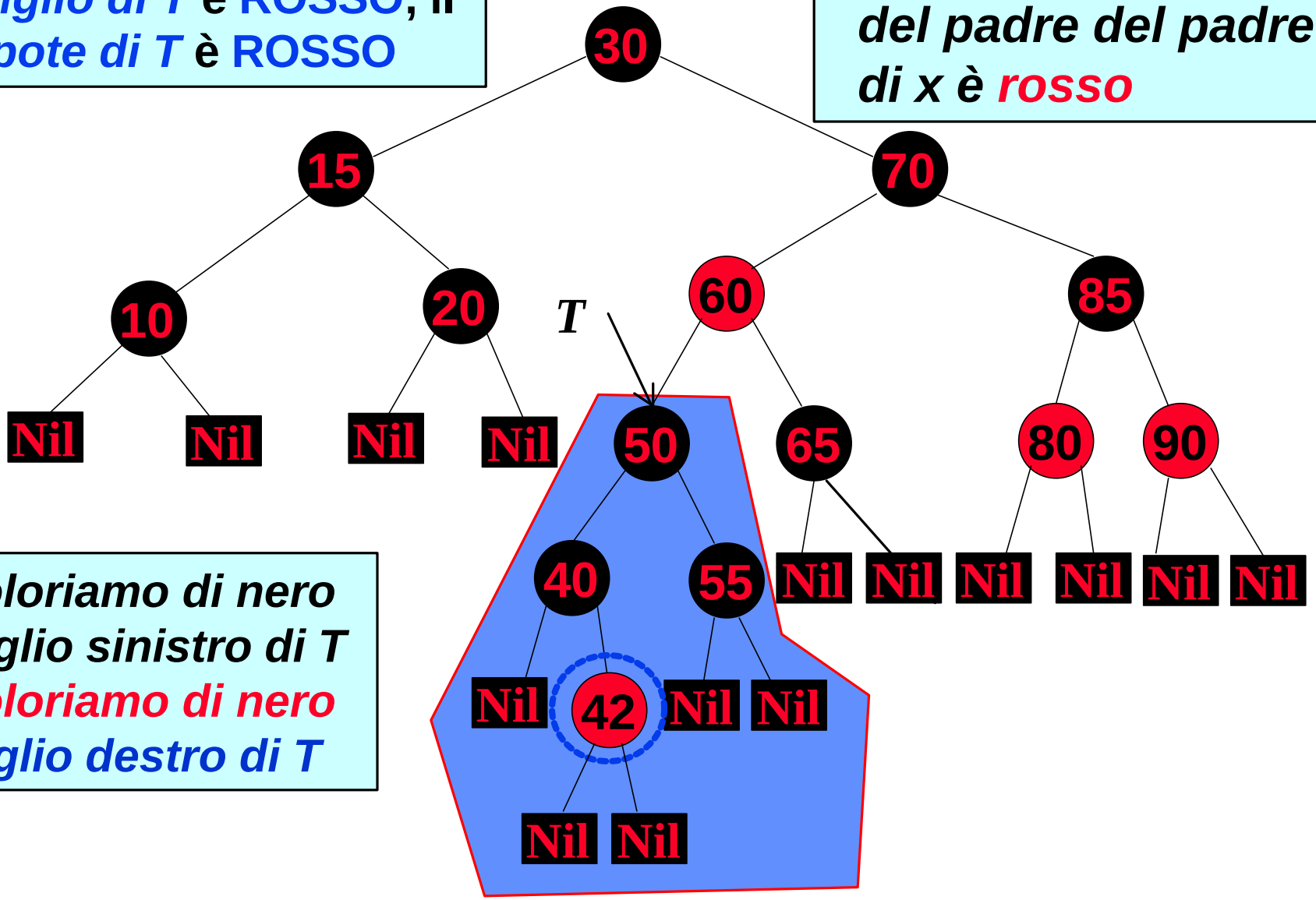


- ***Coloriamo di nero il figlio sinistro di T***

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio di T* è ROSSO, il *nipote di T* è ROSSO

Caso I: *L'altro figlio del padre del padre di x è rosso*

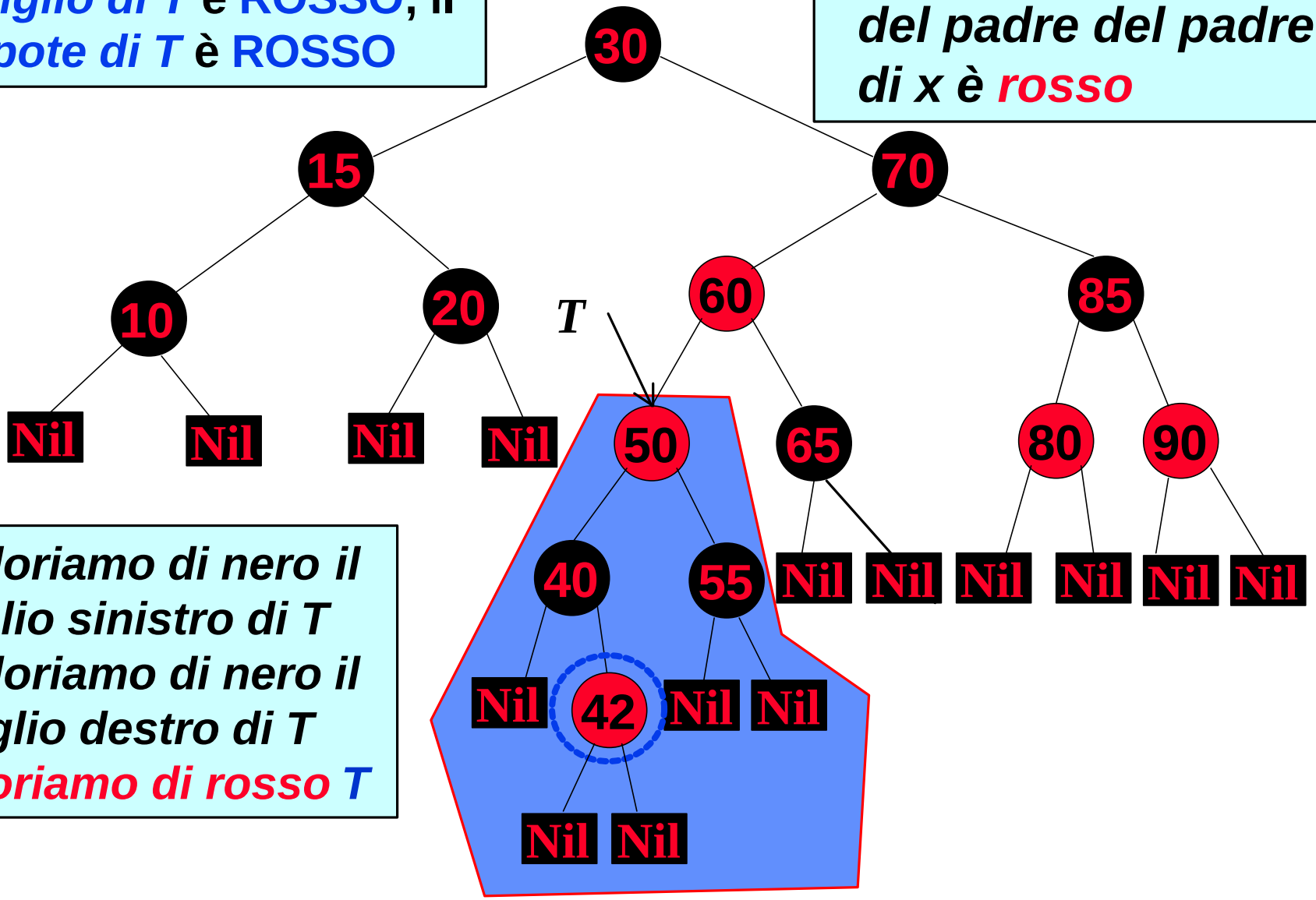


- ***Coloriamo di nero il figlio sinistro di T***
- ***Coloriamo di nero il figlio destro di T***

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio di T* è ROSSO, il *nipote di T* è ROSSO

Caso I: ***L'altro figlio del padre del padre di x è rosso***

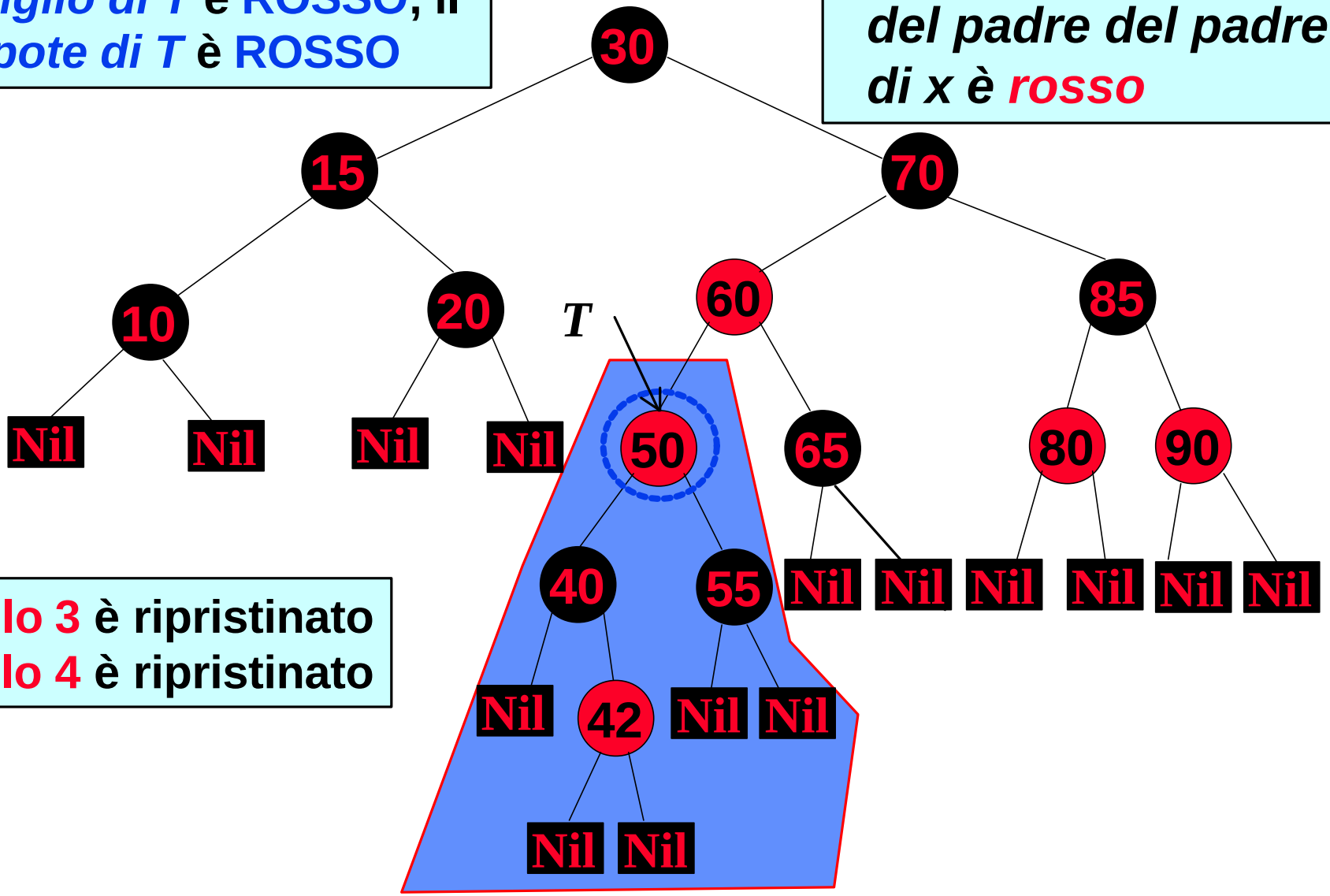


- *Coloriamo di nero il figlio sinistro di T*
- *Coloriamo di nero il figlio destro di T*
- *Coloriamo di rosso T*

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio di T* è ROSSO, il *nipote di T* è ROSSO

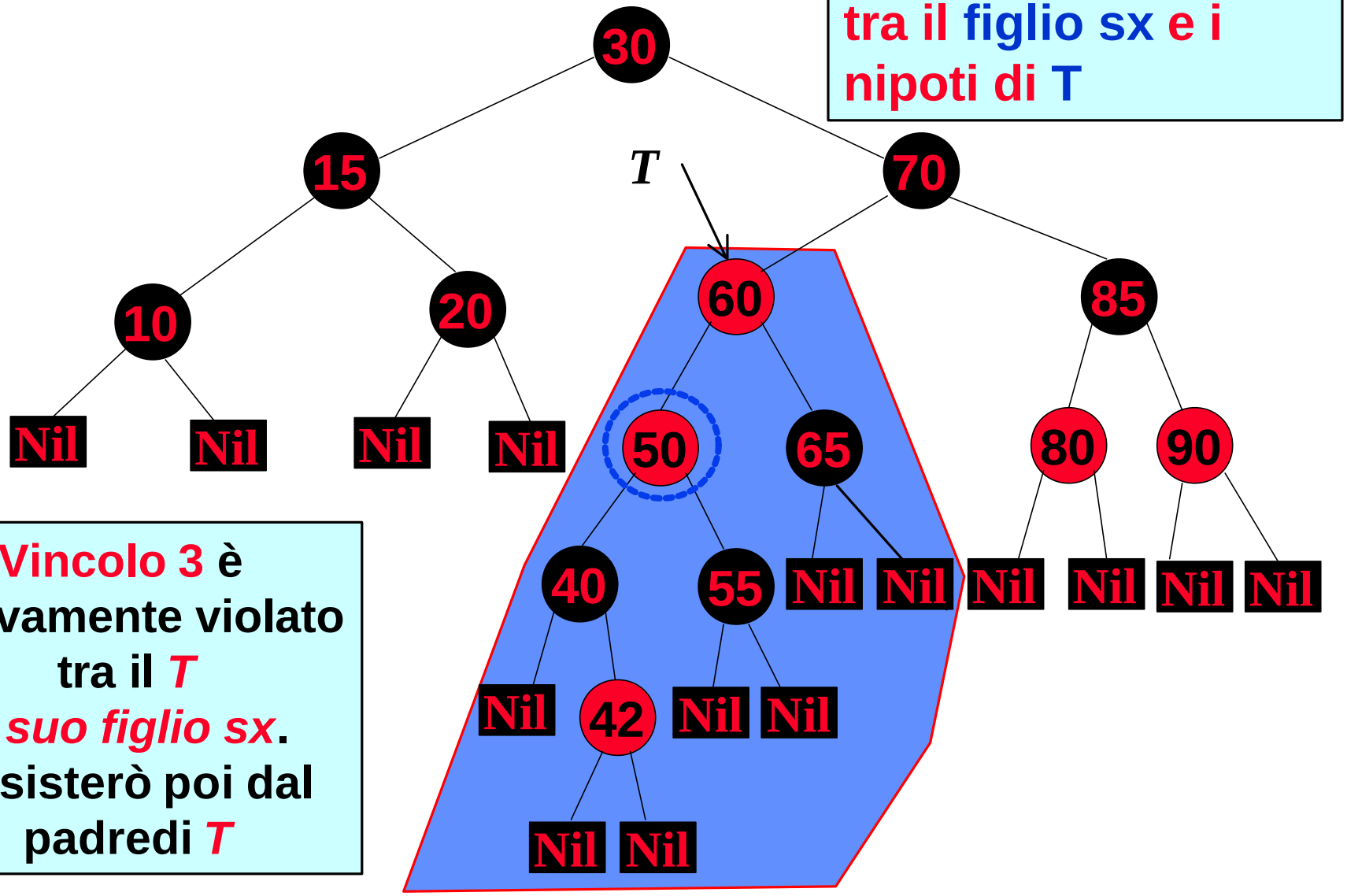
Caso I: ***L'altro figlio del padre del padre di x è rosso***



Vincolo 3 è ripristinato
Vincolo 4 è ripristinato

Inserimento in alberi Red-Black: II

Nessuna violazione tra il figlio sx e i nipoti di T

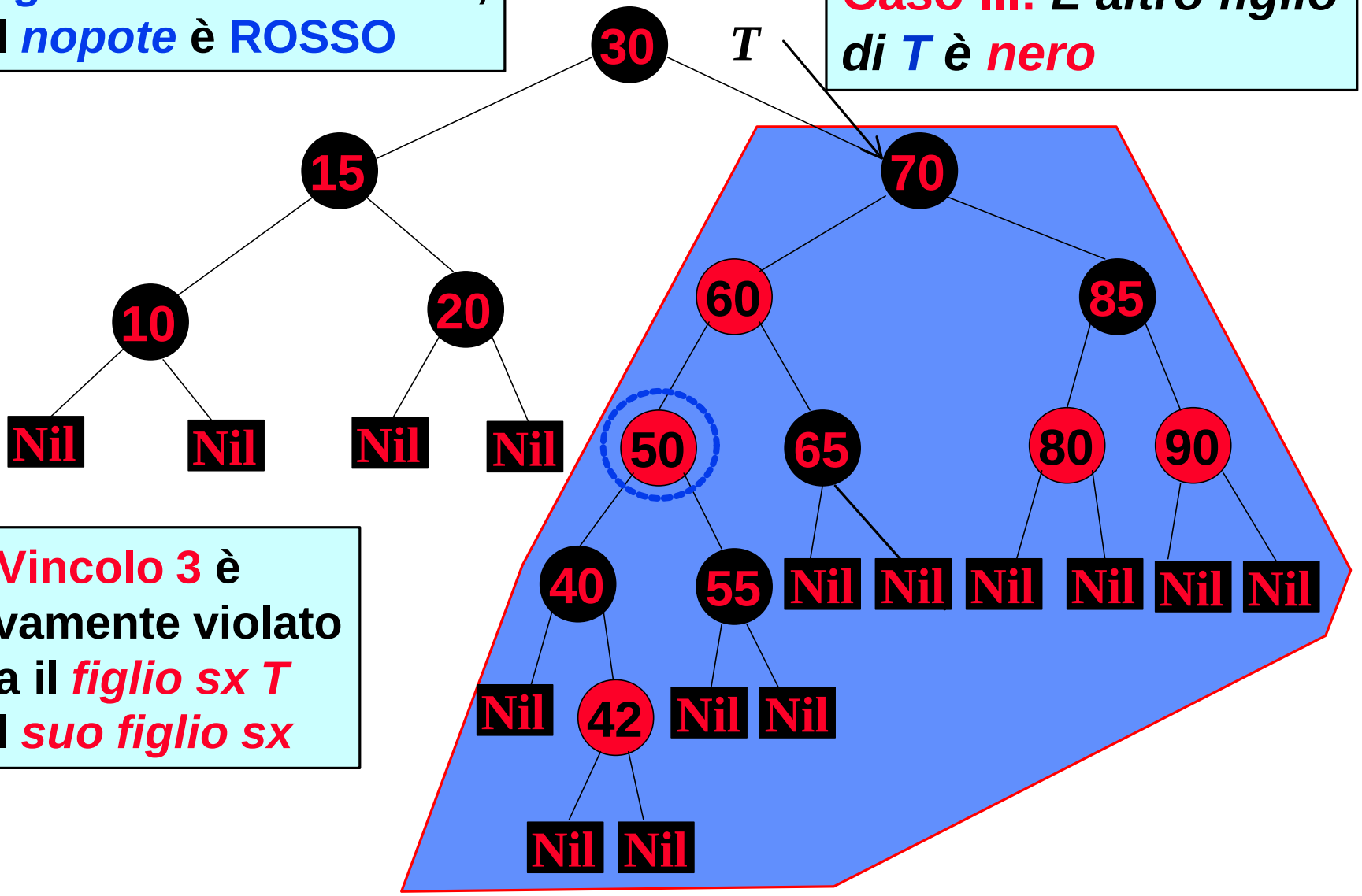


Vincolo 3 è nuovamente violato tra il *T* e *suo figlio sx*. Lo sisterò poi dal padredi *T*

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio sx di T* è ROSSO, il *nopote* è ROSSO

Caso III: *L'altro figlio di T è nero*

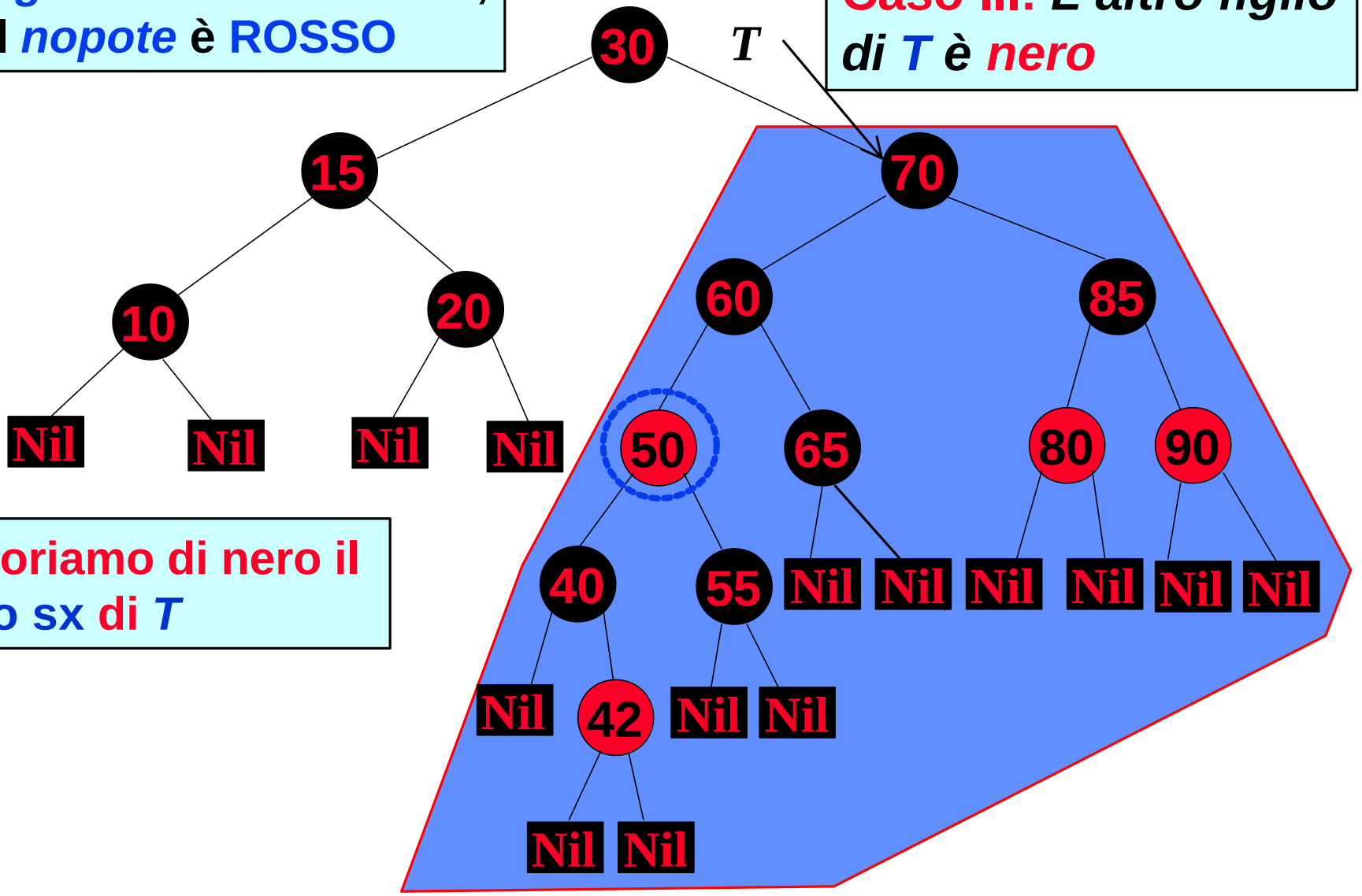


Vincolo 3 è nuovamente violato tra il *figlio sx T* e il *suo figlio sx*

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio sx di T* è ROSSO, il *nopote* è ROSSO

Caso III: *L'altro figlio di T è nero*

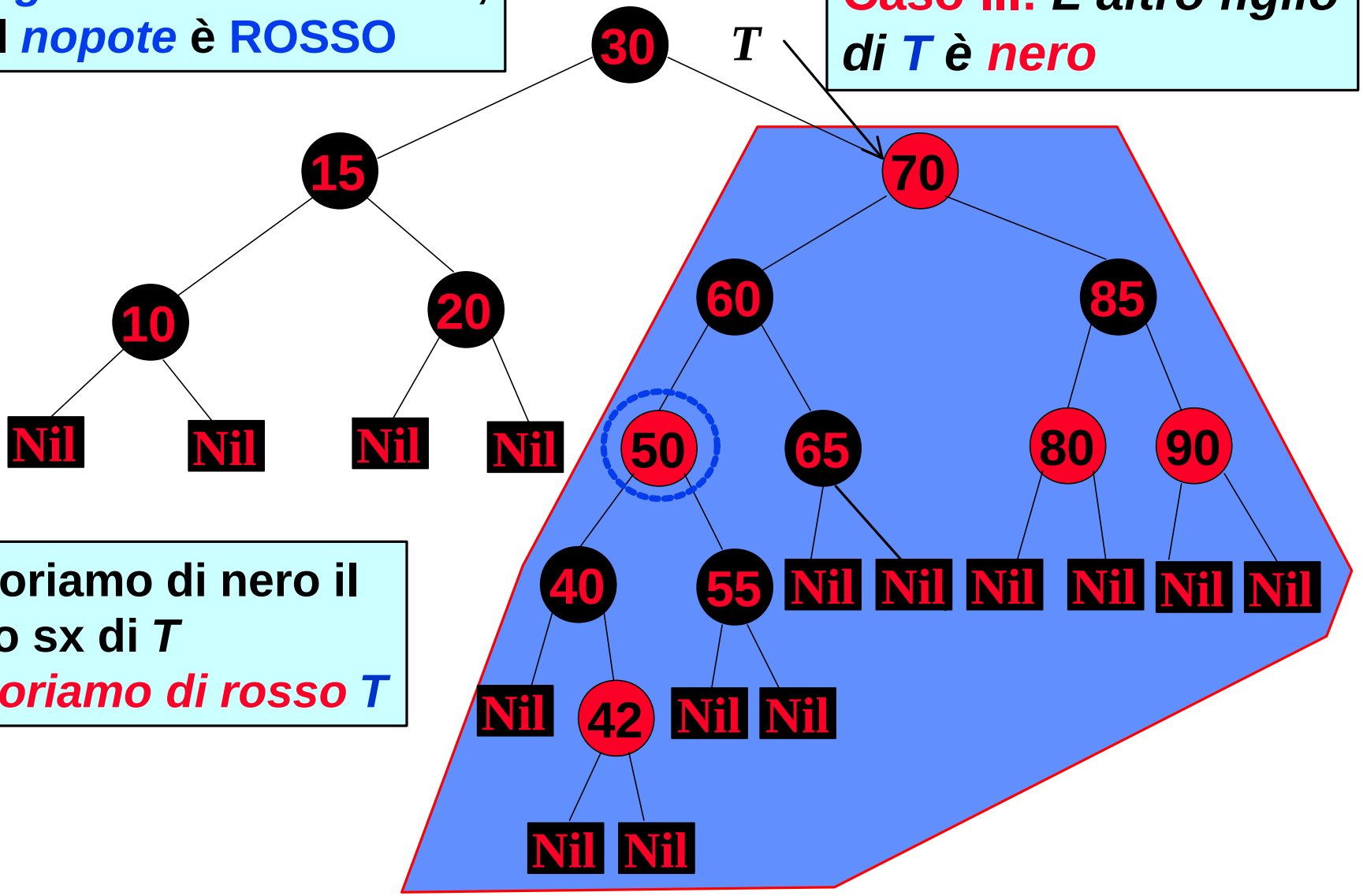


•Coloriamo di nero il figlio sx di *T*

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio sx di T* è ROSSO, il *nopote* è ROSSO

Caso III: *L'altro figlio di T è nero*

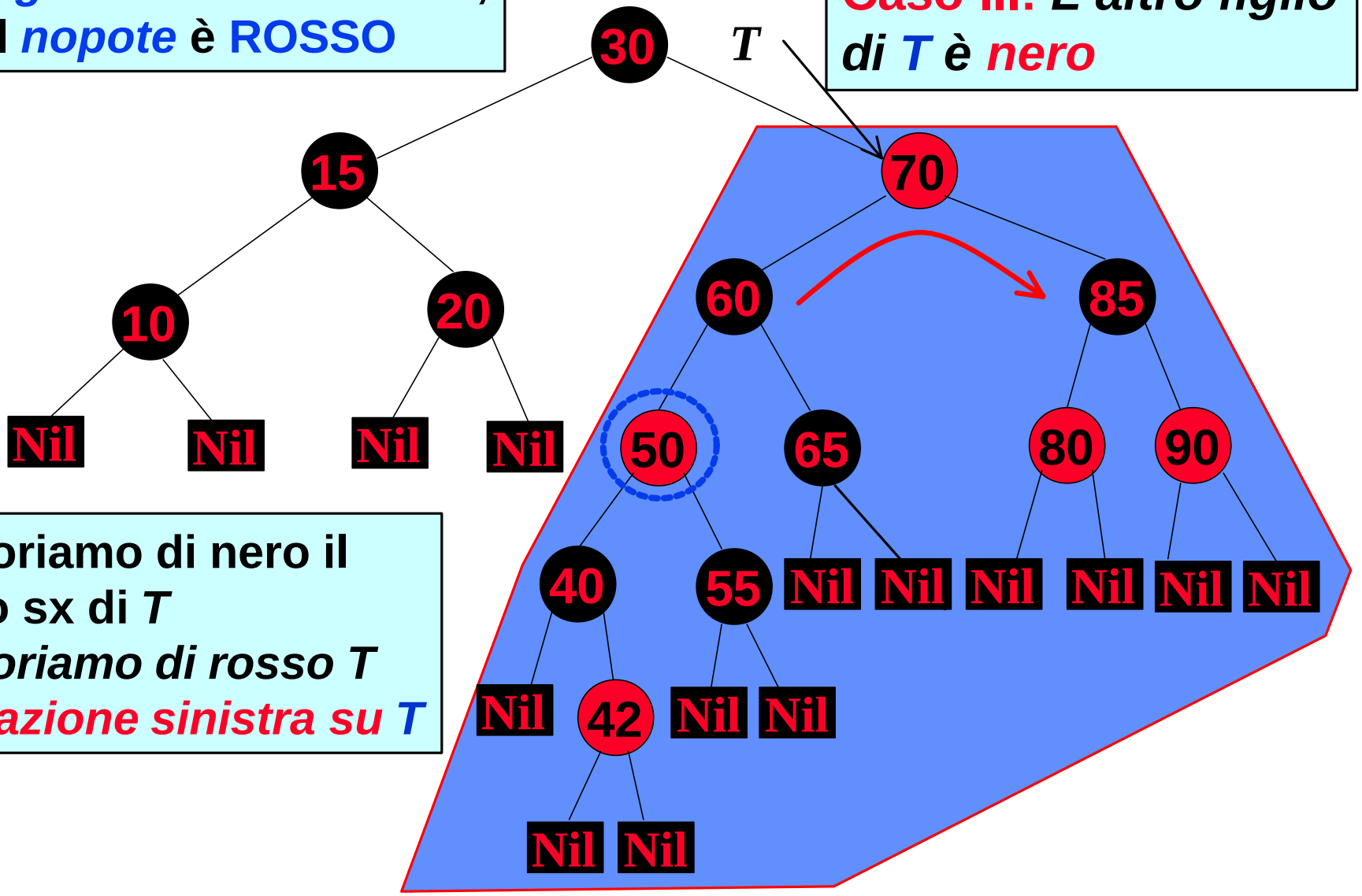


- **Coloriamo di nero il figlio sx di *T***
- ***Coloriamo di rosso T***

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio sx di T* è ROSSO, il *nopote* è ROSSO

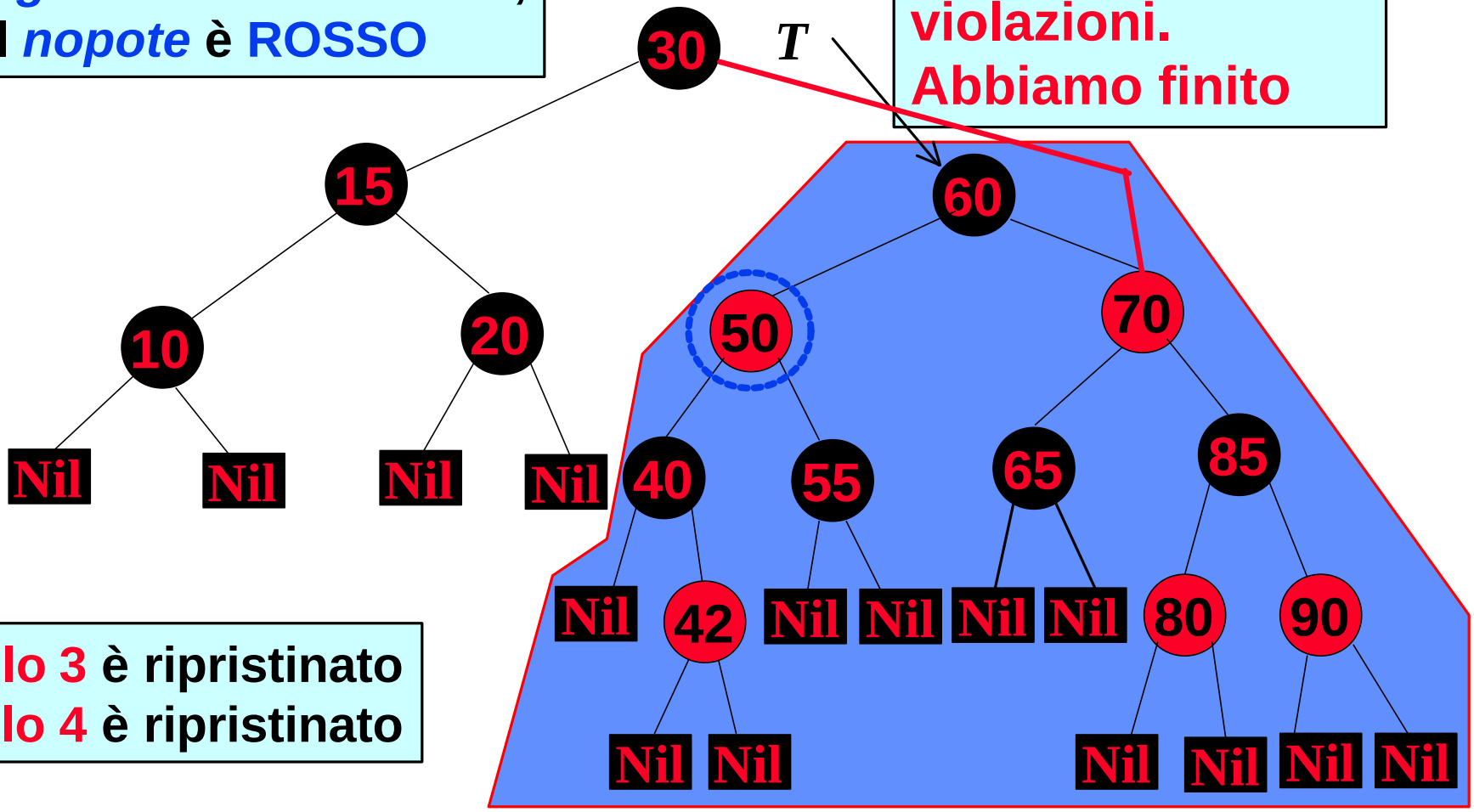
Caso III: *L'altro figlio di T è nero*



- **Coloriamo di nero il figlio sx di *T***
- ***Coloriamo di rosso T***
- ***Rorazione sinistra su T***

Inserimento in alberi Red-Black: II

Se il *figlio sx di T* è ROSSO, il *nopote* è ROSSO

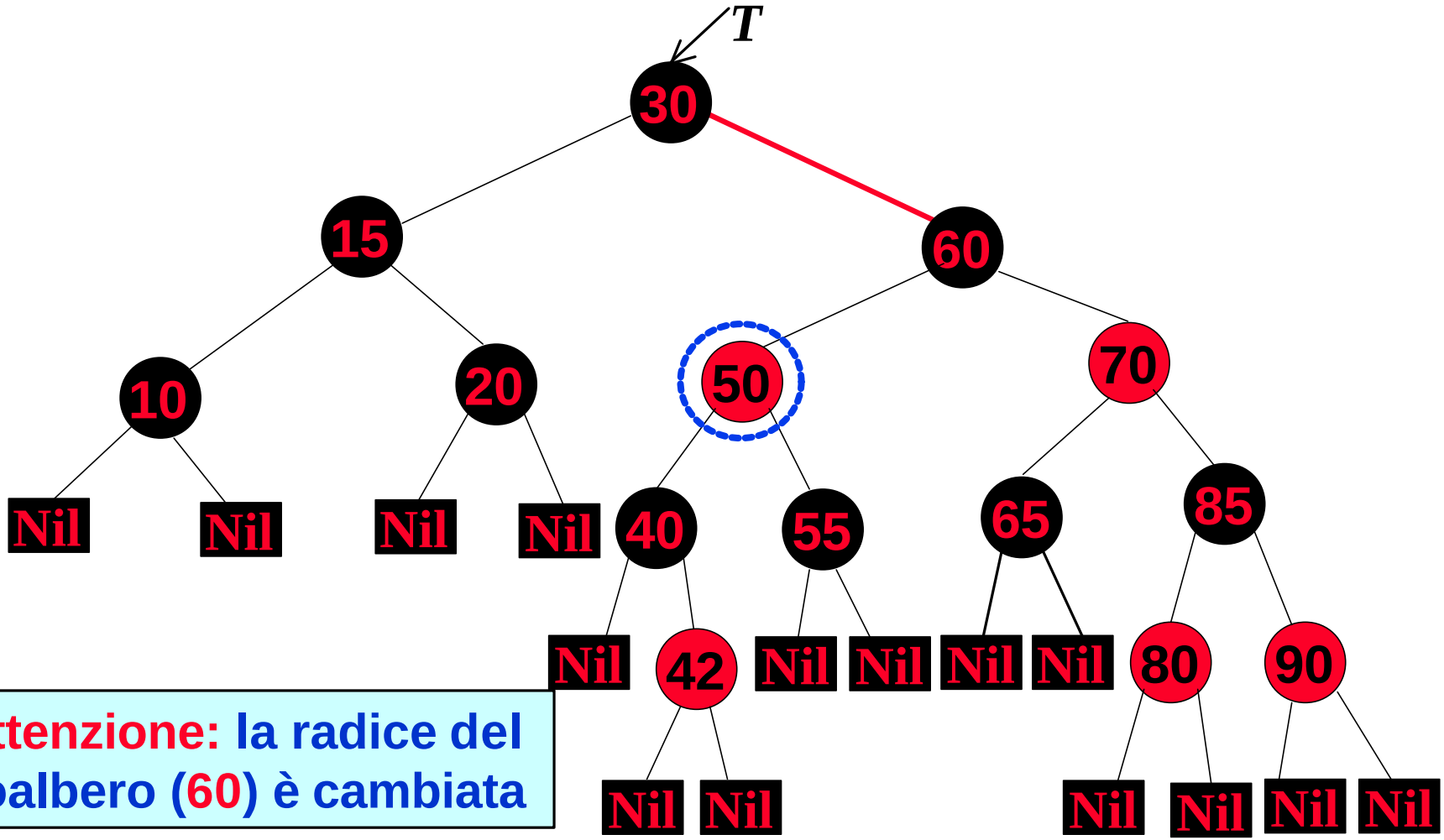


Non ci sono altre violazioni. Abbiamo finito

Vincolo 3 è ripristinato
Vincolo 4 è ripristinato

Ma attenzione: la radice del sottoalbero è cambiata

Inserimento in alberi Red-Black: II



Ma attenzione: la radice del sottoalbero (60) è cambiata

figlio_dx[T] = INS_RB(k,figlio_dx[T],T)
al ritorno della chiamnata ricorsiva risistema l'albero dopo le rotazioni