Algoritmi e Strutture Dati (Mod. A)

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Ma quanto può essere efficiente, in principio, un algoritmo di ordinamento?

Questa è una delle domande più ambiziose e interessanti

ma anche una delle più difficili!

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Ma quanto può essere efficiente, in principio, un algoritmo di ordinamento?

La difficoltà risiede nel fatto che non ci stiamo chiedendo quae sia l'efficienza di uno specifico algoritmo di ordinamento, ma qual è il minimo tempo di esecuzione di un qualunque algoritmo di ordinamento.

La risposta richiederebbe quindi di considerare tutti i possibili algoritmi di ordinamento, anche quelli mai implementati.

Limite Inferiore per l'Ordinamento

In generale, per rispondere ad una domanda del tipo "qual è il modo più veloce per eseguire un compito" dobbiamo definire prima

quali strumenti abbiamo a disposizione

La risposta infatti dipende in genere proprio da questo.

Limite Inferiore per l'Ordinamento

In generale, per rispondere ad una domanda del tipo "qual è il modo più veloce per eseguire un compito" dobbiamo definire prima

quali strumenti abbiamo a disposizione

Nel caso dell'ordinamento considerereremo come unico strumento

il confronto di elementi a coppie

Il problema dell'ordinamento può essere risolto utilizzando solo dei confronti tra elementi

Assunzione sugli elementi

Supponiamo di voler ordinare n elementi

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

Assumiamo che tutti gli elementi siano distinti

Questo significa che:

per ogni coppia di elementi K_i e K_j, se $i \neq j$ allora

- $K_i < K_j$ **oppure**
- $K_i > K_j$

Alberi di Decisione

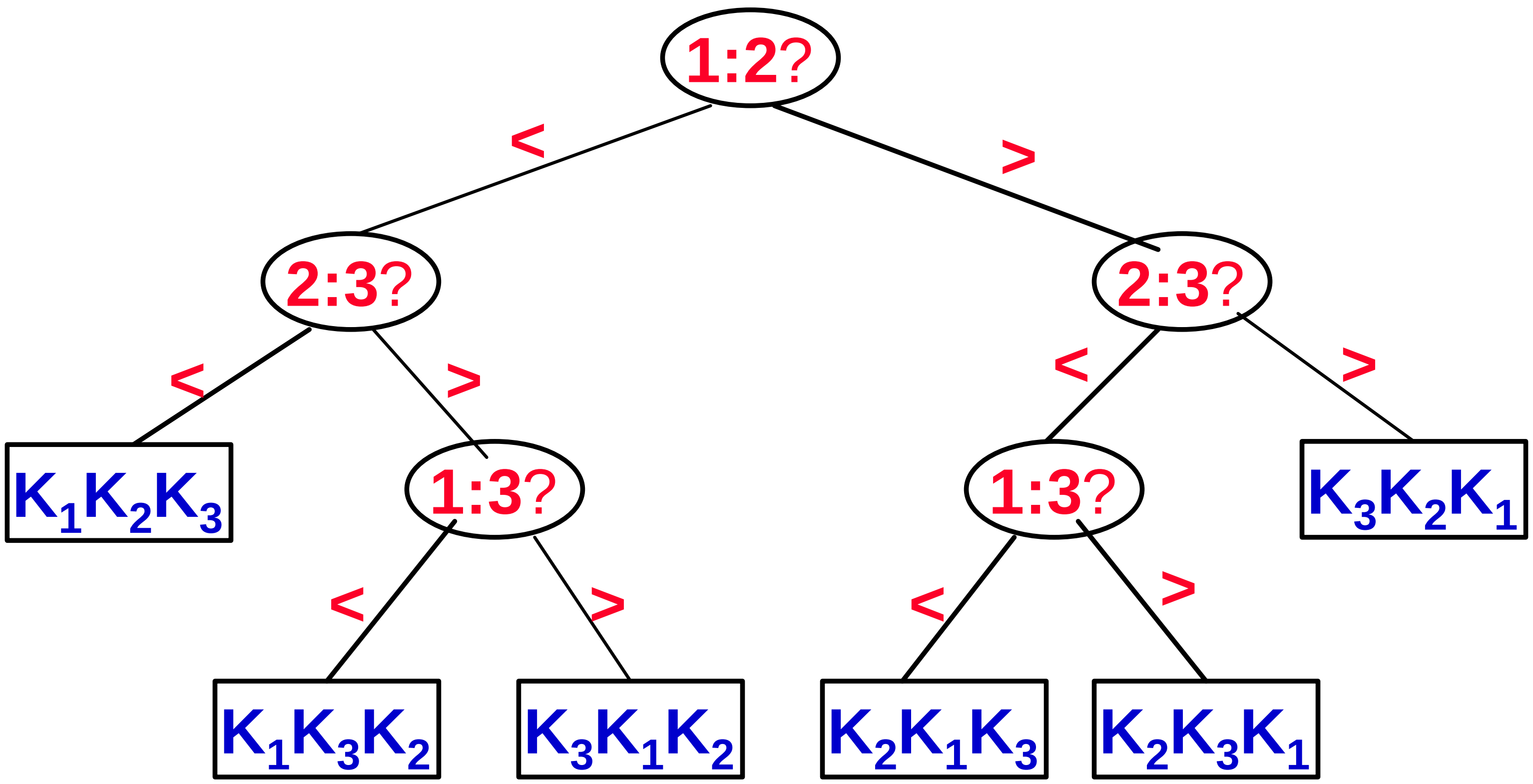
Per analizzare il problema che ci siamo posti, utilizzeremo come strumento teorico quello degli "Alberi di Decisione" (o Alberi di Confronto).

Gli Alberi di Decisione ci permettono di rappresentare un qualsiasi algoritmo di ordinamento basato su confronto di elementi

Alberi di Decisione: esempio

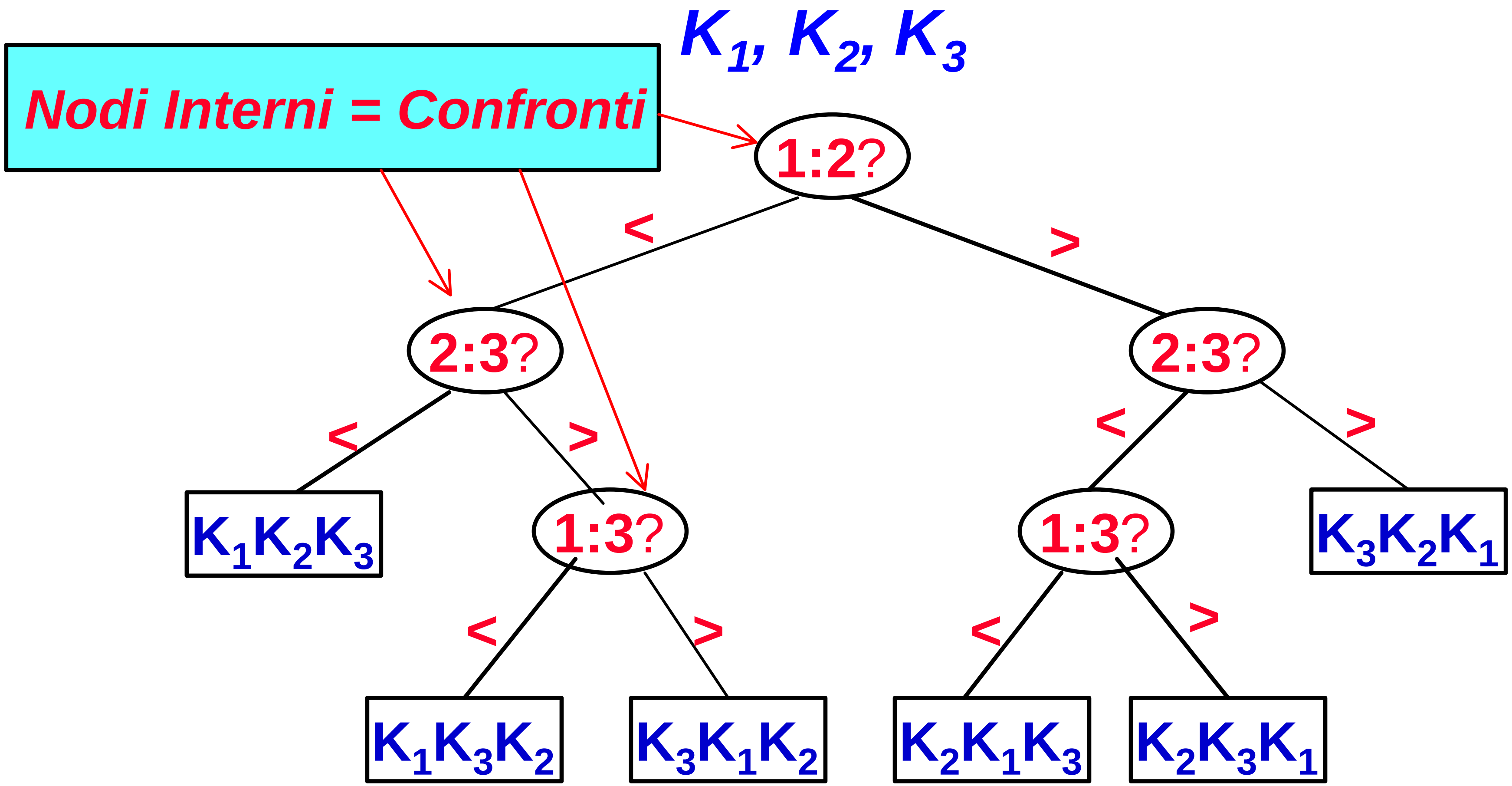
Siano dati tre elementi arbitrari:

K_1, K_2, K_3



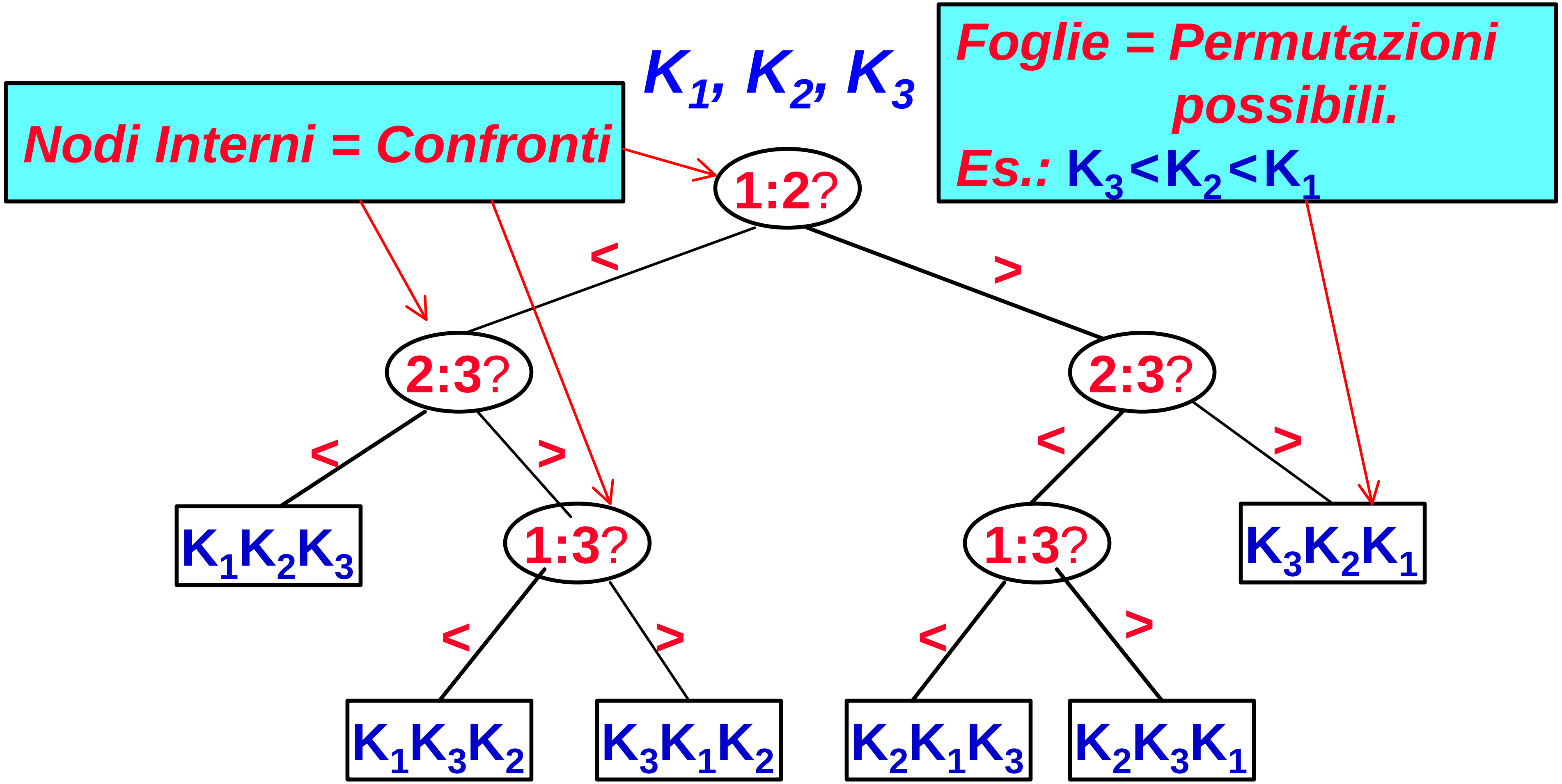
Alberi di Decisione: esempio

Siano dati tre elementi arbitrari:



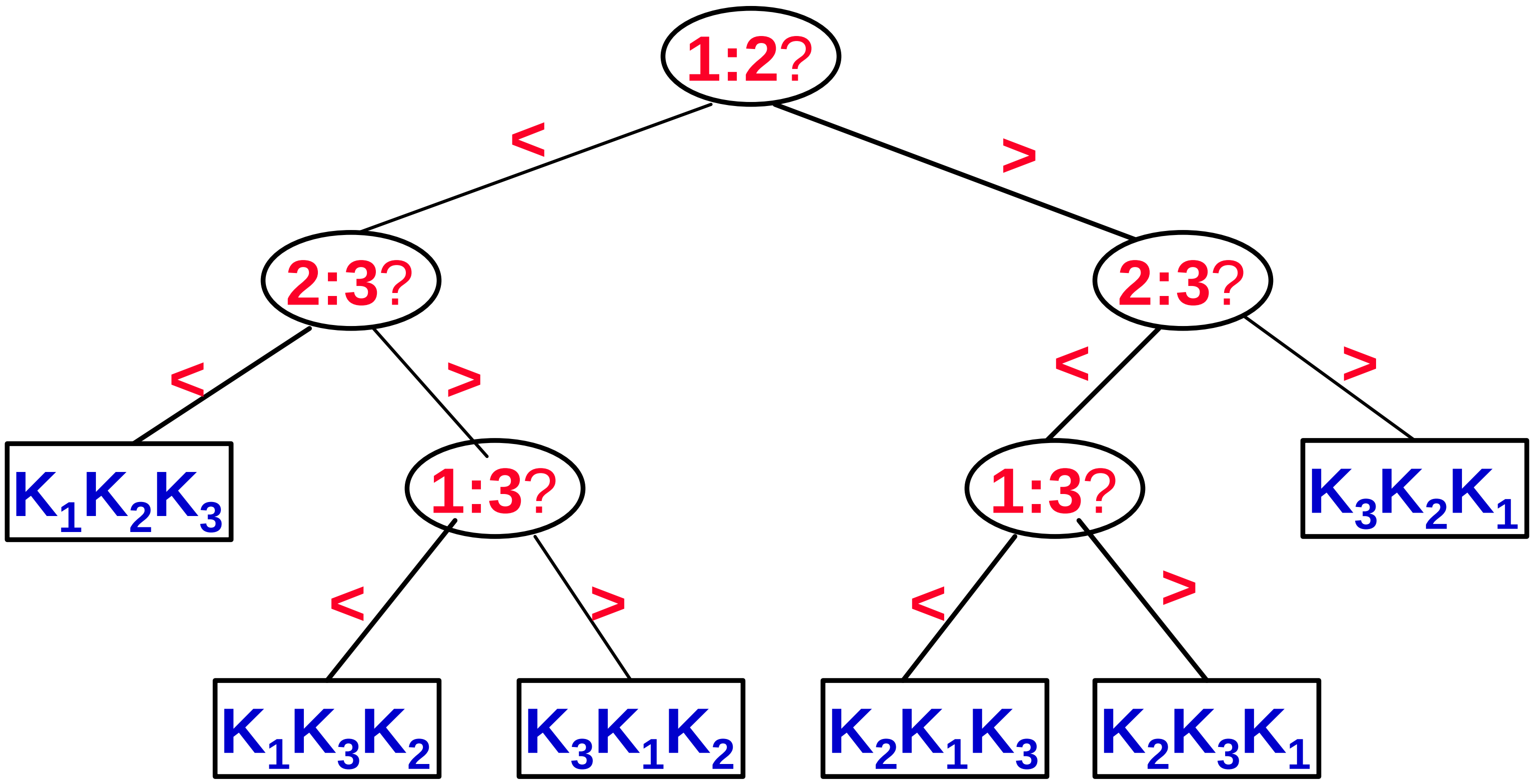
Alberi di Decisione: esempio

Siano dati tre elementi arbitrari:



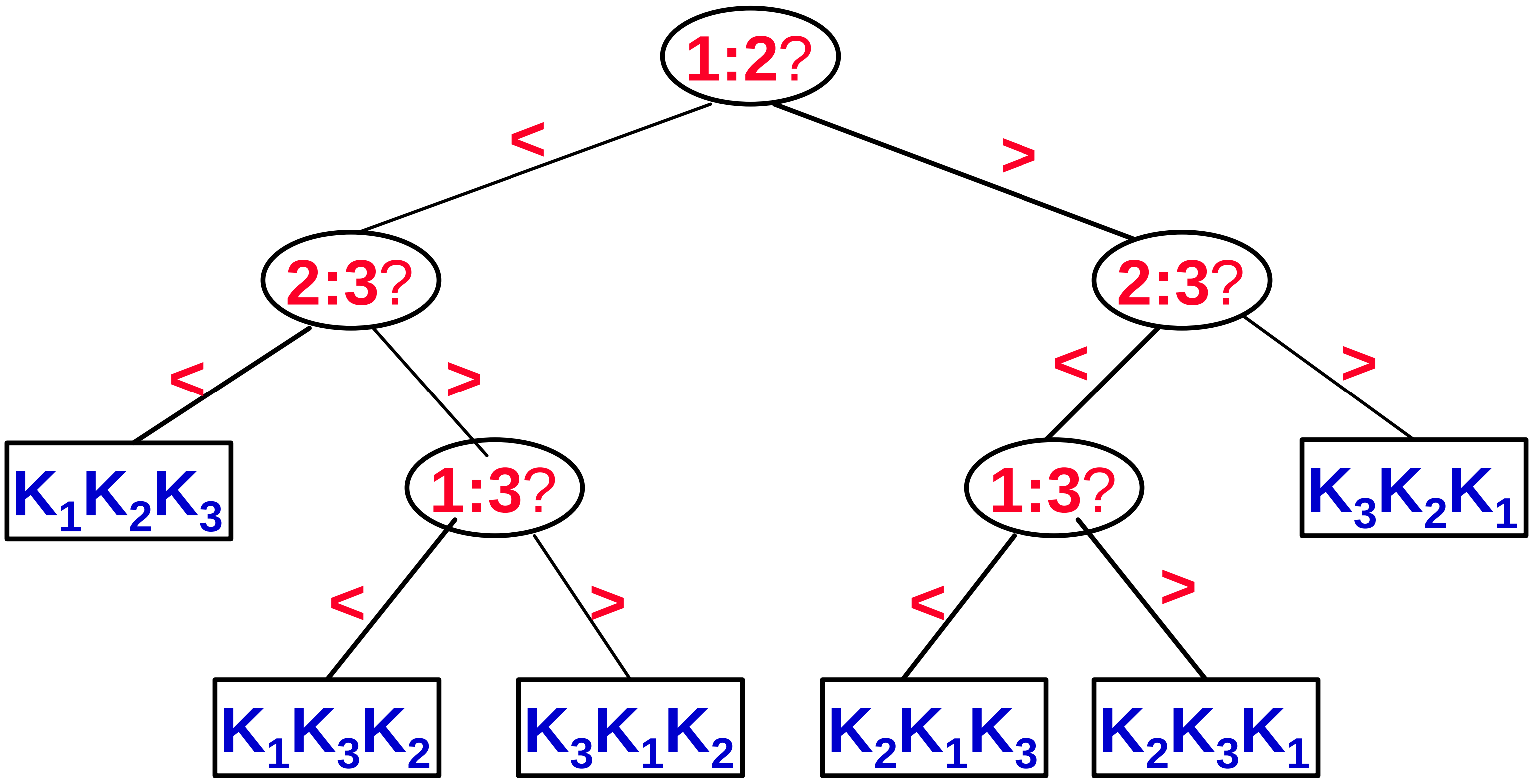
Alberi di Decisione

L'<u>Albero di Decisione</u> specifica la sequenza di confronti che l'algoritmo deve effettuare per ordinare 3 elementi.



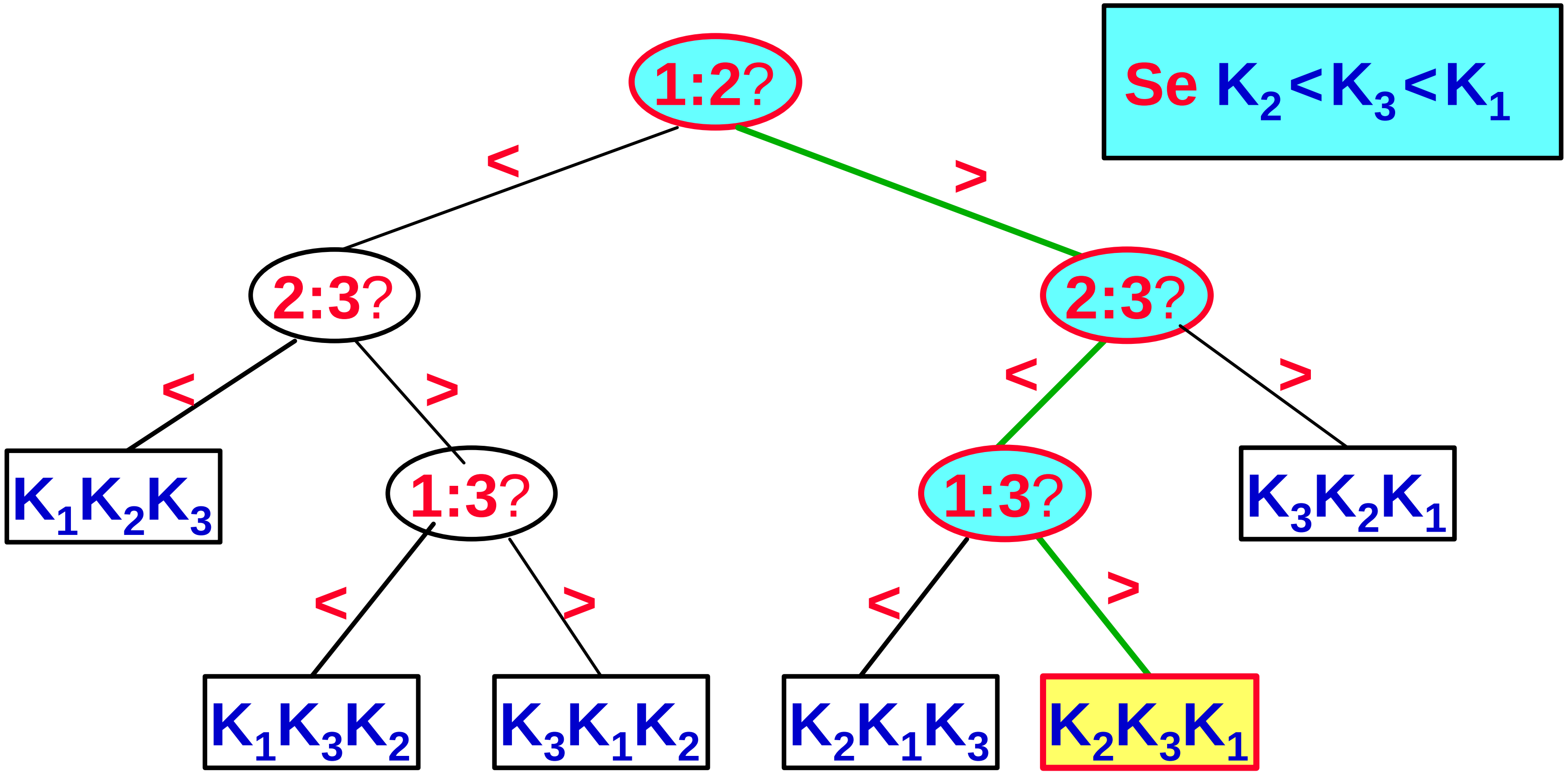
Alberi di Decisione

Un <u>esecuzione dell'algoritmo</u> per un dato input (di 3 elementi) corrisponde ad un percorso dalla radice ad una singola foglia.



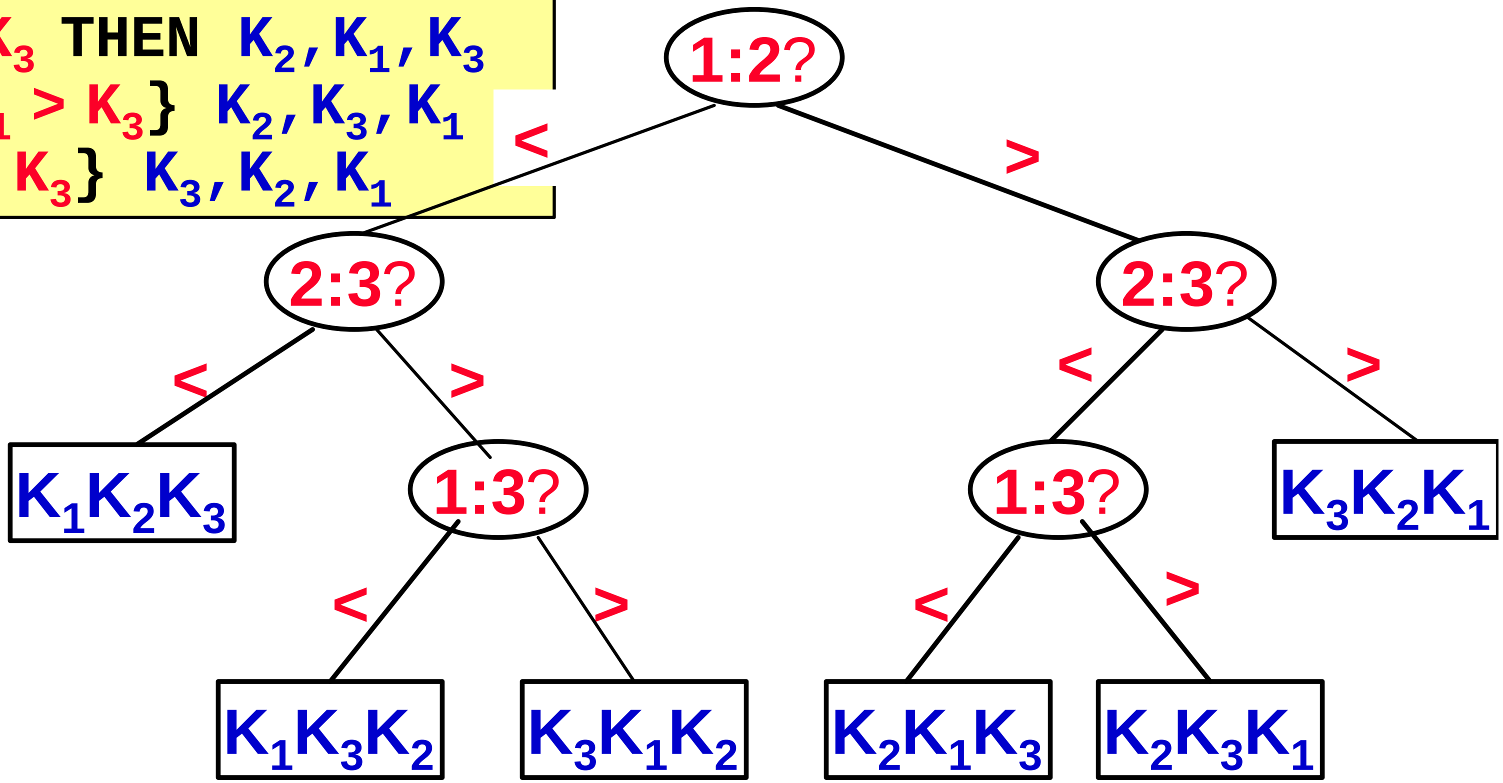
Alberi di Decisione: esempio

Un <u>esecuzione dell'algoritmo</u> per un dato input (di 3 elementi) corrisponde ad un percorso dalla radice ad una singola foglia.



Alberi di Decisione: algoritmo

IF $K_1 < K_2$ THEN
    IF $K_2 < K_3$ THEN K_1, K_2, K_3
    ELSE $\{K_2 > K_3\}$
        IF $K_1 < K_3$ THEN K_1, K_3, K_2
        ELSE $\{K_1 > K_3\}$ K_3, K_1, K_2
ELSE $\{K_1 > K_2\}$
    IF $K_2 < K_3$ THEN
        IF $K_1 < K_3$ THEN K_2, K_1, K_3
        ELSE $\{K_1 > K_3\}$ K_2, K_3, K_1
    ELSE $\{K_2 > K_3\}$ K_3, K_2, K_1



Alberi di Decisione

Intuitivamente:

- ***ogni foglia corrisponde ad un possibile risultato dell'ordinamento di n elementi distinti.***

- ***i nodi interni corrispondono ai confronti tra gli elementi:***
  - ***se il risultato è $K_i < K_j$ allora il sottoalbero sinistro del nodo "i:j" contiene il confronto successivo***
  - ***se il risultato è $K_i > K_j$ allora il sottoalbero destro del nodo "i:j" contiene il confronto successivo***

finché non viene determinato l'ordine completo.

Alberi di Decisione

Un <u>albero di decisione</u> di ordine n è un albero binario tale che:

- ***ha $n!$ foglie, ciascuna etichettata con una diversa permutazione degli elementi***
- ***i nodi interni hanno tutti grado 2 e sono etichettati con coppie di indici "$i{:}j$", per $i,j = 1,\dots,n$***
- ***in un percorso dalla radice ad una foglia etichettata "$K_{i_1}, K_{i_2},\dots, K_{i_n}$" compare almeno:***
  - ***o un nodo "$i_j{:}i_{j+1}$", e il percorso procede a sinistra del nodo;***
  - ***o un nodo "$i_{j+1}{:}i_j$", e il percorso procede a destra del nodo.***

Alberi di Decisione

Notate che:

- ***un albero di decisione di ordine n rappresenta tutte le possibili esecuzioni di un algoritmo di ordinamento con input di dimensione n***

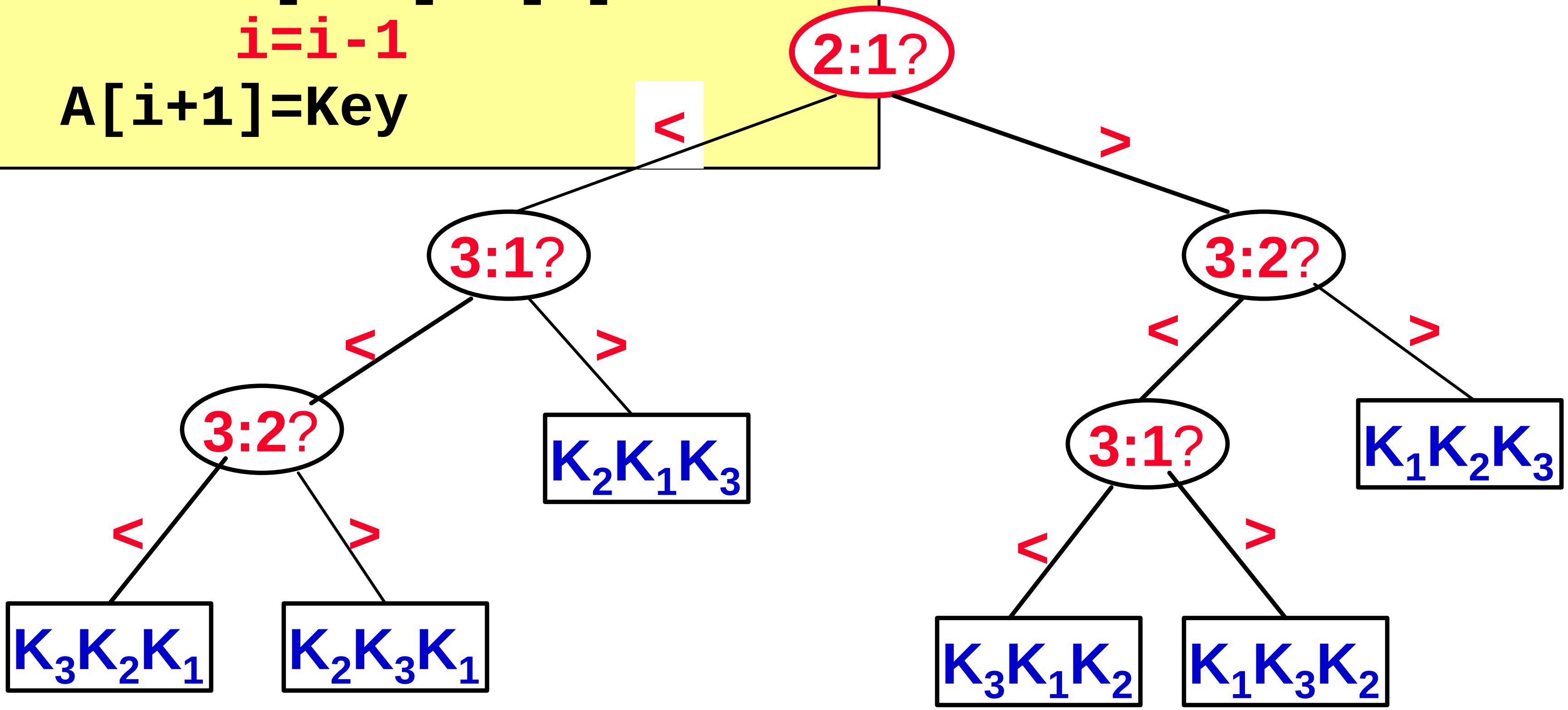
- ***ma ad ogni algoritmo di ordinamento differente corrisponde un differente albero di decisione.***

Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 2
i = 1

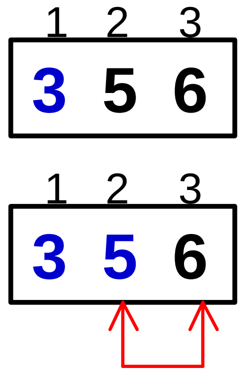
1	2	3
3	5	6

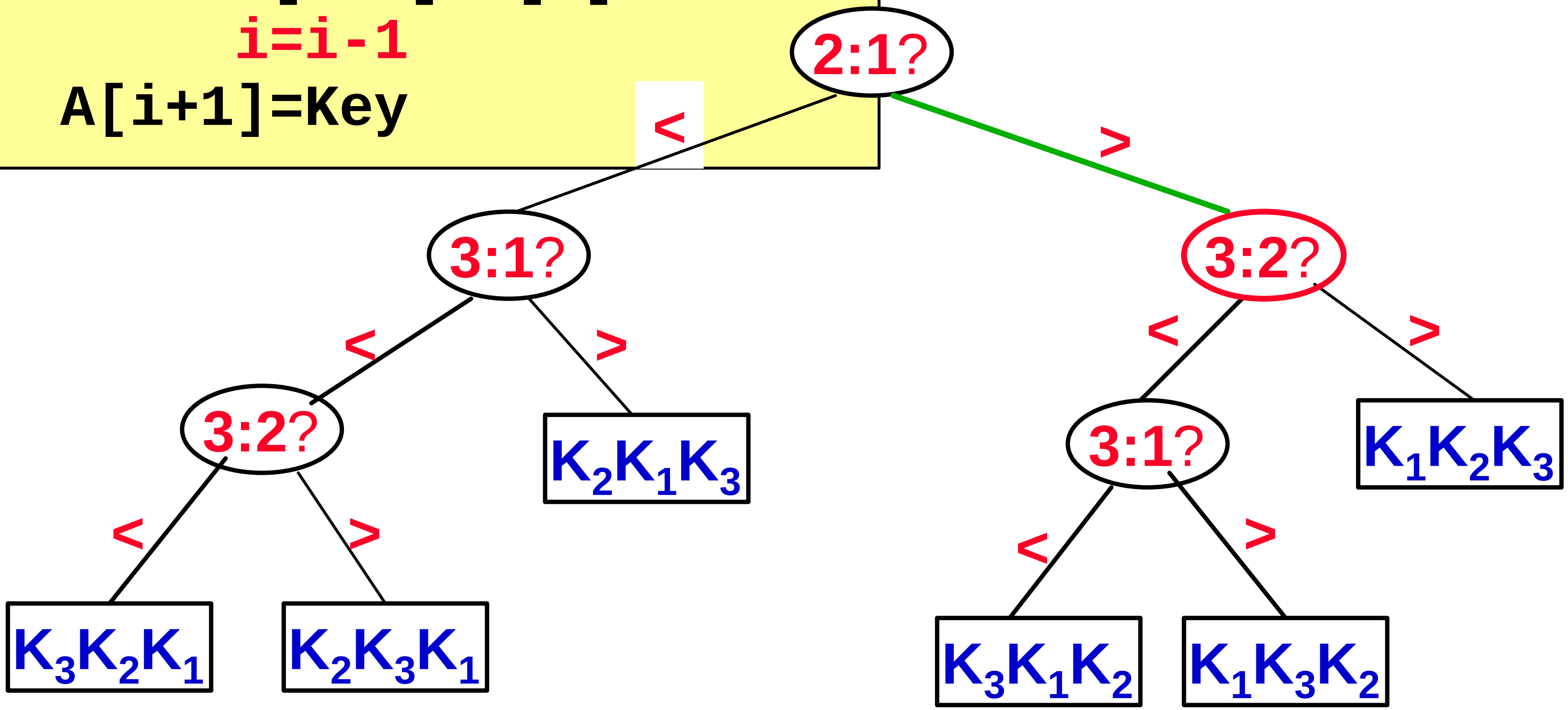


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 3
i = 2





Albero di Decisione di Insert-Sort

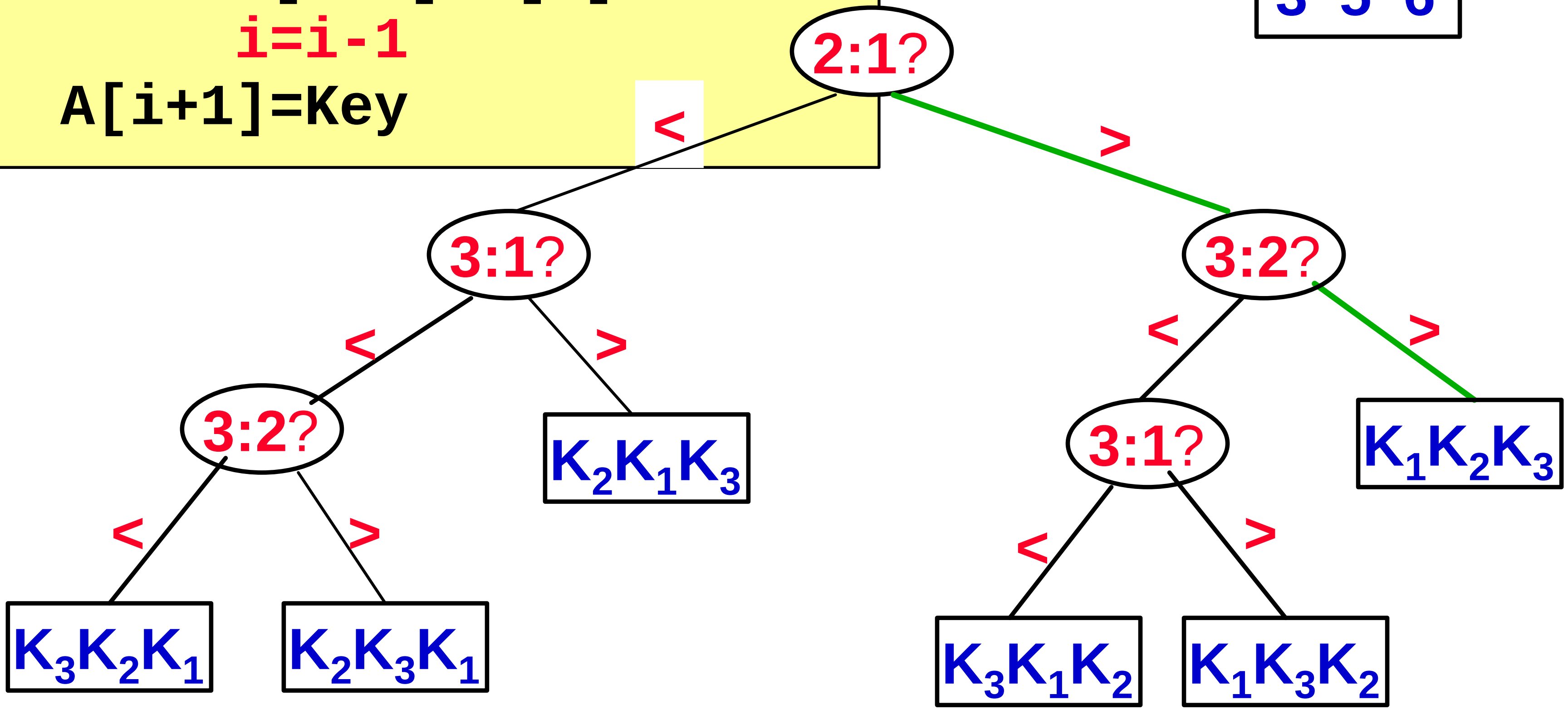
```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 3
i = 2

1	2	3
3	5	6

1	2	3
3	5	6

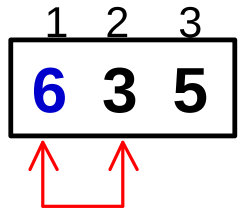
1	2	3
3	5	6

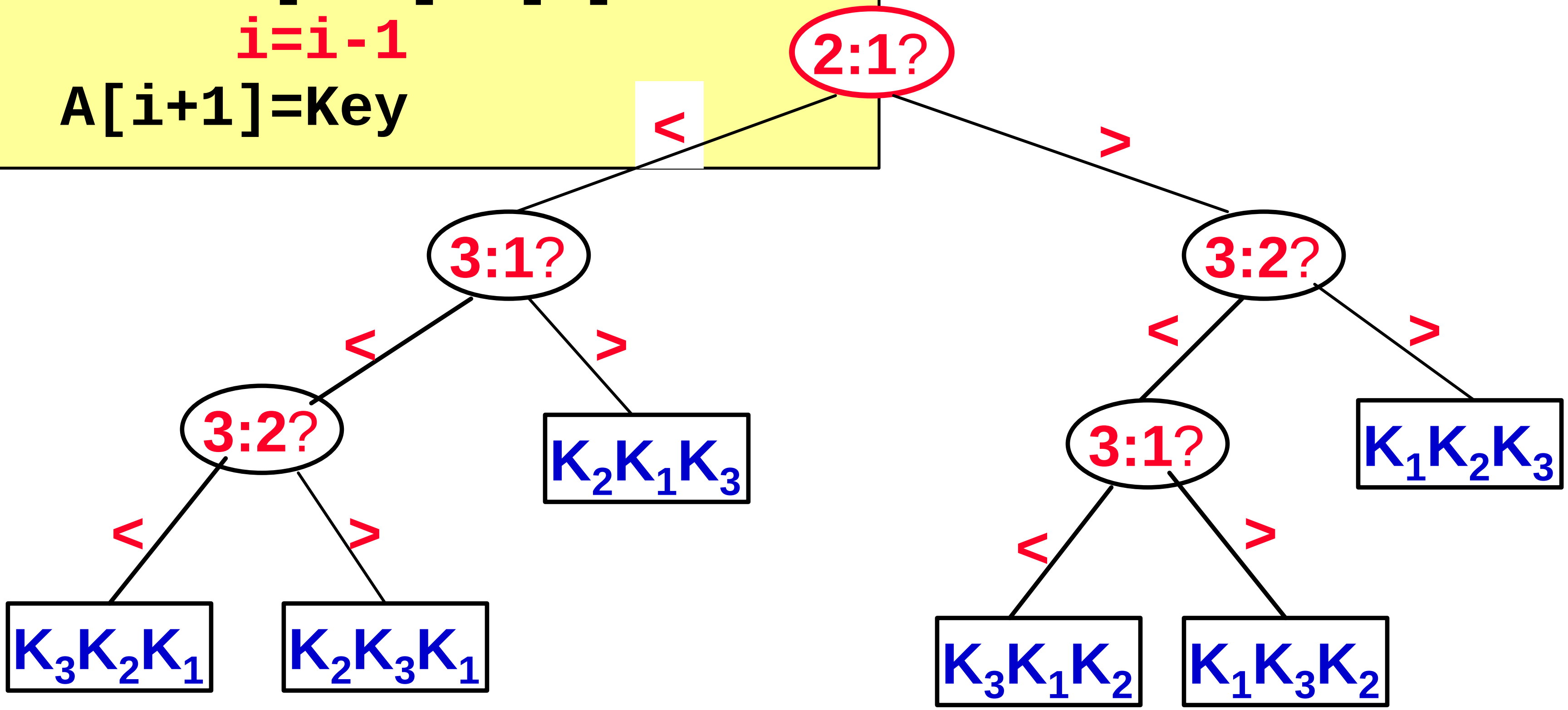


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 2
i = 1

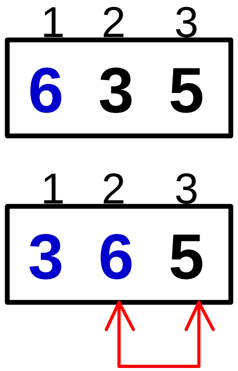


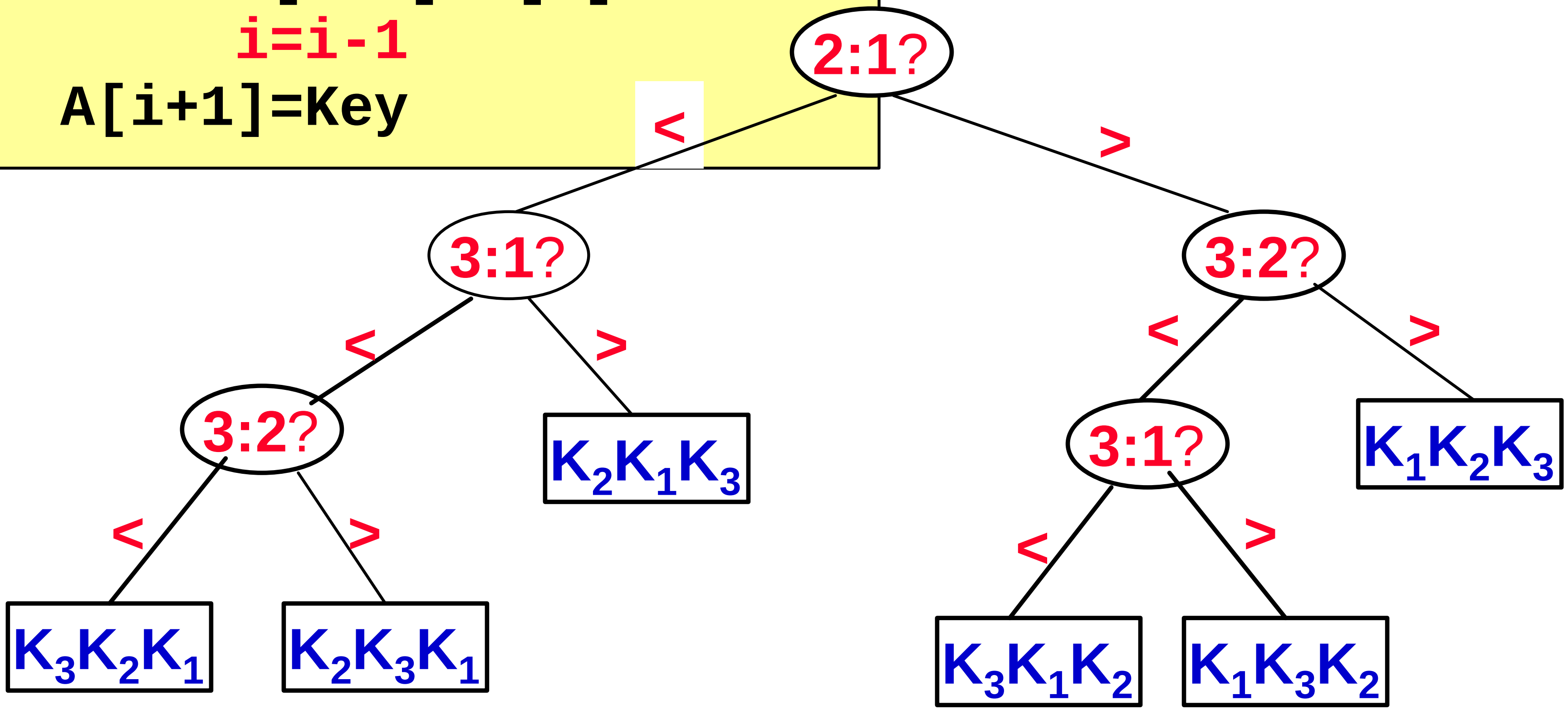


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 3
i = 2

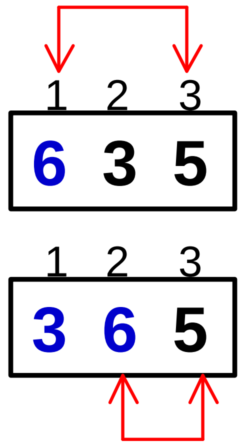


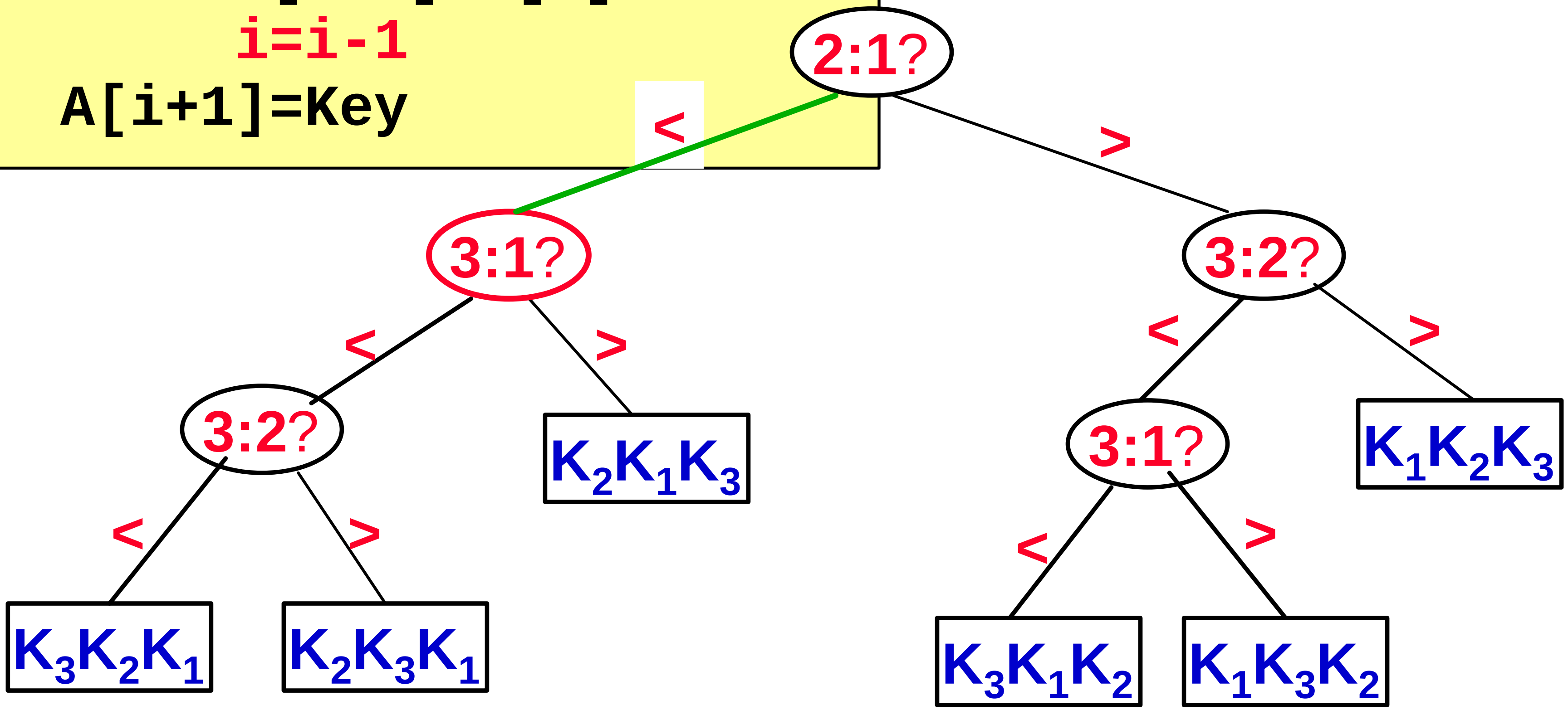


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

$j = 3$
$i = 2$

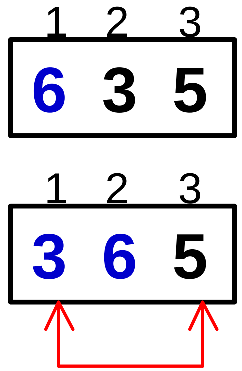


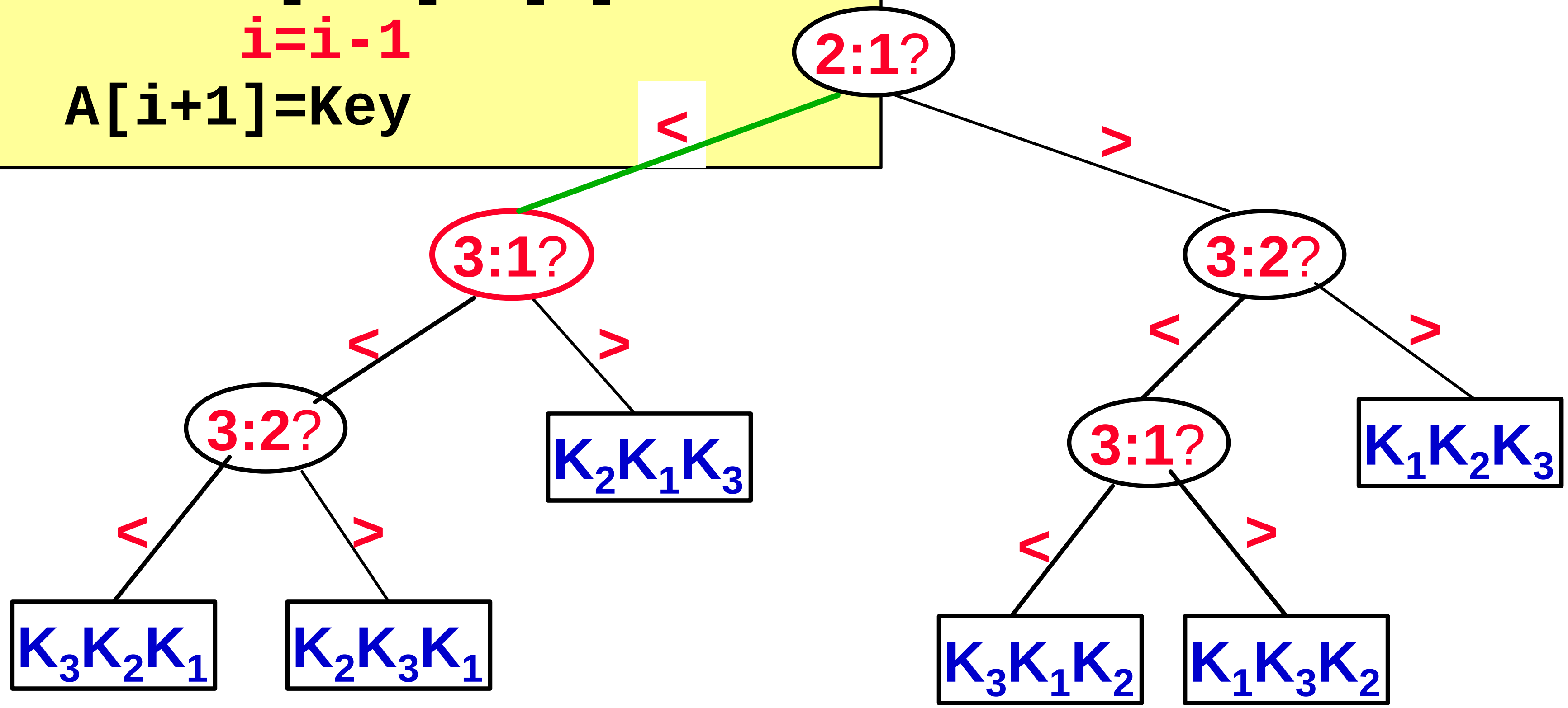


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 3
i = 1

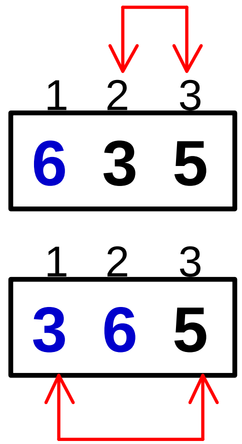


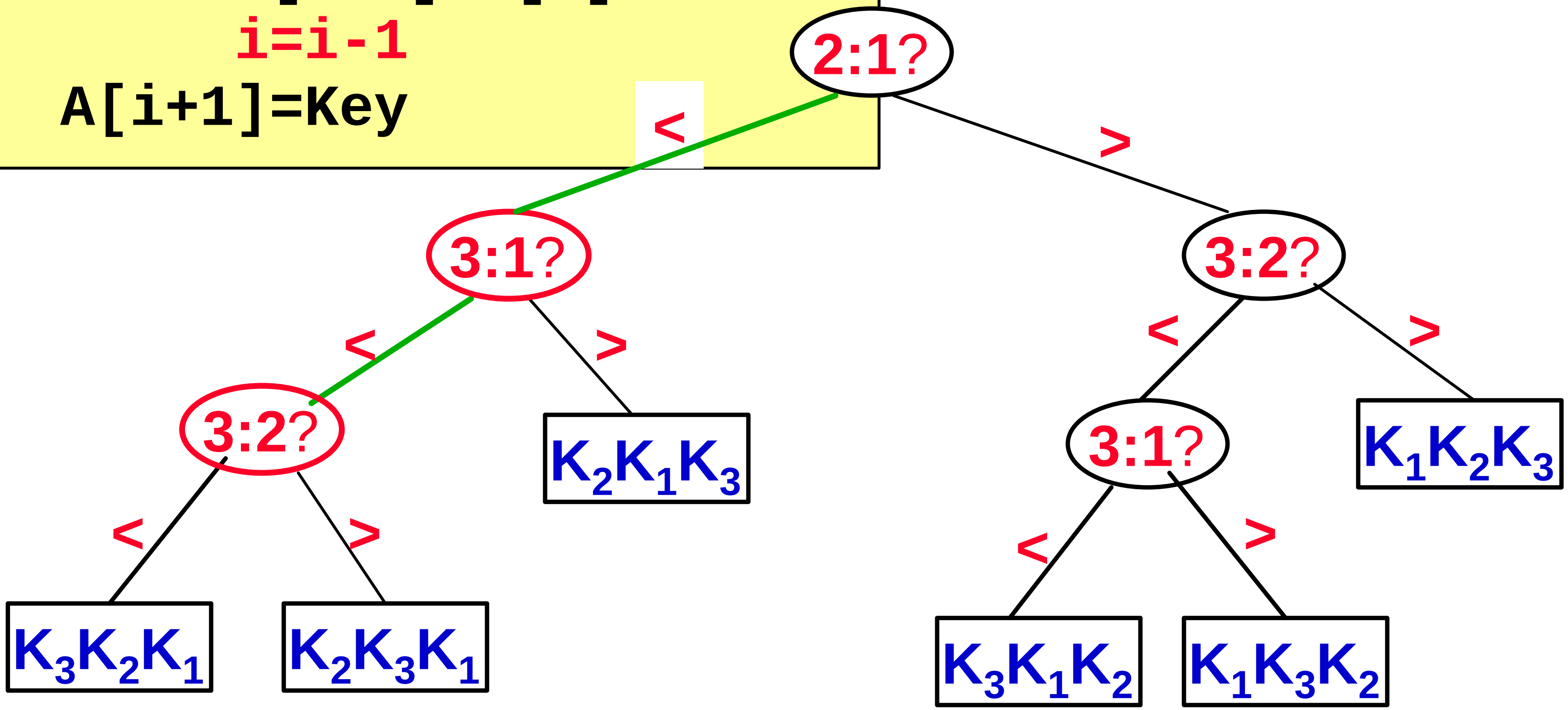


Albero di Decisione di Insert-Sort

```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

j = 3
i = 1





Albero di Decisione di Insert-Sort

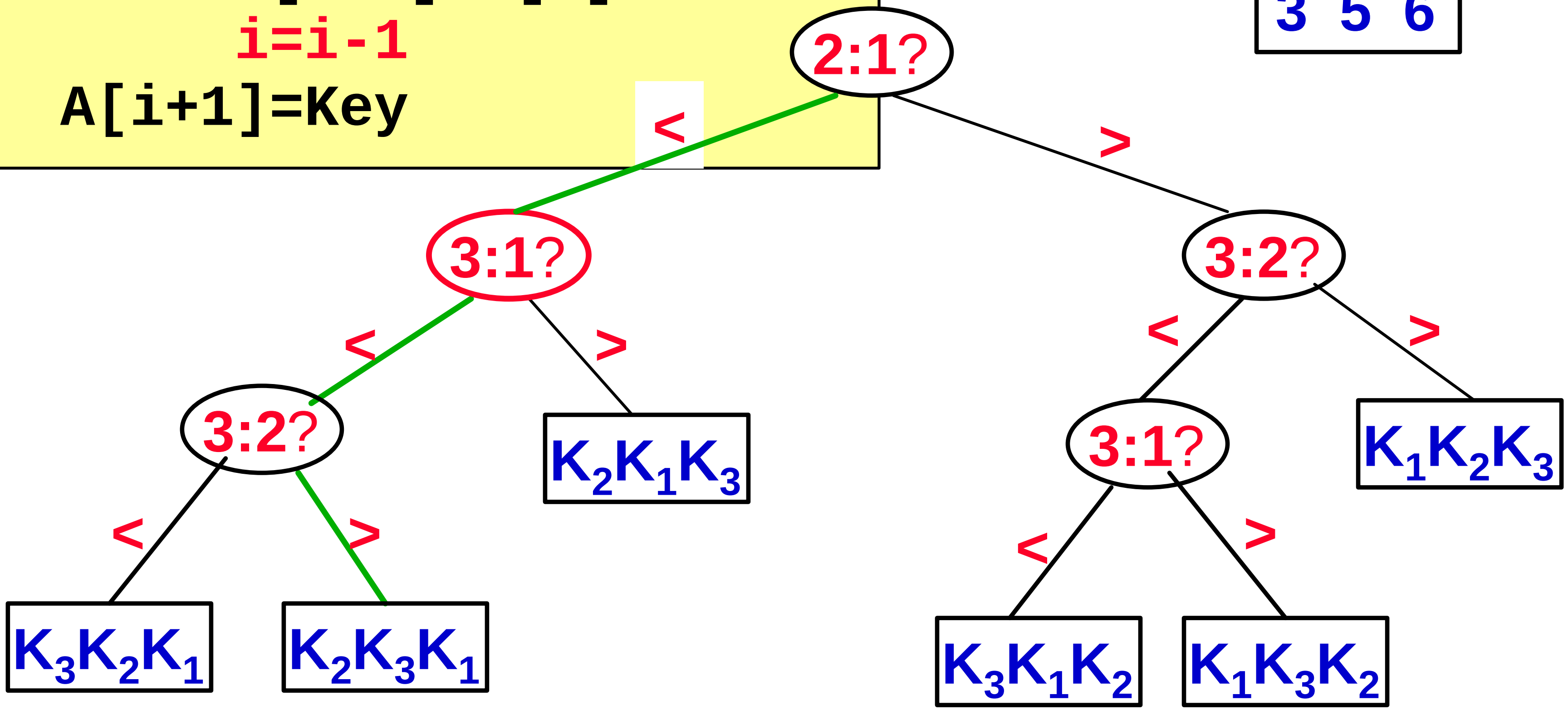
```
Insert-Sort(A)
 FOR j=2 to Lenght(A)
   DO Key:=A[j]
      i=j-1
      WHILE i>0 AND A[i]>Key
        DO A[i+1]=A[i]
           i=i-1
      A[i+1]=Key
```

$j = 3$
$i = 0$

1	2	3
6	3	5

1	2	3
3	6	5

1	2	3
3	5	6



Alberi di Decisione

É importante quindi capire che:

- un nodo etichettato "i:j" nell'albero di decisione specifica un confronto tra gli elementi K_i e K_j secondo la loro posizione nell'array iniziale

- e NON gli elementi che ad un certo punto dell'esecuzione compaiono nelle posizioni i-esima e j-esima dell'array

- gli alberi di decisione non menzionano alcuno spostamento degli elementi

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

***Teorema**: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso peggiore*

- ***Intuitivamente, il numero massimo di confronti che deve essere effettuato da un algoritmo di ordinamento sarà pari all'altezza del suo albero di decisione.***

- ***Il migliore algoritmo di decisione possibile, sarà quello il cui albero di decisione ha altezza minima tra tutti gli alberi di decisione possibili.***

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Ci sono $n!$ possibili permutazioni di n elementi, ognuna delle quali è un possibile ordinamento.

L'albero di decisione avrà quindi $n!$ foglie.

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

<u>Lemma</u>:* *Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

L'albero di decisione avrà quindi $n!$ foglie.

Ma ogni albero binario di altezza h ha non più di 2^h foglie.

Quindi deve essere: $\boxed{n! \le 2^h}$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $n! \le 2^h$

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri, poiché entrmbi sono funzioni crescenti monotone, otteniamo:

$$\boxed{\log n! \le h}$$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $\log n! \le h$

Per l'approssimazione di Stirling abbiamo che:

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$e = 2.71828...$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

***Lemma:** Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$*

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $\log n! \le h$

Otteniamo che

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

***Lemma**: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza* $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Lemma: ***Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza*** $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$h \geq \log\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$\geq n \log n - n \log e$$

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Lemma: ***Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza W(n log n)***

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$h \geq \log\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$\geq n \log n - n \log e$$

$$= \Omega(n \log n)$$

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

<u>Corollario</u>: HeapSort e MergeSort sono algorimi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi nel caso peggiore.

Limite Inferiore per il Caso Peggiore

Corollario*: *HeapSort e MergeSort sono algorimi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi nel caso peggiore.

Abbiamo già calcolato che il limite superiore del tempo di esecuzione nel caso peggiore di entrambi gli algoritmi è $O(n \log n)$.

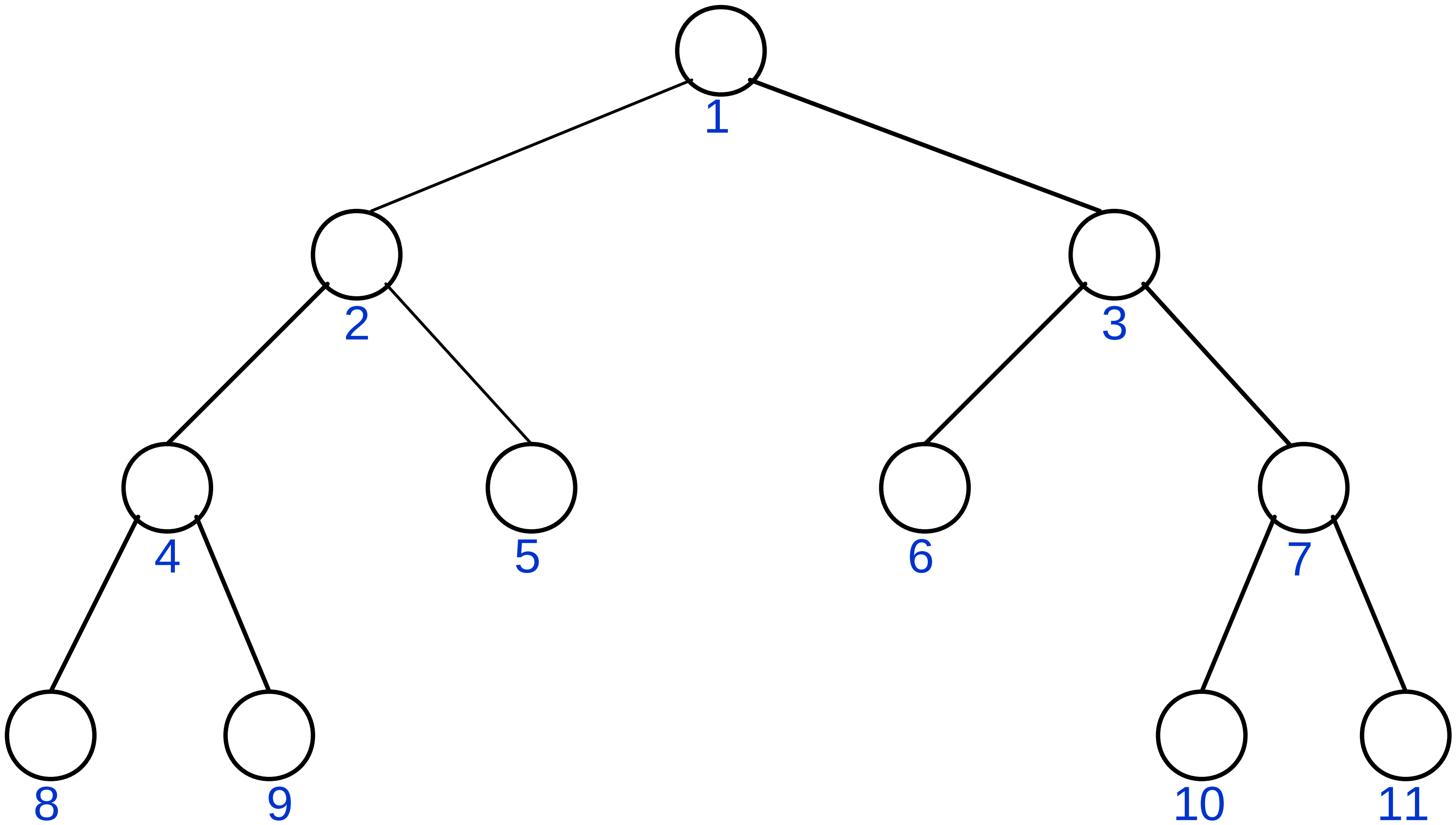
Ma questo limite corrisponde esattamente a limite inferiore $\Omega(n \log n)$ appena calcolato per il caso peggiore.

Da queste due osservazioni segue il corollario!

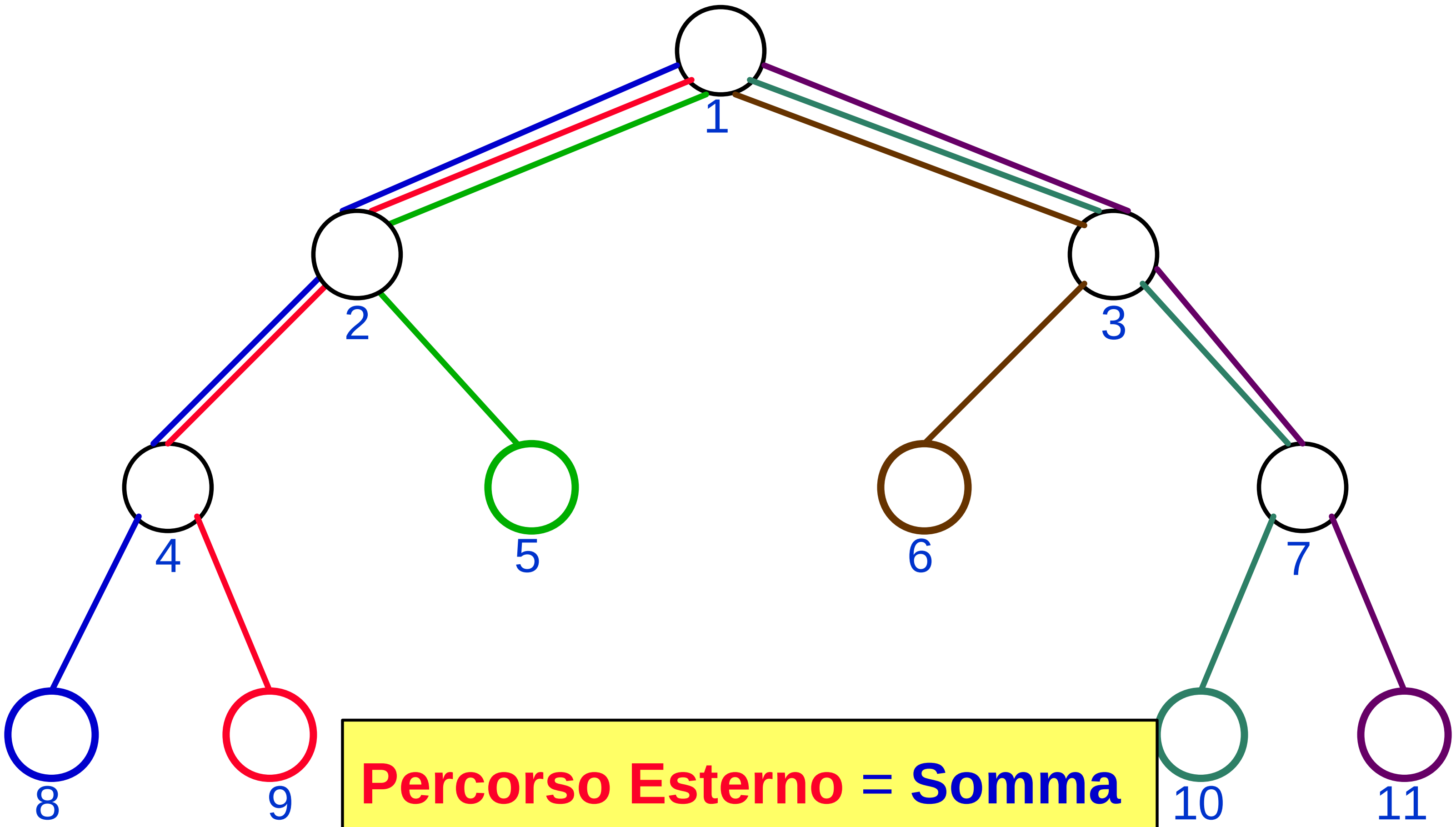
Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio***

Percorso Esterno di un Albero Binario



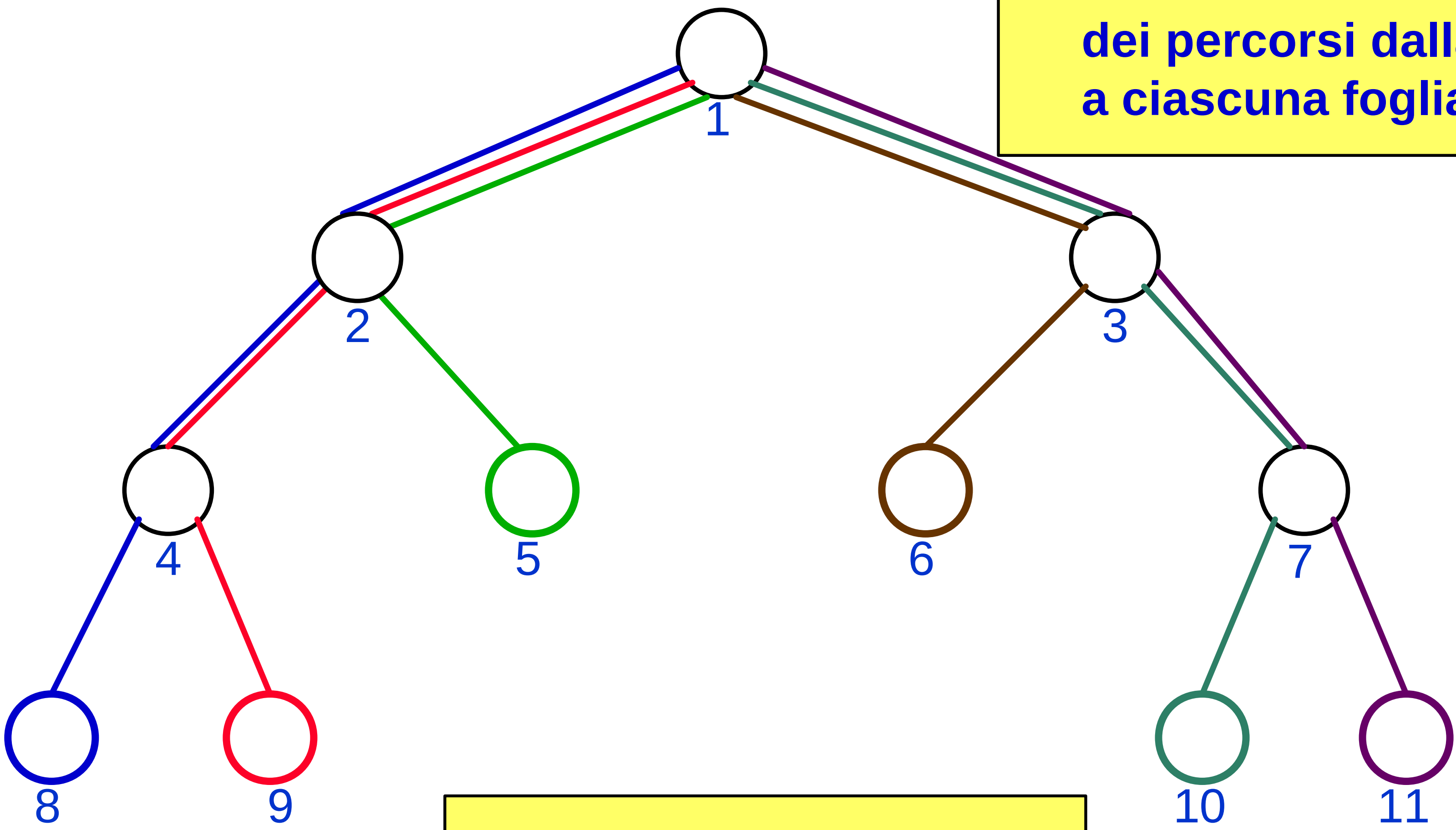
Percorso Esterno di un Albero Binario



Percorso Esterno = **Somma dei percorsi dalla radice a ciascuna foglia**

Percorso Esterno di un Albero Binario

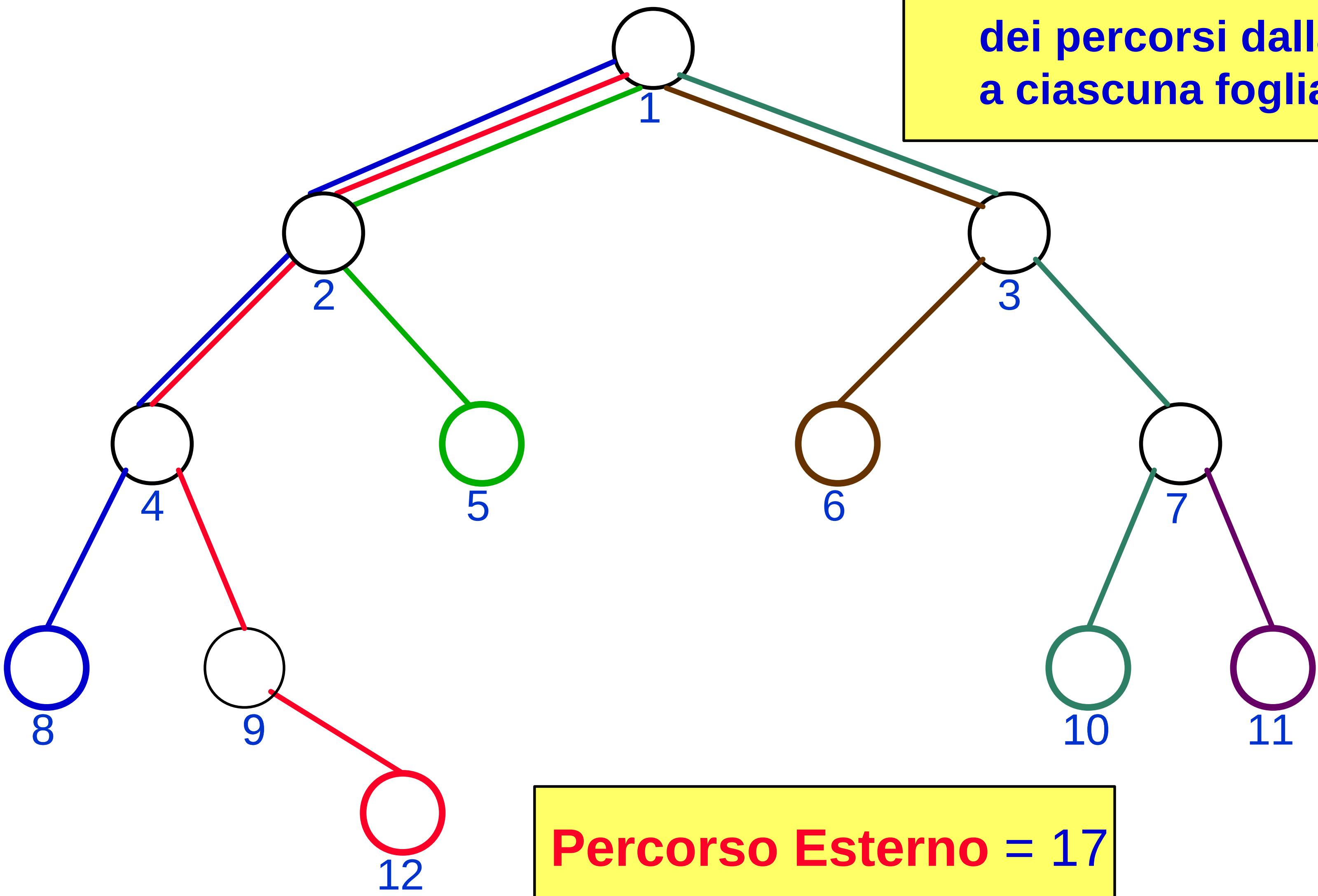
Percorso Estero = Somma dei percorsi dalla radice a ciascuna foglia



Percorso Esterno = 16

Percorso Esterno di un Albero Binario

Percorso Estero = Somma dei percorsi dalla radice a ciascuna foglia



Percorso Esterno = 17

Limite Inferiore per il Caso Medio

<u>Teorema</u>*: *Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

- ***Assumiamo che ogni permutazione iniziale di elementi in input abbia uguale probabilità.***
- ***Consideriamo un albero di decisione di ordine n***
- ***Il minimo <u>numero medio di confronti</u> necessari per l'algoritmo di ordinamento è quindi pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.***

Limite Inferiore per il Caso Medio

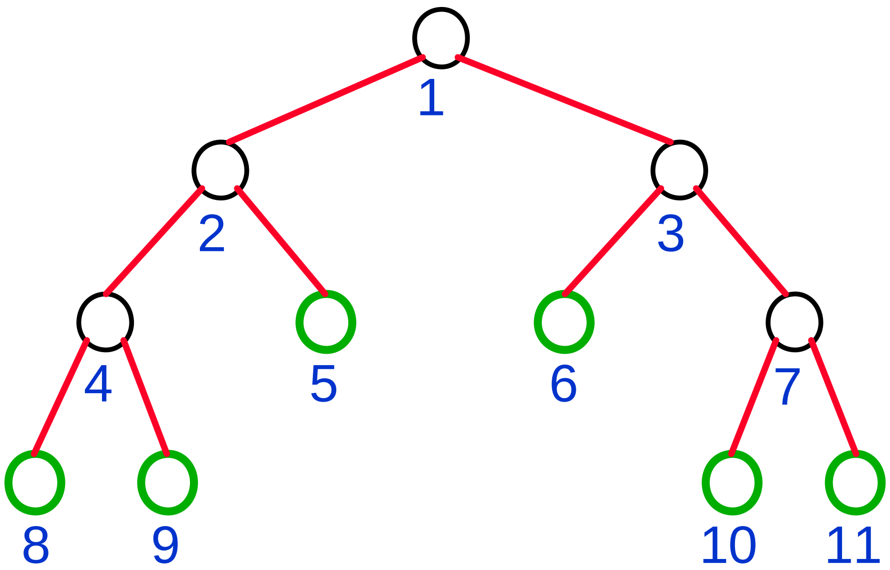
Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio***

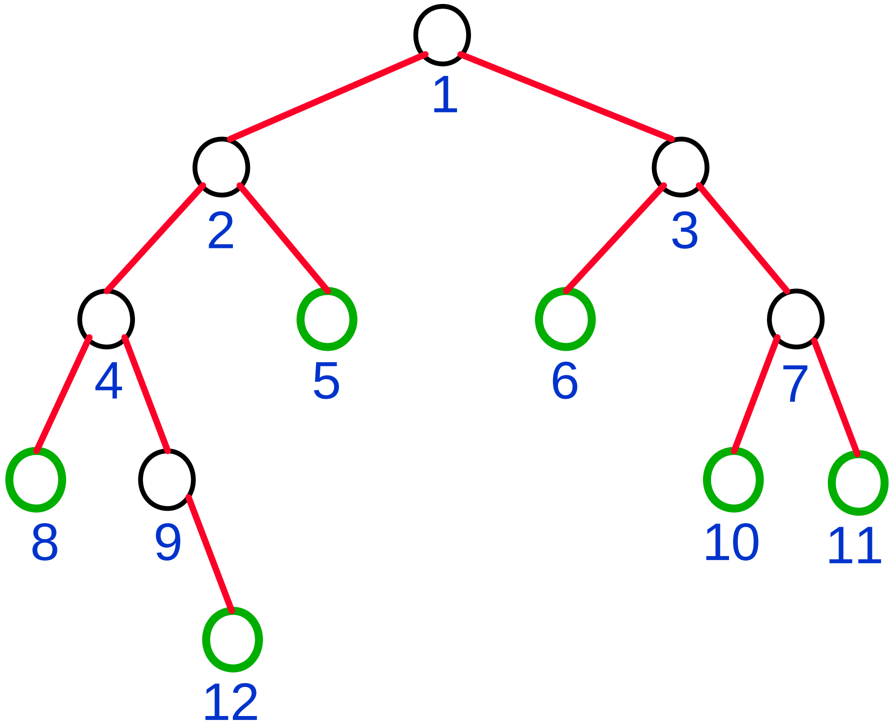
Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

FATTO: L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le n foglie occorrono al più sui due livelli h e $h-1$, per qualche h.

Percorso Esterno Minimo

FATTO: ***L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le foglie occorrono al più sui due livelli h e h - 1, per qualche h.***





Percorso Estero = k

Percorso Estero = k-h+(h+1)=k+1

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: *Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio*

Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

FATTO: L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le n foglie occorrono al più sui due livelli h e $h-1$, per qualche h.

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Limite Inferiore per il Caso Medio

***<u>Teorema</u>:* Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio**

Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)\,N_{h-1} + h\,N_h] \,/\, n!$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

***<u>Teorema</u>:** Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è* $\Omega(n \log n)$ *nel caso medio*

Siano N_h *e* N_{h-1} *il numero di foglie ai livelli* h *e* $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)\,N_{h-1} + h\,N_h] \,/\, n!$$

Ma sappiamo anche che

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

e

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è*** $\Omega(n \log n)$ ***nel caso medio***

Siano N_h *e* N_{h-1} *il numero di foglie ai livelli* h *e* $h-1$

Il numero medio di confro

quindi

$$C_n = [(h-1)\,N_{h-1} + $$

Ma sappiamo anche che

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

e

$$2\,N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Poichè un albero pieno alto *h* ha 2^h foglie e ogni nodo interno ha grado due (cioè ha 2 figli)

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: *Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è* $W(n \log n)$ *nel caso medio*

Siano N_h *e* N_{h-1} *il numero di foglie ai livelli* h *e* $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)\,N_{h-1} + h\,N_h] \,/\, n!$$

Quindi:

$$N_h = 2n! - 2^h$$
$$N_{h-1} = 2^h - n!$$

$$N_{h-1} + N_h = n!$$
$$2\,N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è*** $\Omega(n \log n)$ ***nel caso medio***

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)N_{h-1} + h N_h] / n!$$

Quindi:

$$N_h = 2n! - 2^h$$

$$N_{h-1} = 2^h - n!$$

Sostituendo:

$$\boxed{C_n = (h\,n! + n! - 2^h)/n!}$$

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio***

Sostituendo: $C_n = (h\,n! + n! - 2^h) / n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ ***per*** $0 \le \varepsilon < 1$ ***quindi***

$$C_n = (n! \log n! + n!\,\varepsilon + n! - n!\,2^{\varepsilon}) / n!$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: ***Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio***

Sostituendo: $C_n = (h\,n! + n! - 2^h)\,/\,n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ ***per*** $0 \le \varepsilon < 1$ ***quindi***

$$C_n = (n! \log n! + n!\,\varepsilon + n! - n!\,2^{\varepsilon})\,/\,n!$$

$$\boxed{= \log n! + (1 + \varepsilon - 2^{\varepsilon})}$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

***Teorema:** Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio*

Sostituendo: $C_n = (h\, n! + n! - 2^h) / n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ ***per*** $0 \leq \varepsilon < 1$ ***quindi***

$$C_n = (n! \log n! + n!\, \varepsilon + n! - n!\, 2^{\varepsilon}) / n!$$
$$= \log n! + (1 + \varepsilon - 2^{\varepsilon})$$
$$\geq \log n! = n \log n - n \log e$$
$$\boxed{= \Omega(n \log n)}$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

***Corollario**: HeapSort e MergeSort sono algorimi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi.*

Abbiamo già calcolato che il limite superiore del tempo di esecuzione medio di entrambi gli algoritmi è $O(n \log n)$.

Ma questo limite corrisponde esattamente a limite inferiore $\Omega(n \log n)$ appena calcolato per il caso medio.

Da queste due osservazioni segue il corollario!