SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO

Concetti fondamentali

Classificazione dei sistemi dinamici

Movimento ed equilibrio

Sistemi lineari

Linearizzazione

Stabilità

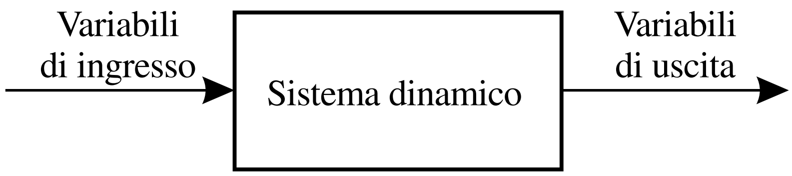
CONCETTI FONDAMENTALI

Variabili di ingresso, stato e uscita

- Sistema dinamico
  - ⋆ variabili di ingresso: azioni esterne sul sistema
  - ⋆ variabili di uscita: di interesse per il sistema

$$\Downarrow$$

rapporto causa–effetto

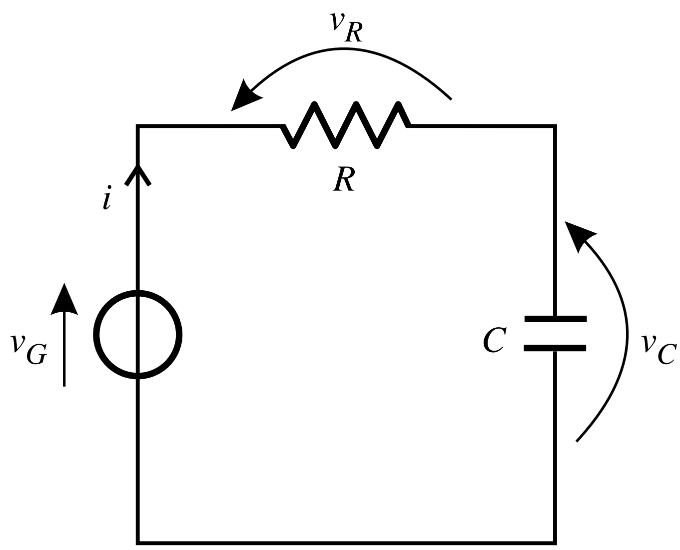


- ⋆ variabili di stato: descrizione dall'interno del sistema

$$\Downarrow$$

determinazione variabili di uscita, note le variabili di ingresso e l'istante di tempo

- Esempio: circuito elettrico



⋆ processo

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

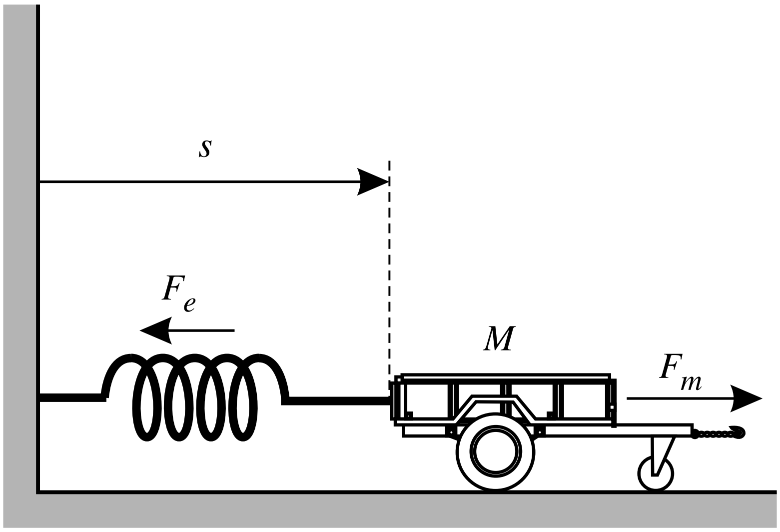
⋆ ingresso: tensione v_G

⋆ uscita: tensione v_R

$$\Downarrow$$

$v_R(t)$ dipende dall'energia elettrica accumulata nel condensatore (funzione di v_C)

- Esempio: carrello



⋆ processo

$$F_e(s(t),t) = k(t)s(t) = k_{t_0} e^{-\alpha(t-t_0)} s(t) \qquad t \geq t_0$$

⋆ ingresso: forza motrice F_m

⋆ uscita: energia totale E_T

$$E_T(t) = \frac{1}{2}\left(k(t)s^2(t) + M\dot{s}^2(t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$E_T(t)$ non dipende esplicitamente da F_m

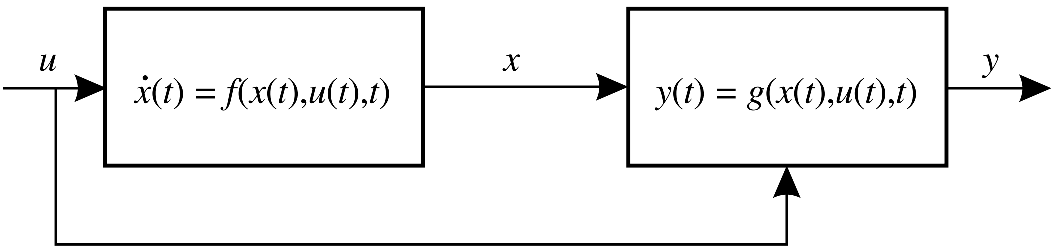
Rappresentazione di stato (I-S-U o interna)

- Sistema dinamico a tempo continuo ($u \in R^m, x \in R^n, y \in R^p$)
  - ⋆ equazione di stato

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

  - ⋆ trasformazione di uscita

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$



- Esempio: circuito elettrico
  - ⋆ leggi elettriche

$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$
$$v_R(t) = Ri(t)$$

  - ⋆ $u = v_G,\, x = v_C,\, y = v_R$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}(u(t) - x(t))$$
$$y(t) = u(t) - x(t)$$

- Esempio: carrello
  - ⋆ legge meccanica

$$M\ddot{s}(t) = F_m(t) - F_e(t)$$

  - ⋆ $u = F_m,\, x_1 = s,\, x_2 = \dot{s},\, y = E_T$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{M}\left(u(t) - k_{t_0}e^{-\alpha(t-t_0)}x_1(t)\right)\\
y(t) &= \frac{1}{2}\left(k_{t_0}e^{-\alpha(t-t_0)}x_1^2(t) + Mx_2^2(t)\right)
\end{aligned}$$

- Scelta delle variabili di stato (accumuli di energia nei sistemi fisici)

  ⋆ sistemi elettrici: tensione ai morsetti dei condensatori, correnti negli induttori

  ⋆ sistemi meccanici: posizione, velocità

  ⋆ esistono infinite scelte possibili

  ⋆ ordine (n) non fissato *a priori* (in dipendenza dell'accuratezza del modello), evitando ridondanze

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

- Descrizione

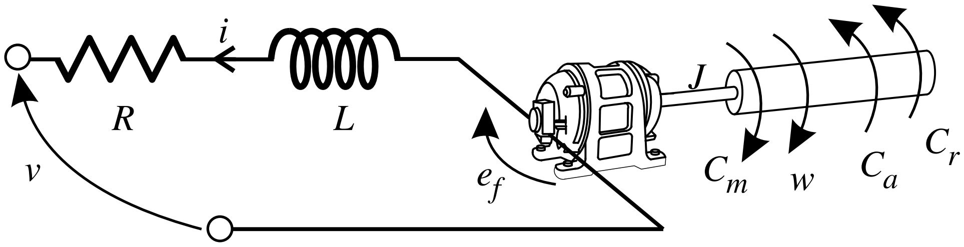
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

  ⋆ classificazione sulla base delle proprietà di f e g

- Sistema monovariabile (SISO): $m = p = 1$

- Sisteme multivariabile (MIMO): $m, p > 1$

- Esempio: motore elettrico a corrente continua (eccitazione indipendente)



⋆ bilancio elettrico

$$
\begin{aligned}
v(t) - e_f(t) &= Ri(t) + L\dot{i}(t) \\
e_f(t) &= kw(t)
\end{aligned}
$$

⋆ bilancio meccanico

$$
\begin{aligned}
J\dot{w}(t) &= C_m(t) - C_r(t) - hw(t) \\
C_m(t) &= ki(t)
\end{aligned}
$$

⋆ $u_1 = v$, $u_2 = C_r$, $x_1 = y_1 = i$, $x_2 = y_2 = w$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{k}{J}x_1(t) - \frac{h}{J}x_2(t) - \frac{1}{J}u_2(t) \\
y_1(t) &= x_1(t) \\
y_2(t) &= x_2(t)
\end{aligned}
$$

- Sistema proprio

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- Sistema strettamente proprio (puramente dinamico)

$$y(t) = g(x(t), t)$$

- Sistema non dinamico

$$y(t) = g(u(t), t)$$

- Sistema invariante nel tempo (stazionario)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

  ⋆ risposta (stato o uscita) indipendente dall'istante di applicazione della sollecitazione (stato iniziale e ingresso)

- Sistema variante nel tempo: f o g funzioni esplicite del tempo

- Sistema lineare

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

⋆ stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

⋆ carrello: modello stazionario approssimato ($t_f - t_0 = 0.1/\alpha$)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{M}(u(t) - 0.95k_{t_0}x_1(t)) \\
y(t) &= \frac{1}{2}\left(0.95k_{t_0}x_1^2(t) + Mx_2^2(t)\right)
\end{aligned}
$$

- Sistema a dimensione finita (parametri concentrati): n finito

- Sistema a dimensione infinita (parametri distribuiti): equazioni differenziali a derivate parziali

- Sistema deterministico: ingresso, stato e uscita deterministici

- Sistema stocastico: ingresso, stato o uscita aleatorie
  - ⋆ circuito elettrico: R variabile secondo densità di probabilità

MOVIMENTO ED EQUILIBRIO

- Soluzione del sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

  - ⋆ movimento dello stato $x(t)$, $t \geq t_0$
  - ⋆ movimento dell'uscita $y(t)$, $t \geq t_0$

- Equilibrio

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$
$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

- Esempio: circuito elettrico
  - ⋆ equilibrio

$$u(t) = \bar{u} = U \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} = U, \bar{y} = 0$$

- Esempio

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + x(t) + u(t)$$

  - ⋆ equilibri

$$\begin{aligned} u(t) = \bar{u} < 1/4 \quad &\Longrightarrow \quad \text{due stati} \\ u(t) = \bar{u} = 1/4 \quad &\Longrightarrow \quad \text{uno doppio} \\ u(t) = \bar{u} > 1/4 \quad &\Longrightarrow \quad \text{nessuno} \end{aligned}$$

- Esempio

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned}$$

  - ⋆ equilibrio

$$u(t) = \bar{u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{qualunque} \\ 0 \end{bmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

- $(u', x'_{t_0}) \Rightarrow (x', y') \quad (u'', x''_{t_0}) \Rightarrow (x'', y'')$

$$\begin{aligned} \dot{x}'(t) &\equiv A(t)x'(t) + B(t)u'(t) \qquad t \geq t_0 \\ x'(t_0) &\equiv x'_{t_0} \\ y'(t) &\equiv C(t)x'(t) + D(t)u'(t) \qquad t \geq t_0 \\ \dot{x}''(t) &\equiv A(t)x''(t) + B(t)u''(t) \qquad t \geq t_0 \\ x''(t_0) &\equiv x''_{t_0} \\ y''(t) &\equiv C(t)x''(t) + D(t)u''(t) \qquad t \geq t_0 \end{aligned}$$

- Combinazione lineare degli ingressi e degli stati iniziali

$$\begin{aligned} u'''(t) &= \alpha u'(t) + \beta u''(t) \\ x'''_{t_0} &= \alpha x'_{t_0} + \beta x''_{t_0} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x'''(t) &= \alpha x'(t) + \beta x''(t) \qquad t \geq t_0 \\ y'''(t) &= \alpha y'(t) + \beta y''(t) \qquad t \geq t_0 \end{aligned}$$

Movimento libero e movimento forzato

- $u''(t) = 0, x'_{t_0} = 0, \alpha = \beta = 1$
  - ⋆ x', y': movimenti forzati (dipendono solo dall'ingresso)
  - ⋆ x'', y'': movimenti liberi (dipendono solo dallo stato iniziale)
- Esempio: movimento del circuito elettrico (sistema lineare)
- Esempio: movimento della centrifuga (sistema non lineare)

LINEARIZZAZIONE

- Sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

⋆ movimenti nominali

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \qquad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_{t_0}\\ \tilde{y}(t) &= g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\end{aligned}$$

⋆ variazioni

$$\begin{aligned}u(t) &= \tilde{u}(t) + \delta u(t)\\ x(t) &= \tilde{x}(t) + \delta x(t)\\ x_{t_0} &= \tilde{x}_{t_0} + \delta x_{t_0}\\ y(t) &= \tilde{y}(t) + \delta y(t)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) &= f(\tilde{x}(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t) + \delta u(t), t)\\ \tilde{x}(t_0) + \delta x(t_0) &= \tilde{x}_{t_0} + \delta x_{t_0}\\ \tilde{y}(t) + \delta y(t) &= g(\tilde{x}(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t) + \delta u(t), t)\end{aligned}$$

⋆ sviluppo in serie di Taylor

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + &\left.\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} \delta x(t) \\
+ &\left.\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} \delta u(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(t) + \delta y(t) = g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + &\left.\frac{\partial g(x,u,t)}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} \delta x(t) \\
+ &\left.\frac{\partial g(x,u,t)}{\partial u}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} \delta u(t)
\end{aligned}
$$

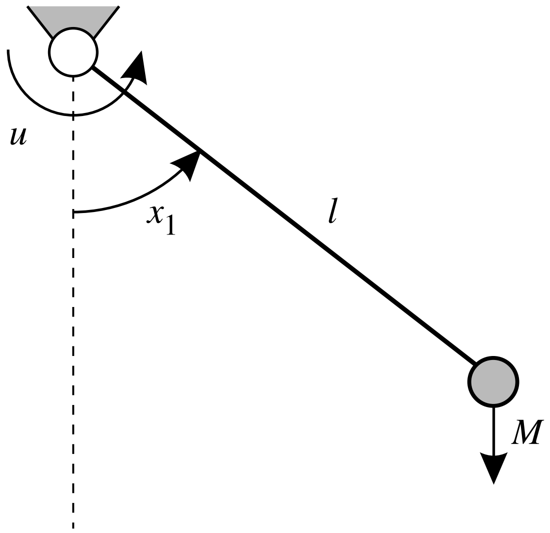
$$\Downarrow$$

- Sistema linearizzato

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \qquad \delta x(t_0) = \delta x_{t_0} \\
\delta y(t) &= C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t)
\end{aligned}
$$

⋆ sistema non lineare stazionario, linearizzato nell’intorno di stato e uscita di equilibrio ⇒ sistema linearizzato stazionario

- Esempio: pendolo



⋆ sistema non lineare stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{k}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\
y(t) &= \frac{1}{2}Ml^2x_2^2(t) - Mgl\cos\left(x_1(t)\right)
\end{aligned}
$$

⋆ equilibrio ($u(t) = \bar{u} = Mgl$)

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{x}_2 \\
0 &= -\frac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) - \frac{k}{Ml^2}\bar{x}_2 + \frac{g}{l} \\
\bar{y} &= \frac{1}{2}Ml^2\bar{x}_2^2 - Mgl\cos(\bar{x}_1)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 + 2\pi i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad i \text{ intero}
$$

$$\bar{y} = 0$$

⋆ sistema linearizzato

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\
\delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t)
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k/Ml^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} Mgl & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0
$$

- ⋆ equilibrio ($u(t) = \bar{u} = 0$)

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{x}_2 \\
0 &= -\frac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) - \frac{k}{Ml^2}\bar{x}_2 \\
\bar{y} &= \frac{1}{2}Ml^2\bar{x}_2^2 - Mgl\cos(\bar{x}_1)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad i \text{ intero} \\
\bar{y} &= (-1)^{i+1}Mgl \qquad i \text{ intero}
\end{aligned}
$$

- ⋆ sistema linearizzato: i dispari $(+)$, i pari $(-)$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm g/l & -k/Ml^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0
$$

STABILITÀ

- Proprietà di stabilità (Liapunov): conseguenze sul movimento dello stato provocate da incertezze sullo stato iniziale, a ingresso e parametri fissi e noti

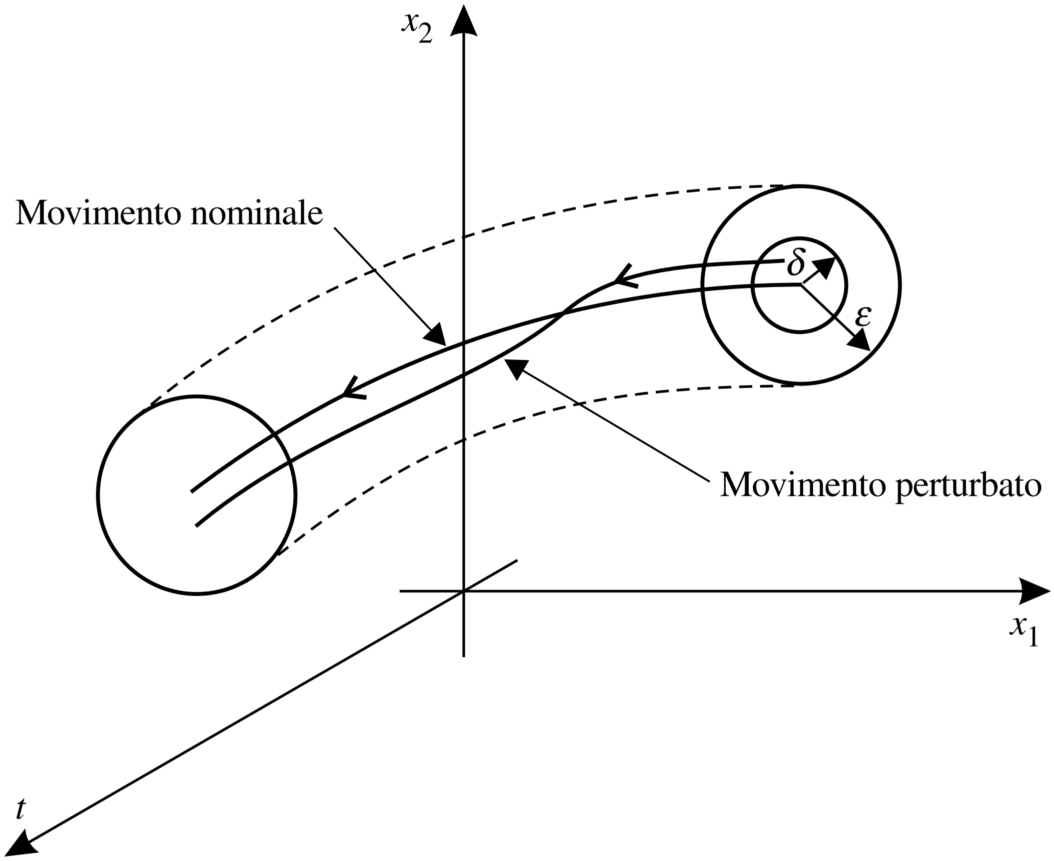
Stabilità del movimento

- Sistema stazionario
  - ⋆ $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$, $\tilde{x}_0 \Rightarrow \tilde{x}(t)$ (nominale)
  - ⋆ $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$, $x_0 \Rightarrow x(t)$ (perturbato)

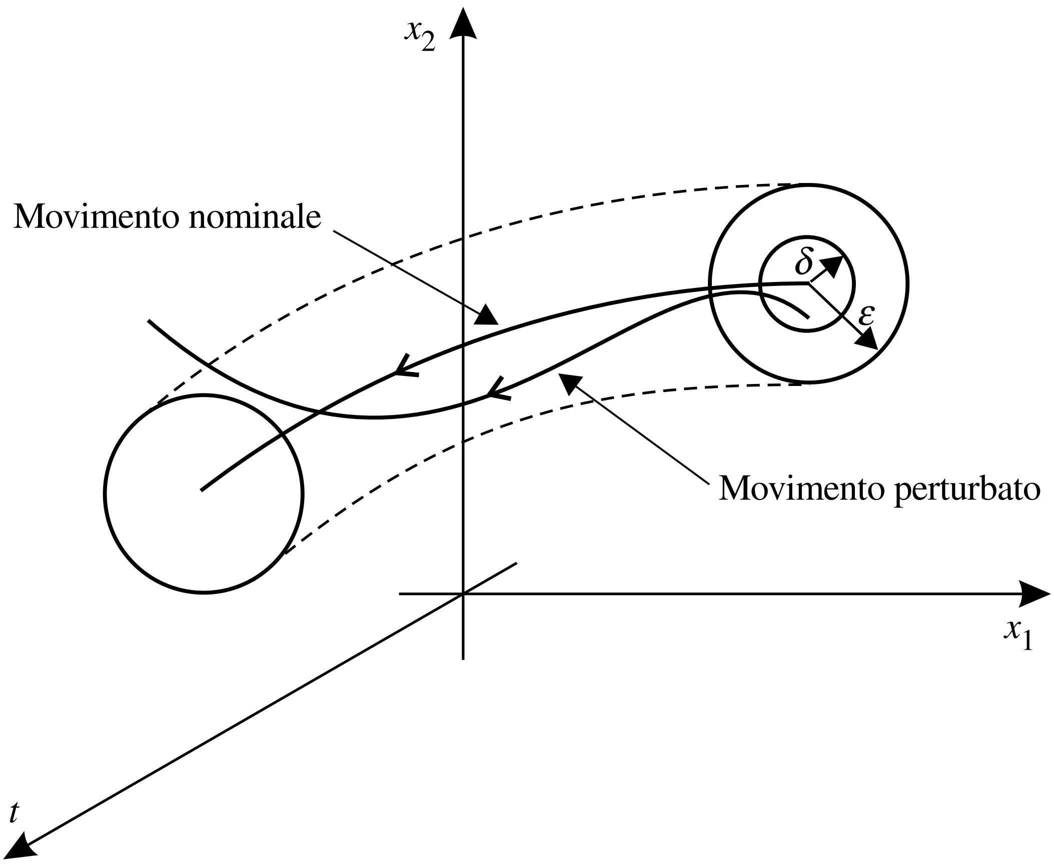
- Movimento $\tilde{x}$ stabile se $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$:

$$\forall x_0 : \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta$$

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall t \geq 0$$

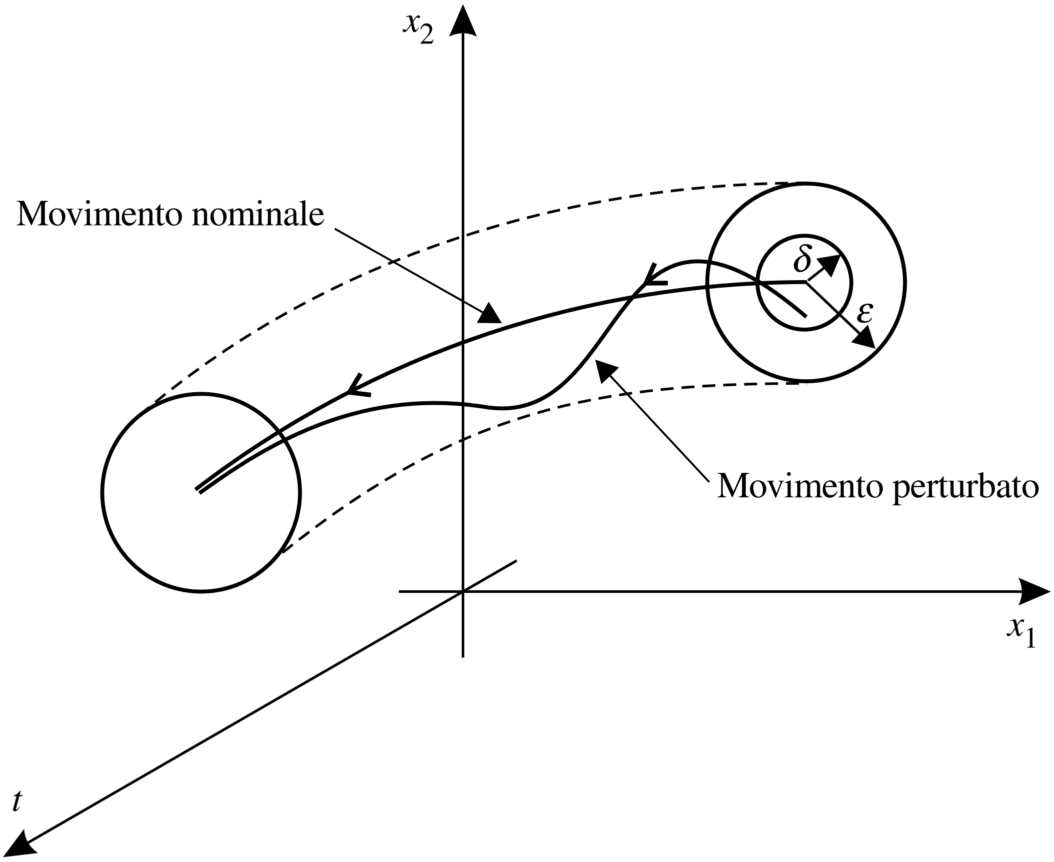


- Movimento instabile



- Movimento asintoticamente stabile

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$



- Esempio: circuito elettrico ($t_0 = 0$, $u(t) = U$, $t \geq 0$)
  - ⋆ movimento nominale ($\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$)

$$\tilde{x}(t) = e^{-t/RC}\tilde{x}_0 + \left(1 - e^{-t/RC}\right)U$$

  - ⋆ movimento perturbato ($x(0) = x_0$)

$$x(t) = e^{-t/RC}x_0 + \left(1 - e^{-t/RC}\right)U$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) - \tilde{x}(t) = e^{-t/RC}(x_0 - \tilde{x}_0)$$

  - ⋆ $\delta = \epsilon$, $\left|e^{-t/RC}(x_0 - \tilde{x}_0)\right| \leq |x_0 - \tilde{x}_0| \Rightarrow \tilde{x}$ stabile
  - ⋆ $\lim_{t\to\infty} e^{-t/RC} = 0 \Rightarrow \tilde{x}$ asintoticamente stabile

Determinazione delle proprietà di stabilità

- Problema non banale

- Esempio: pendolo (intuizione fisica)
  - ⋆ orientato verso l'alto (stati instabili)
  - ⋆ orientato verso il basso (stati asintoticamente stabili)