

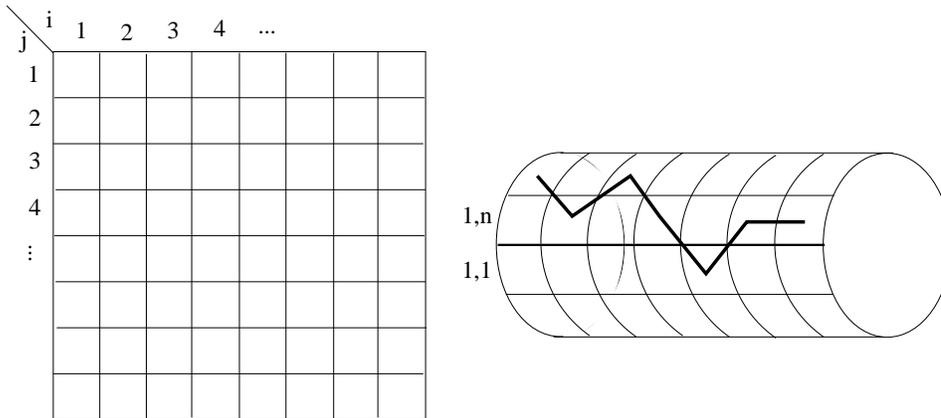
Tema d'esame di Algoritmi e Strutture Dati

Modulo B

21/11/2001

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Considerare una matrice $A : n \times n$ di interi positivi $(a_{i,j})$, con $1 \leq i, j \leq n$. Si supponga di unire i due bordi (o estremi) orizzontali della matrice in modo da formare un cilindro, cioè in modo che la prima e l'ultima riga siano tra loro contigue (vedi figura).



Si consideri ora il problema di tracciare un *percorso* a partire da una cella della prima colonna fino ad una cella nell'ultima colonna, sotto le seguenti restrizioni: da ogni cella (i, j) , è possibile muoversi solo nelle celle $(i + 1, j)$, $(i + 1, j - 1)$ o $(i + 1, j + 1)$. Il percorso può partire da una qualsiasi cella della prima colonna, e terminare in una qualsiasi cella dell'ultima colonna (vedi figura). Il *costo* di un percorso è costituito dalla somma dei valori delle celle attraversate dal percorso stesso. Il problema è di calcolare il percorso di peso minimo nella matrice A in input.

1. Esibire la *sottostruttura ottima* per il problema in questione e dimostrarne l'ottimalità.
2. Esibire l'*equazione di ricorrenza* che caratterizza il costo della soluzione ottima.
3. Fornire un algoritmo per calcolare la *soluzione ottima* (e non solamente per il costo della soluzione ottima) e studiarne la complessità.