OBDD Ridotti e canonicità

(Nota per gli studenti del corso di Tecniche di Specifica e di Verifica, a.a. 2002/2003)

Massimo Benerecetti

Questa nota indende riportare le principali definizioni relative ai *Binary Decision Diagrams* (BDD) e la dimostrazione della proprietà di canonicità degli OBDD Ridotti.

Definitione 1 (BDD) *Un BDD è un grafo orientato aciclico radicato nel quale:*

- *esiste un unico nodo inizale, detto radice;*
- *ogni nodo terminale è etichettato con* **0** *o con* **1***;*
- *ogni nodo non terminale (nodo interno)* v *ha esattamente tre attributi:*
  1. $var(v)$*: la variable booleana associata al nodo;*
  2. $low(v)$*: il riferimento, etichettato con* 0*, allo* 0*–successore di* v*;*
  3. $high(v)$*: un riferimento, etichettato con* 1*, allo* 1*–successore di* v*.*

Definitione 2 (OBDD) *Un BDD si dice ordinato (OBDD) se lungo ogni percrcorso dalla radice ad un nodo terminale, le variabili incontrate rispettano un dato ordinamento lineare* $x_1 < x_2 < ... < x_n$*.*

Definitione 3 (ROBDD) *Un OBDD si dice Ridotto (ROBDD) se contiene al più due soli nodi terminali, uno etichettato con* **0** *e uno con* **1***, e inoltre:*

- **(unicità)** *non esistono due nodi interni distinti* u *e* v *con gli stessi attributi* $var()$*,* $low()$ *e* $high()$*. In altre parole:*

$$var(v) = var(u) \text{ e } low(v) = low(u) \text{ e } high(v) = high(u) \text{ implicano } v = u$$

- **(assenza di test ridondanti)** *nessun nodo interno* u *ha gli attributi* $low()$ *e* $high()$ *identici. In altre parole, per ogni nodo* u

$$low(u) \neq high(u)$$

La Figura 1 mostra tre differenti OBDD per la funzione booleana $(y \wedge \neg z) \vee (z \iff \neg x)$ con ordinamento $y < z < x$. Rispetto a questo ordinamento, l'unico OBDD Ridotto per la funzione è quello in basso.
Nel seguito denoteremo con $\mathbf{B}$ l'insieme $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ dei valori booleani, e con $\mathbf{B}^m$ l'inseme delle m–uple di valori booleani del timo $\langle b_1, ..., b_m \rangle$, dove $b_i \in \mathbf{B}$ per ogni i.

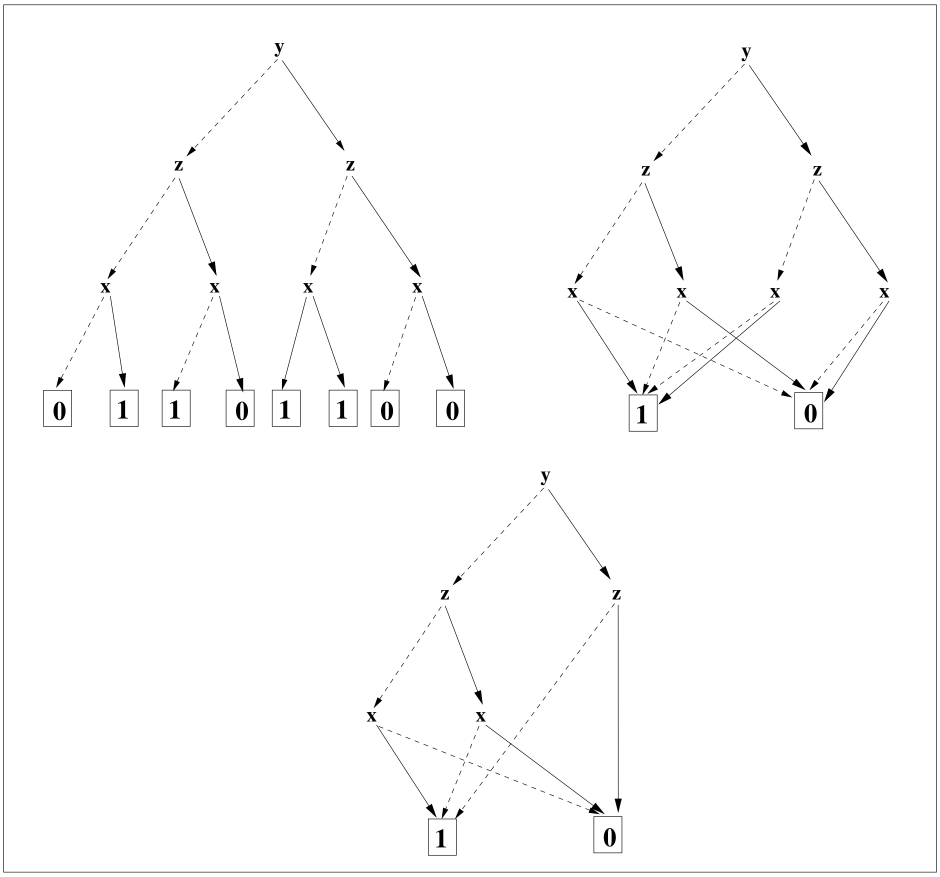

Figure 1: Tre differenti OBDD per la formula $(y \wedge \neg z) \vee (z \Longleftrightarrow \neg x)$, con ordinamento $y < z < x$.

Lemma 1 (Canonicità degli OBDD) *Sia $f(x_1, ..., x_n)$ una funzione booleana di n argomenti (i.e. $f : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$), allora, per l'ordinamento $x_1 < x_2 < ... < x_n$, esiste un unico OBDD Ridotto radicato in u tale che, detta f^u la funzione da esso rappresentata:*

$$f^u = f(x_1, ..., x_n)$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sul numero n di argomenti di f.

Caso Base $n = 0$. Banale, considerando che f può solo essere una funzione costante. Si possono infatti avere solo due casi: o $f = 0$ oppure $f = 1$. L'OBDD ridotto f^u per f sarà quindi, a seconda del caso, o il ROBDD **0**, oppure il ROBDD **1**. Infatti, nessun ROBDD per f può contenere un nodo non terminale (interno), poichè, essendo f una funzione costante, ciò obbligherebbe ad avere almeno un *test ridondante*, violando la proprietà di riduzione degli ROBDD. Da ciò segue l'asserto.

Caso Induttivo Si supponga l'asserto vero per ogni funzione di n argomenti, e che $f(x_1, ..., x_{n+1})$ abbia $n + 1$ argomenti (cioè $f : \mathbf{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{B}$). Definiamo ora le seguenti due funzioni:

$$f_0(x_2, ..., x_{n+1}) = f(0, x_2, ..., x_{n+1}) \quad \text{e} \quad f_1(x_2, ..., x_{n+1}) = f(1, x_2, ..., x_{n+1}) \tag{1}$$

Chiaramente

$$f(x_1, ..., x_{n+1}) = (\neg x_1 \wedge f_0(x_2, ..., x_{n+1})) \vee (x_1 \wedge f_1(x_2, ..., x_{n+1})) \qquad (\textit{Shannon expansion})$$

Si noti che sia f_0 che f_1 hanno n argomenti, e quindi, per l'Ipotesi Induttiva, esiste un unico ROBDD f^{u_0}, dato l'ordinamento $x_1 < x_2 < ... < x_{n+1}$, tale che $f^{u_0} = f_0$, e un unico ROBDD f^{u_1} tale che $f^{u_1} = f_1$. Abbiamo ora due casi possibili:

1. $u_0 = u_1$: in tal caso, charamente deve essere $f^{u_0} = f^{u_1}$, e, quindi, anche $f_0 = f_1$. Questo significa che u_0 $(= u_1)$ è un ROBDD per f. Inoltre esso è unico. Supponiamo, infatti, che esista un altro ROBDD u differente da u_0 (e quindi da u_1). In u dovrà comparire la variabile x_1 (altrimenti $u = u_0$ per l'unicità di u_0). La variabile x_1, a causa dell'ordinamento fissato per le variabili, deve inoltre comparire come variabile della radice u del ROBDD. Ma, se $f^u = f$, per la (1) avremo che

   $$f_0 = f^u[0/x_1] = f^{low(u)} \quad \text{e} \quad f_1 = f^u[1/x_1] = f^{high(u)}$$

   Dall'assunzione e da quanto appena concluso, segue però che

   $$f^{low(u)} = f_0 = f^{u_0} = f^{u_1} = f_1 = f^{high(u)}$$

   in violazione della proprietà di riduzione (*assenza di test ridondanti*) per il ROBDD u. Da ciò segue l'asserto.

2. $u_0 \neq u_1$: in tal caso, per l'Ipostesi Induttiva (usando $x_2, ..., x_{n+1}$ al posto di $x_1, ..., x_n$), $f^{u_0} \neq f^{u_1}$. Sia u il nodo per cui $var(u) = x_1$, $low(v) = u_0$ e $high(v) = u_1$. Avremmo quindi che, $f^u = x_1 \longrightarrow f^{u_1}, f^{u_0}$ (o equivalentemente, $f^u = (\neg x_1 \wedge f^{u_0}) \vee (x_1 \wedge f^{u_1})$). Poiché, per assunzione, $f^{u_0} = f_0$ e $f^{u_1} = f_1$, dalla (1) otteniamo che $f^u = f$. Dimostriamo ora che u è unico. Supponiamo che esista un altro ROBDD per f radicato in v (cioè, $f^v = f$). Chiaramente, f^v deve dipendere da x_1 (che quindi deve comparire in f^v), dal momento che $f^v[0/x_1] = f[0/x_1] \neq f[1/x_1] = f^v[1/x_1]$. A causa dell'ordinamento, x_1 deve essere la variabile associata al nodo v, quindi $var(v) = x_1 = var(u)$.

   Inoltre, poiché $f = f^v$, dovrà essere anche $f^{low(v)} = f_0 = f^{u_0}$ e $f^{high(v)} = f_1 = f^{u_1}$, che, per la proprietà di unicità dovuta all'Ipotesi Induttiva, implica che $low(v) = u_0 = low(u)$ e $high(v) = u_1 = high(u)$.

   Per la proprietà di riduzione (*unicità dei nodi identici*) segue che $u = v$ (tutti e tre gli attributi dei due nodi sono infatti gli stessi).

$\square$