Algoritmi e Strutture Dati

Alberi Binari di Ricerca

Alberi binari di ricerca

Motivazioni

- **gestione e ricerche in grosse quantità di dati**
- ***liste* ed *array non* sono *adeguati* perché inefficienti in tempo $O(n)$ o in spazio**

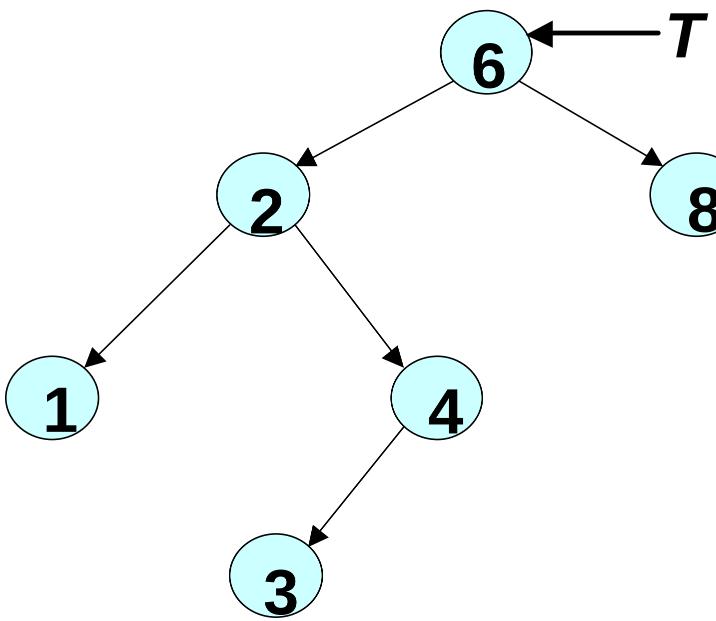
Esempi:

- **Mantenimento di archivi (*DataBase*)**
- **In generale, mantenimento e gestione di corpi di *dati* su cui si effettuano *molte ricerche*, eventualmente alternate a operazioni di inserimento e cancellazione.**

Alberi binari di ricerca

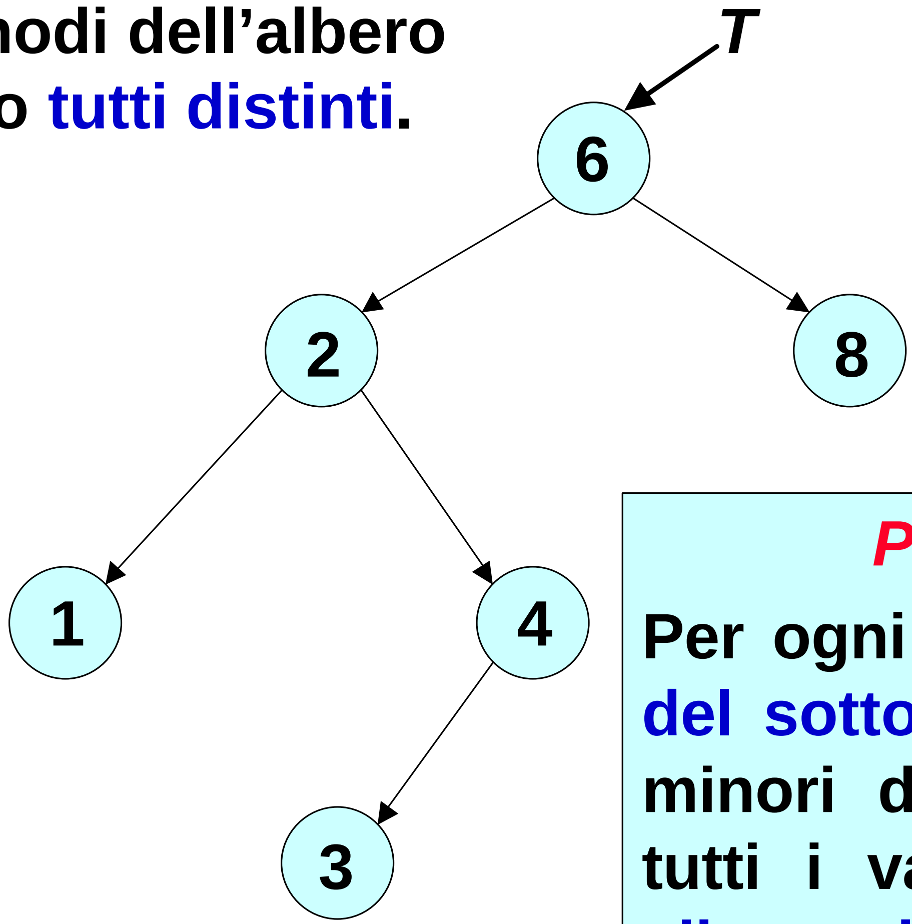
***Definizione*: Un *<u>albero binario di ricerca</u>* è un albero binario che soddisfa la seguente proprietà:**

> **se *X* è un nodo e *Y* è un nodo nel sottoalbero sinistro di *X*, allora *key[Y]* £ *key[X]*; se *Y* è un nodo nel sottoablero destro di *X* allora *key[Y]* ³ *key[X]***



Alberi binari di ricerca

Assumiamo che i valori nei nodi dell'albero siano tutti distinti.



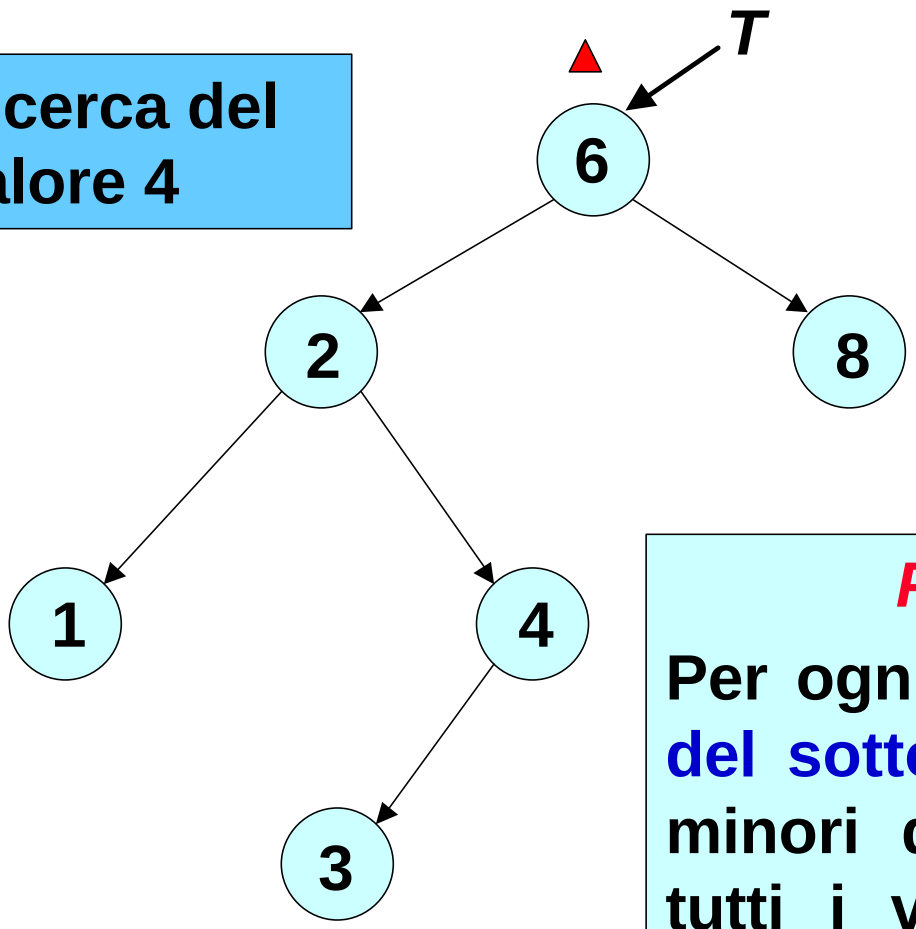
Assumiamo che i valori nei nodi (le chiavi) possano essere ordinati.

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4

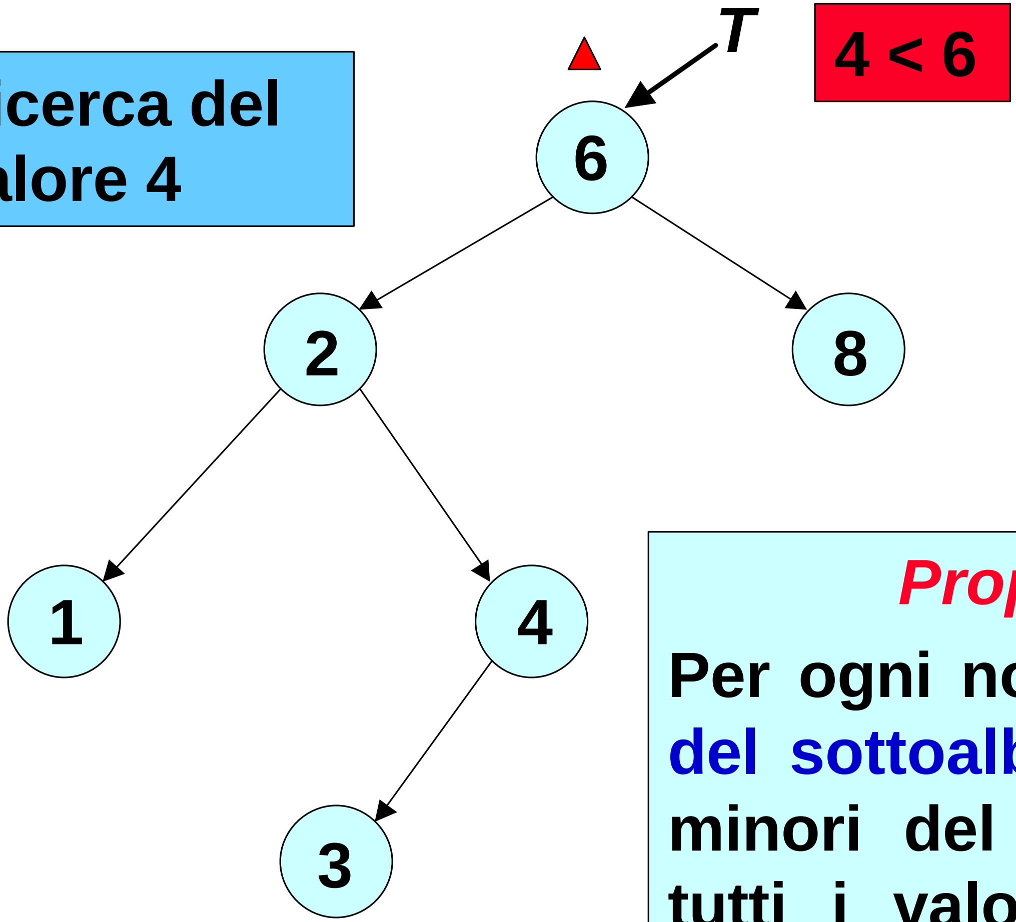


Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4

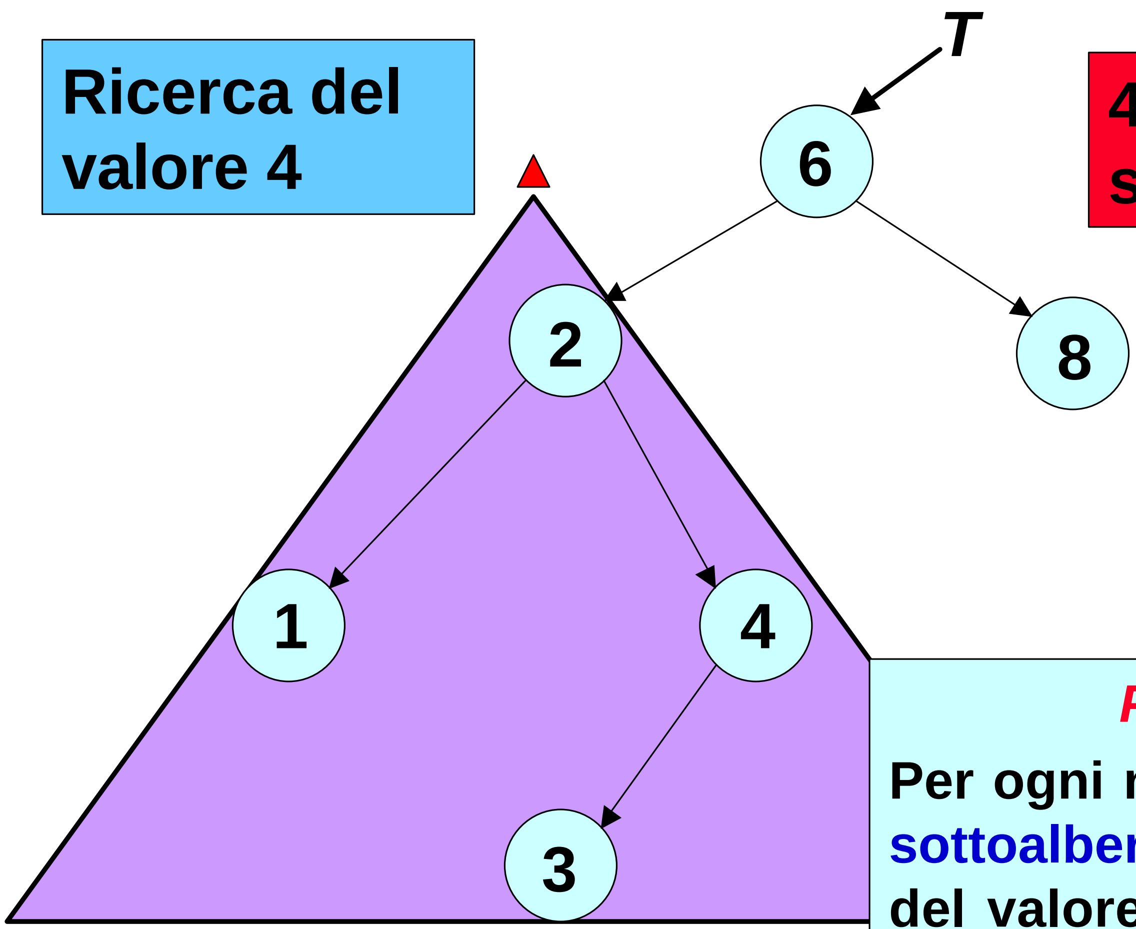


Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo **X**, i valori nei **nodi del sottoalbero sinistro** sono tutti minori del valore nel nodo **X**, e tutti i valori nei **nodi del sotto-albero destro** sono maggiori del valore di **X**

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4

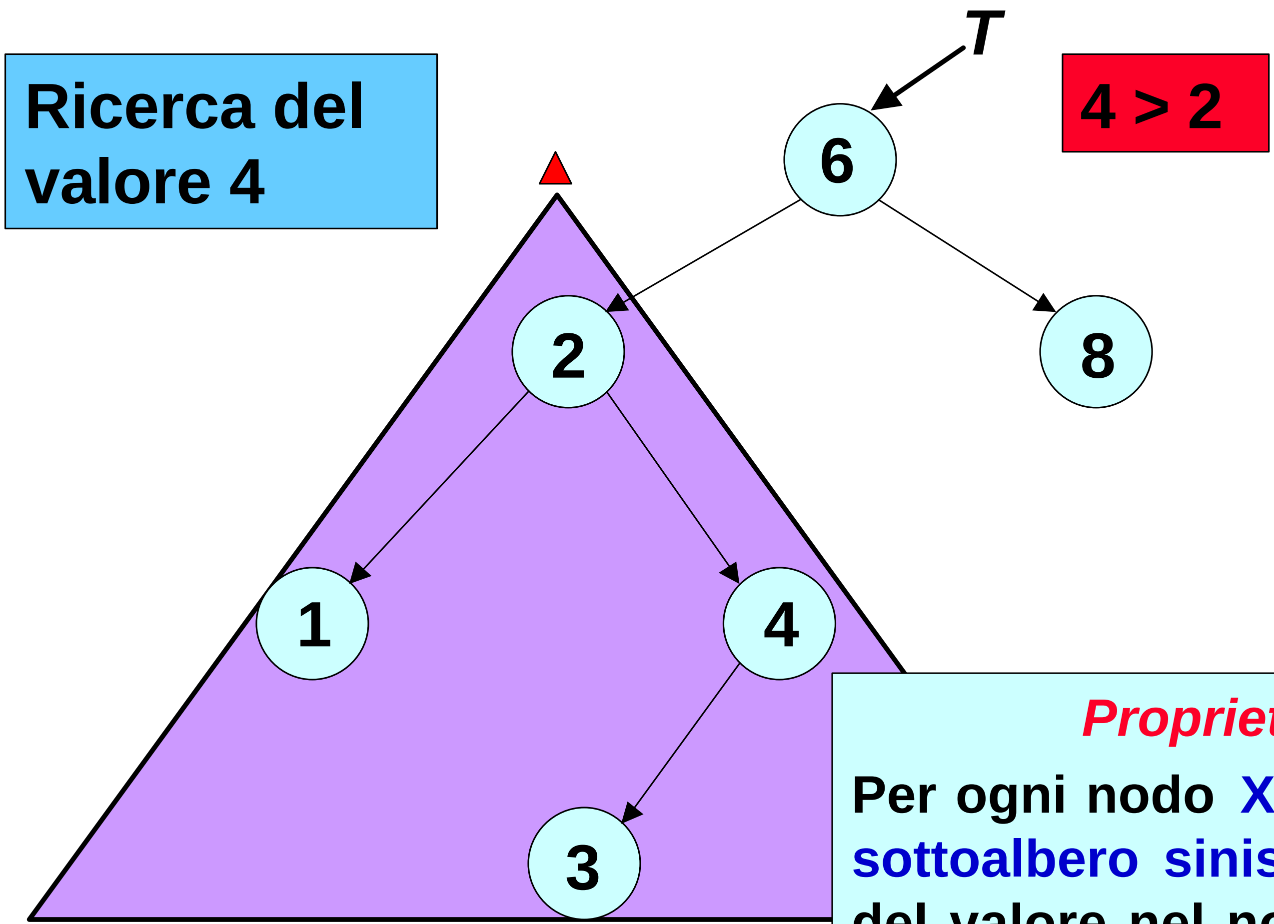


4 sta nel sottoalbero sinistro di 6

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

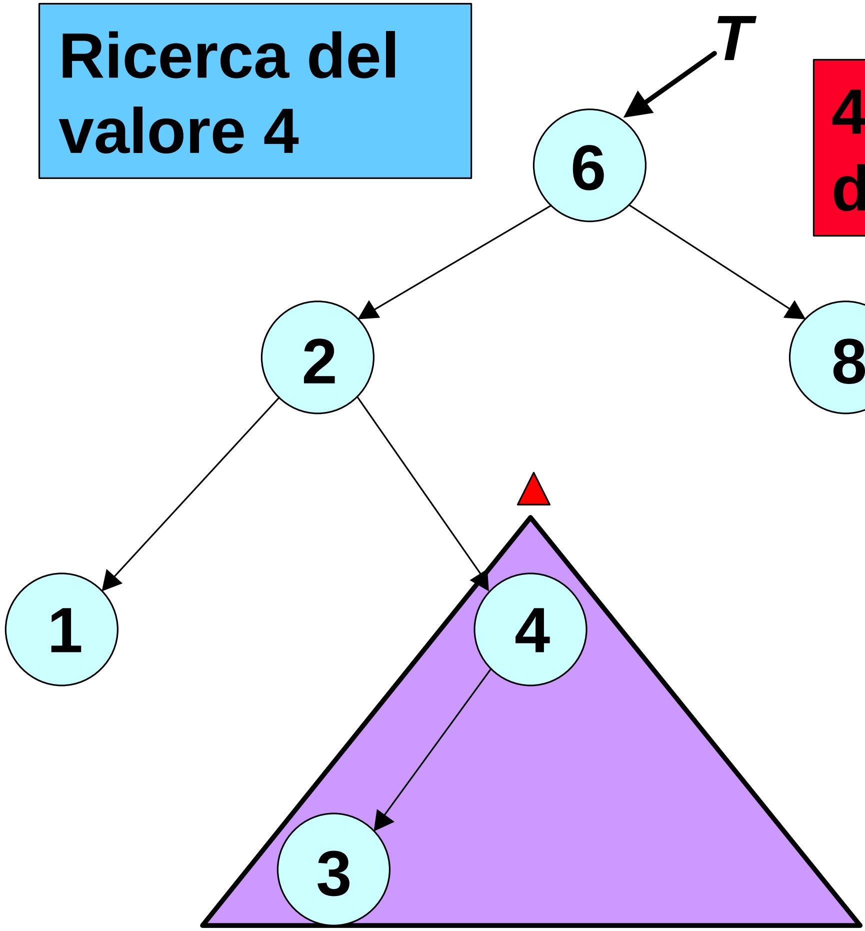


Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



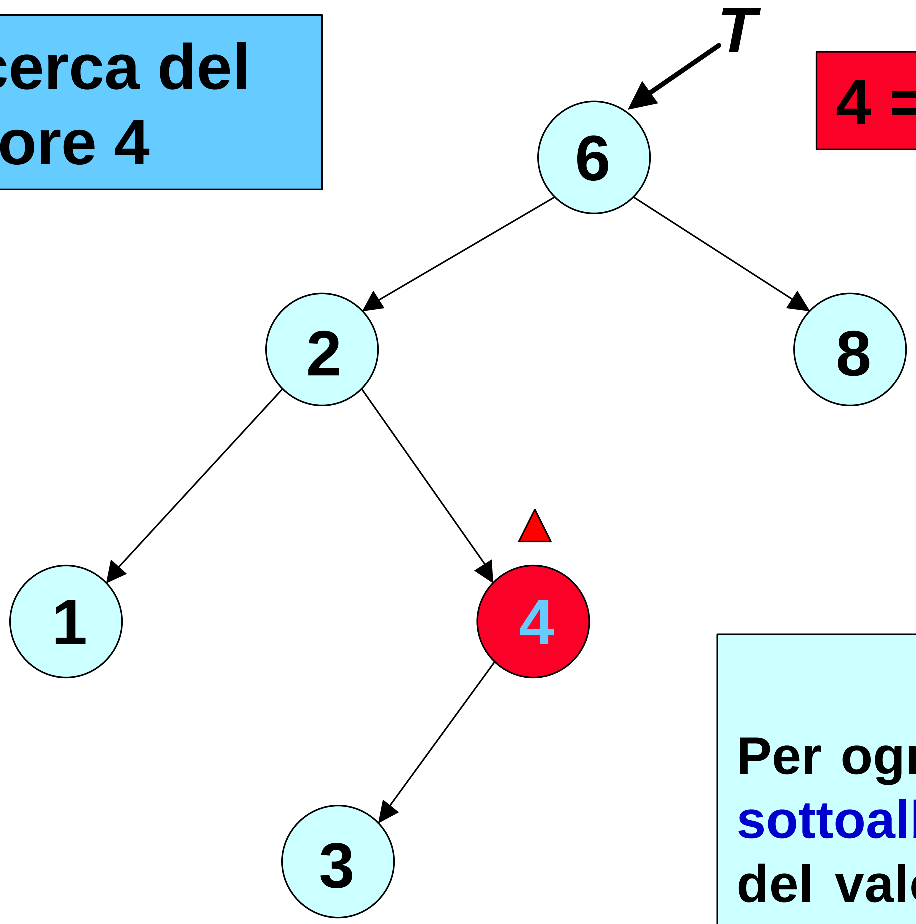
4 sta nel sottoalbero destro di 2

Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca: esempio

Ricerca del valore 4



4 = 4 : *Trovato*!

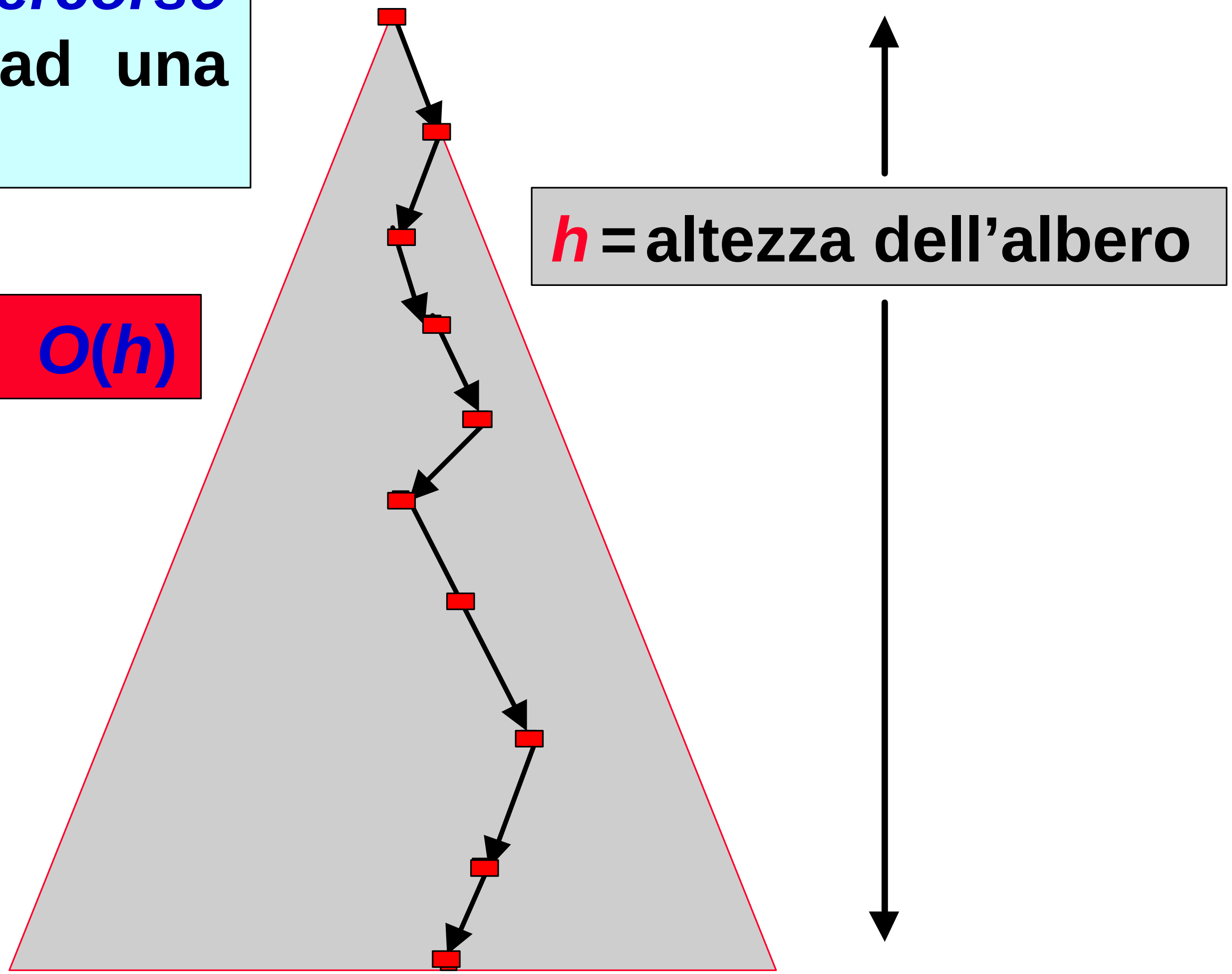
Proprietà* degli *ABR

Per ogni nodo X, i valori nei nodi del sottoalbero sinistro sono tutti minori del valore nel nodo X, e tutti i valori nei nodi del sotto-albero destro sono maggiori del valore di X

Alberi binari di ricerca

In generale, la *ricerca* è confinata ai *nodi* posizionati *lungo un singolo percorso* (path) dalla radice ad una foglia

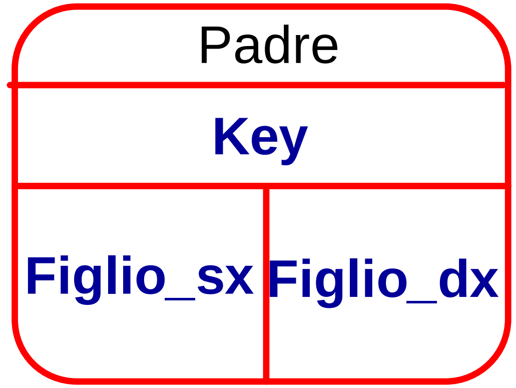
Tempo di ricerca = *O*(*h*)



ADT albero binario di ricerca: tipo di dato

- ***È una specializzazione dell'ADT albero binario***
- ***Gli elementi statici sono essenzialmente gli stessi, l'unica differenza è che si assume che i dati contenuti (le chiavi) siano ordinabili secondo qualche relazione d'ordine.***

```
typedef *nodo ARB;
struct {
        ARB padre;
        elemento key;
        ARB figlio_dx, figlio_sx;
      } nodo;
```



ADT albero binario di ricerca: funzioni

- **Selettori:**
  - *root(T)*
  - *figlio_dx(T)*
  - *figlio_sx(T)*
  - *key(T)*
- **Costruttori/Distruttori:**
  - *crea_albero()*
  - *ARB_inserisci(T,x)*
  - *ARB_cancella (T,x)*
- **Proprietà:**
  - *vuoto(T)* = *return (T=Nil)*

Ritorna il valore del test di uguaglianza

- **Operazioni di Ricerca**
  - *ARB_ricerca(T,k)*
  - *ARB_minimo(T)*
  - *ARB_massimo(T)*
  - *ARB_successore(T,x)*
  - *ARB_predecessore(T,x)*

Ricerca in Alberi binari di ricerca

```
ARB_ricerca(T,k)
   IF T ¹ NIL THEN
       IF k ¹ Key[T] THEN
          IF k < Key[T] THEN
            return ARB_ricerca(figlio_sx[T],k)
          ELSE
            return ARB_ricerca(figlio_dx[T],k)
       ELSE
          return T
   ELSE
       return T
```

***NOTA**: Questo algoritmo **cerca il nodo con chiave k nell'albero T e ne ritorna un puntatore**. Ritorna* **NIL** *nel caso non esista alcun nodo con chiave* ***k**.*

Ricerca in Alberi binari di ricerca

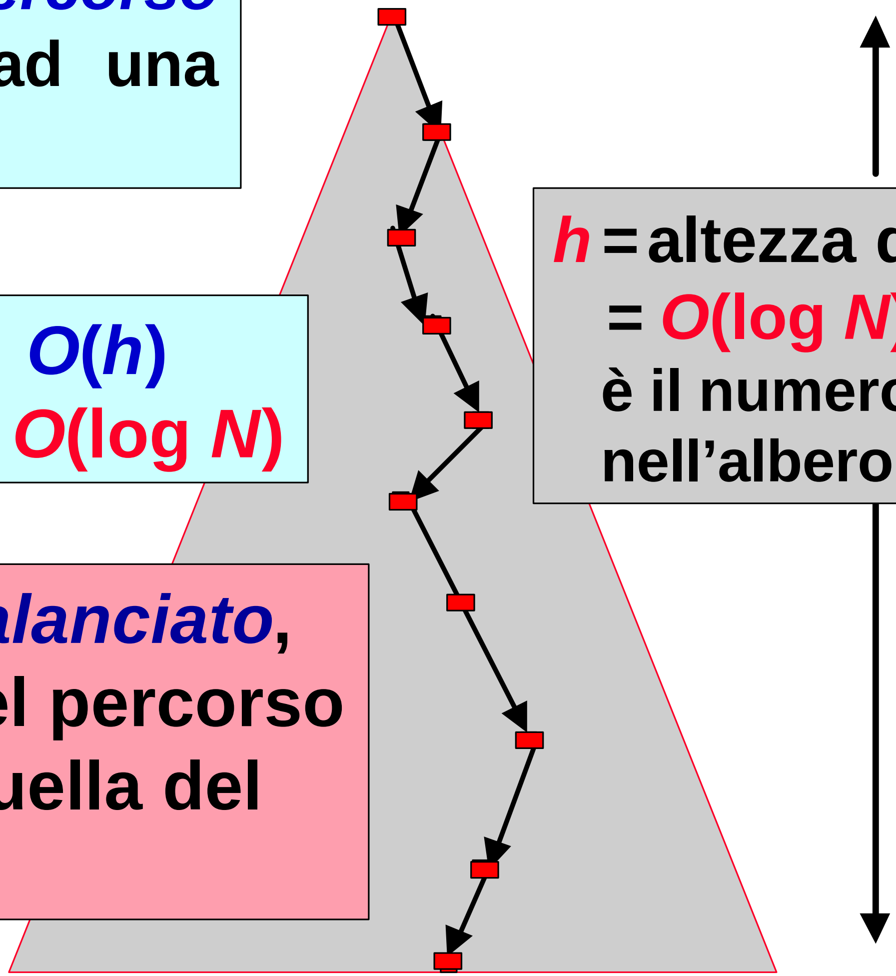
```
ARB_ricerca'(T,k)
   IF T = NIL OR k = Key[T] THEN
        return T
   ELSE IF k < Key[T] THEN
            return ARB_ricerca(figlio_sx[T],k)
        ELSE
            return ARB_ricerca(figlio_dx[T],k)
```

NOTA: Variante sintattica del precedente algoritmo!

Ricerca in Alberi binari di ricerca

In generale, la *ricerca* è confinata ai *nodi* posizionati *lungo un singolo percorso* (*path*) dalla radice ad una foglia

Tempo di ricerca = $O(h)$
= $O(\log N)$



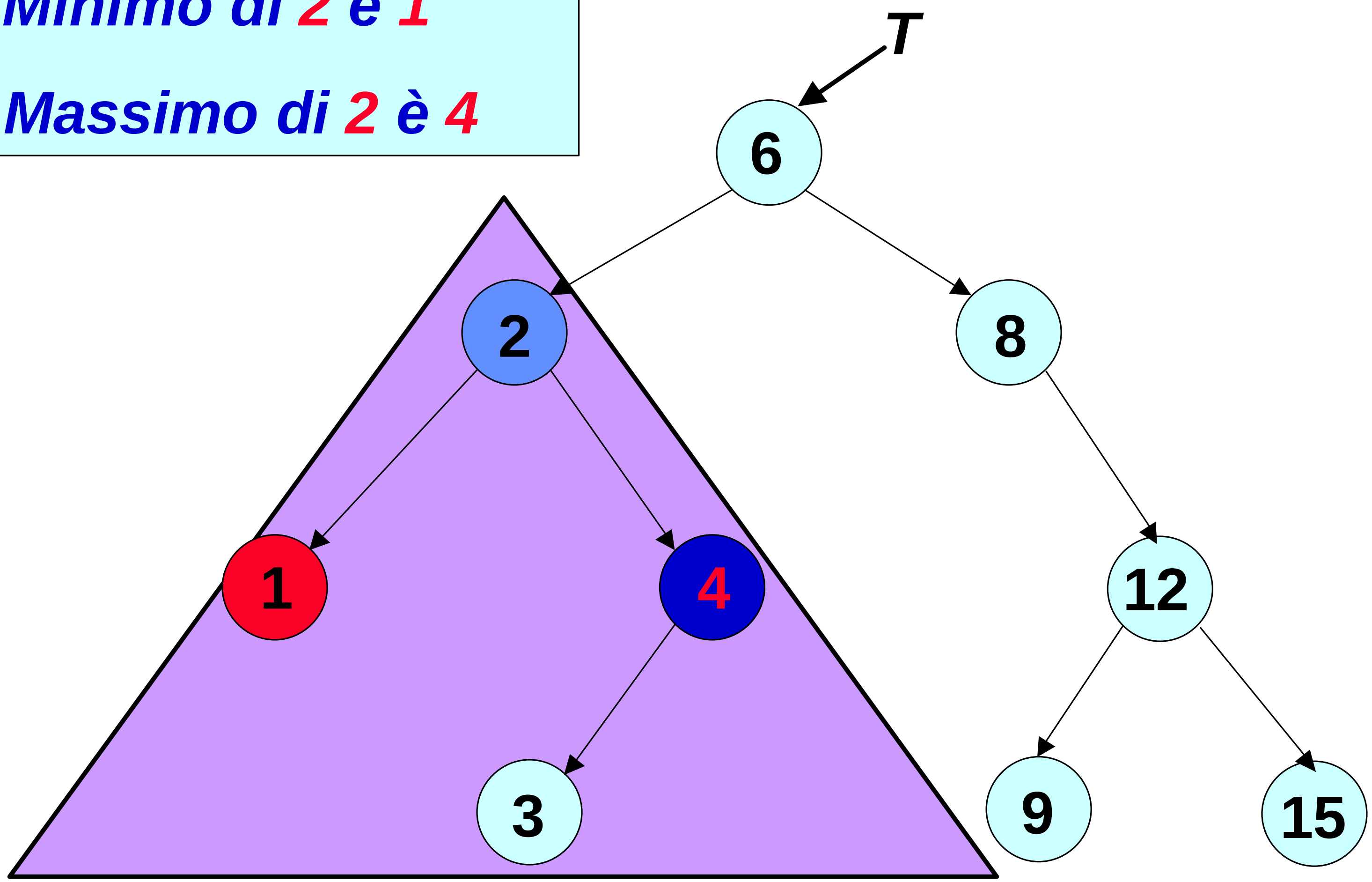
h = altezza dell'albero = $O(\log N)$ dove N è il numero di nodi nell'albero

Solo se l'albero è *balanciato*, cioè la lunghezza del percorso minimo è vicino a quella del percorso massimo

ARB: ricerca del minimo e massimo

Il Minimo di 2 è 1

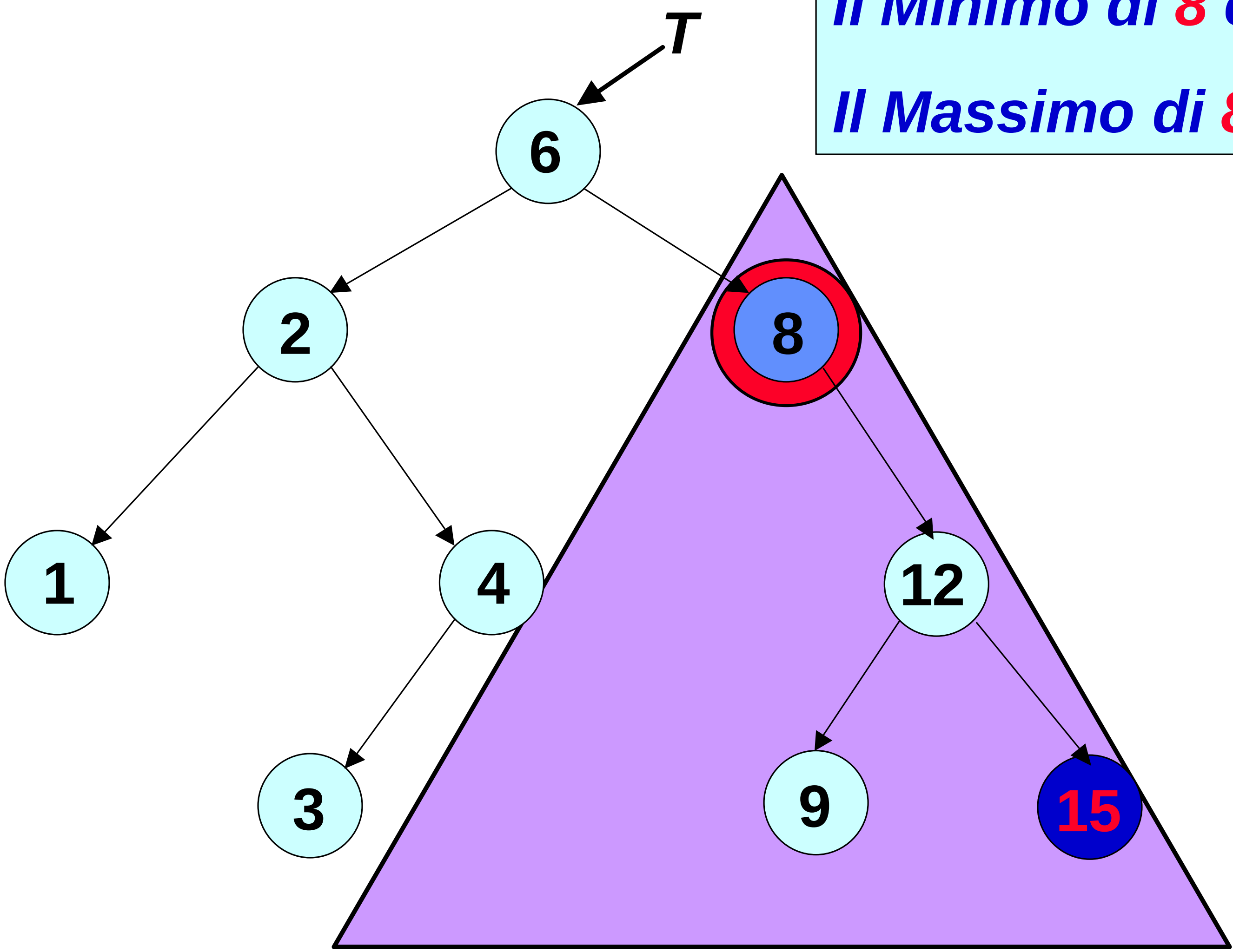
Il Massimo di 2 è 4



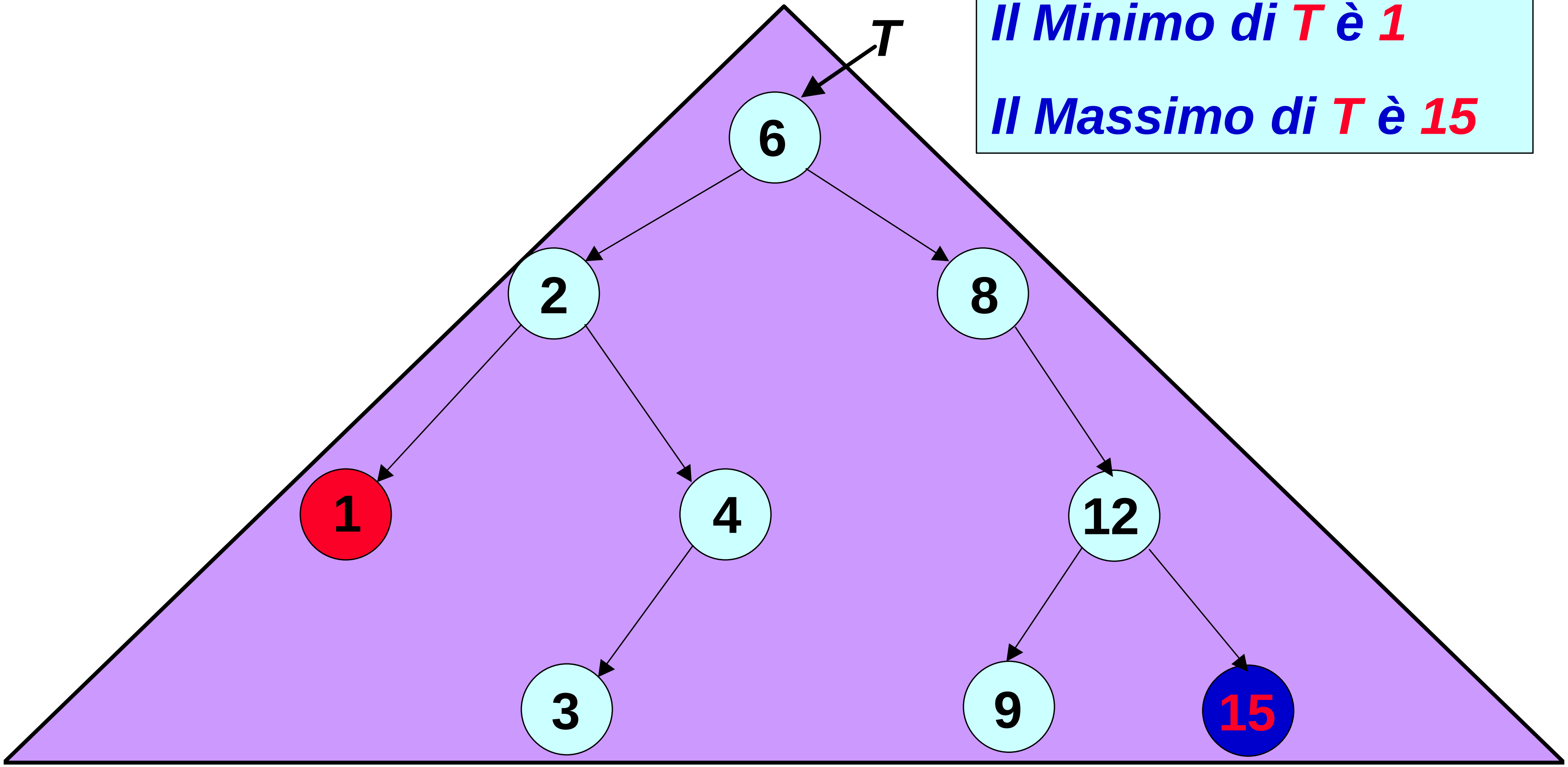
ARB: ricerca del minimo e massimo

Il Minimo di 8 è 8

Il Massimo di 8 è 15



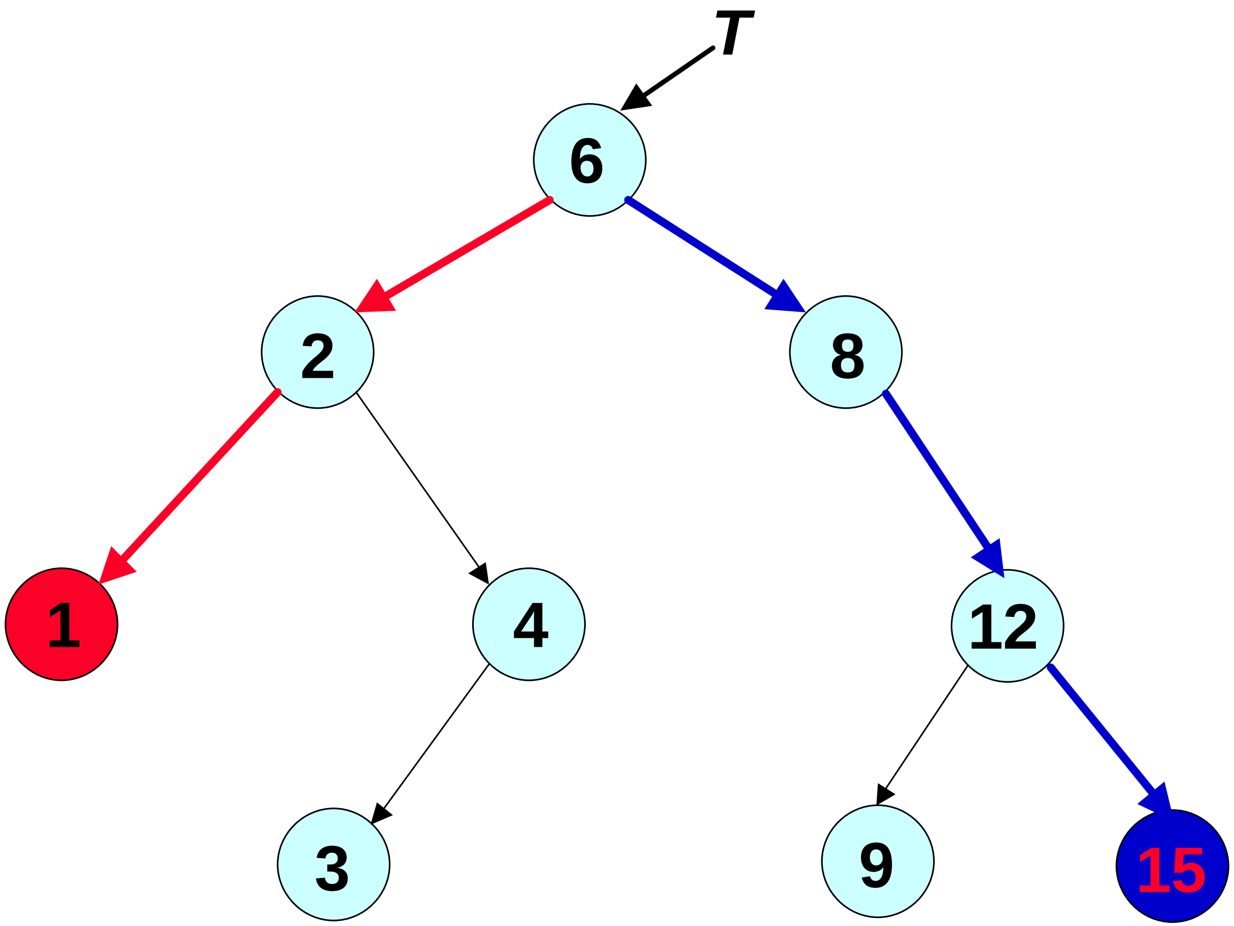
ARB: ricerca del minimo e massimo



Il Minimo di T è 1

Il Massimo di T è 15

ARB: ricerca del minimo e massimo



ARB: ricerca del minimo e massimo

```
ARB ABR-Minimo(x:ARB)
   WHILE figlio-sx[x] 1 NIL
     DO x = figlio-sx[x]
   return x
```

```
ARB ABR-Massimo(x: ARB)
   WHILE figlio-dx[x] 1 NIL
     DO x = figlio-dx[x]
   return x
```

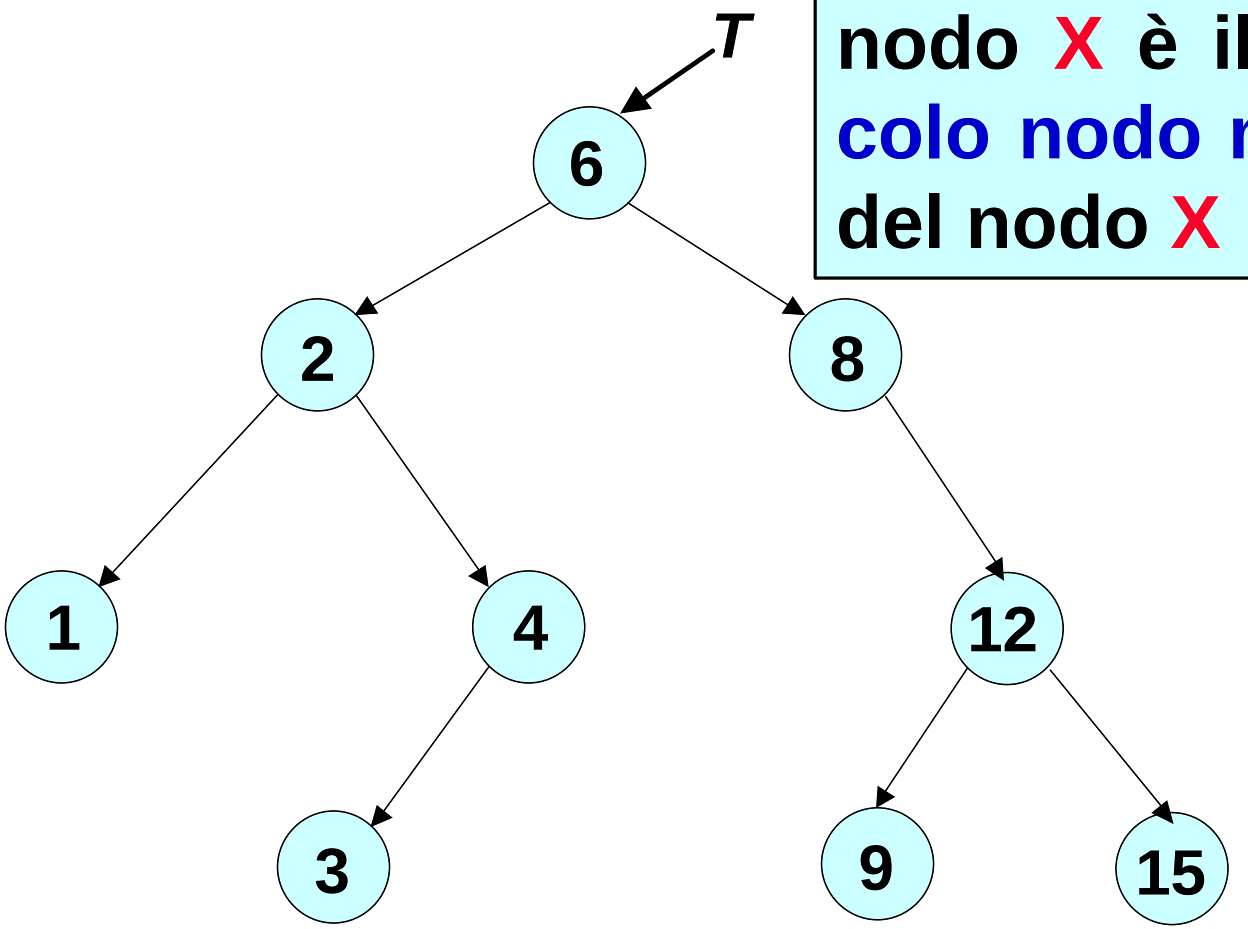
ARB: ricerca del minimo e massimo

```
ARB ABR-Minimo(x:ARB)
   WHILE figlio-sx[x] 1 NIL
     DO x = figlio-sx[x]
   return x
```

```
ARB ABR-Massimo(x: ARB)
   WHILE figlio-dx[x] 1 NIL
     DO x = figlio-dx[x]
   return x
```

```
ARB ARB_Minimo(x:ARB)
   IF figlio_sx[x] = NIL THEN
       return x
   ELSE
       return ARB_Minimo(figlio_sx[x])
```

ARB: ricerca del successore

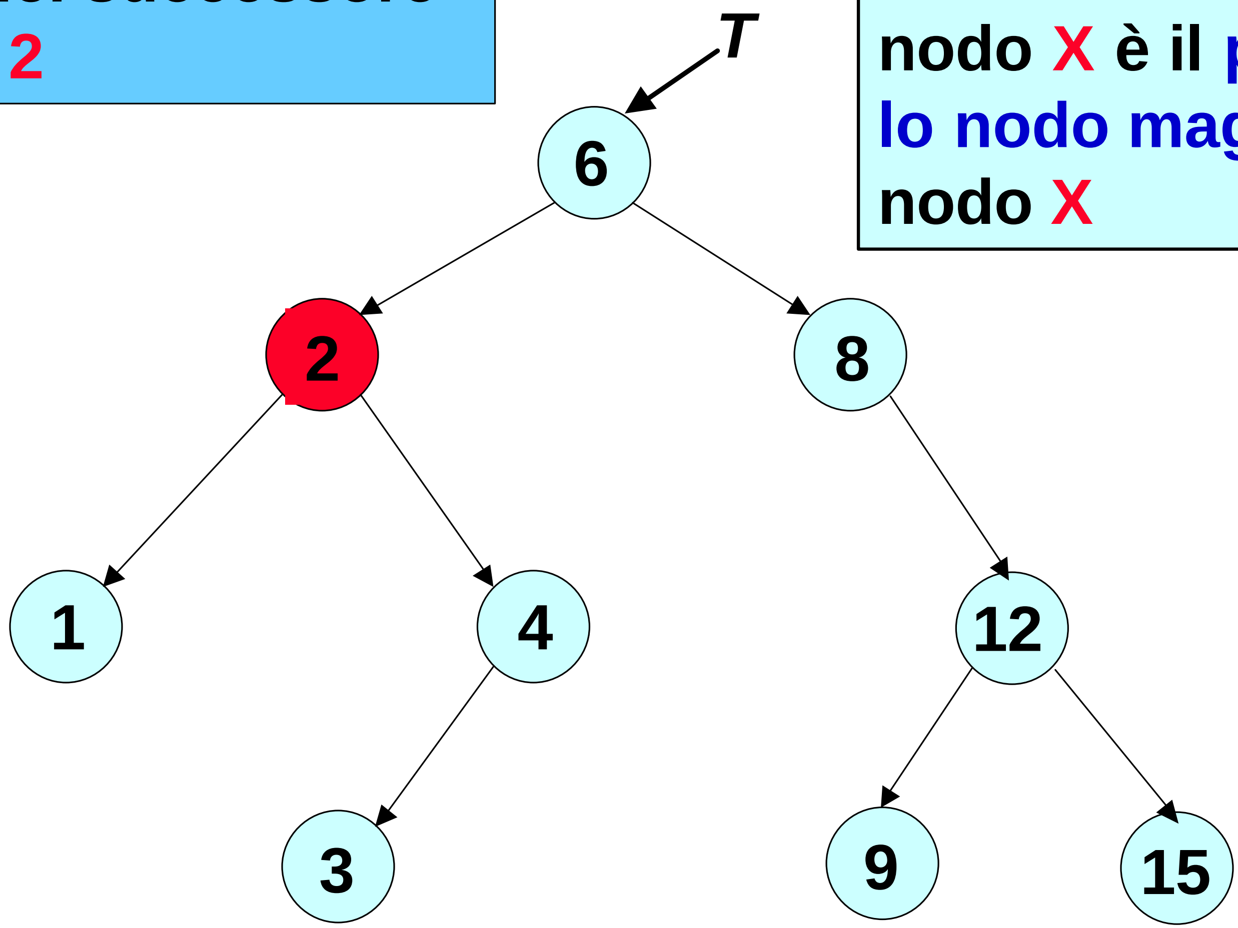


Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X

ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 2**

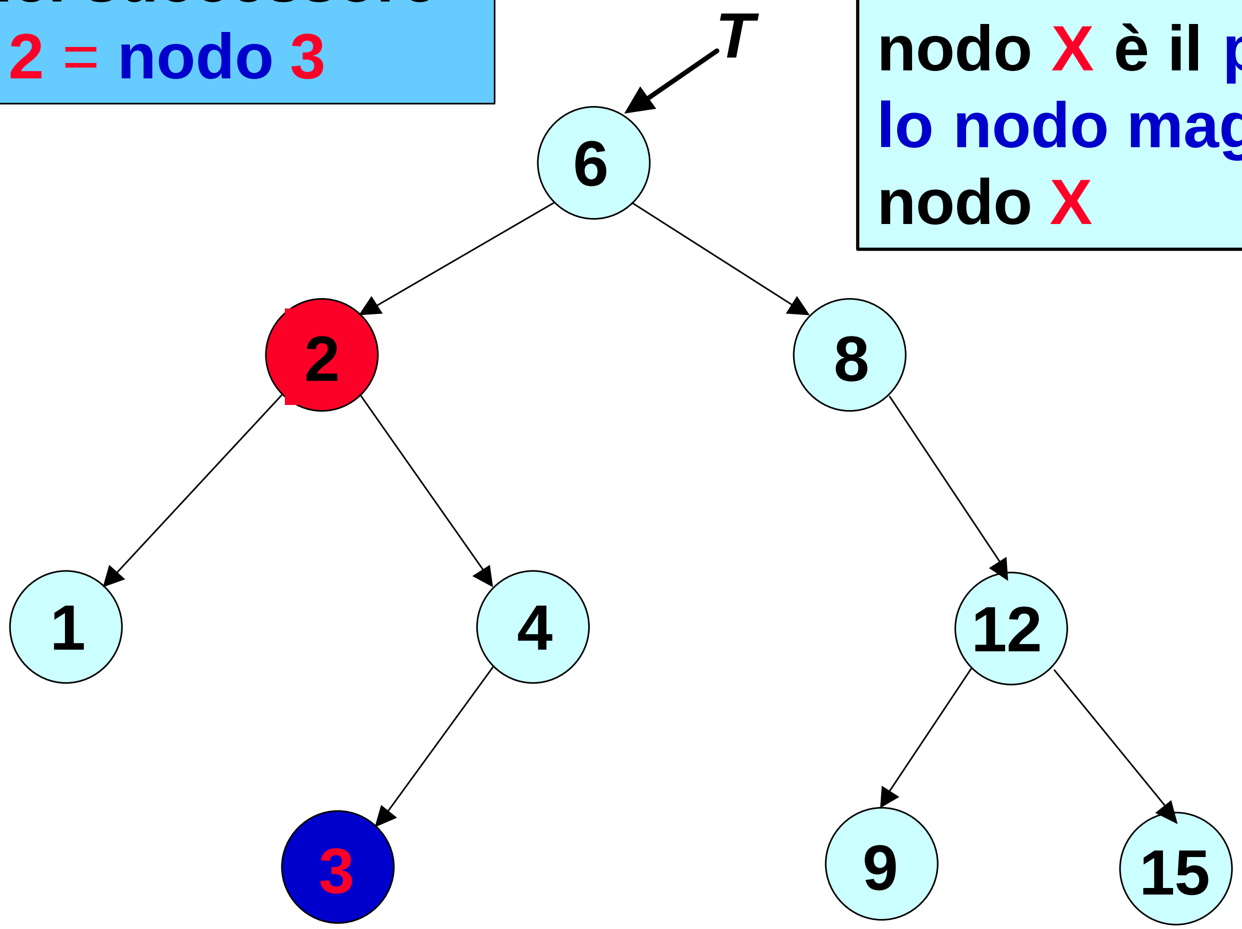
Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X



ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 2 = nodo 3**

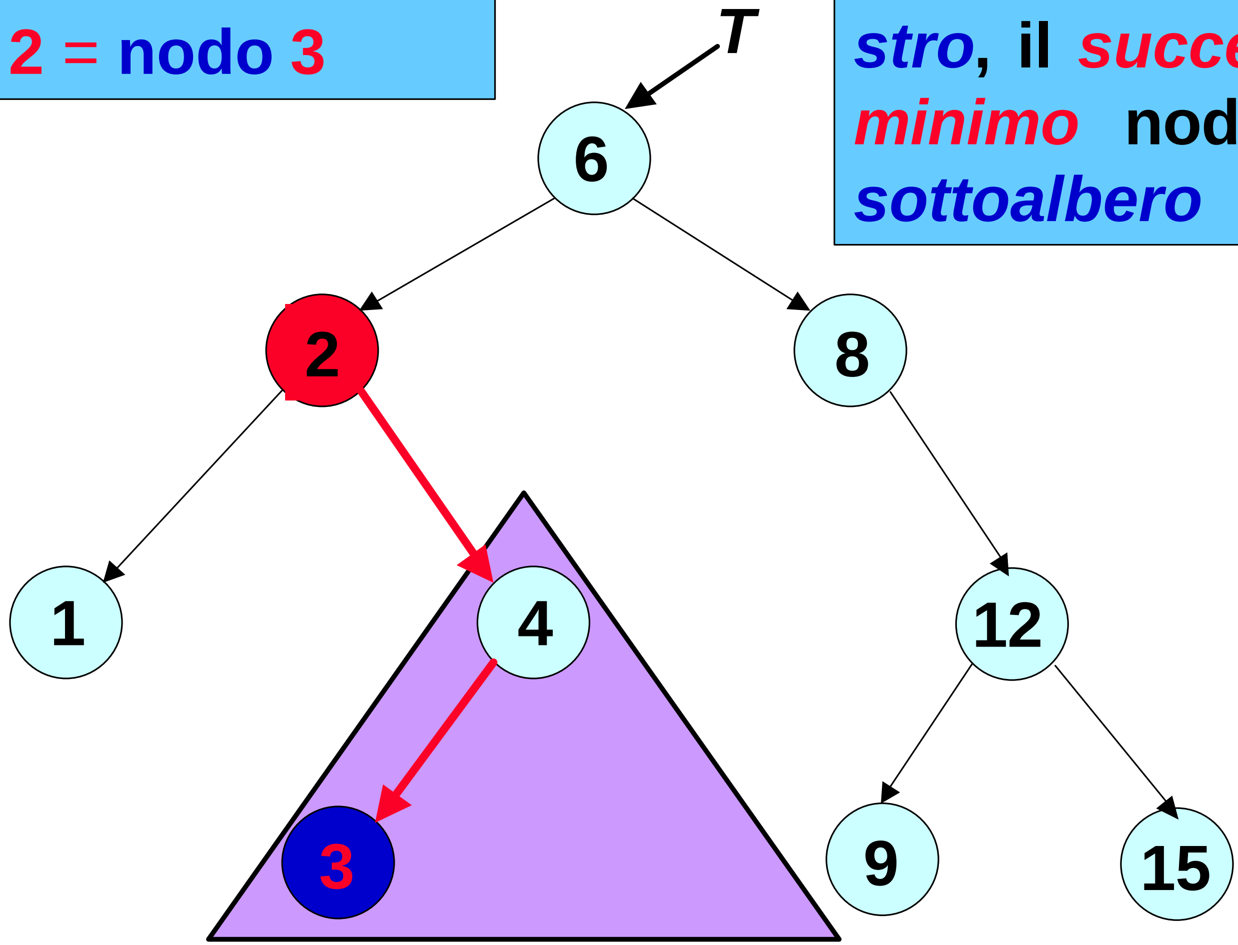
Il successore di un nodo X è il più piccolo nodo maggiore del nodo X



ARB: ricerca del successore

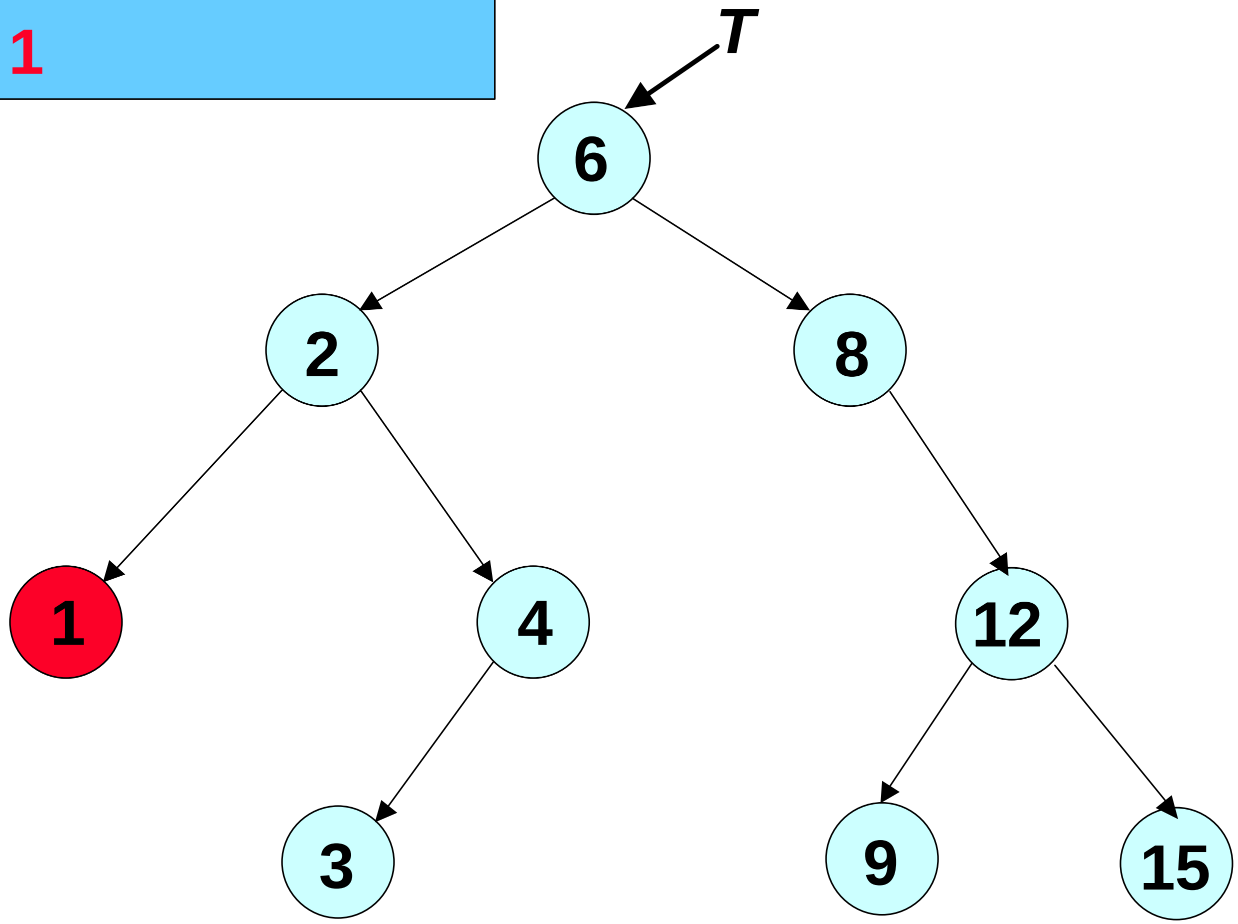
Ricerca del successore del nodo 2 = nodo 3

Se *x* ha un *figlio destro*, il *successore* è il *minimo* nodo di quel *sottoalbero*



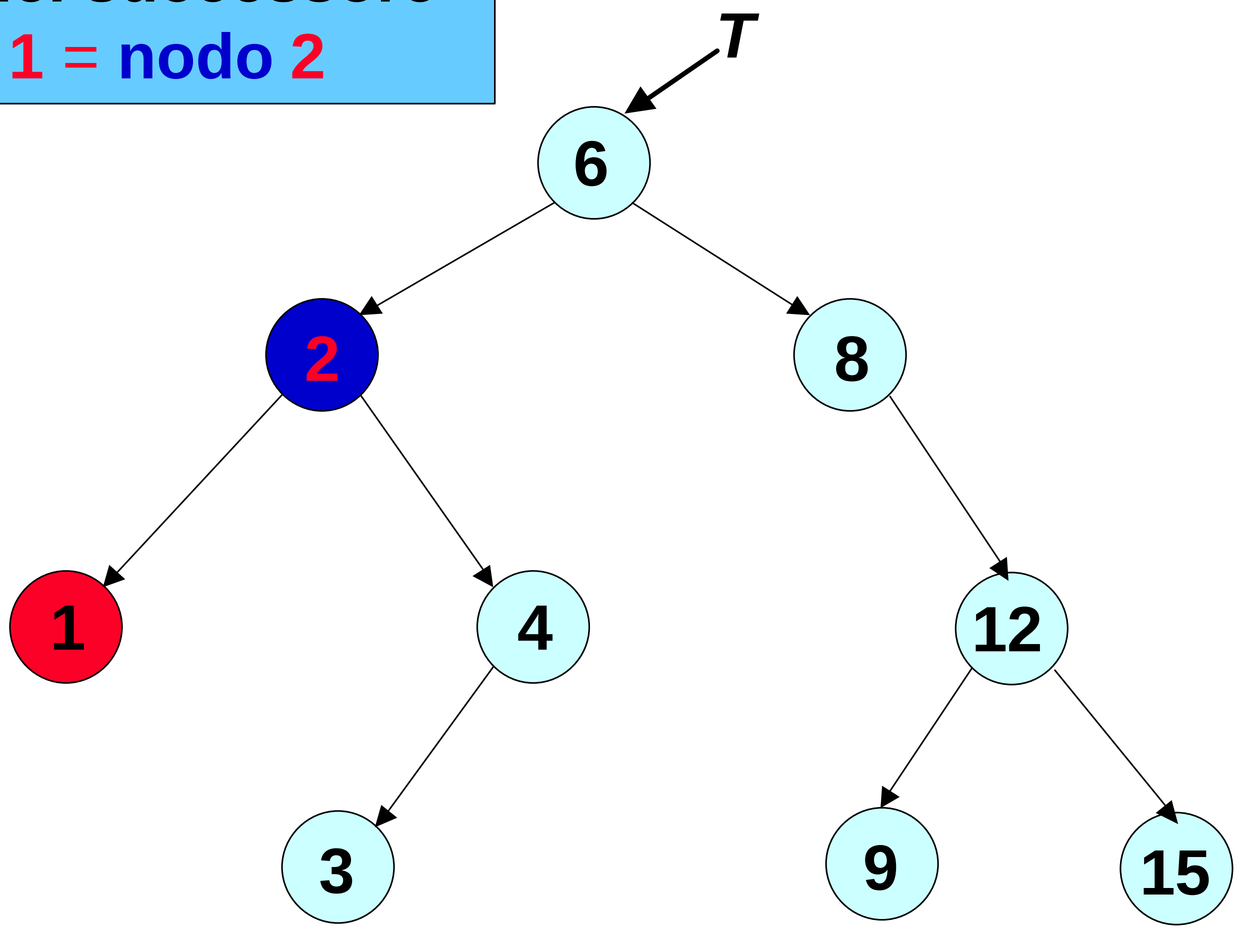
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 1**



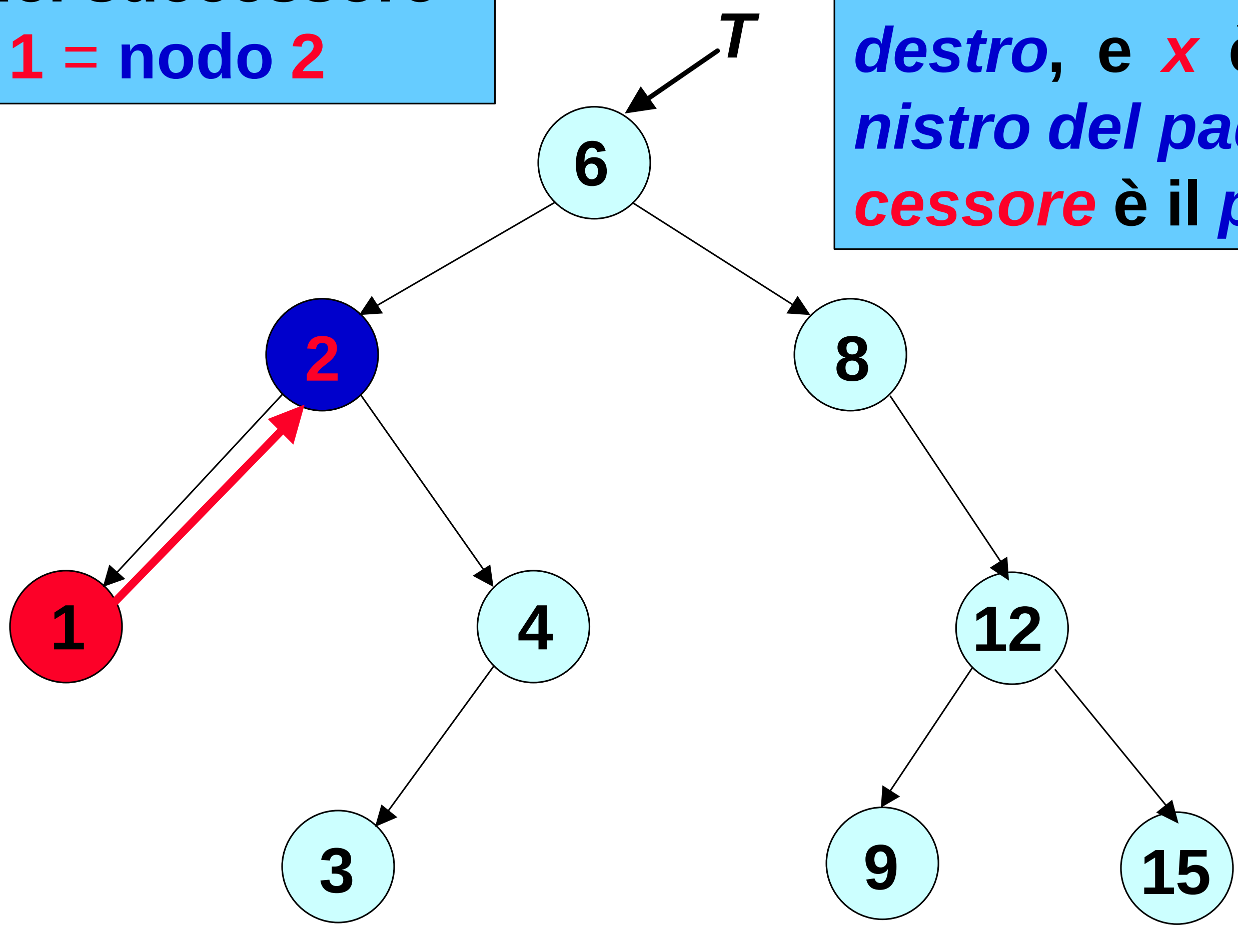
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 1 = nodo 2**



ARB: ricerca del successore

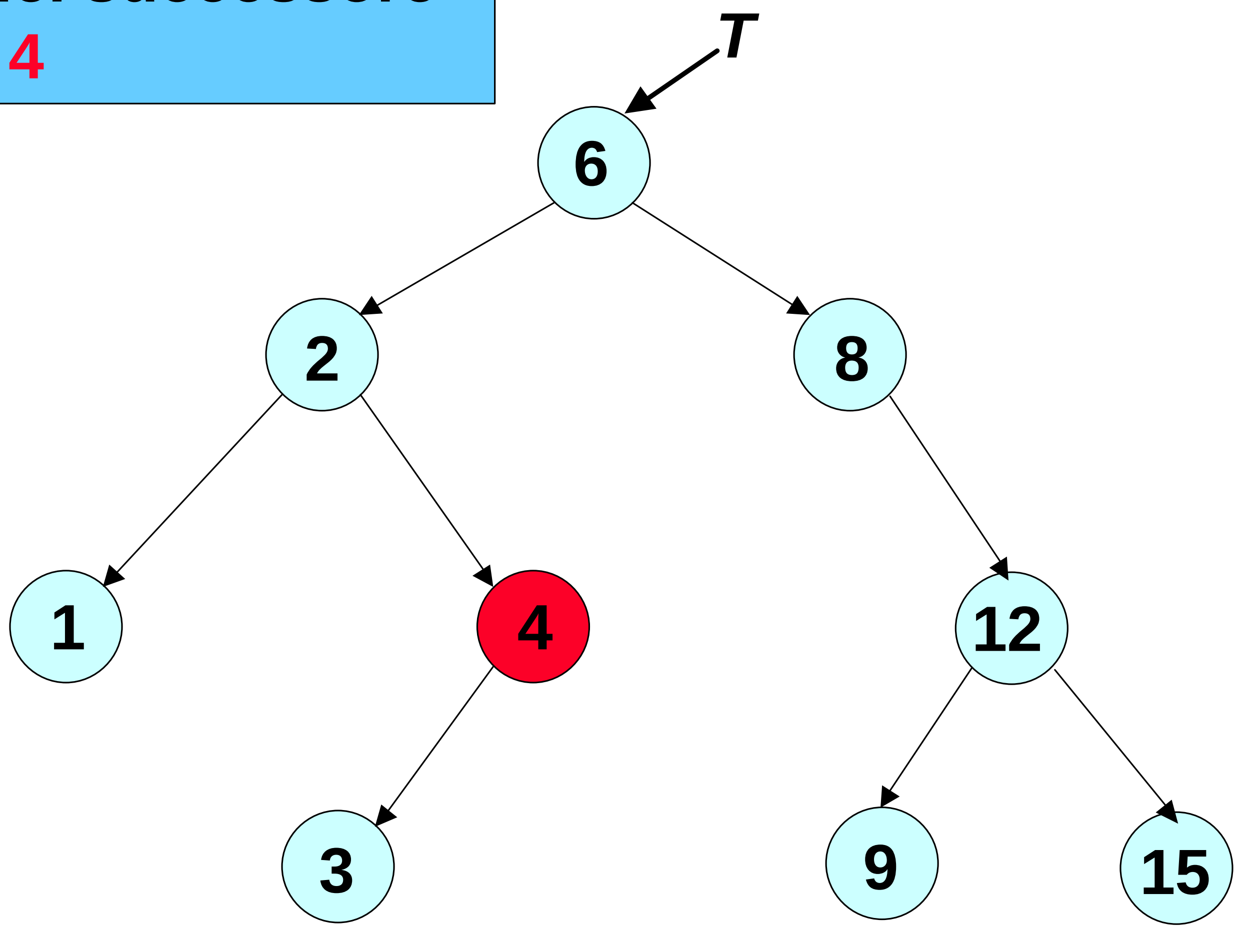
Ricerca **del successore del nodo 1 = nodo 2**



Se *x* NON ha un *figlio destro*, e *x* è *figlio sinistro del padre*, il *successore* è il *padre*.

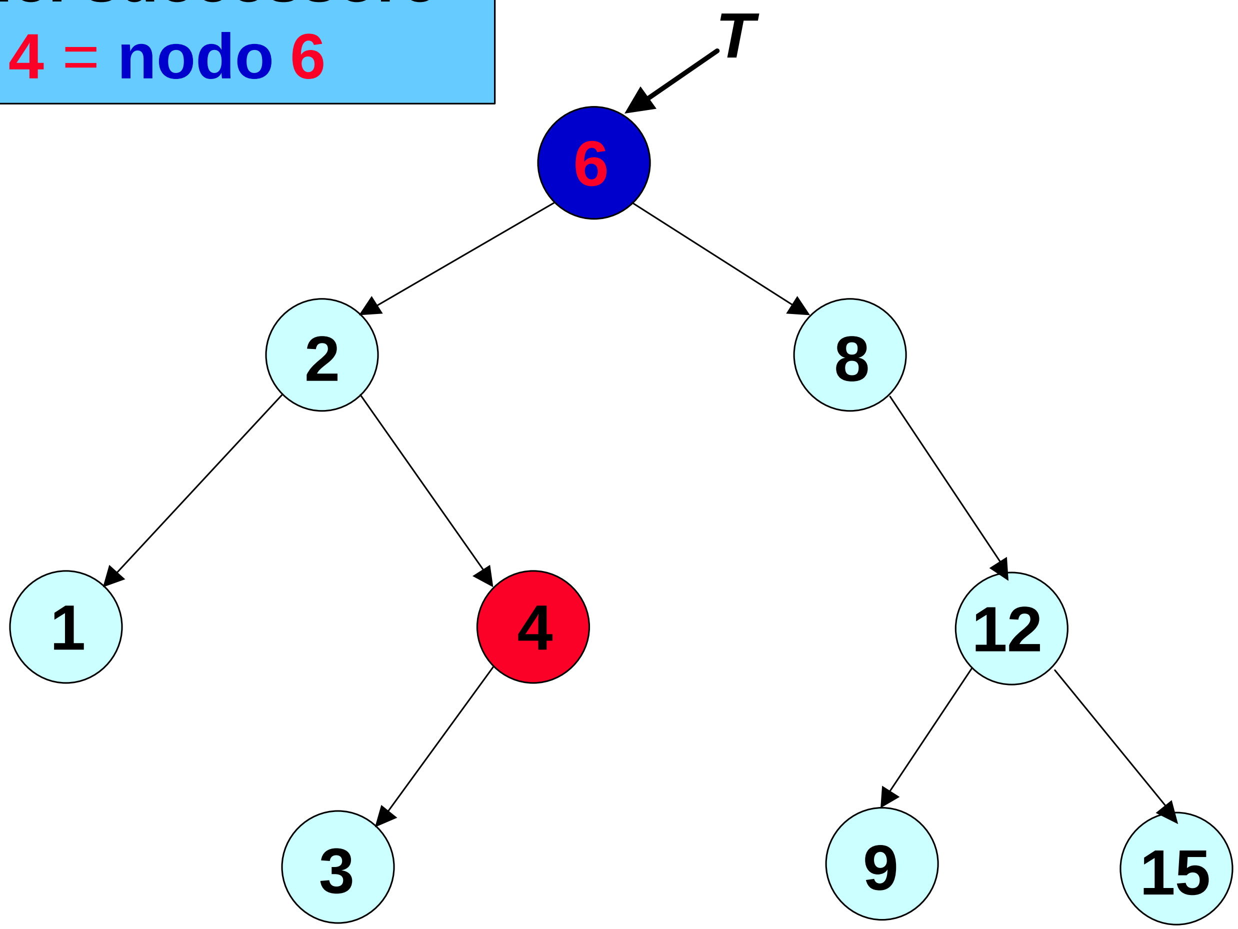
ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 4**



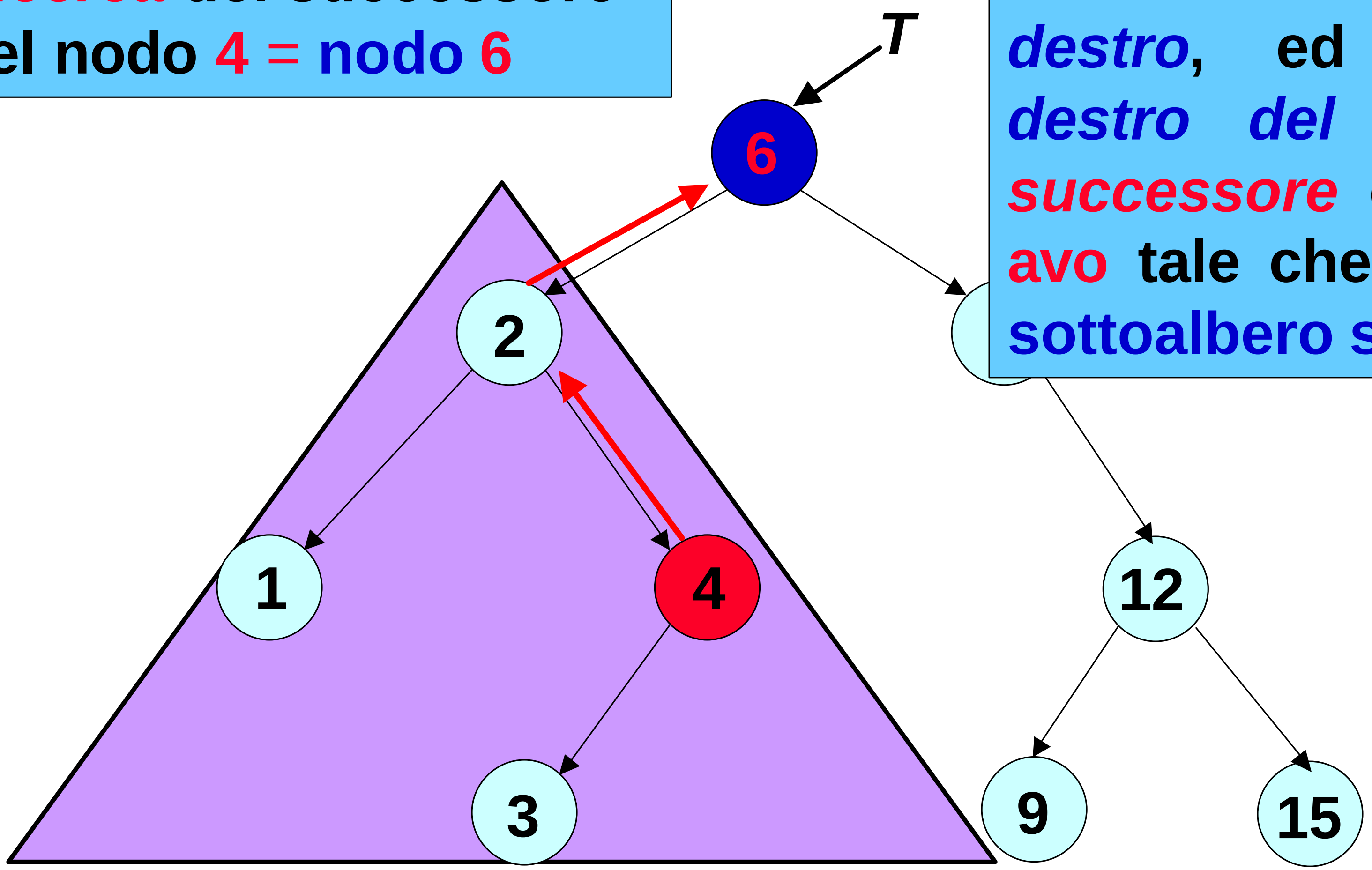
ARB: ricerca del successore

***Ricerca* del successore del nodo 4 = nodo 6**



ARB: ricerca del successore

Ricerca **del successore del nodo 4 = nodo 6**



Se *x* NON ha un *figlio destro*, ed è *figlio destro del padre*, il *successore* è il primo avo tale che x sta nel sottoalbero sinistro.

ARB: ricerca del successore

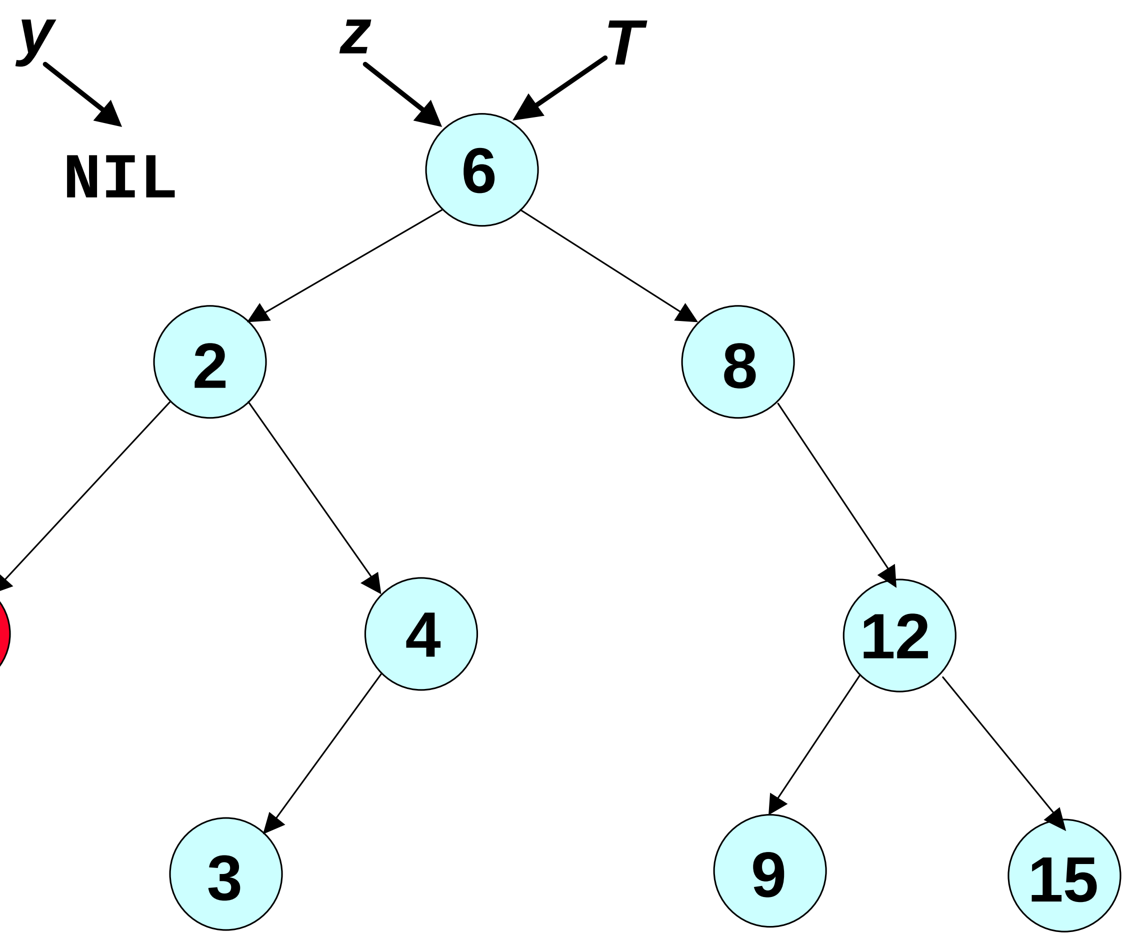
```
ABR-Successore(x)
   IF figlio-dx[x] ≠ NIL THEN
     return ABR-Minimo(figlio-dx[x])
   ELSE
     y = padre[x]
     WHILE y ≠ NIL AND x = figlio-dx[y] DO
          x = y
          y = padre[y]
     return y
```

ARB: ricerca del successore

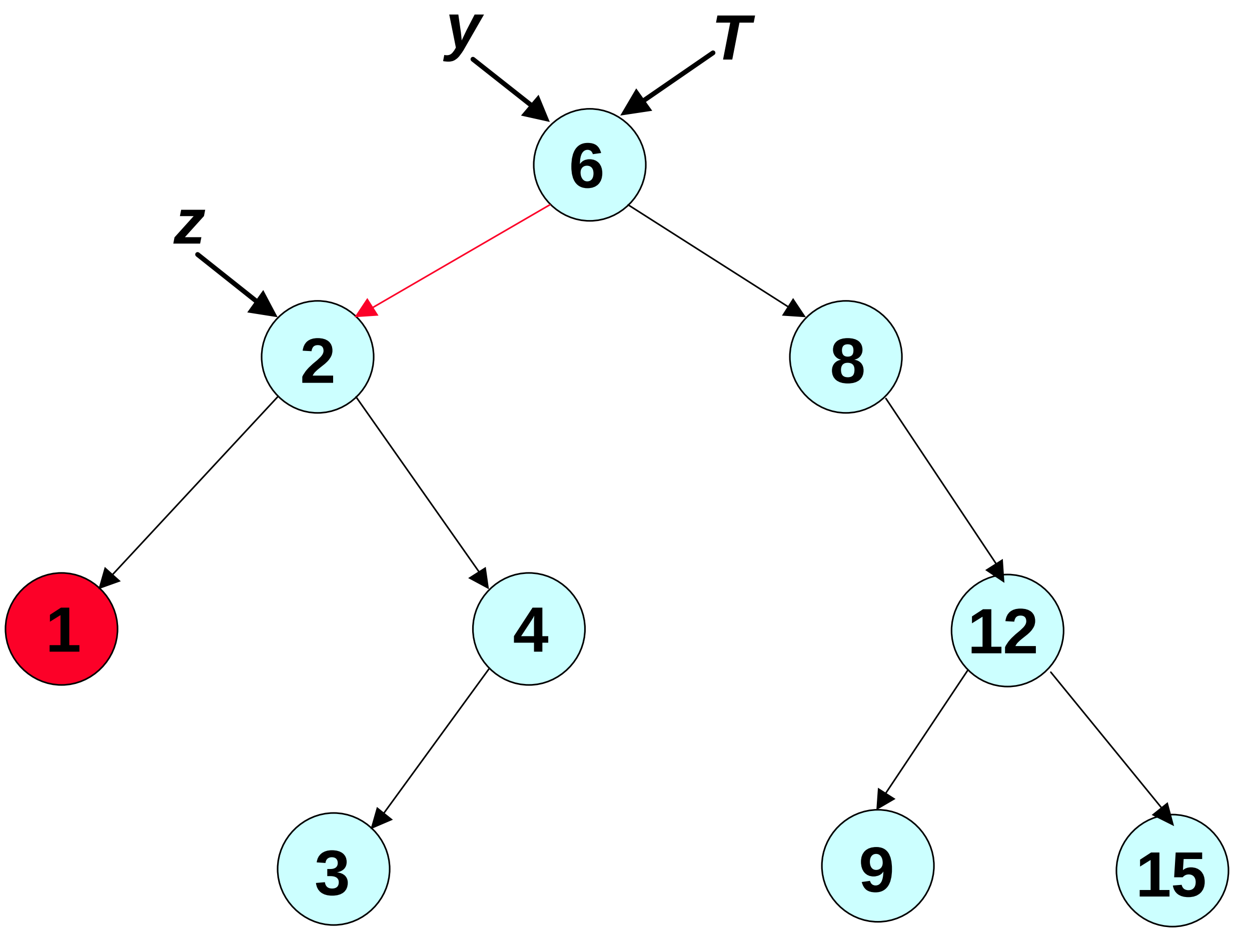
```
ABR-Successore(x)
   IF figlio-dx[x] ≠ NIL THEN
     return ABR-Minimo(figlio-dx[x])
   ELSE
     y = padre[x]
     WHILE y ≠ NIL AND x = figlio-dx[y] DO
          x = y
          y = padre[y]
     return y
```

Questo algoritmo assume che ogni nodo abbia il puntatore al padre

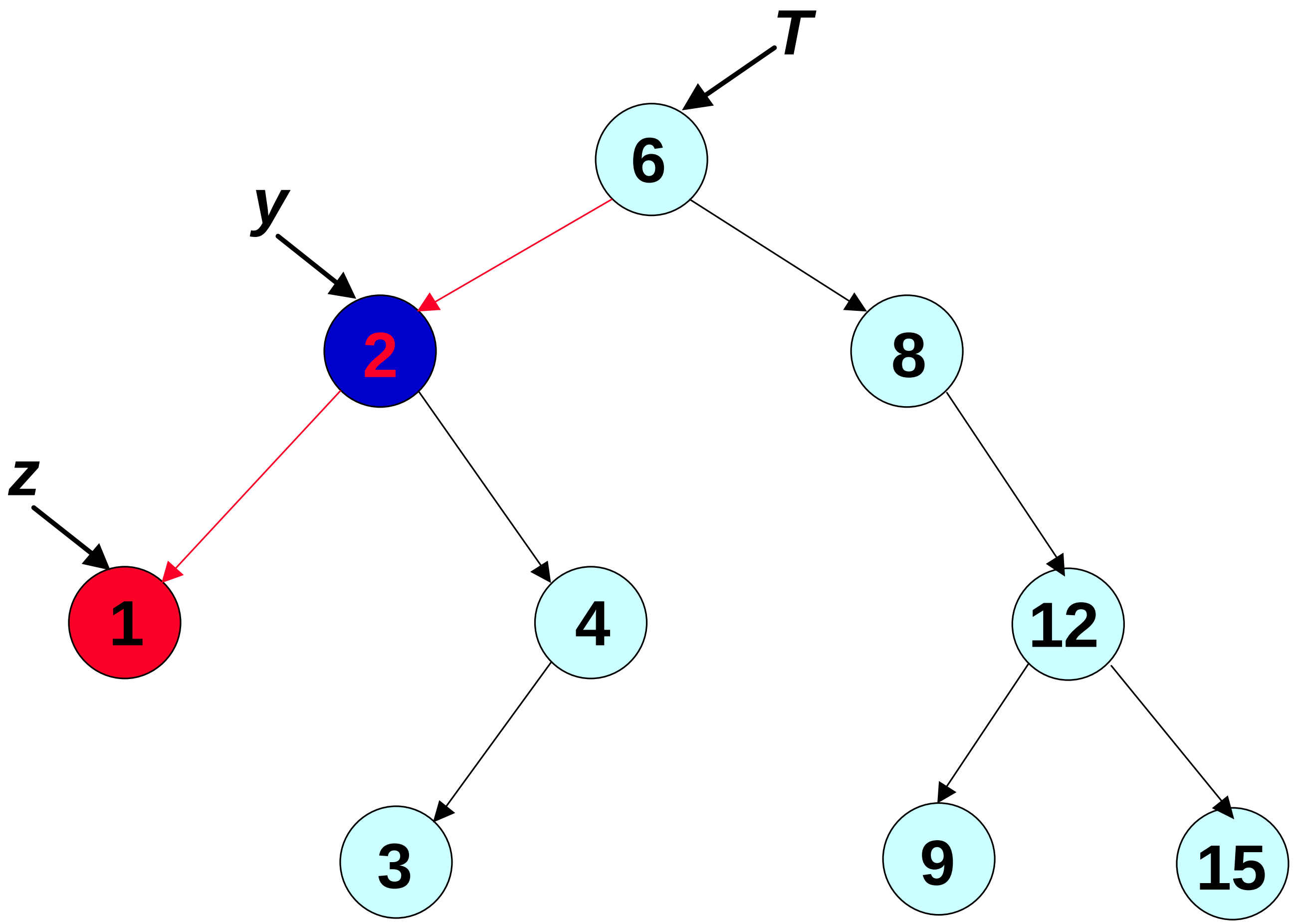
ARB: ricerca del successore II



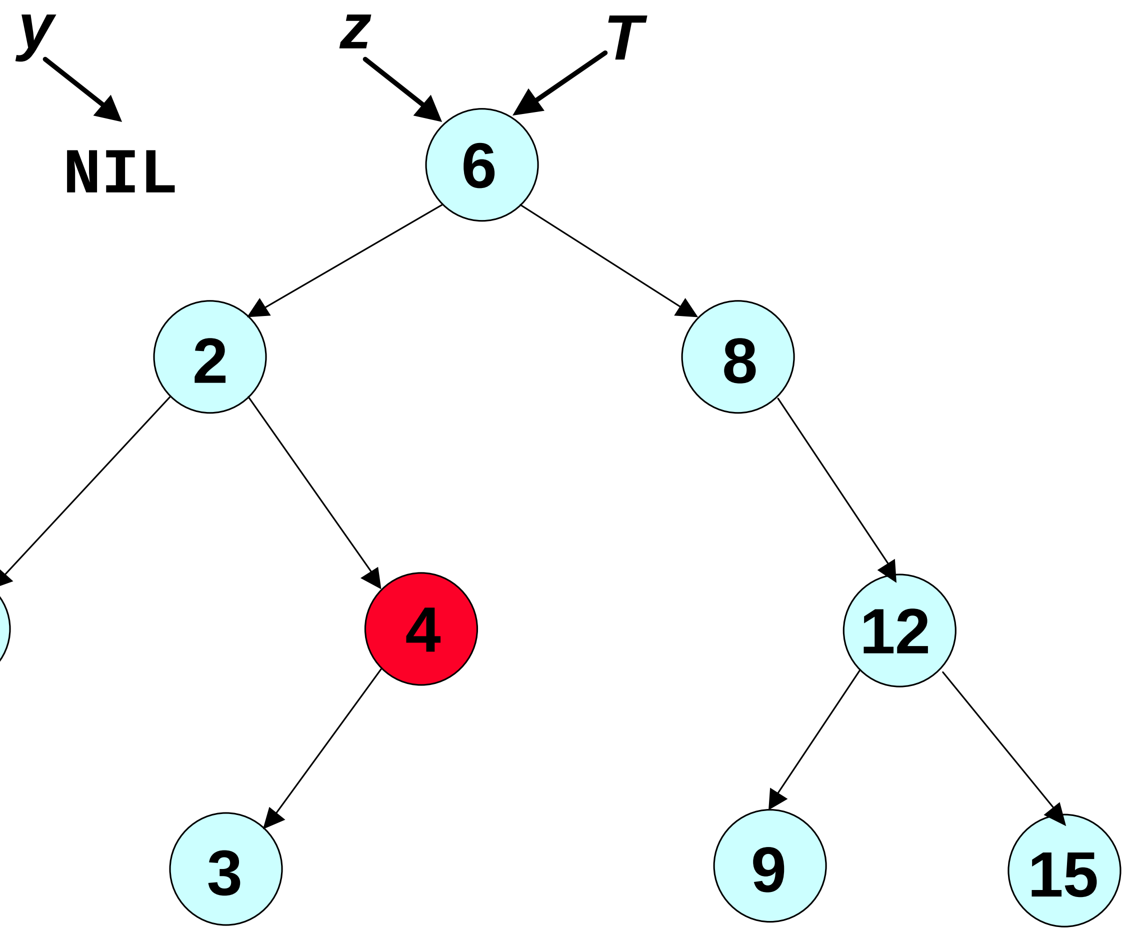
ARB: ricerca del successore II



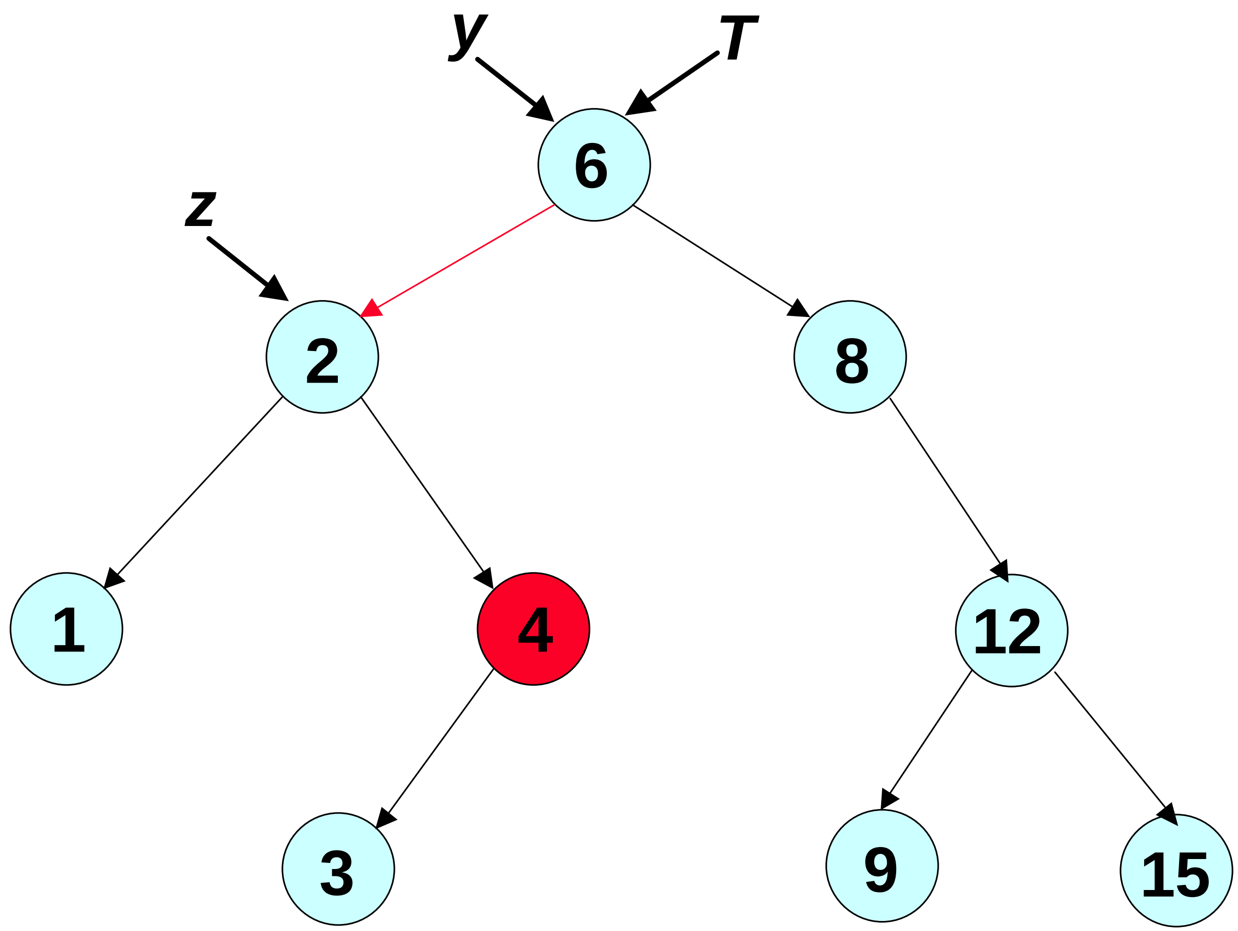
ARB: ricerca del successore II



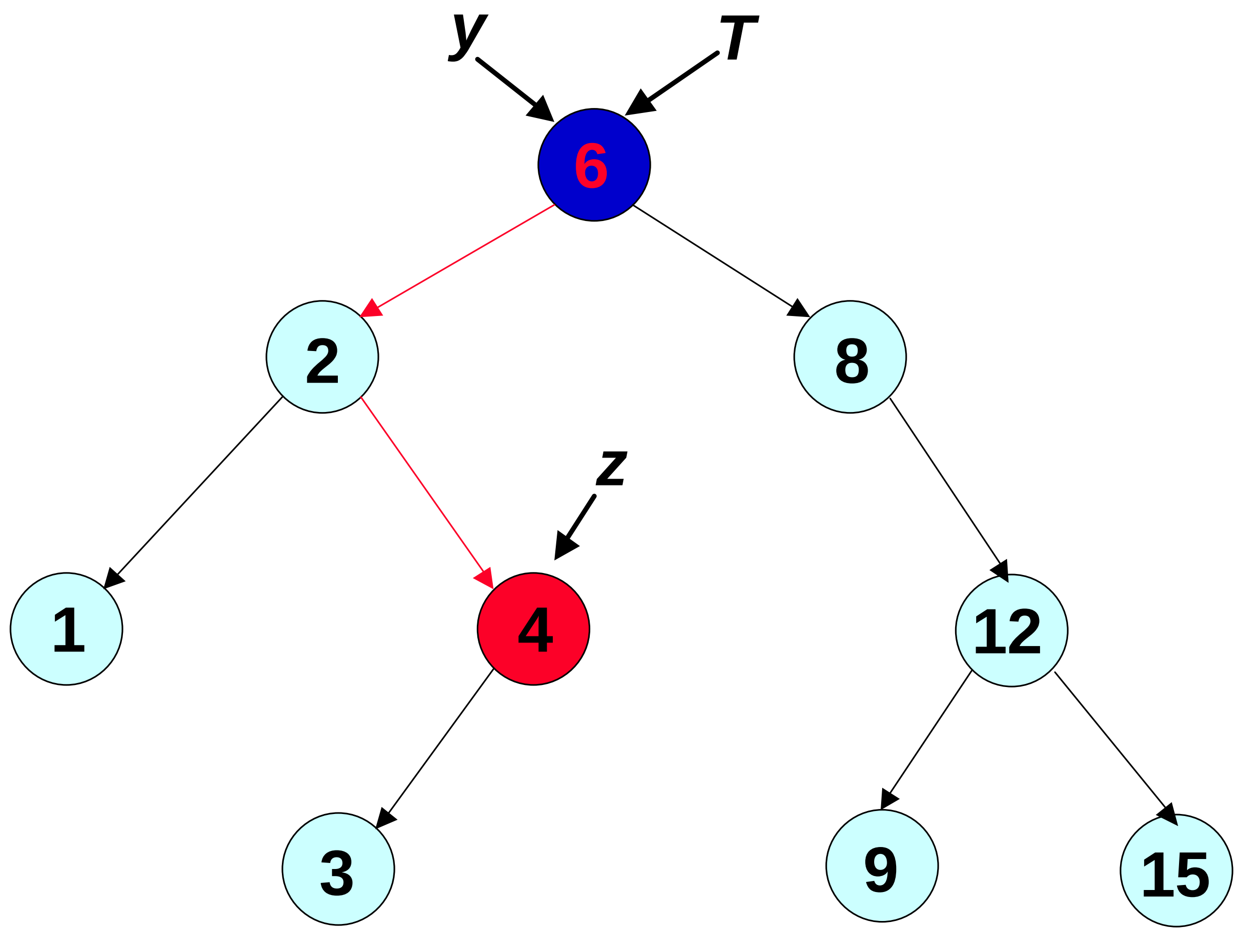
ARB: ricerca del successore II



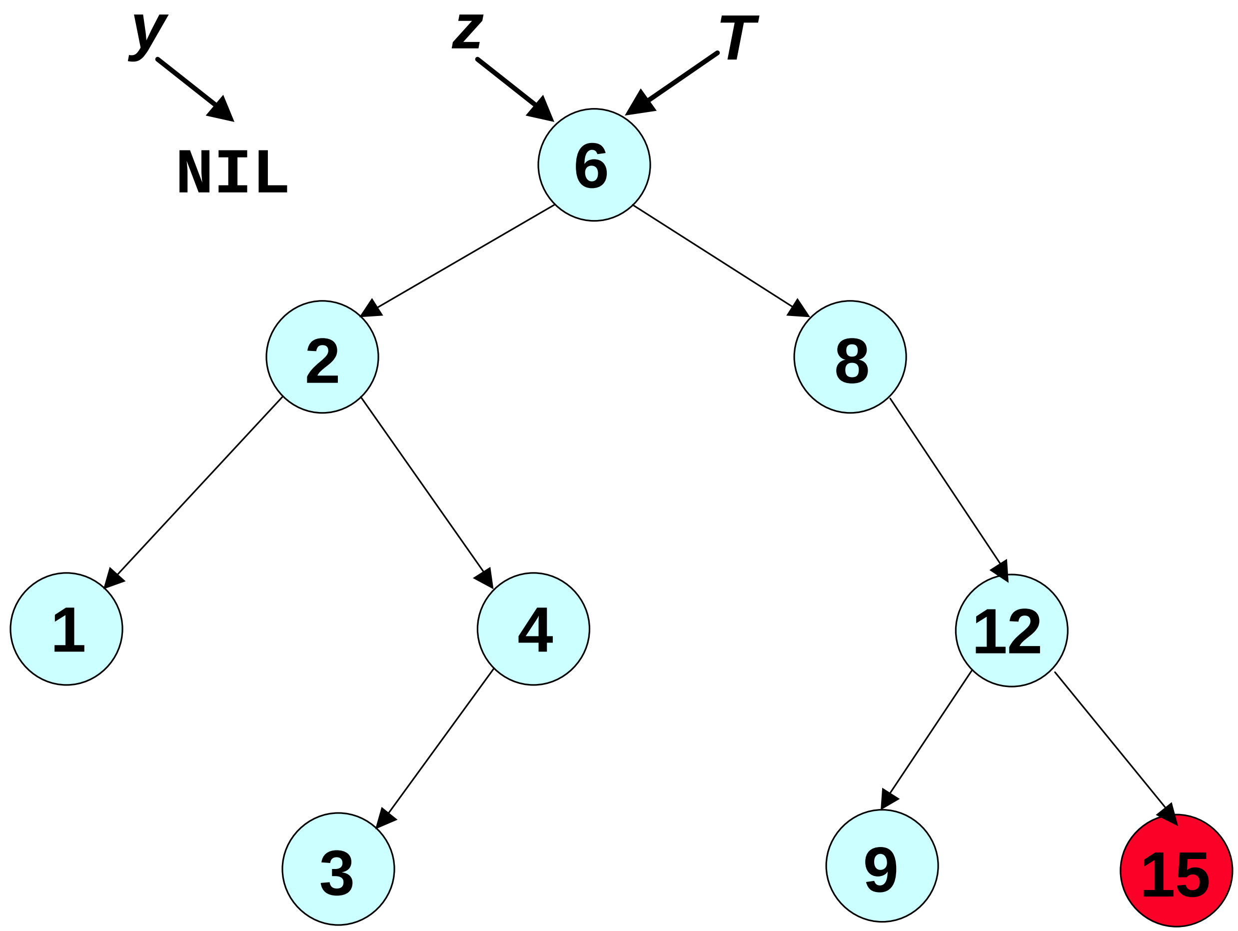
ARB: ricerca del successore II



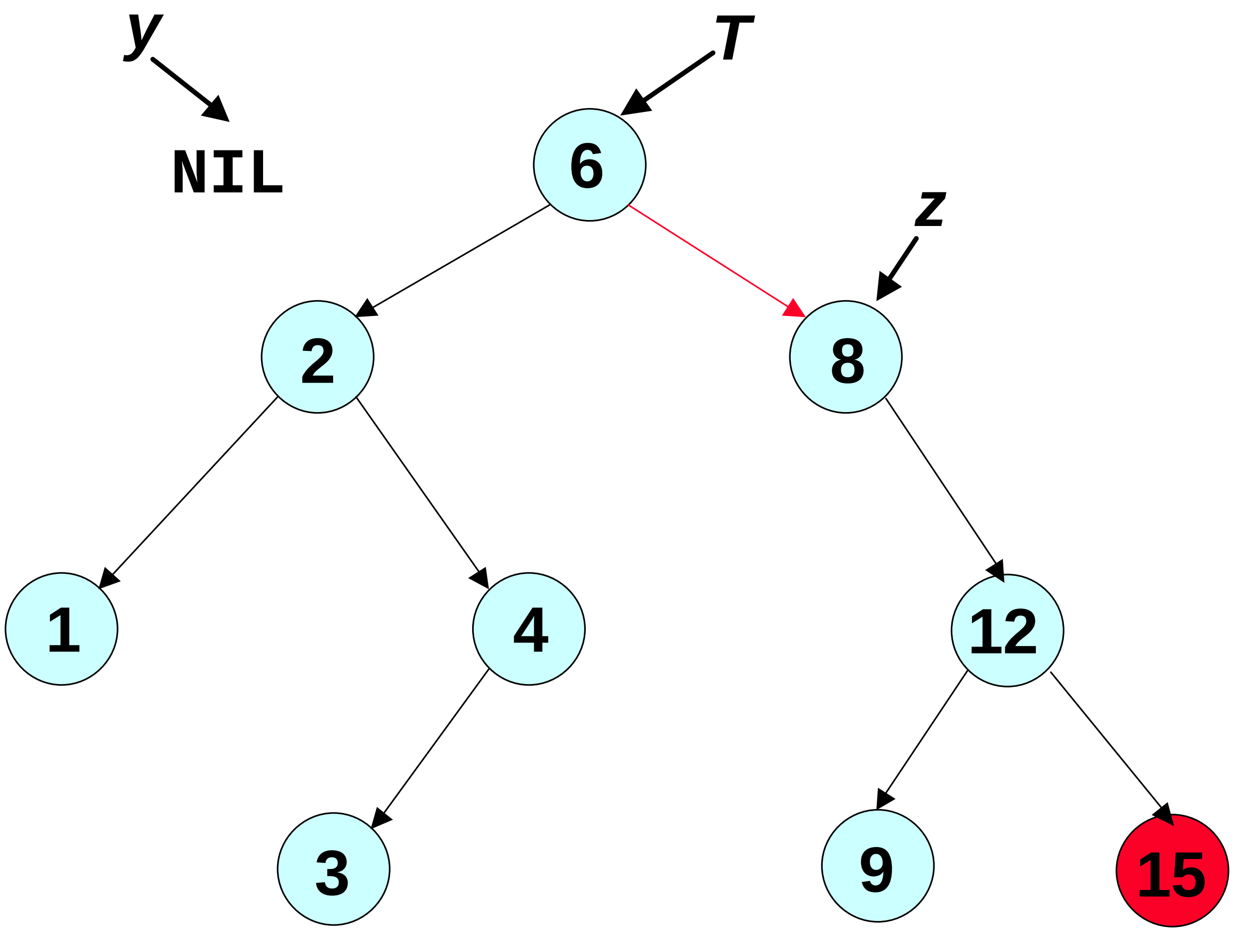
ARB: ricerca del successore II



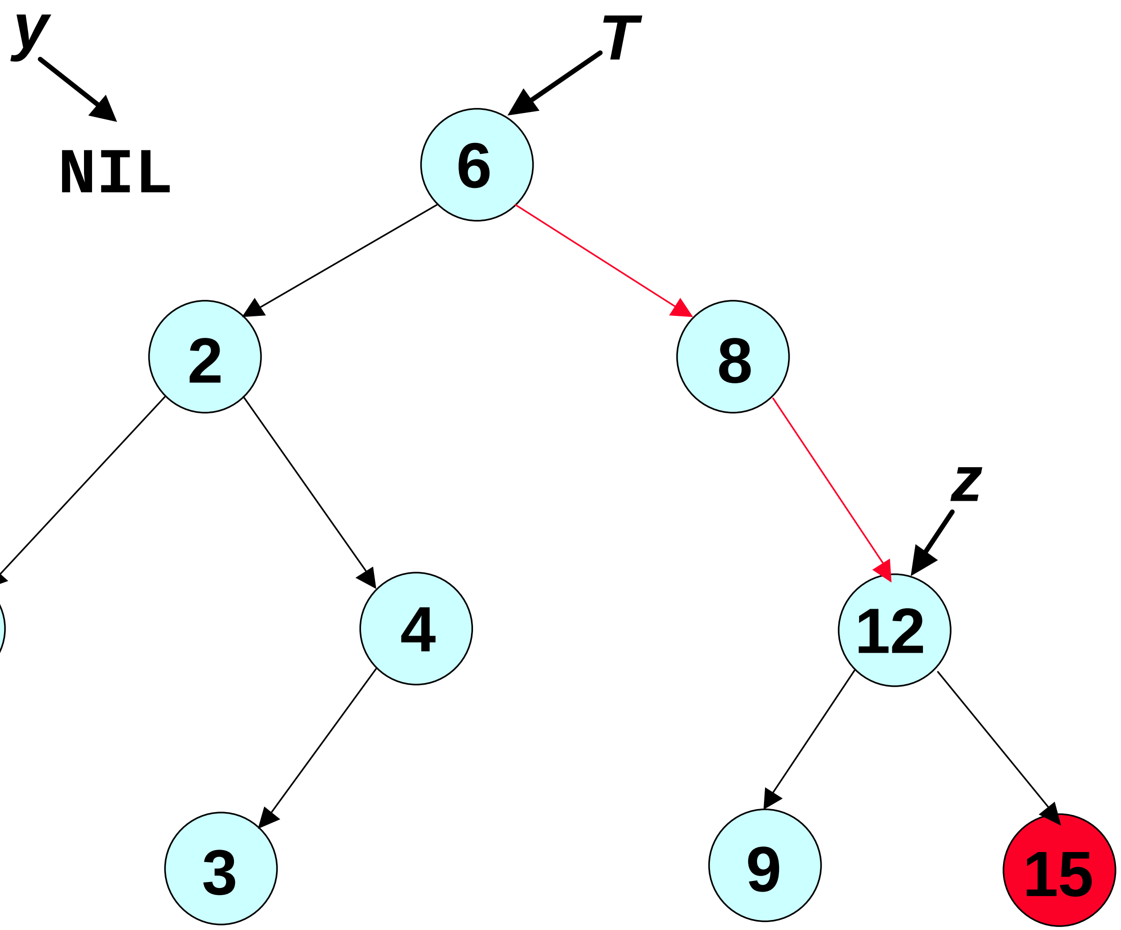
ARB: ricerca del successore II



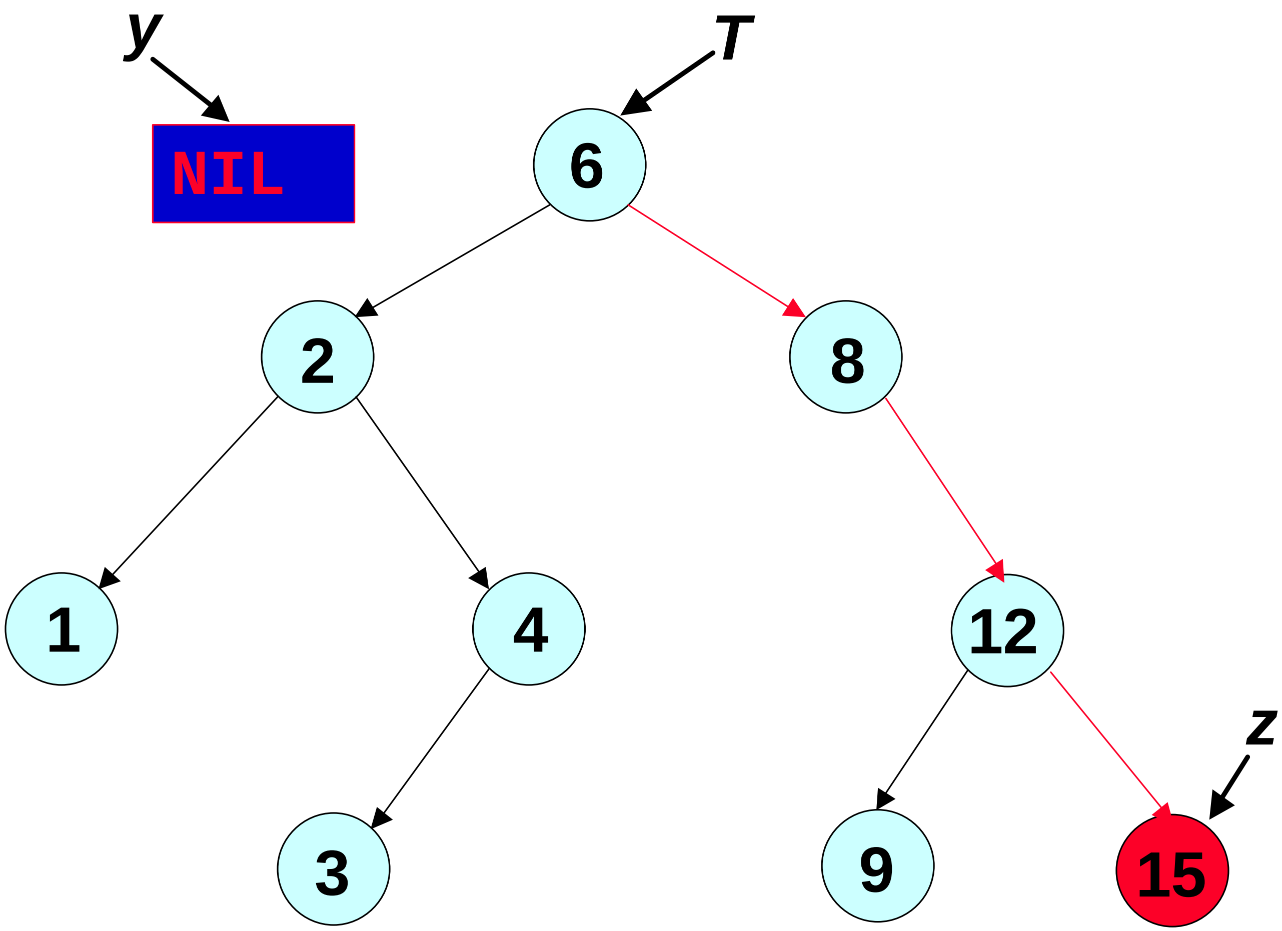
ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II



ARB: ricerca del successore II

- **Inizializzo il *successore* a *NIL***

- **Partendo dalla radice dell'albero:**
  - **ogni volta che seguo un *ramo sinistro* per raggiungere il nodo, aggiorno il successore al nodo padre;**
  - **ogni volta che seguo un *ramo destro* per raggiungere il nodo, NON aggiorno il successore al nodo padre;**

ARB: ricerca del successore

```
ARB ABR-Successore'(X: ARB)
   IF figlio-dx[X] ≠ NIL THEN
          return ABR-Minimo(figlio-dx[X])
   ELSE
        z = Root[T]
        y = NIL
        WHILE z ≠ X DO
           IF key[z] < key[X] THEN
                z = figlio-dx[z]
           ELSE y = z
                z = figlio-sx[z]
        return y
```

ARB: ricerca del successore ricorsiva

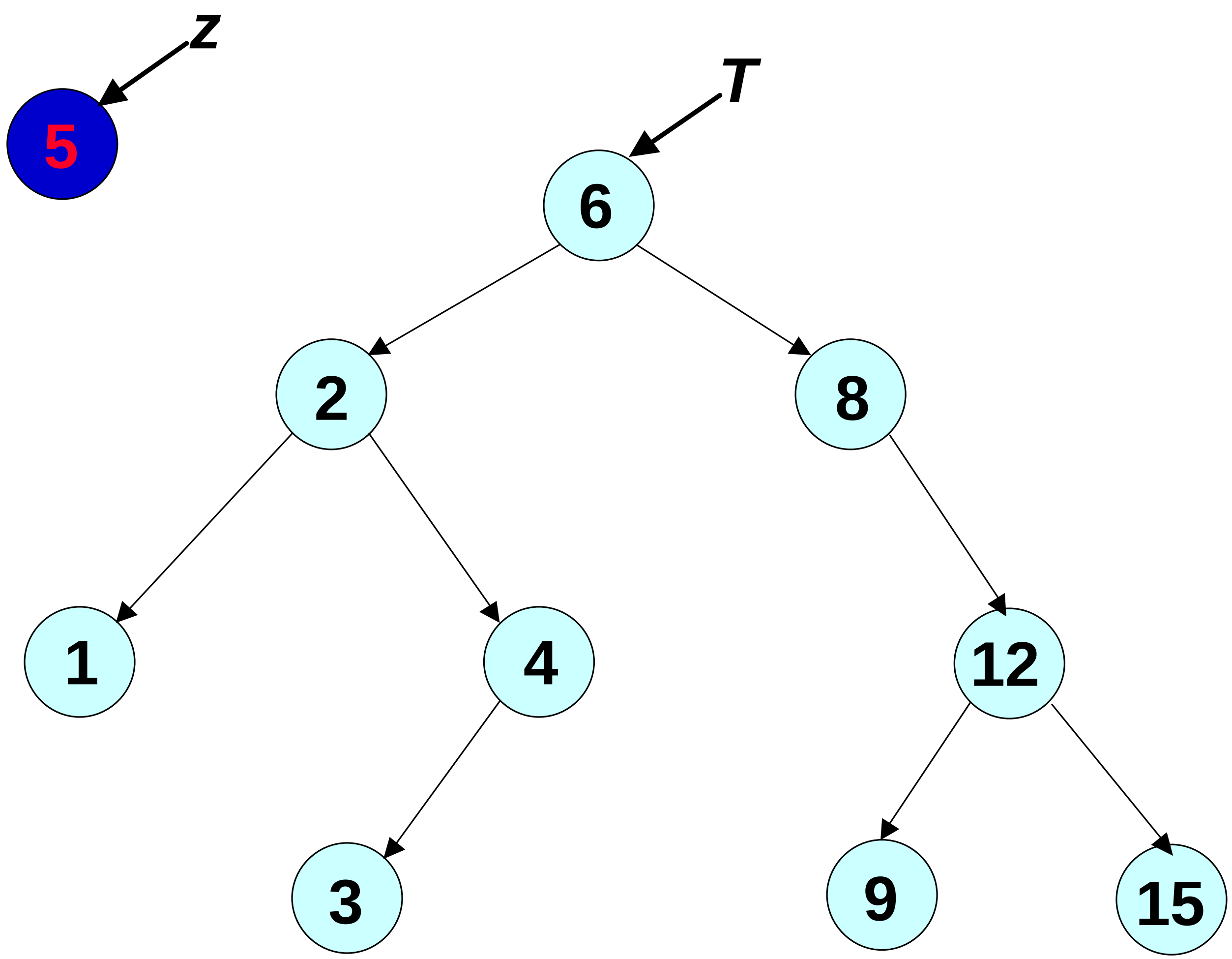
```
ARB ABR-Successore(X: ARB)
  return ABR-Successore_ric(key[X],X,NIL)
```

```
ABR-Successore_ric(key,T,P_T)
  IF T ¹ NIL THEN
    IF key > key[T] THEN
      return ABR-Successore_ric(key,
                          figlio-dx[T],P_T)
    ELSE IF key < key[T] THEN
      return ABR-Successore_ric(key,
                          figlio-sx[T],T)
    ELSE IF figlio-dx[T] ¹ NIL THEN
           return ABR-Minimo(figlio-dx[T])
  ELSE
    return P_T
```

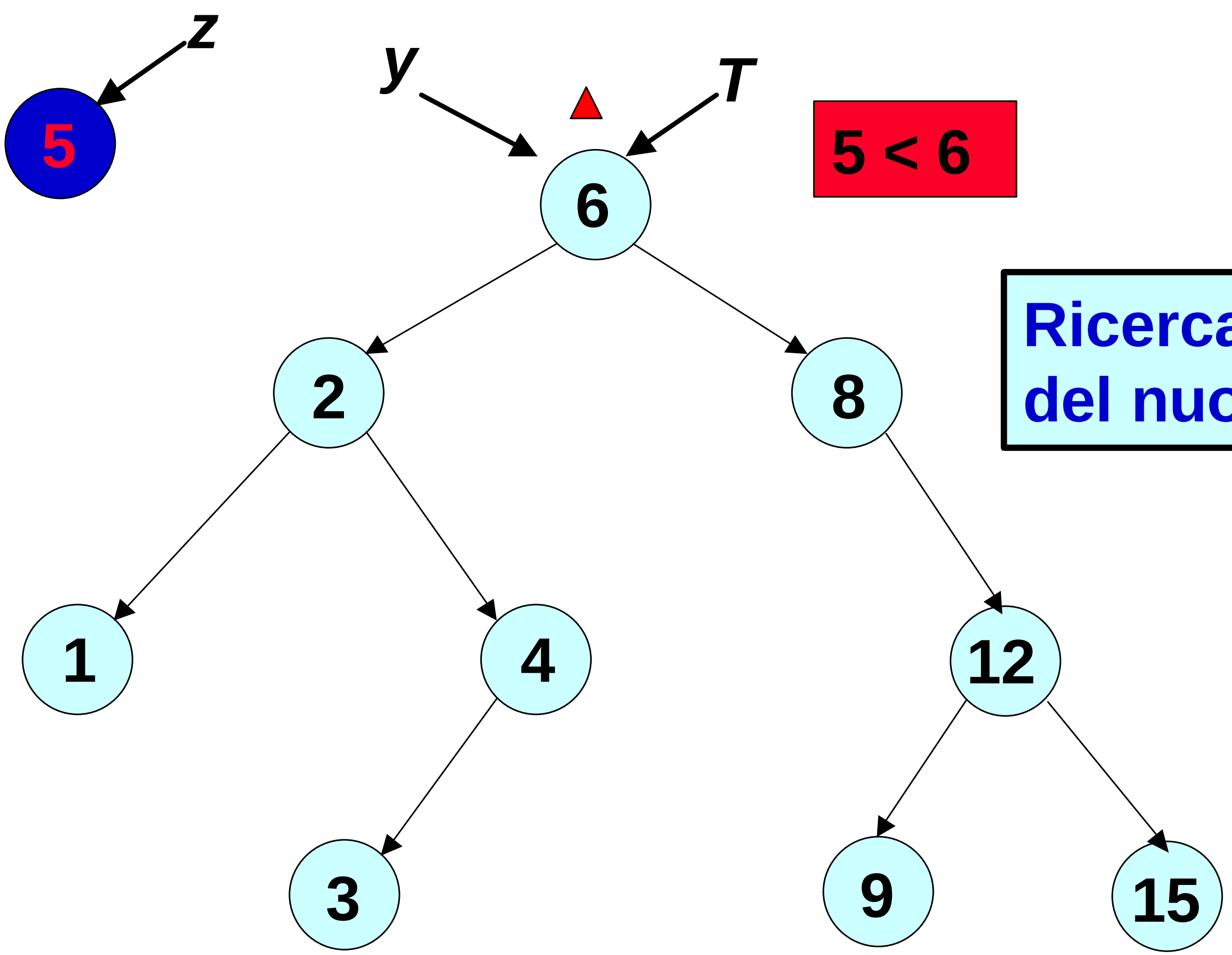
ARB: costo delle operazioni

***Teorema**. Le operazioni di Ricerca, Minimo, Massimo, Successore e Predecessore su di un <u>Albero Binario di Ricerca</u> possono essere eseguite in tempo O(h), dove h è l'altezza dell'albero.*

ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

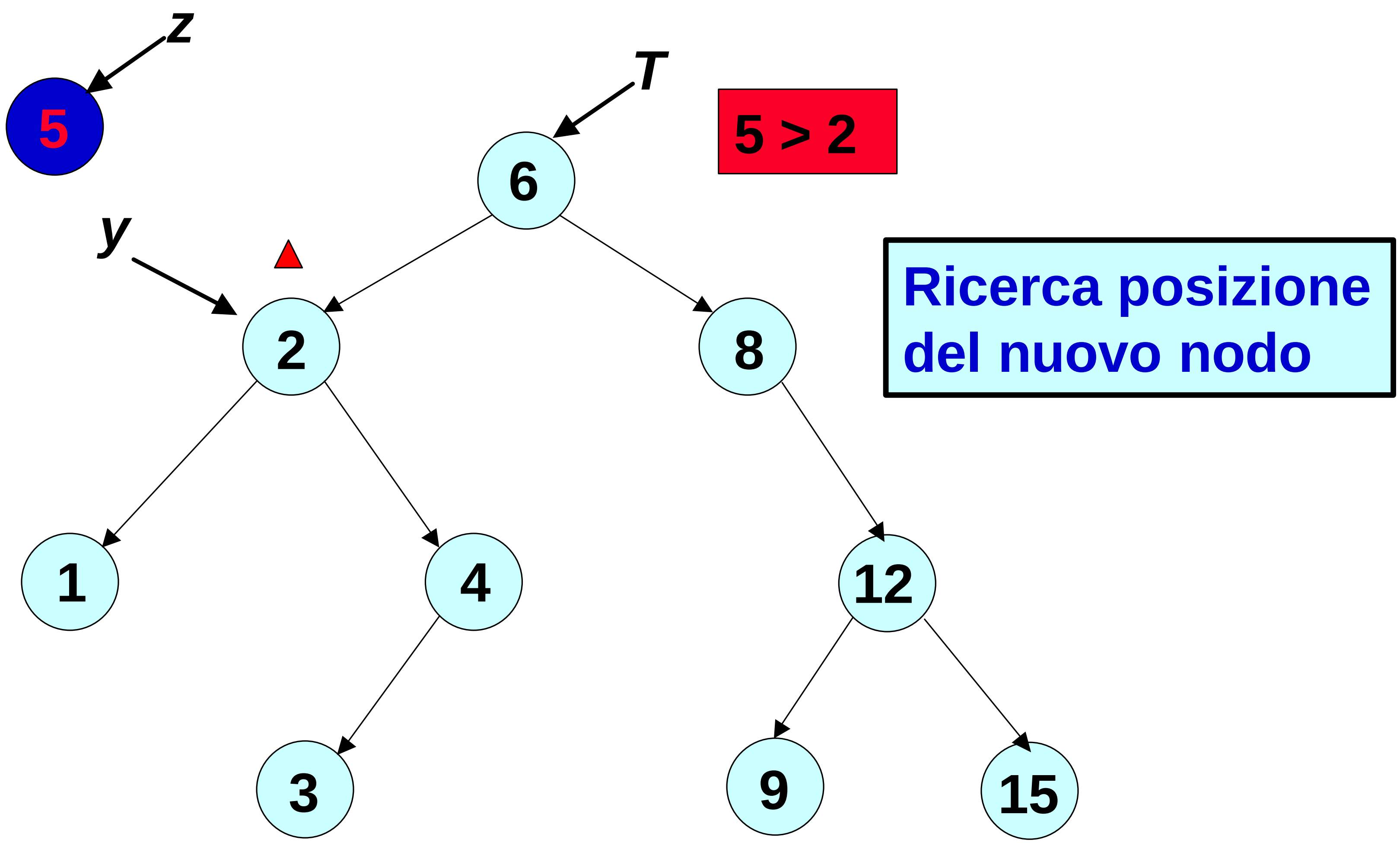


ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

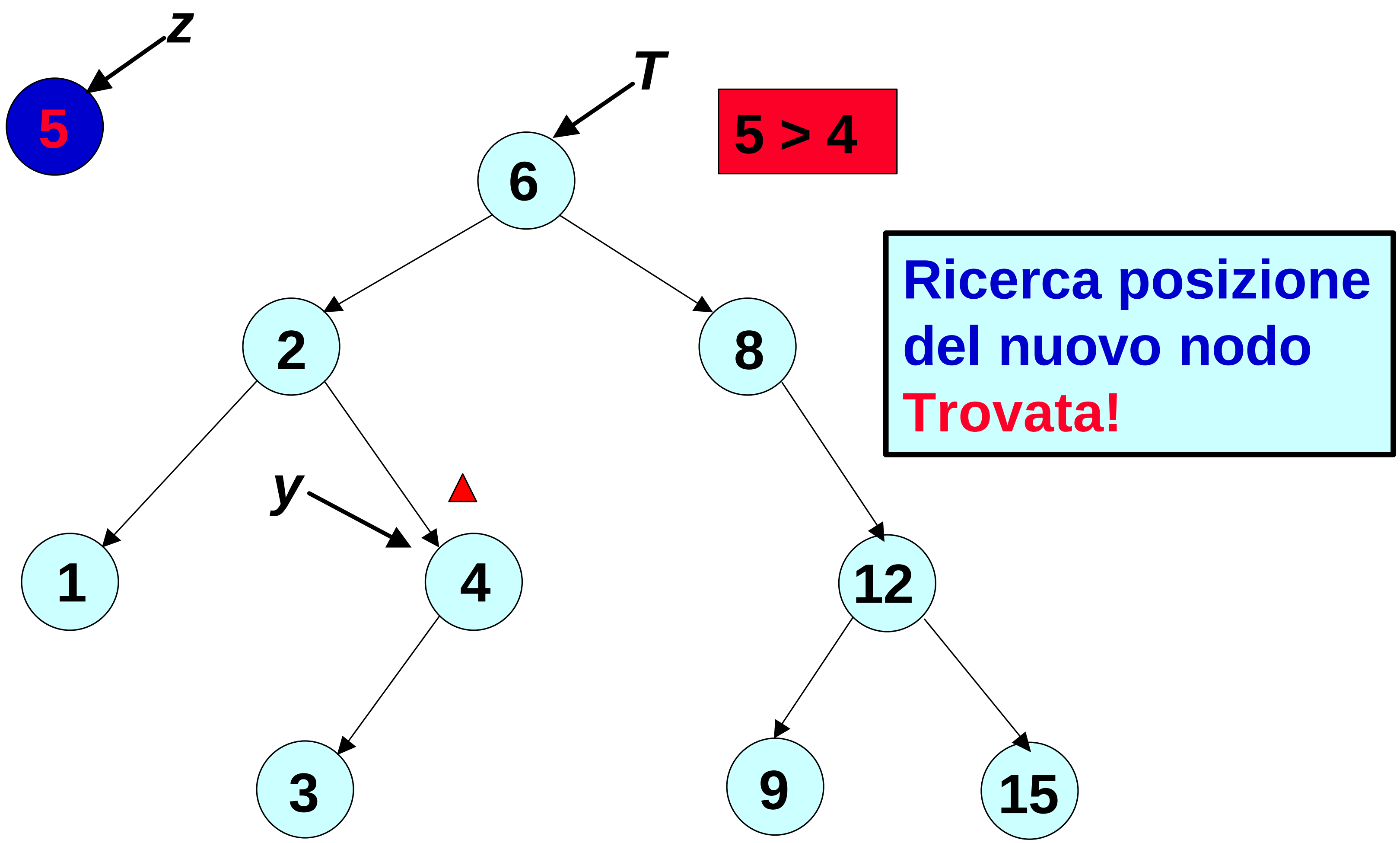


Ricerca posizione del nuovo nodo

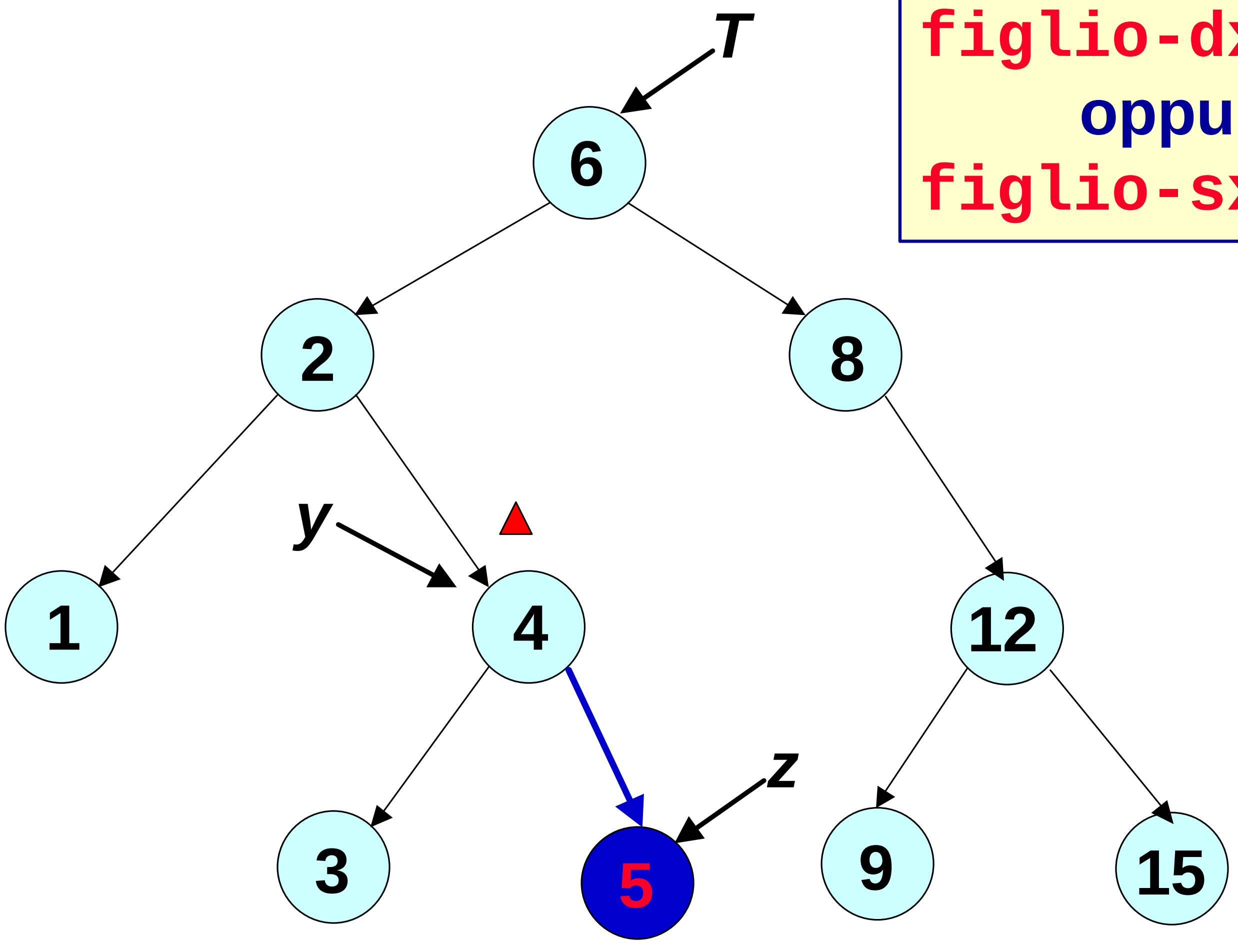
ARB: Inserimento di un nodo (caso I)



ARB: Inserimento di un nodo (caso I)



ARB: Inserimento di un nodo (caso I)

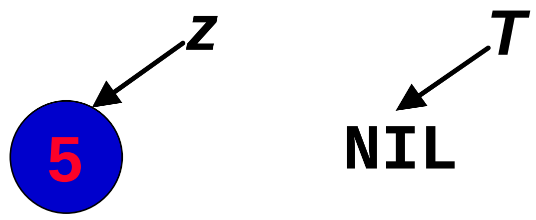


figlio-dx[*y*]=*z*

oppure

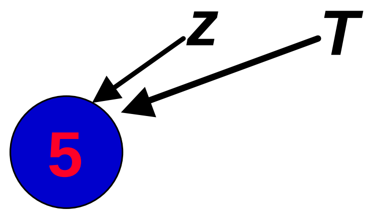
figlio-sx[*y*]=*z*

ARB: Inserimento di un nodo (caso II)



Albero è vuoto

ARB: Inserimento di un nodo (caso II)



`Root[T] = z`

Albero è vuoto

Il nuovo nodo da inserire diviene la radice

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-inserisci(T,z)
   y = NIL
   x = Root[T]
   WHILE x ¹ NIL
     DO y = x
        IF key[z] < key[x]
          THEN x = figlio-sx[x]
          ELSE x = figlio-dx[x]
   padre[z] = y
   IF y = NIL THEN
        Root[T] = z
   ELSE IF key[z] < key[y] THEN
          figlio-sx[y] = z
        ELSE
          figlio-dx[y] = z
```

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-inserisci(T,z)
   y = NIL
   x = Root[T]
   WHILE x ¹ NIL
     DO y = x
        IF key[z] < key[x]
          THEN x = figlio-sx[x]
          ELSE x = figlio-dx[x]
   padre[z] = y
   IF y = NIL THEN
        Root[T] = z
   ELSE IF key[z] < key[y] THEN
          figlio-sx[y] = z
        ELSE
          figlio-dx[y] = z
```

Ricerca posizione del nuovo nodo

(caso II)

(caso I)

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-insert_ric(T,z)
  IF T 1 NIL THEN
    IF key[z] < key[T] THEN
     figlio-sx[T]= ABR-insert_ric(figlio-sx[T],z)
    ELSE
     figlio-dx[T]= ABR-insert_ric(figlio-dx[T],z)
  ELSE
       T=z
  return T
```

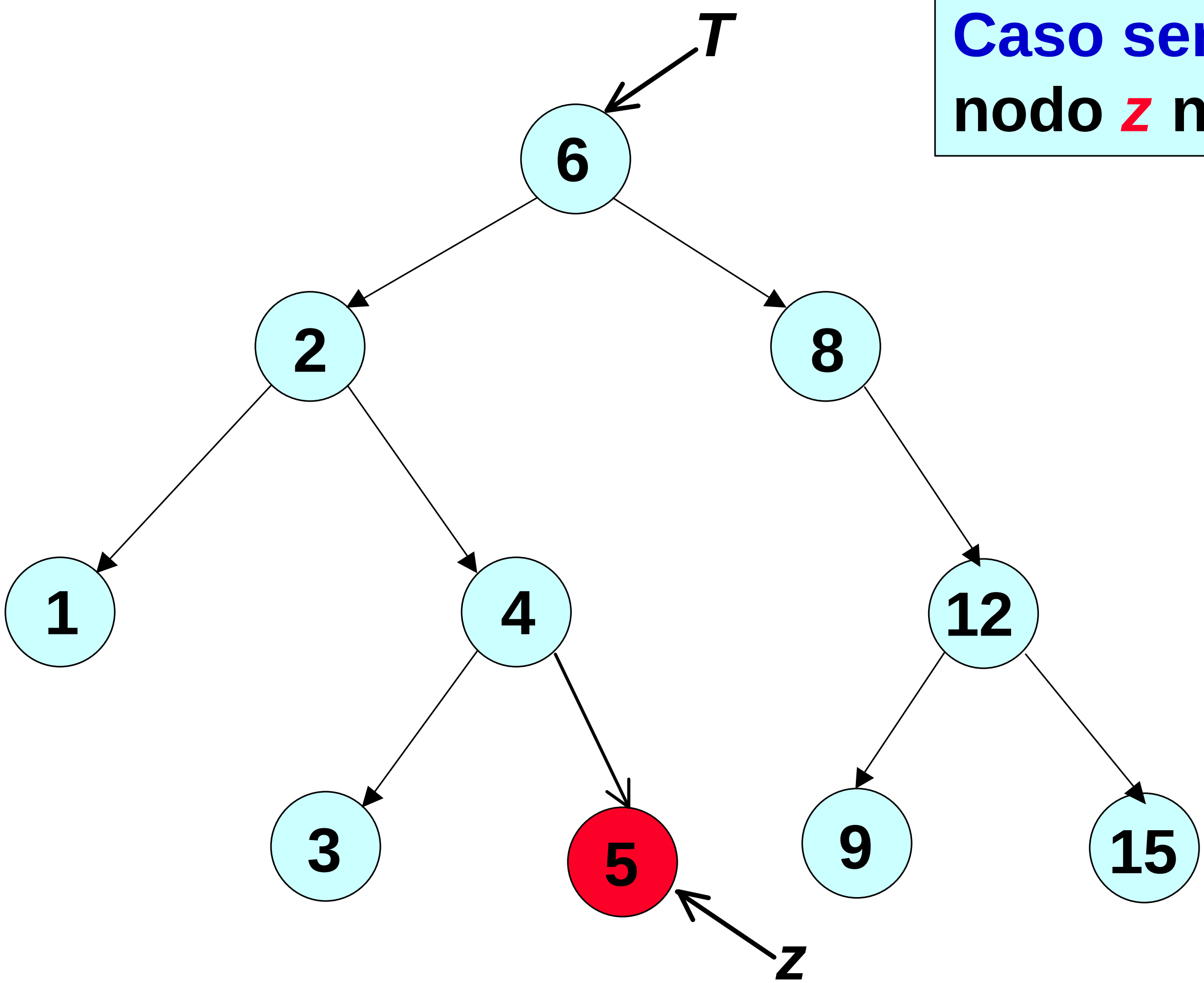
Ricordate che qui z è il nodo che contiene la chiave da inserire

ARB: Inserimento di un nodo

```
ABR-insert_ric(T,k)
    IF T 1 NIL THEN
        IF k < key[T] THEN
          figlio-sx[T]= ABR-insert_ric(figlio-sx[T],k)
        ELSE
          figlio-dx[T]= ABR-insert_ric(figlio-dx[T],k)
    ELSE
              T = alloca nodo ARB
              key[T] = k
    return T
```

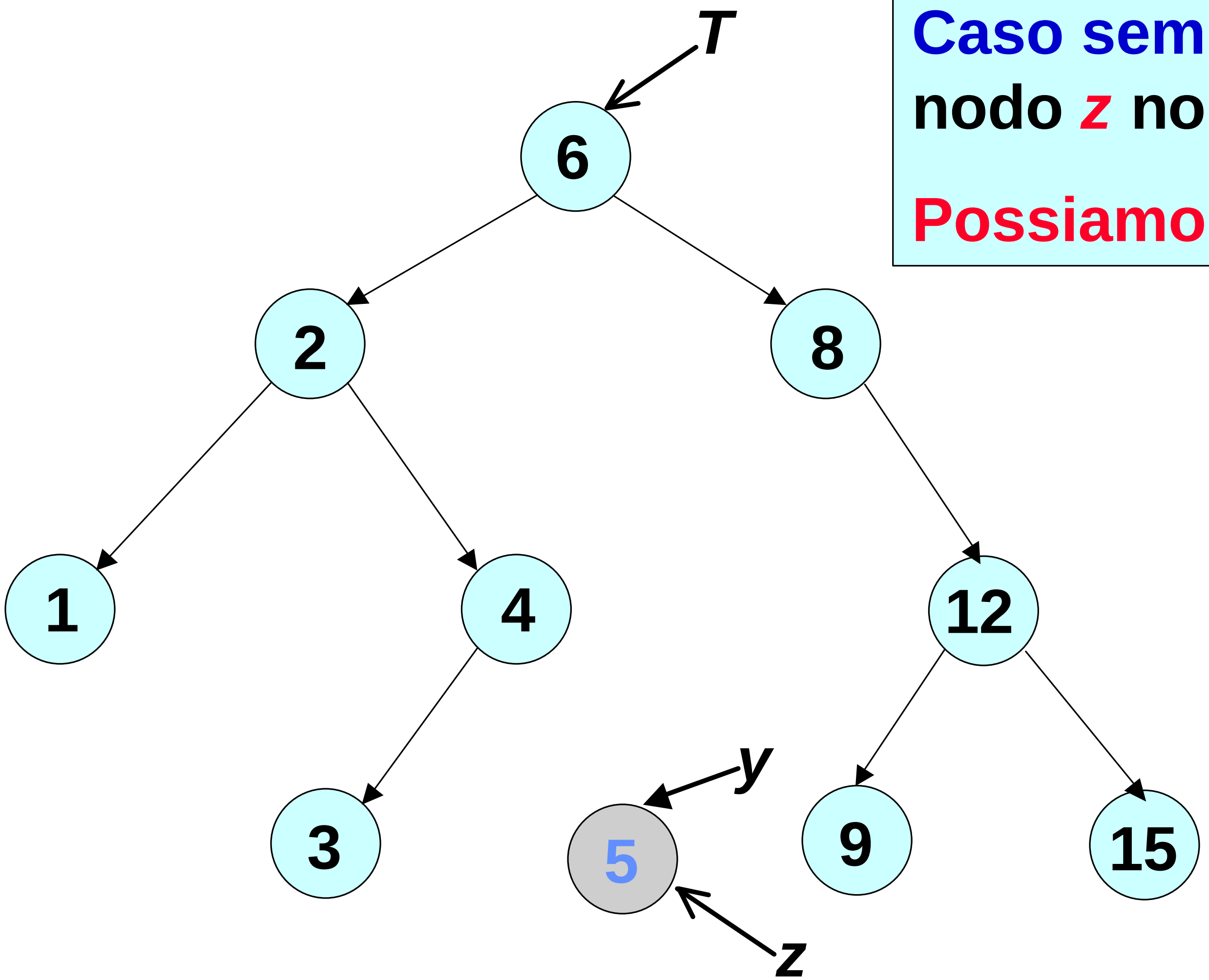
Qui invece k è la chiave da inserire. Si deve quindi allocare il nodo!

ARB: Cancellazione di un nodo (caso I)



Caso semplice: il nodo *z* non ha figli

ARB: Cancellazione di un nodo (caso I)

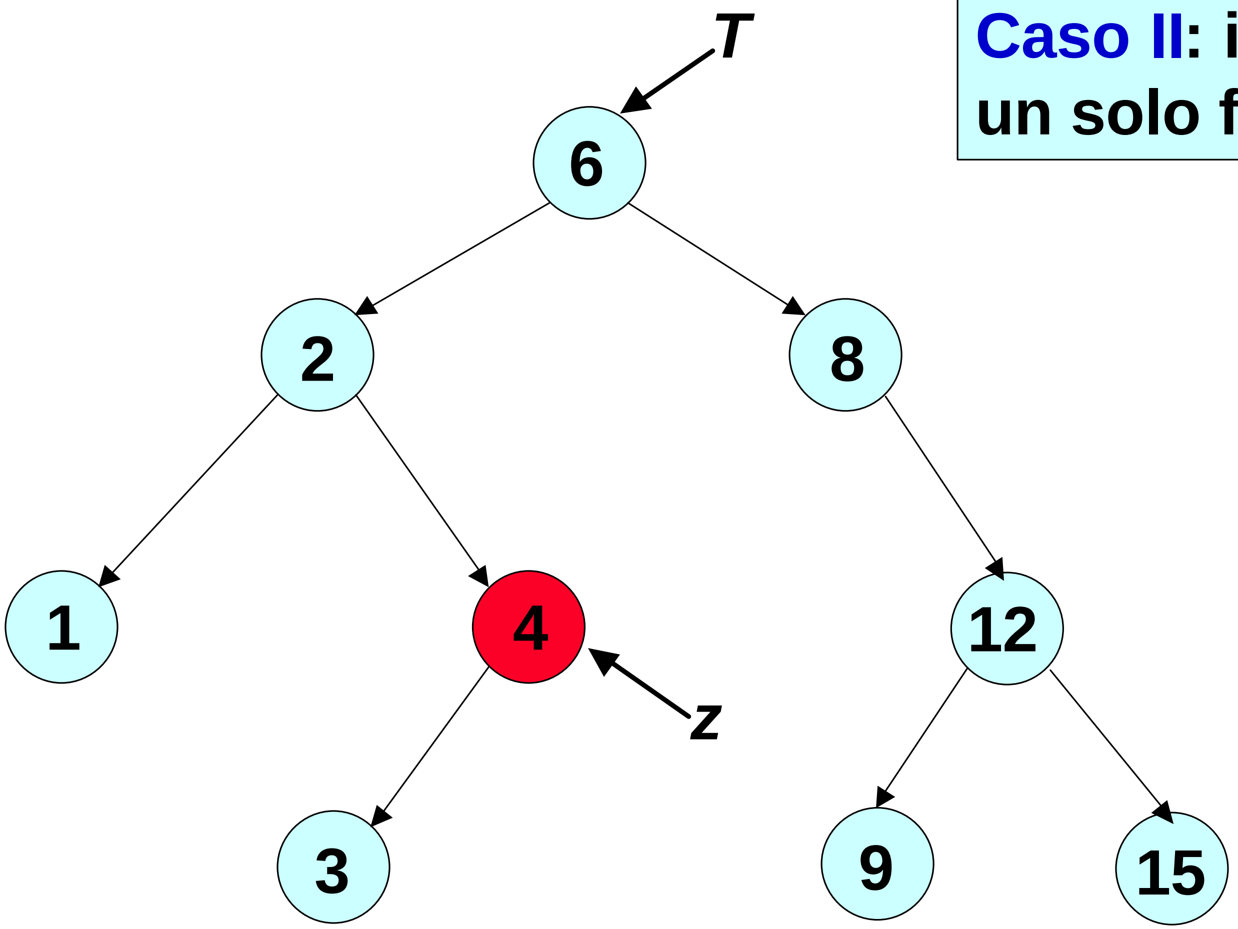


Caso semplice: il nodo *z* non ha figli

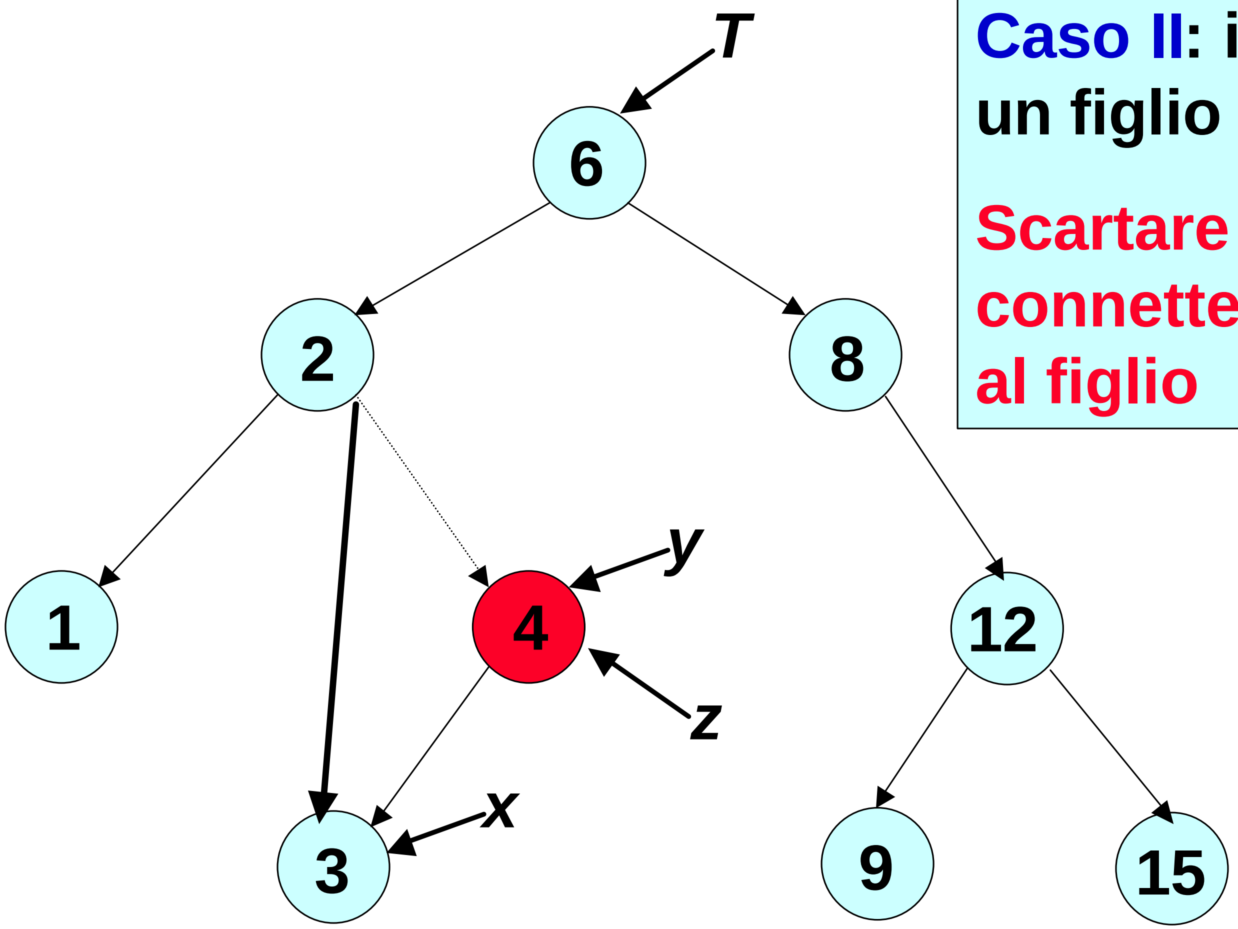
Possiamo eliminarlo

ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)

Caso II: il nodo ha un solo figlio



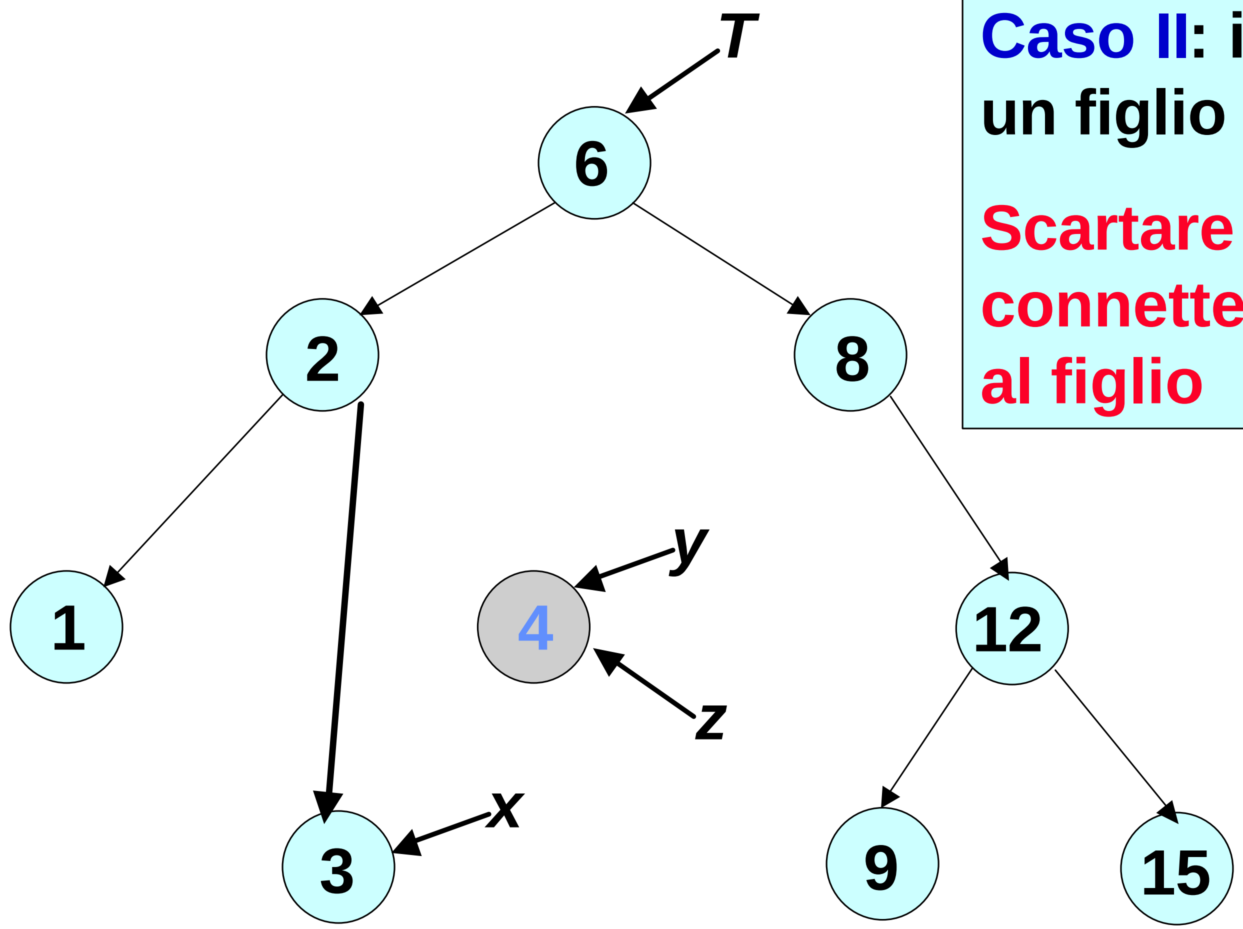
ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un figlio

Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

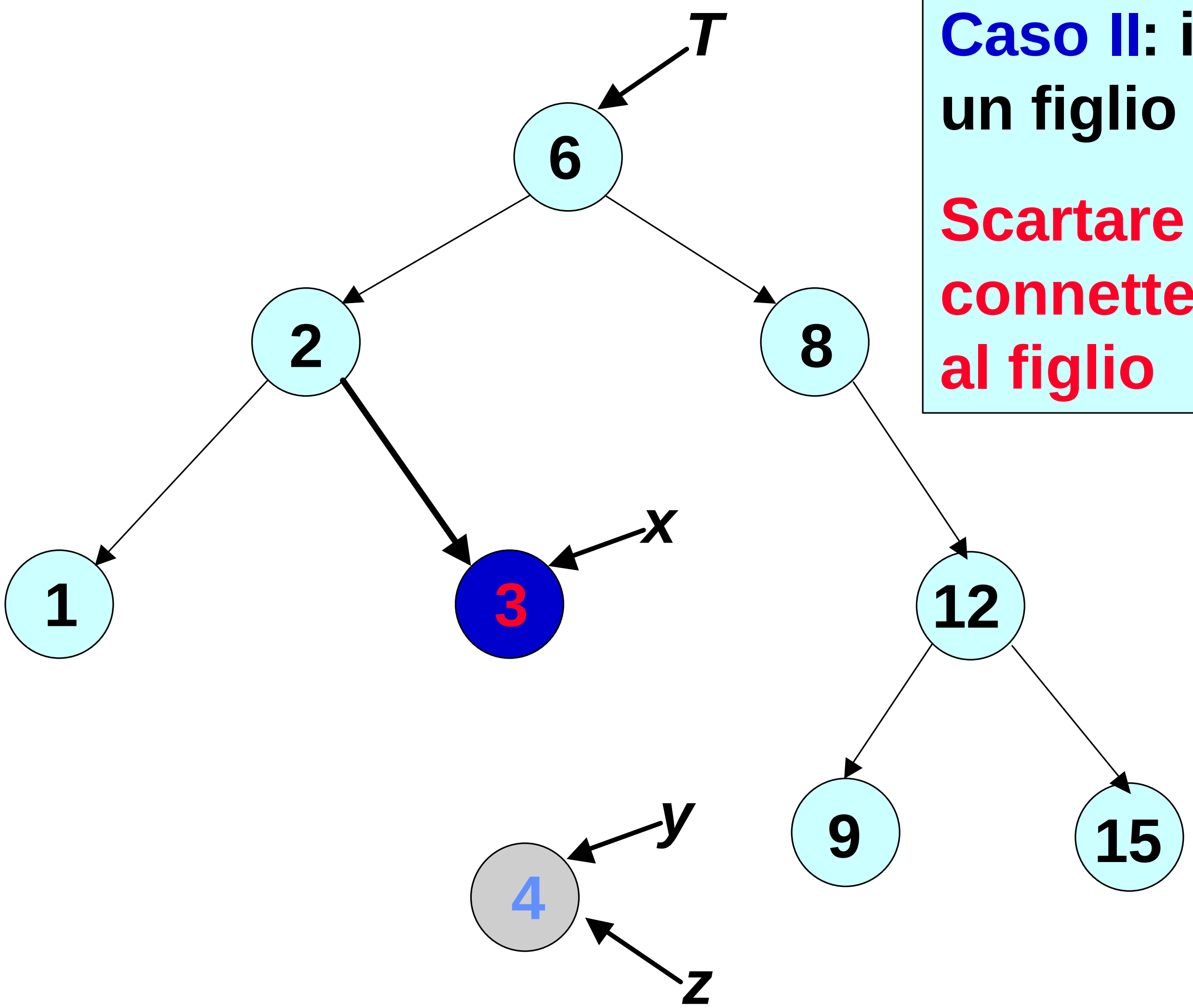
ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un figlio

Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

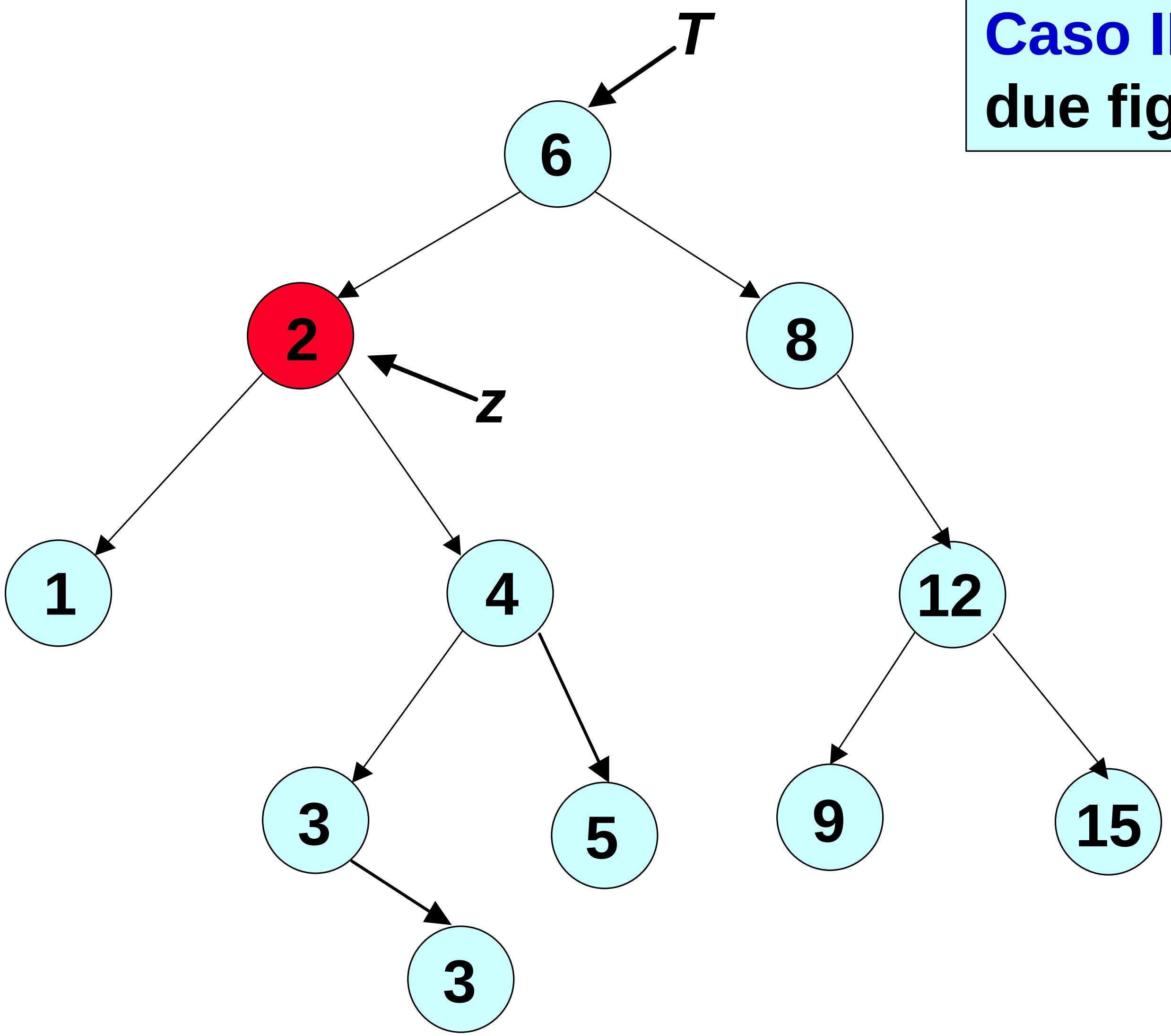
ARB: Cancellazione di un nodo (caso II)



Caso II: il nodo ha un figlio

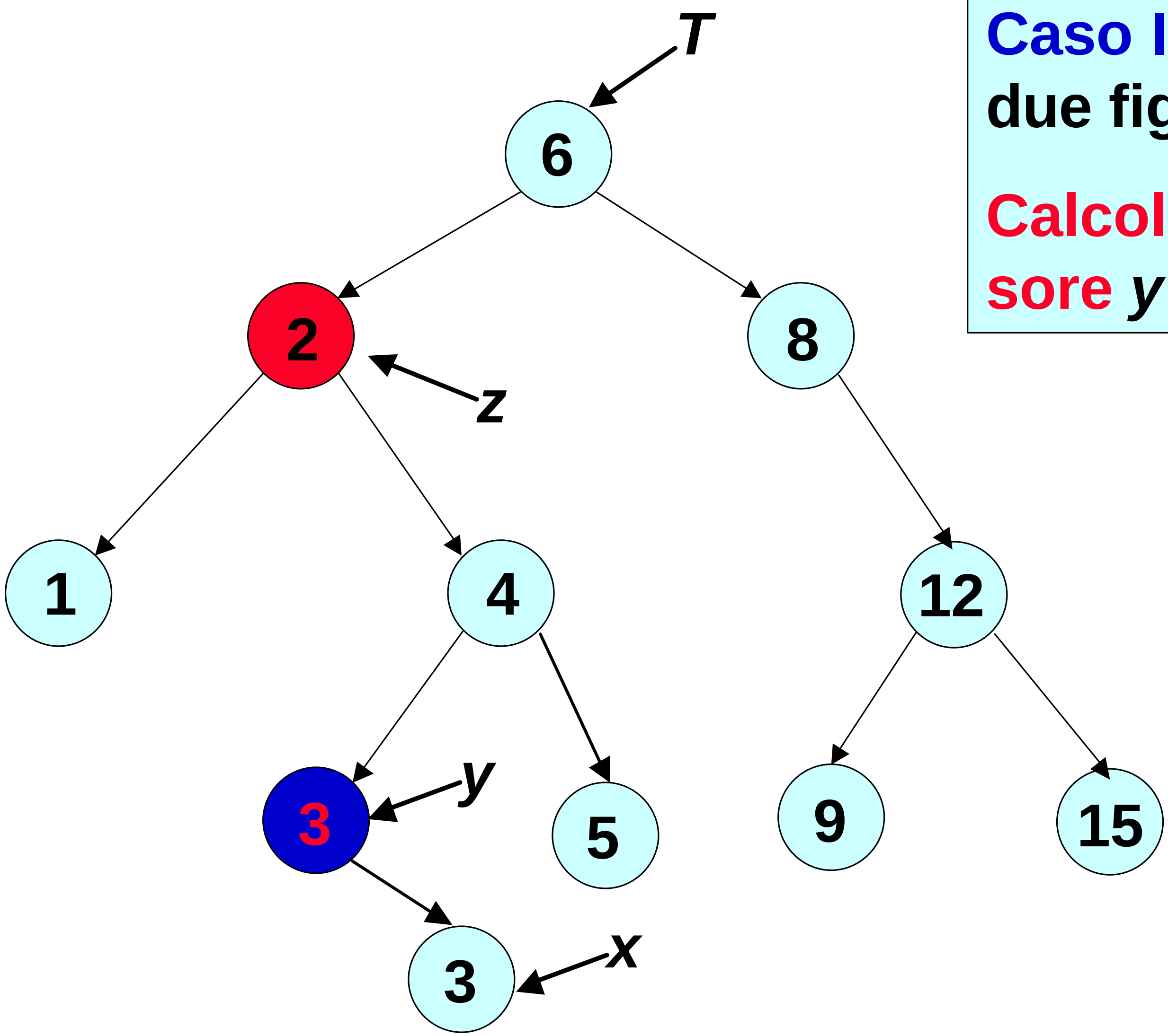
Scartare il nodo e connettere il padre al figlio

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



Caso III: il nodo ha due figli

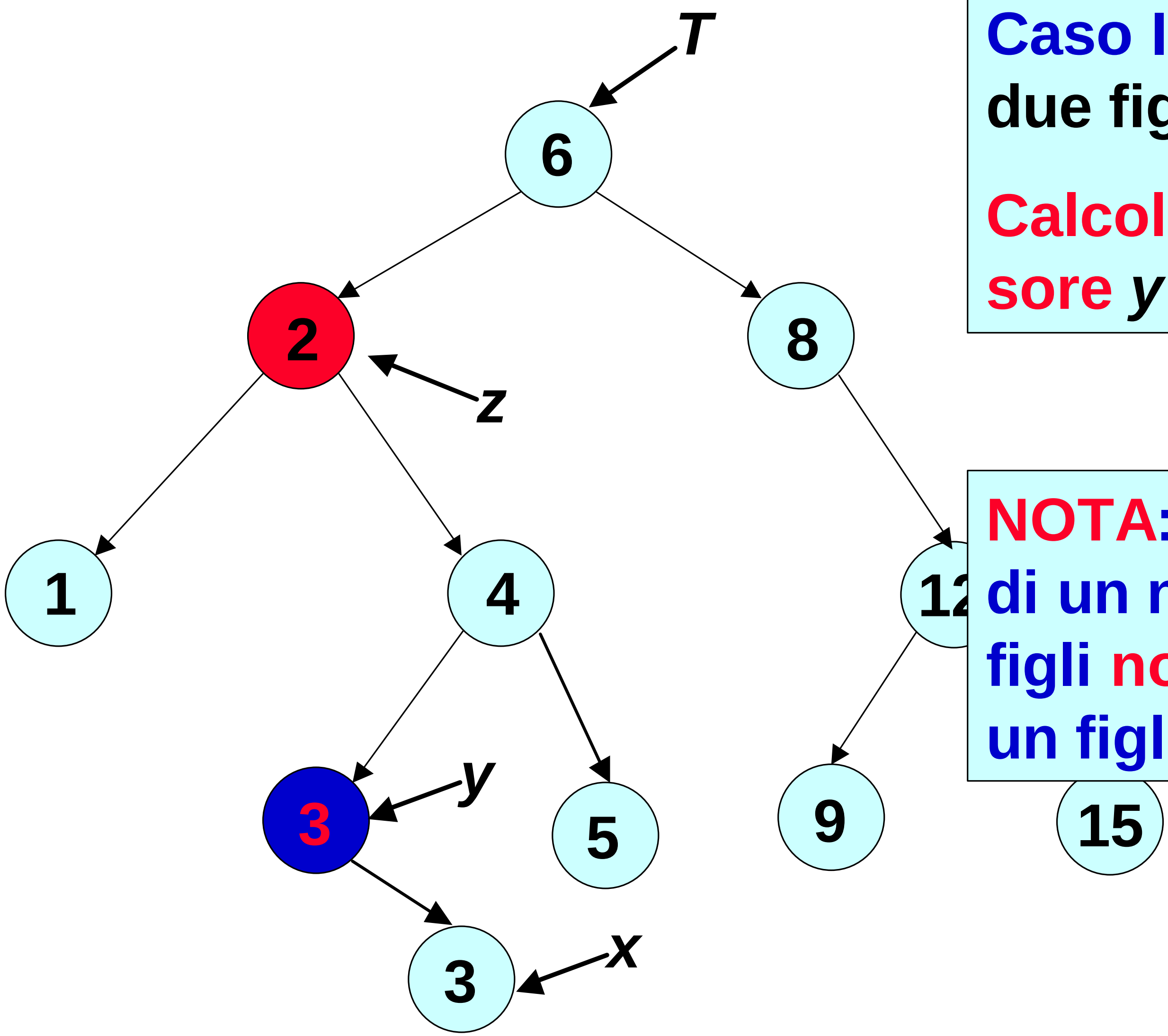
ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il succes-sore *y*

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)

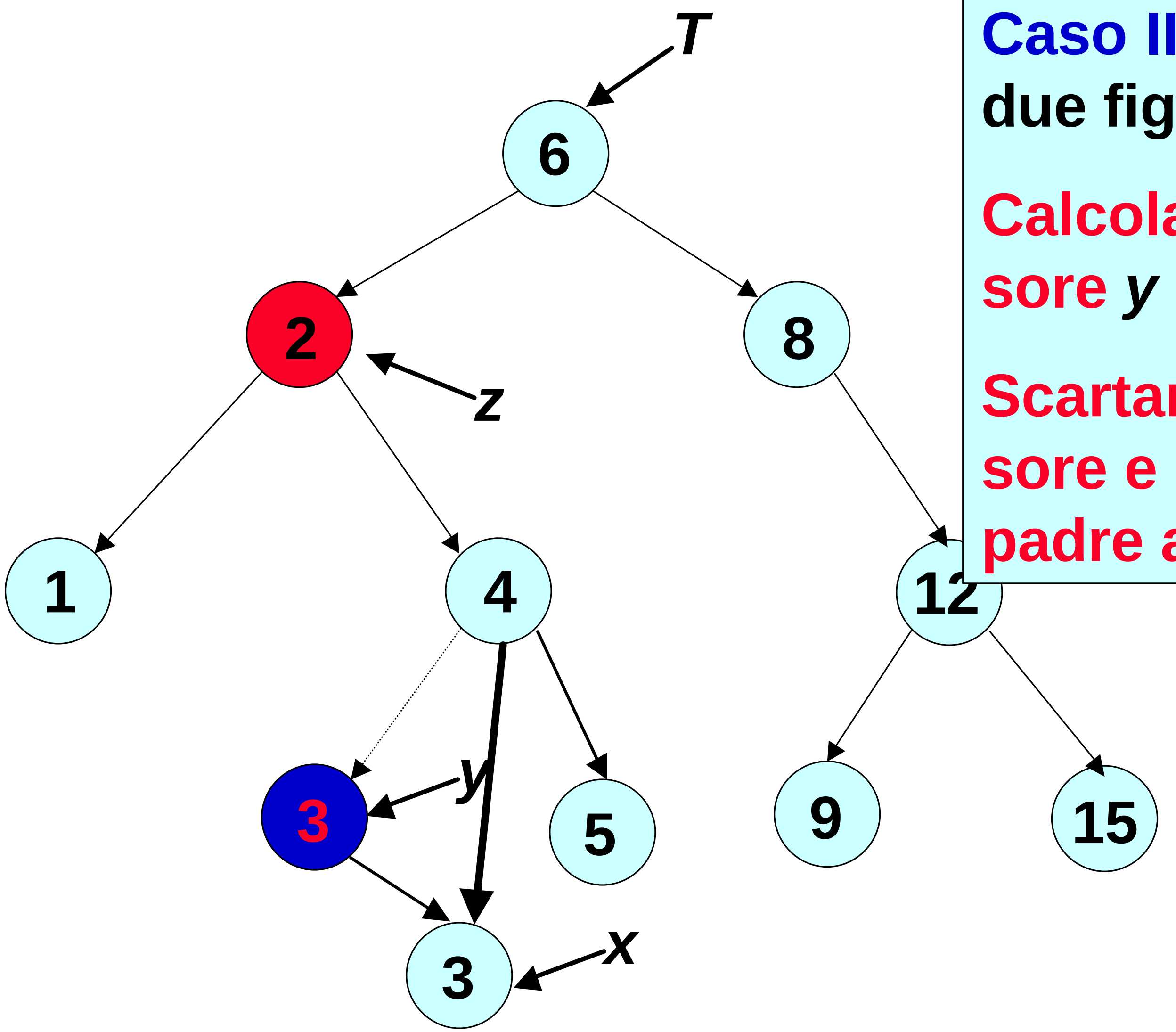


Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

NOTA: Il successore di un nodo con due figli non può avere un figlio sinistro

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)

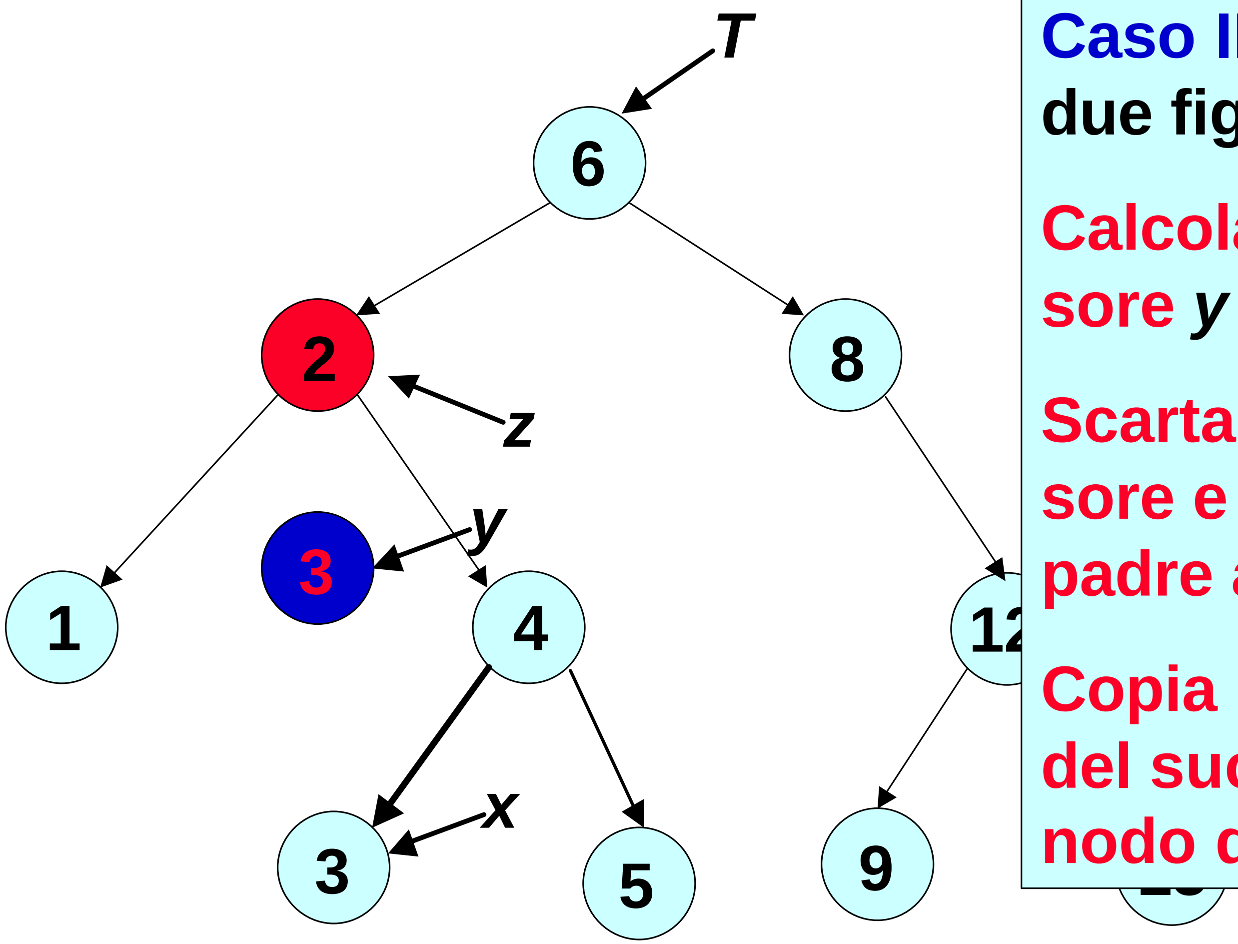


Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Scartare il successore e connettere il padre al figlio destro

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



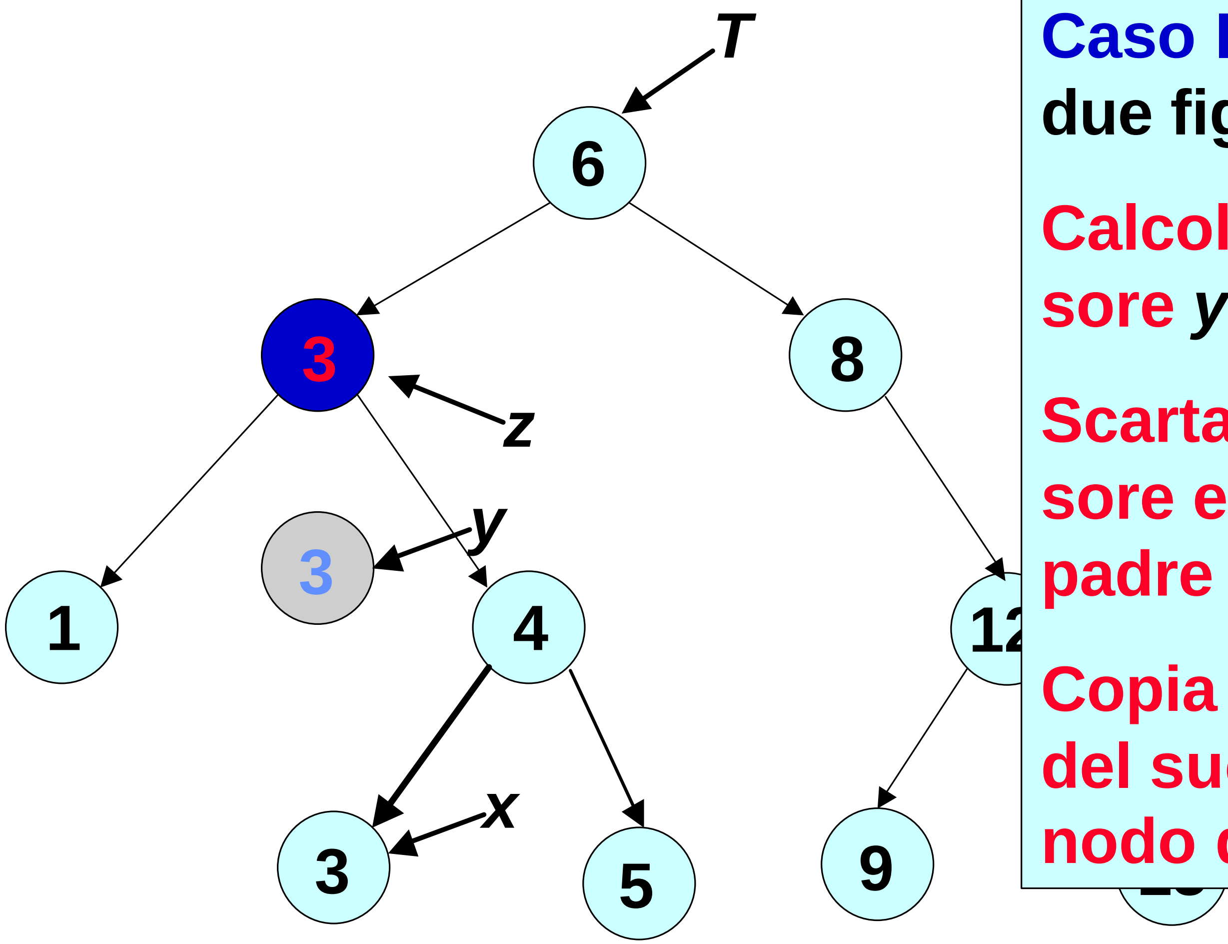
Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Scartare il successore e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore nel nodo da cancellare

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



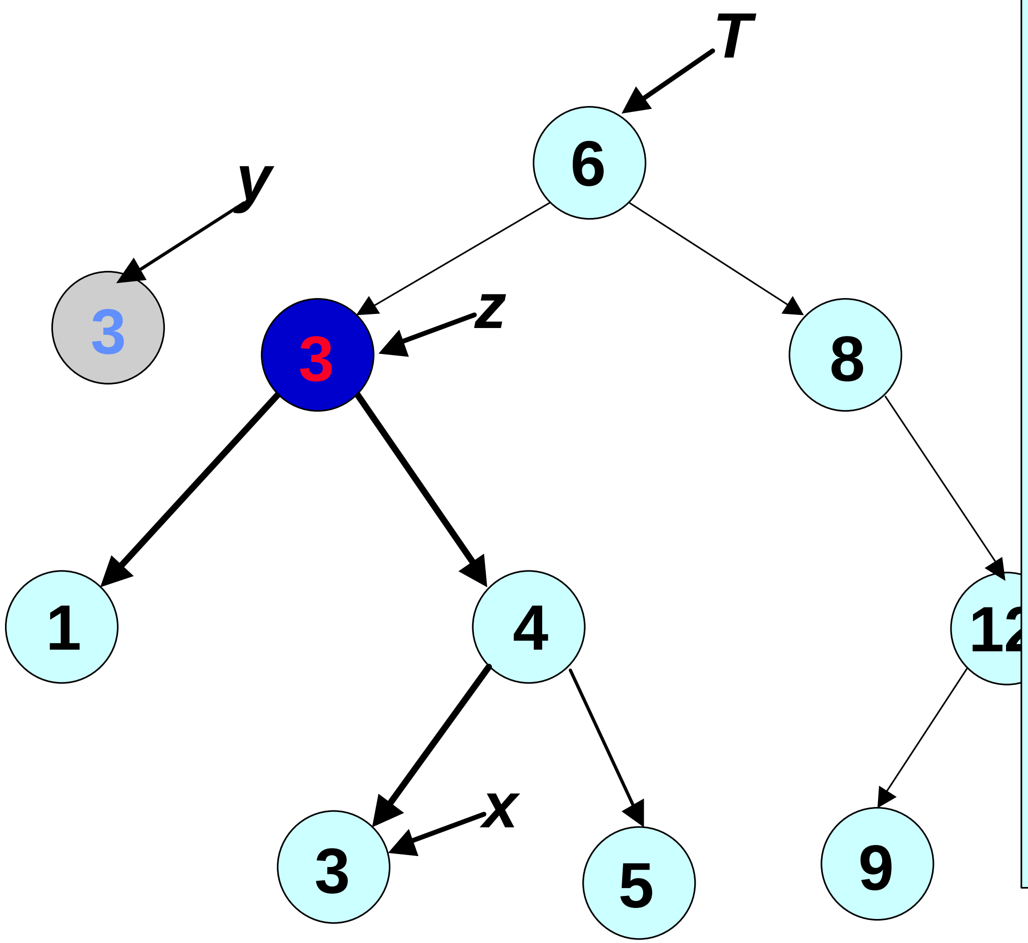
Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il successore *y*

Scartare il successore e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore nel nodo da cancellare

ARB: Cancellazione di un nodo (caso III)



Caso III: il nodo ha due figli

Calcolare il succes-sore *y*

Scartare il succes-sore e connettere il padre al figlio destro

Copia il contenuto del successore nel nodo da cancellare

ARB: Cancellazione di un nodo

- ***Caso I*: Il nodo non ha figli. Semplicemente si elimina.**
- ***Caso II*: Il nodo ha un solo figlio. Si *collega il padre del nodo al figlio* e si elimina il nodo.**
- ***Caso III*: Il nodo ha due figli.**
  - **si *cerca il suo successore* (che ha *un solo figlio destro*);**
  - **si *elimina il successore* (come in *Caso II*);**
  - **si *copiano* i campi *valore* del successore *nel nodo* da eliminare.**

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (figlio-sx[z]=NIL OR
       figlio-dx[z]=NIL) THEN
        y = z
   ELSE y = ARB-Successore(z)
   IF figlio-sx[y] ≠ NIL THEN
        x = figlio-sx[y]
   ELSE x = figlio-dx[y]
   IF x ≠ NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN
        Root[T]=x
   ELSE IF y=figlio-sx[padre[y]] THEN
             figlio-sx[padre[y]]=x
        ELSE figlio-dx[padre[y]]=x
   IF y ≠ z THEN "copia i campi di y in z"
   return y
```

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (figlio-sx[z]=NIL OR
       figlio-dx[z]=NIL) THEN
         y = z
   ELSE  y = ARB-Successore(z)
   IF figlio-sx[y] ≠ NIL THEN
         x = figlio-sx[y]
   ELSE x = figlio-dx[y]
   IF x ≠ NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN
         Root[T]=x
   ELSE IF y=figlio-sx[padre[y]] THEN
              figlio-sx[padre[y]]=x
         ELSE figlio-dx[padre[y]]=x
   IF y ≠ z THEN "copia i campi di y in z"
   return y
```

casi I e II

y è il nodo da eliminare

caso III

ARB: Cancellazione di un nodo

```
ABR-Cancella(T,z)
   IF (figlio-sx[z]=NIL OR
       figlio-dx[z]=NIL) THEN
         y = z
   ELSE  y = ARB-Successore(z)
   IF figlio-sx[y] 1 NIL THEN
         x = figlio-sx[y]
   ELSE x = figlio-dx[y]
   IF x 1 NIL THEN padre[x]=padre[y]
   IF padre[y]=NIL THEN
         Root[T]=x
   ELSE  IF y=figlio-sx[padre[y]] THEN
              figlio-sx[padre[y]]=x
         ELSE figlio-dx[pad
   IF y 1 z THEN "copia i ca
   return y
```

casi I e II

y è il nodo da eliminare e x è il suo sostituto

y è sostituito da x

caso III

il nodo eliminato y è ritornato per deallocazione

ARB: Cancellazione ricorsova

```
ABR-Cancella-ric(k,T)
   IF T ¹ NIL THEN
     IF k < key[T] THEN
          figlio-sx[T]=ARB-Cancella-ric(k,figlio-sx[T])
     ELSE IF k > key[T] THEN
          figlio-dx[T]=ARB-Cancella-ric(k,figlio-dx[T])
     ELSE
        IF (figlio-sx[T]=NIL OR figlio-dx[T]=NIL) THEN
              nodo = T
              IF figlio-sx[nodo] ¹ NIL THEN
                 T = figlio-sx[nodo]
              ELSE
                 T= figlio-dx[nodo]
        ELSE
              nodo = ARB-Stacca-Succ(figlio-dx[T],T)
              “copia nodo in T”
        dealloca(nodo)
   return T
```

casi I e II

caso III

ARB: Cancellazione ricorsova

Il parametro P serve a ricordarsi il padre di un nodo durante la discesa

```
ABR-Stacca-Succ(T,P )
   IF T ≠ NIL THEN
     IF figlio-sx[T] ≠ NIL THEN
          return ARB-Stacca-Succ(figlio-sx[T], T)
     ELSE /* successore trovato */
        IF T = figlio-sx[P]
          figlio-sx[P] = figlio-dx[T]
        ELSE /* il succ è il primo nodo passato */
          figlio-dx[P] = figlio-dx[T]
   return T
```

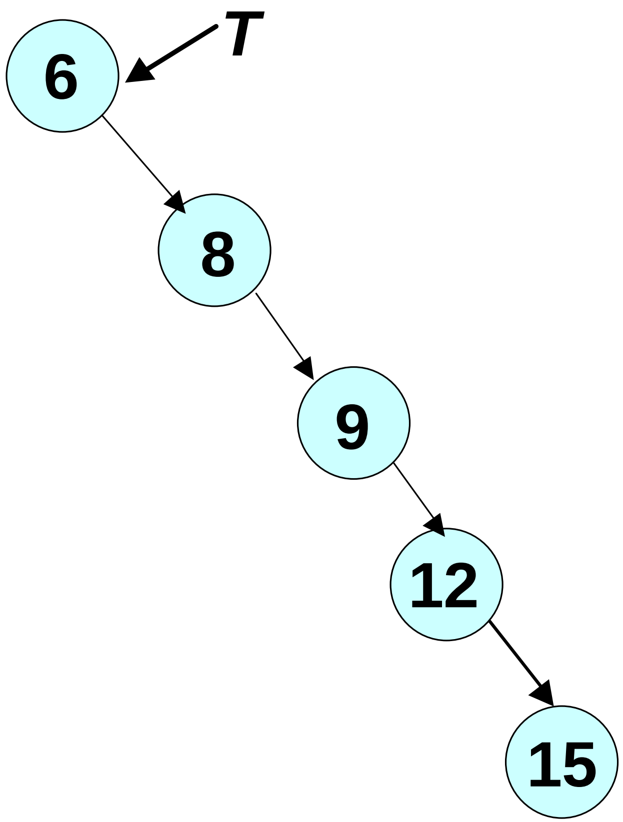
***NOTA*. Questo algoritmo *stacca il successore dell'albero T e ne ritorna il puntatore*. Può anche ritornare NIL in caso non esista un successore. Il valore di ritorno dovrebbe essere quindi verificato al prima dell'uso del chiamante. Nel caso della cancellazione ricorsiva però siamo sicuri che il successore esista sempre e quindi non è necessario eseguire alcun controllo!**

ARB: costo di Inserimento e Cancellazione

***Teorema**. Le operazioni di Inserimento e Cancellazione sull'insieme dinamico <u>Albero Binario di Ricerca</u> possono essere eseguite in tempo $O(h)$ dove h è l'altezza dell'albero*

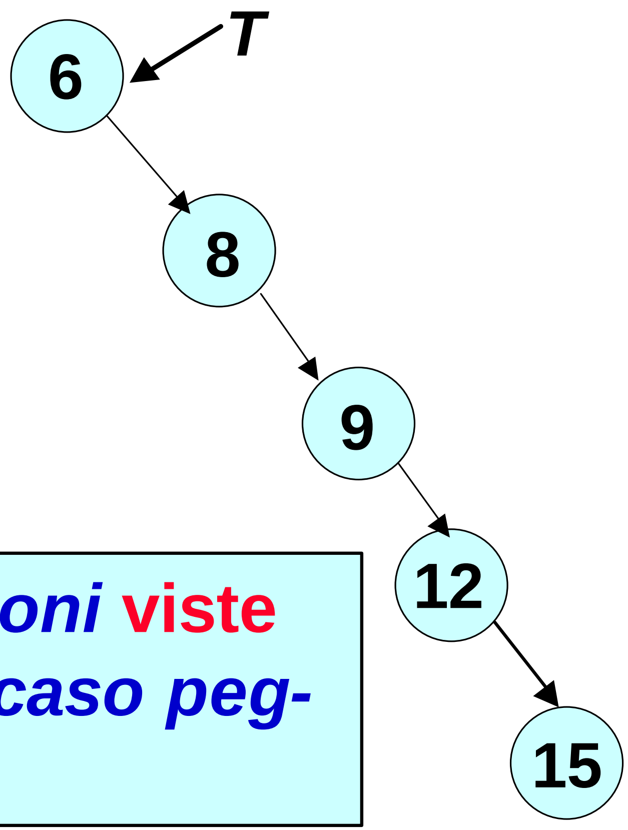
Costo delle operazioni su ABR

L'algortimo di inserimento NON garantisce che l'albero risultante sia bilaciato. Nel caso peggiore l'altezza h può essere pari ad N (numero dei nodi)



Costo delle operazioni su ABR

L'algortimo di inserimento NON garantisce che l'albero risultante sia bilaciato. Nel caso peggiore l'altezza h può essere pari ad N (numero dei nodi)



Quindi *tutte le operazioni* viste hanno *costo* O(*N*) nel *caso peggiore*

Costo medio delle operazioni su ABR

Dobbiamo calcolare la *lunghezza media* a_n del *percorso di ricerca*.

- **Assumiamo che le chiavi arrivino in ordine casuale (e che tutte abbiano *uguale probabilità* di presentarsi)**
- **La probabilità che la chiave *i* sia la radice è allora 1/*n***

$$\boxed{a(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i}$$

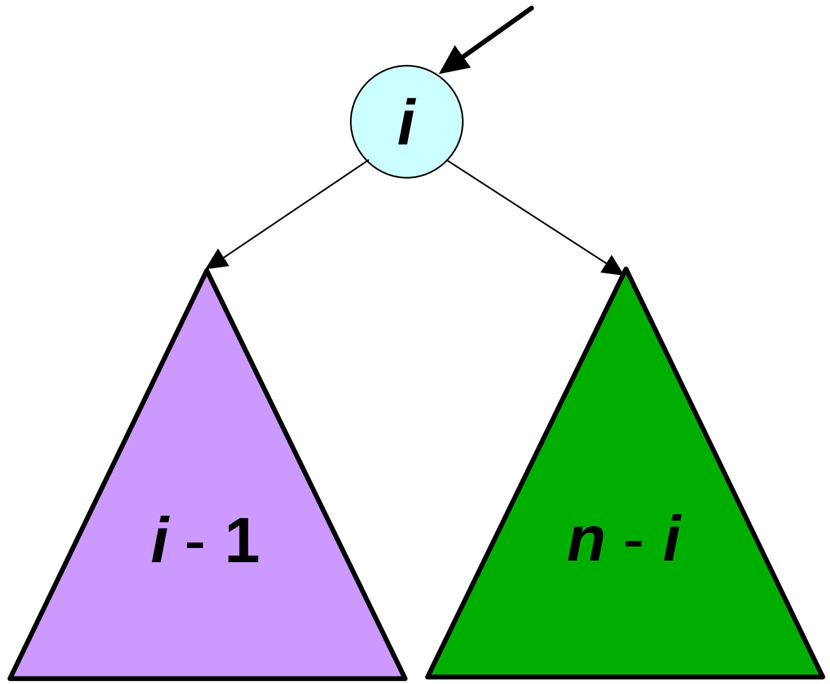
p_i è la lunghezza del percorso al nodo *i*

Costo delle operazioni su ABR

Se *i* è la radice, allora

- il sottoalbero sinistro avrà *i* - 1 nodi e
- il sottoalbero destro avrà *n* - *i* nodi

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

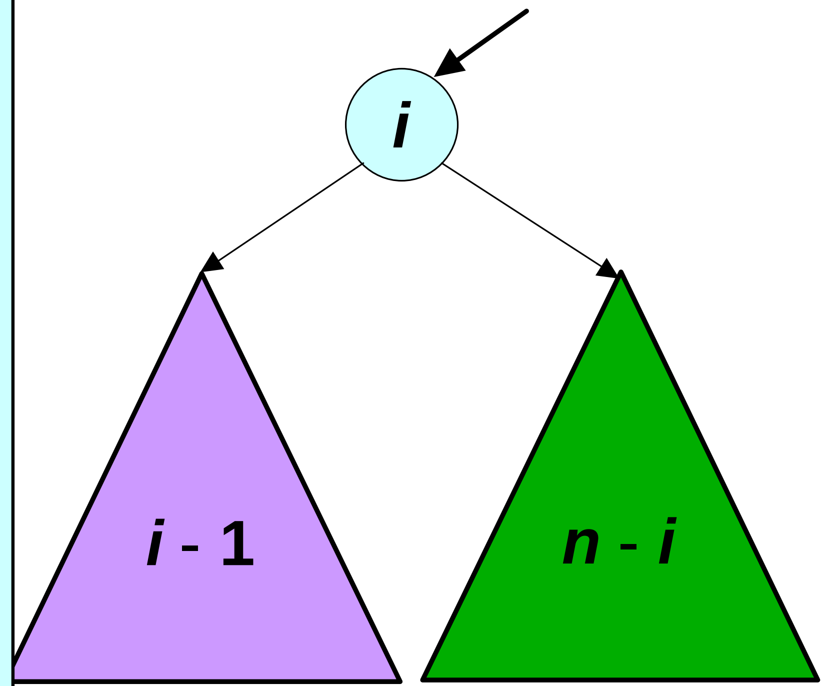


Costo delle operazioni su ABR

Se *i* è la radice, allora

- il sottoalbero sinistro avrà *i* - 1 nodi e
- il sottoalbero destro avrà *n* - *i* nodi
- gli *i* - 1 nodi a sinistra hanno lungezza del percorso $a(i-1)+1$
- la radice ha lunghezza del percorso pari ad 1
- gli *n* - *i* nodi a sinistra hanno lungezza del percorso $a(n-I)+1$

$$a(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$



Costo delle operazioni su ABR

$$a^i(n) = [a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-1)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a^i(n)$ **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *n* chiavi quando la radice è la chiave *i***

$$a_n^{(i)} = (a_{i-1}+1)\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + (a_{n-i}+1)\frac{n-i}{n}$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a^i(n) = [a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-1)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a^i(n)$ **è la lunghezza media del percorso di ricerca con *n* chiavi quando la radice è la chiave *i***

$$a(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a(i-1)+1]\frac{i-1}{n} + 1\frac{1}{n} + [a(n-1)+1]\frac{n-i}{n}$$

$a(n)$ **è la media degli *$a^i(n)$*, dove ciascun *$a^i(n)$* ha probabilità 1/*n***

Costo delle operazioni su ABR

$$\boxed{a(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a(i-1)+1]\frac{i-1}{n}+1\frac{1}{n}+[a(n-1)+1]\frac{n-i}{n}}$$

$$=1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[a(i-1)\cdot(i-1)+a(n-1)\cdot(n-i)\right]$$

$$=1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[a(i-1)\cdot(i-1)\right]$$

$$\boxed{=1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}ia(i)}$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1) \cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$a(n-1) = 1 + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a(i)$$

$$= 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a(n-1)-1\right)$$

$$a(n-1) = 1 + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 1 + \frac{2}{n^2}(n-1)\cdot a(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i)$$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2} i \cdot a(i) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a(n-1)-1\right)$$

$$a(n) = \frac{1}{n^2}\left[(n^2-1)\cdot a(n-1) + 2n - 1\right]$$

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = \frac{1}{n^2}\left[(n^2 - 1)\cdot a(n-1) + 2n - 1\right]$$

Dimostrare per induzione

$$a(n) = 2\frac{n+1}{n}H(n) - 3$$

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Funzione armonica

Costo delle operazioni su ABR

$$a(n) = 2\frac{n+1}{n}H(n) - 3$$

Dimostrare per induzione

$$a(n) = 2(\ln n + g) - 3 = 2\ln n - c$$

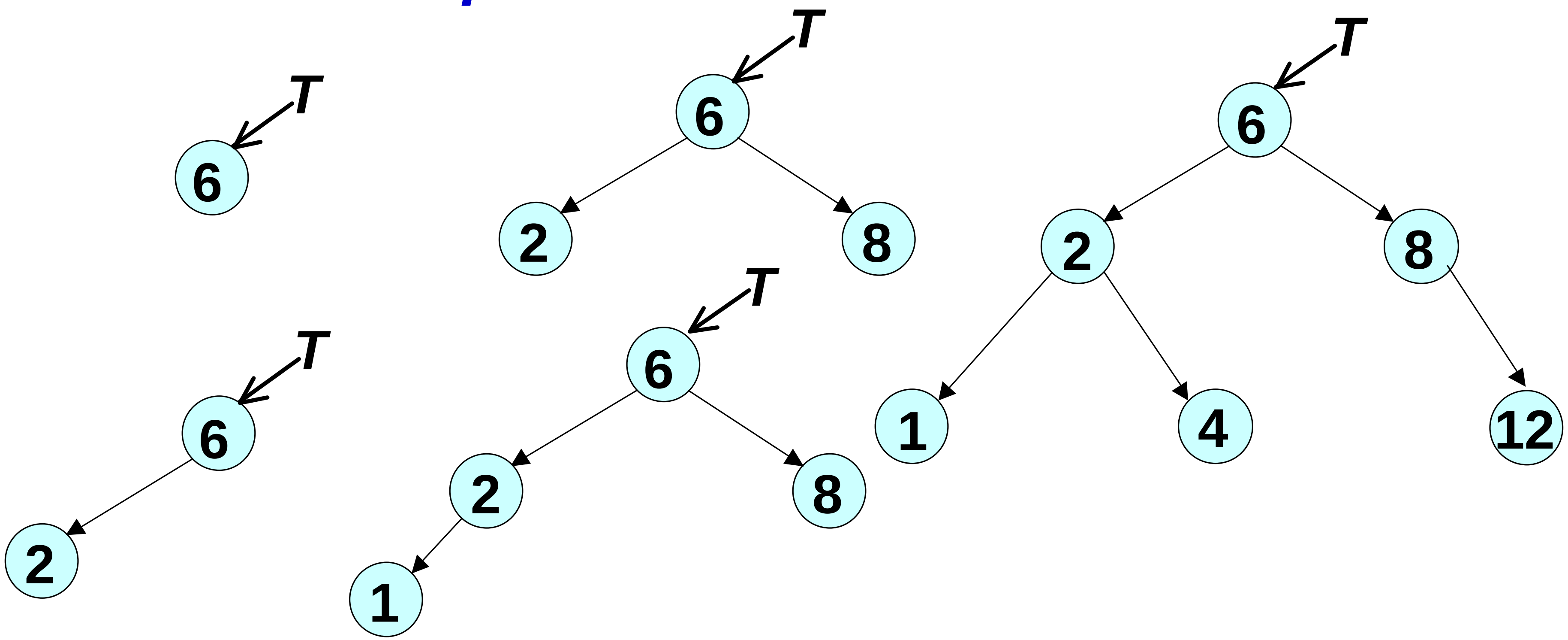
Formula di Eulero

$$H(n) = g + \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \ldots$$

dove g » **0.577**

Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice *Perfettamente Bilanciato* se, per ogni nodo *i*, il *numero dei nodi* nel suo *sottoalbero sinistro* e il *numero dei nodi* del suo *sottoalbero destro differiscono al più* di 1**



Alberi perfettamente bilanciati

Definizione: **Un albero binario si dice** ***Perfettamente Bilanciato*** **se, per ogni nodo** ***i*****, il** ***numero dei nodi*** **nel suo** ***sottoalbero sinistro*** **e il** ***numero dei nodi*** **del suo** ***sottoalbero destro differiscono al più*** **di 1**

La ***lunghezza media del percorso*** **in un** ***albero perfettamente bilanciato (APB)*** **è approssimativamente**

$$\boxed{a'_n = \log n - 1}$$

Confronto tra ABR e APB

Trascurando i tremini costanti, otteniamo quindi che il *rapporto* tra la *lunghezza media del percorso* in un *albero di ricerca* e quella nell'*albero perfettamente bilanciato* è (per *n* grande)

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{2\ln n - c}{\log n - 1} = \frac{2\ln n}{\log n} = 2\ln 2 \cong 1.386$$

Confronto tra ABR e APB

Ciò significa che, se anche *bilanciassimo* perfettamente l'albero *dopo ogni inserimento* il *guadagno sul percorso medio* che otterremmo *NON supererebbe* il 39%.

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{2 \ln n - c}{\log n - 1} = \frac{2 \ln n}{\log n} = 2 \ln 2 \cong 1.386$$

Sconsigliabile **nella maggior parte dei casi, *a meno che* il *numero dei nodi* e il rapporto tra ricerche e inserimenti *siano molto grandi*.**