SISTEMI LINEARI E STAZIONARI A TEMPO CONTINUO

Movimento ed equilibrio

Stabilità

MOVIMENTO ED EQUILIBRIO

- Sistema lineare e stazionario ($u \in R^m$, $x \in R^n$, $y \in R^p$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Formula di Lagrange

- In risposta a $u(t)$, $t \geq t_0$, $x(t_0) = x_{t_0}$:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- $\star$ movimenti liberi ($t_0 = 0$)

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0}$$
$$y_l(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0}$$

- $\star$ movimenti forzati

$$x_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y_f(t) = C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Rappresentazioni equivalenti

- Trasformazione di stato

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$
$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

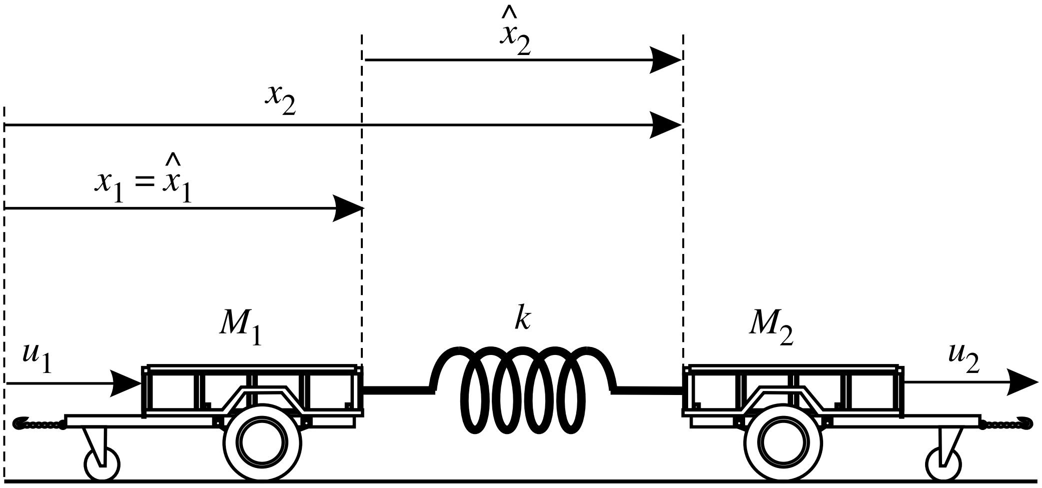
$$\Downarrow$$

$\star$ sistema dinamico equivalente (A e $\hat{A}$: stessi autovalori)

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$
$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} \quad \hat{B} = TB \quad \hat{C} = CT^{-1} \quad \hat{D} = D$$

- Esempio: sistema meccanico



$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{1}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}
$$

⋆ trasformazione di stato

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= x_1(t)\\ \hat{x}_2(t) &= x_2(t) - x_1(t)\\ \hat{x}_3(t) &= x_3(t)\\ \hat{x}_4(t) &= x_4(t) - x_3(t)\end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1(t)\\ \dot{\hat{x}}_2(t)\\ \dot{\hat{x}}_3(t)\\ \dot{\hat{x}}_4(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{k}{M_1} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{(M_1+M_2)k}{M_1 M_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1(t)\\ \hat{x}_2(t)\\ \hat{x}_3(t)\\ \hat{x}_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{M_1} & 0\\ -\frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1(t)\\ \hat{x}_2(t)\\ \hat{x}_3(t)\\ \hat{x}_4(t)\end{bmatrix}$$

Autovalori e modi

- Matrice della dinamica diagonalizzabile (autovalori distinti: $T = T_D$)
$$\hat{A} = \hat{A}_D = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

  ⋆ movimento libero dello stato

$$\begin{aligned}
\hat{x}_l(t) &= e^{\hat{A}_D t}\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\hat{A}_D t\right)^k}{k!}\hat{x}_0 \\
&= \mathrm{diag}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s_1 t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s_2 t)^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s_n t)^k}{k!}\right\}\hat{x}_0 \\
&= \mathrm{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}\}\hat{x}_0
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
x_l(t) &= T_D^{-1}\hat{x}_l(t) = T_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}\}T_D x_0 \\
y_l(t) &= C T_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}\}T_D x_0
\end{aligned}$$

  ⋆ $e^{s_i t}$: modi aperiodici

  ⋆ $e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t + \varphi_i)$: modi pseudoperiodici

- Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = [\,1 \quad 1\,]$$

⋆ autovalori: $s_{1,2} = 1 \pm j$

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

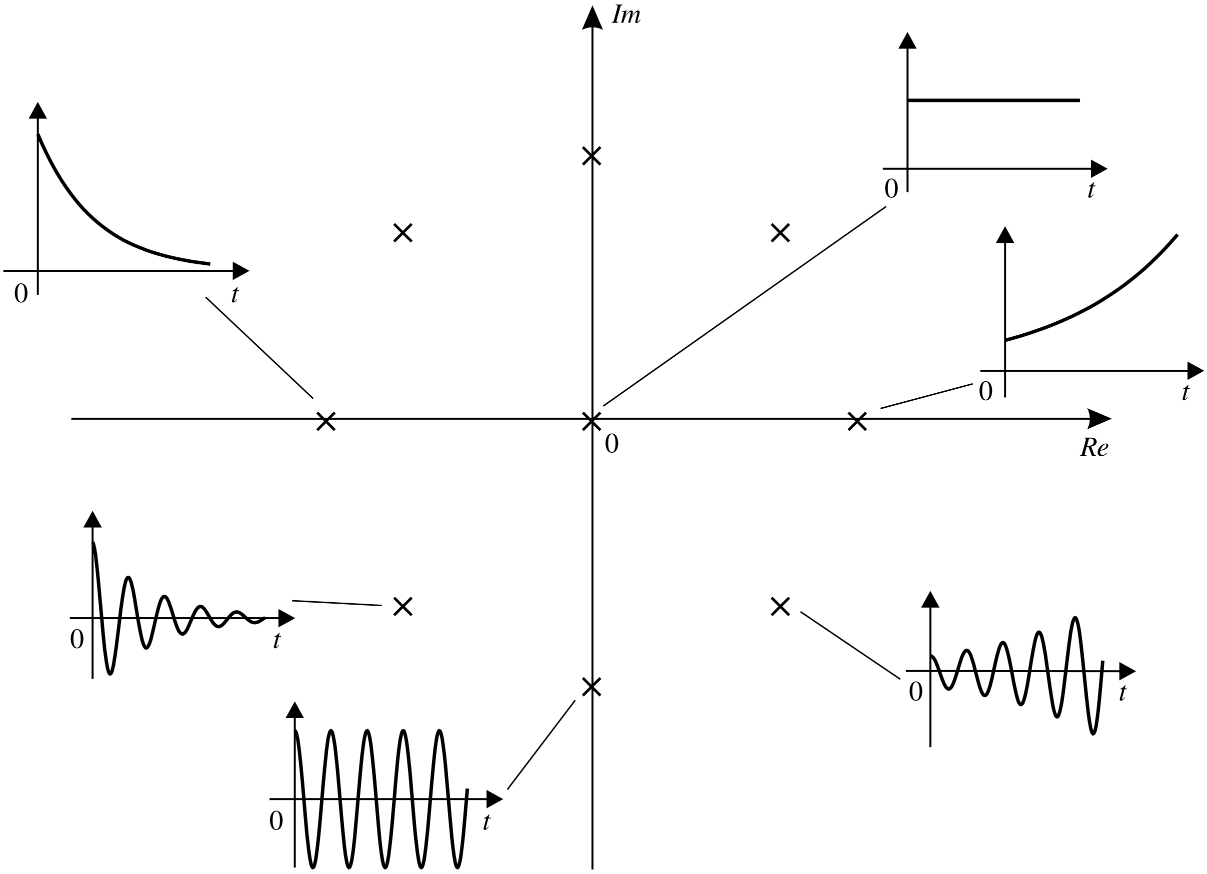
$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}$$

⋆ movimenti liberi

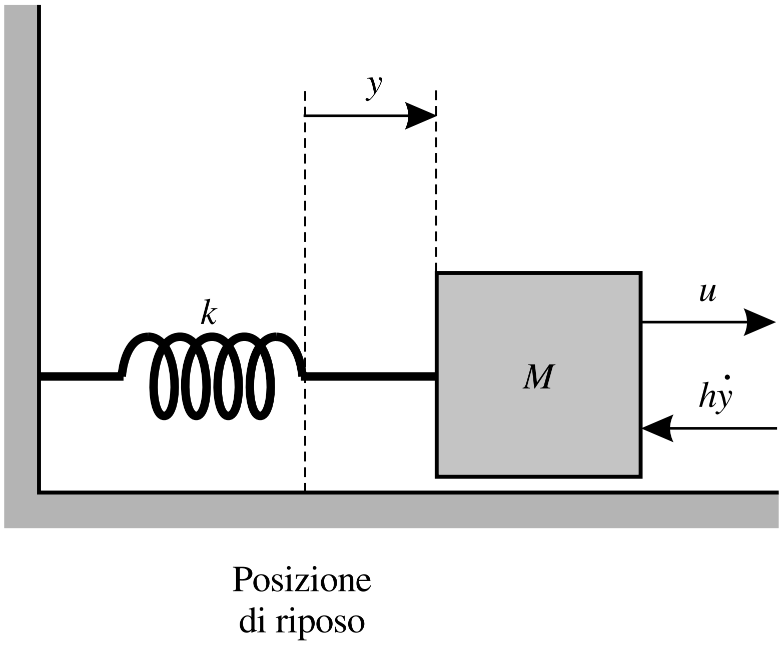
$$\begin{aligned} x_l(t) &= 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} x_0 \\ &= e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_l(t) &= e^t [\,1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0 \\ &= \sqrt{2} e^t [\,\cos(t + \pi/4) \quad \cos(t - \pi/4)\,]\, x_0 \end{aligned}$$

- Modi dei sistemi dinamici con autovalori distinti



- Esempio: sistema massa-molla



⋆ legge fondamentale della dinamica

$$M\ddot{y}(t) = -ky(t) - h\dot{y}(t) + u(t)$$

⋆ rappresentazione di stato ($x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -h/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/M \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

⋆ autovalori

$$s_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} \qquad s_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

⋆ autovalori distinti ($h^2 \neq 4MK$)

$$T_D = \frac{1}{s_2 - s_1}\begin{bmatrix} s_2 & -1 \\ -s_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_D = T_D A T_D^{-1} = \mathrm{diag}\{s_1, s_2\}$$

$$\Downarrow$$

⋆ movimenti liberi ($h^2 > 4MK$)

$$x_l(t) = \frac{1}{s_2 - s_1}\begin{bmatrix} (s_2 x_{01} - x_{02})e^{s_1 t} - (s_1 x_{01} - x_{02})e^{s_2 t} \\ (s_1 s_2 x_{01} - s_1 x_{02})e^{s_1 t} - (s_1 x_{01} - x_{02})e^{s_2 t} \end{bmatrix}$$

$$y_l(t) = \frac{1}{s_2 - s_1}(s_2 x_{01} - x_{02})e^{s_1 t} - (s_1 x_{01} - x_{02})e^{s_2 t}$$

⋆ movimenti liberi ($h^2 < 4MK$)

$$\sigma = -\frac{h}{2M} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{h^2}{4M^2}}$$

$$\delta = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \qquad \gamma = \arcsin\frac{\omega}{\delta} = \arccos\frac{\sigma}{\delta}$$

$$x_l(t) = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} -\frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t - \gamma)x_{01} + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)x_{02} \\ -\frac{\delta^2}{\omega}\sin(\omega t)x_{01} + \frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t + \gamma)x_{02} \end{bmatrix}$$

$$y_l(t) = e^{\sigma t}\left(-\frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t - \gamma)x_{01} + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)x_{02}\right)$$

Risposta all'impulso e movimento forzato

- Risposta all'impulso ($m = 1$, $u(t) = \mathrm{imp}(t)$, $x(0) = 0$)

$$
\begin{aligned}
g_x(t) &= e^{At}B \\
g_y(t) &= Ce^{At}B + D\mathrm{imp}(t)
\end{aligned}
$$

  - ⋆ coincide con il movimento libero prodotto da $x(0) = B$: combinazioni lineari dei modi del sistema
  - ⋆ estensione al caso $m > 1$: risposta di x_i (y_i) all'impulso unitario u_j (per $u_k = 0$, $k \neq j$)

- Movimento forzato

$$\begin{aligned} g_x(t) \star u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g_x(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x_f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_y(t) \star u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g_y(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\mathrm{imp}(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau = y_f(t) \end{aligned}$$

  - $\star$ A diagonalizzabile

$$\begin{aligned} x_f(t) &= T_D^{-1}\hat{x}_f(t) = T_D^{-1}\int_0^t e^{\hat{A}_D(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau \\ &= T_D^{-1}\int_0^t \mathrm{diag}\left\{e^{s_1(t-\tau)}, e^{s_2(t-\tau)}, \ldots, e^{s_n(t-\tau)}\right\} T_D Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_f(t) = CT_D^{-1}&\int_0^t \mathrm{diag}\left\{e^{s_1(t-\tau)}, e^{s_2(t-\tau)}, \ldots, e^{s_n(t-\tau)}\right\} T_D Bu(\tau)d\tau \\ &+ Du(t) \end{aligned}$$

- Esempio (precedente)

$$u(t) = \mathrm{sca}(t)$$

⋆ movimento forzato ($s_1 \neq s_2$, $k \neq 0$)

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_0^t \mathrm{diag}\left\{ e^{s_1(t-\tau)}, e^{s_2(t-\tau)} \right\} d\tau \begin{bmatrix} -\frac{1}{M(s_2-s_1)} \\ \frac{1}{M(s_2-s_1)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{M(s_1 - s_2)} \begin{bmatrix} \dfrac{e^{s_1 t} - 1}{s_1} - \dfrac{e^{s_2 t} - 1}{s_2} \\ e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \end{bmatrix}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{M(s_1 - s_2)} \left(\frac{e^{s_1 t} - 1}{s_1} - \frac{e^{s_2 t} - 1}{s_2} \right)$$

⋆ movimento forzato ($s_{12} = \sigma \pm j\omega$, $k \neq 0$)

$$x_f(t) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\delta^2} \left(1 + \dfrac{\delta}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t - \gamma) \right) \\ \dfrac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{M\delta^2} \left(1 + \frac{\delta}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t - \gamma) \right)$$

⋆ movimento forzato ($k = 0$, $s_1 = 0$)

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \int_0^t \mathrm{diag}\left\{1, e^{s_2(t-\tau)}\right\} d\tau \begin{bmatrix} -\frac{1}{Ms_2} \\ \frac{1}{Ms_2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Ms_2} \begin{bmatrix} \dfrac{e^{s_2 t} - 1}{s_2} - t \\ e^{s_2 t} - 1 \end{bmatrix}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{Ms_2} \left(\frac{e^{s_2 t} - 1}{s_2} - t \right)$$

⋆ movimento forzato ($s_1 = s_2 = s_0 \neq 0$)

$$x_f(t) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s_0^2} - \dfrac{e^{s_0 t}}{s_0^2} + \dfrac{te^{s_0 t}}{s_0} \\ te^{s_0 t} \end{bmatrix}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{s_0^2} - \frac{e^{s_0 t}}{s_0^2} + \frac{te^{s_0 t}}{s_0} \right)$$

⋆ movimento forzato ($s_1 = s_2 = 0$)

$$x_f(t) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0.5t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{2M} t^2$$

Equilibrio

- $u(t) = \bar{u}$

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0$$
$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

  ⋆ A invertibile ($s_i \neq 0$)

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$
$$\bar{y} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

  ⋆ $D - CA^{-1}B$: guadagno statico del sistema SISO (rapporto tra uscita e ingresso quando tutte le variabili sono costanti)

- Esempio (precedente)

$$0 = \bar{x}_2$$
$$0 = -\frac{k}{M}\bar{x}_1 - \frac{h}{M}\bar{x}_2 + \frac{1}{M}\bar{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/k \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = \frac{1}{k}\bar{u}$$

- Esempio: motore elettrico a corrente continua
  - ⋆ $u_1(t) = \bar{v}$, $u_2(t) = \bar{C}_r$

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \frac{h\bar{v} + k\bar{C}_r}{k^2 + Rh} \\
\bar{x}_2 &= \frac{h\bar{v} - R\bar{C}_r}{k^2 + Rh}
\end{aligned}
$$

- $\det(A) = 0 \Rightarrow$ infiniti stati di equilibrio o nessuno (guadagno statico perde senso)

- Esempio

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

  - ⋆ $\bar{u}$: $\bar{u}_1 \neq -2\bar{u}_2 \Rightarrow$ non esistono stati di equilibrio ($\dot{x} \neq 0$)
  - ⋆ $\bar{u}_1 = -2\bar{u}_2 \Rightarrow$ infiniti stati e uscite di equilibrio

$$
\bar{x} = \begin{bmatrix} 2(\bar{u}_2 - \alpha) \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = 2(5\bar{u}_2 - 2\alpha)
$$

STABILITÀ

- Sistema lineare stazionario: facile determinazione delle proprietà di stabilità

Stabilità del sistema

- Stabilità di $\tilde{x}(t)$ prodotto da $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$ con $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$
  - ⋆ principio di sovrapposizione degli effetti: $u'(t) = u''(t) = \tilde{u}(t)$, $x'_0 = \tilde{x}_0$, $x''_0 = \tilde{x}_0 + \delta x_0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) \qquad \delta x(0) = \delta x_0$$

  - ⋆ $\tilde{x}$ stabile se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall \delta x_0$

$$\|\delta x_0\| \leq \delta$$

risulti

$$\|\delta x(t)\| \leq \epsilon \qquad t \geq 0$$

altrimenti instabile

- ⋆ asintoticamente stabile se

$$\lim_{t\to\infty} \|\delta x(t)\| = 0$$

$$\Downarrow$$

- ⋆ proprietà di stabilita del sistema (di tutti i movimenti o stati di equilibrio)

Stabilità e movimento libero

- Sistema stabile *iff* tutti i movimenti liberi dello stato sono limitati; asintoticamente stabile *iff* tutti i movimenti liberi dello stato tendono a zero per $t \to \infty$; instabile se almeno un movimento libero dello stato non è limitato

- Esempio: circuito elettrico

$$x_l(t) = e^{-t/RC} x(0)$$

$\star$ $\forall x(0)$, $x_l(t)$ limitato per $t \geq 0$; si annulla per $t \to \infty$

Stabilità e autovalori

- Sistema asintoticamente stabile *iff* tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa
  - ⋆ semipiano sinistro aperto del piano complesso: regione di asintotica stabilità

- Sistema instabile se almeno uno dei suoi autovalori ha parte reale positiva

- Autovalori a parte reale nulla: sistema stabile o instabile

- Esempio: circuito elettrico; $s = -1/RC < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

- Esempio: sistema massa-molla
  - ⋆ $h > 0$ (attrito presente) $\Rightarrow$ asintotica stabilità
  - ⋆ $h = 0 \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 & \Rightarrow \quad \text{stabilità} \\ k = 0 & \Rightarrow \quad \text{instabilità} \end{cases}$

Stabilità e polinomio caratteristico

- Calcolo degli autovalori: radici del polinomio caratteristico
  - ⋆ forma più generale del polinomio caratteristico

$$
\begin{aligned}
\varphi(s) &= \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n \\
&= \varphi_0 \prod_{i=1}^{n} (s - s_i) \qquad \varphi_0 \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1/\varphi_0 &= -\mathrm{tr}(A) = -\sum_{i=1}^{n} s_i \\
\varphi_n/\varphi_0 &= \det(-A) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} s_i
\end{aligned}
$$

- Asintotica stabilità

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} s_i < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) < 0 \\
(-1)^n \prod_{i=1}^{n} s_i > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \det(-A) > 0
\end{aligned}
$$

  - ⋆ condizioni necessarie

$$
\varphi_1/\varphi_0 > 0 \qquad \varphi_n/\varphi_0 > 0
$$

- ⋆ in generale: φ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ tutti dello stesso segno = condizione necessaria di asintotica stabilità (sufficiente per $n = 1$ e $n = 2$)

- Esempio
  - ⋆ $\varphi(s) = s^3 + 3s^2 - s - 3$: instabile $(-3, -1, +1)$
  - ⋆ $\varphi(s) = s^4 + 5s^2 + 4$: instabile $(\pm j, \pm 2j)$
  - ⋆ $\varphi(s) = s^3 + s^2 + s + 1$: condizione necessaria OK, ma instabile $(-1, \pm j)$

- Criterio di Routh
  - ⋆ tabella di Routh ($n+1$ righe)

$$
\begin{array}{cccccccc}
\varphi_0 & \varphi_2 & \varphi_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
h_1 & h_2 & h_3 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
l_1 & l_2 & l_3 & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & &
\end{array}
$$

$$
l_i = -\frac{1}{k_i}\det\left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}\right) = h_{i+1} - \frac{h_1 k_{i+1}}{k_1} \qquad k_1 \neq 0
$$

  - ⋆ asintotica stabilità *iff* tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno

- Esempio

$$\varphi(s) = s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120$$

  - $\star$ tabella di Routh

$$\begin{array}{ccc} 1 & 85 & 274 \\ 15 & 225 & 120 \\ 70 & 266 & \\ 168 & 120 & \\ 216 & & \\ 120 & & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

  - $\star$ asintotica stabilità

$$\varphi(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)$$

- Non è indispensabile la divisione per k_1
- È possibile determinare il numero di autovalori con parte reale positiva e nulla (sistemi non asintoticamente stabili)

- Regione di asintotica stabilità nell'insieme dei parametri
  - ⋆ analisi di stabilità di sistemi parzialmente incerti
  - ⋆ sintesi di controllori di struttura prefissata (parametri di progetto)

- Esempio

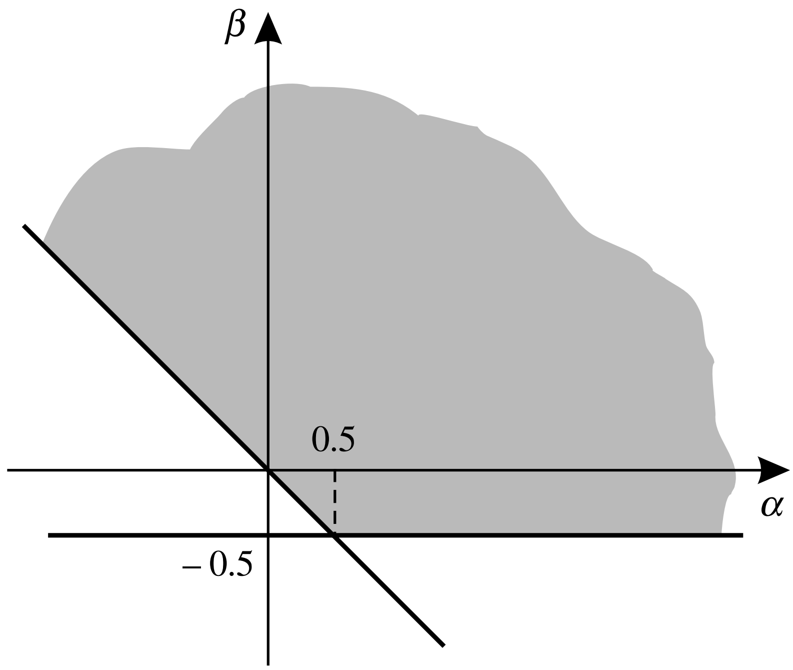
$$\varphi(s) = s^3 + (2+\beta)s^2 + (1+2\beta)s + \alpha + \beta$$

  - ⋆ tabella di Routh

$$\begin{array}{cc} 1 & 1+2\beta \\ 2+\beta & \alpha+\beta \\ \dfrac{2(\beta+1)^2-\alpha}{2+\beta} & \\ \alpha+\beta & \end{array}$$

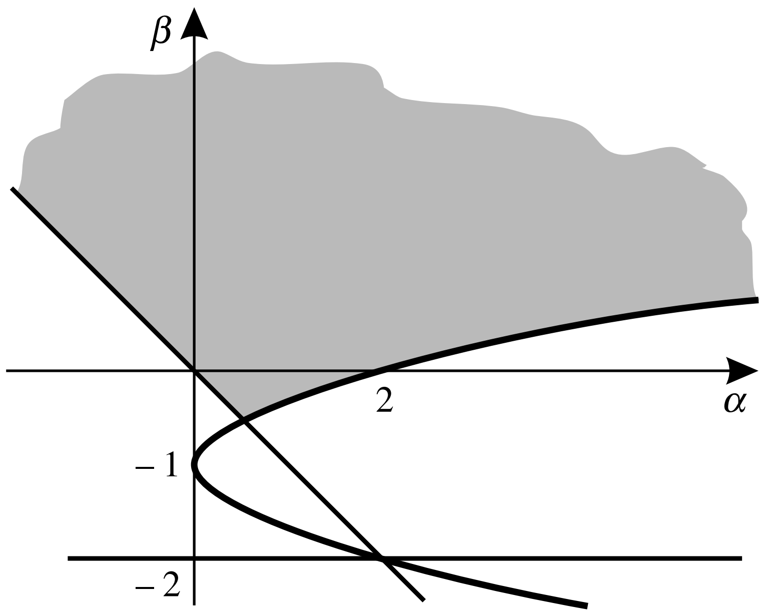
⋆ condizione necessaria

$$\beta > -2$$
$$\beta > -\frac{1}{2}$$
$$\beta > -\alpha$$



⋆ regione di asintotica stabilità nell'insieme dei parametri α, β:

$$\begin{aligned} \beta &> -2 \\ 2(\beta+1)^2 &> \alpha \\ \beta &> -\alpha \end{aligned}$$



Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili

- Sistemi asintoticamente stabili di maggiore interesse per le applicazioni
  - ⋆ movimento per $t \to \infty$ indipendente dallo stato inziale
  - ⋆ risposta all'impulso (stato/uscita) tende asintoticamente a zero
  - ⋆ risposta ad ingresso limitato tende a zero ($\tilde{t}$: istante in cui l'ingresso diventa definitivamente nullo)

$$x(t) = e^{A(t-\tilde{t})}\tilde{z} \qquad t > \tilde{t}$$
$$y(t) = Ce^{A(t-\tilde{t})}\tilde{z} \qquad t > \tilde{t}$$

  - ⋆ $u(t) = \bar{u}\mathrm{sca}(t) \Rightarrow$ movimento tende allo stato (uscita) di equilibrio
  - ⋆ stabilità interna ⇒ stabilità esterna (BIBO) (in generale non vale il viceversa)