

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Definizione e proprietà

Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento

Risposta allo scalino

DEFINIZIONE E PROPRIETÀ

Definizione e interpretazioni

- Sistema lineare e stazionario ($u \in R^m, x \in R^n, y \in R^p$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Trasformazione di Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$\Downarrow$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

★ rappresentazione ingresso–uscita (esterna)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

antitrasformata $\Rightarrow$ movimento forzato y_f

- Funzione di trasferimento e risposta all'impulso

★ $u(t) = \text{imp}(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$y(t) = \int_0^t g_y(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = G(s)$$

funzione di trasferimento = trasformata di Laplace della risposta all'impulso

Struttura della funzione di trasferimento

- Elementi di $(sI - A)^{-1}$: funzioni razionali in s
 - ★ denominatore di grado n di $\varphi(s)$
 - ★ numeratore dell'elemento (j, i) : polinomio di grado al più $n - 1$
 - ★ combinazione lineare attraverso C e B ; *if $D \neq 0$ then* numeratore di grado n
 - ★ eventuali cancellazioni $\Rightarrow$ funzione razionale con denominatore di grado $\nu < n$
- Sistemi SISO ($\alpha_\nu = 1$)

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- ★ grado relativo = grado(den) - grado(num)
- ★ *iff* grado(num) > grado(den) *then* sistema improprio
- Poli e zeri (reali o complessi coniugati a coppie)
 - ★ $\hat{s}$ zero: $N_G(\hat{s}) = 0$
 - ★ $\hat{s}$ polo: $D_G(\hat{s}) = 0$ ($\Rightarrow$ autovalore di A)
 - ★ sistemi MIMO: $\hat{s}$ polo se annulla il denominatore di almeno una delle funzioni razionali

Invarianza della funzione di trasferimento

- Trasformazione di stato

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} \quad \hat{B} = TB \quad \hat{C} = CT^{-1} \quad \hat{D} = D$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\ &= C(sT^{-1}IT - T^{-1}TAT^{-1}T)^{-1}B + D = C(sI - A)^{-1}B \\ &= G(s)\end{aligned}$$

RAPPRESENTAZIONI E PARAMETRI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s / \alpha_{ni} + s^2 / \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s / \omega_{ni} + s^2 / \omega_{ni}^2)}$$

- ★ ρ : costante di trasferimento
- ★ g : tipo
- ★ $-z_i \neq 0$: zeri reali
- ★ $-p_i \neq 0$: poli reali
- ★ $\alpha_{ni} > 0$: pulsazioni naturali delle coppie di zeri complessi coniugati
- ★ $\omega_{ni} > 0$: pulsazioni naturali delle coppie di poli complessi coniugati
- ★ ζ_i ($|\zeta_i| < 1$) smorzamenti delle coppie di zeri complessi coniugati
- ★ ξ_i ($|\xi_i| < 1$) smorzamenti delle coppie di poli complessi coniugati
- ★ μ : guadagno
- ★ $\tau_i \neq 0$: costanti di tempo degli zeri reali
- ★ $T_i \neq 0$: costanti di tempo dei poli reali

$$\mu = \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2} \quad \rho = \frac{\mu \prod_i \tau_i \prod_i \omega_{ni}^2}{\prod_i T_i \prod_i \alpha_{ni}^2}$$
$$\tau_i = \frac{1}{z_i} \quad T_i = \frac{1}{p_i}$$

Guadagno

- Sistema asintoticamente stabile: $G(s)$ ($g = 0$, $T_i > 0$, $\xi_i > 0$)
 - ★ ingresso costante $\bar{u} \Rightarrow U(s) = \bar{u}/s$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{\bar{u}}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(C(sI - A)^{-1}B + D \right) \frac{\bar{u}}{s} \\ &= G(0)\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}\end{aligned}$$

★ $\mu = G(0) = \bar{y}/\bar{u}$ (guadagno statico)

- Guadagno generalizzato

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

Derivatore ideale

- $g < 0$ (asintotica stabilità) $\Rightarrow \bar{y} = 0$
 - ★ $G(s) = s$: derivatore ideale

Integratore

- $G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow A = 0, CB = 1$

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

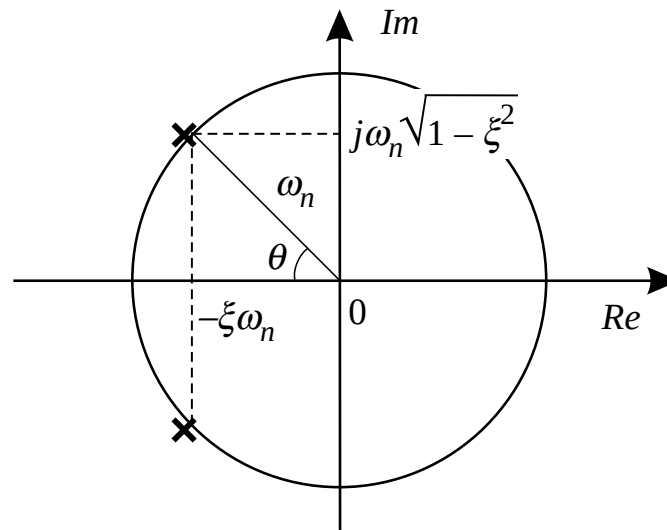
Costanti di tempo

- Poli reali $-p_i = -1/T_i$, ingresso impulsivo $\Rightarrow$ uscita = combinazione lineare dei modi $t^j e^{-t/T_i}$, $j = 0, 1, \dots, \nu_i - 1$ (ν_i : molteplicità)
 - ★ i modi si estinguono tanto più velocemente quanto più i poli sono lontani dall'origine del piano complesso (costanti di tempo piccole)

Pulsazione naturale e smorzamento

- Coppia di poli complessi coniugati

$$a = -\xi\omega_n \quad b = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



★ ω_n : modulo dei poli

$$\star \xi = \cos(\theta): \begin{cases} \xi = 1 & \text{reali e coincidenti nel punto } -\omega_n \\ 0 < \xi < 1 & \text{a parte reale negativa} \\ \xi = 0 & \text{a parte reale nulla} \\ -1 < \xi < 0 & \text{a parte reale positiva} \\ \xi = -1 & \text{reali e coincidenti nel punto } \omega_n \end{cases}$$

- ★ sistema con solo una coppia di poli complessi coniugati ($\mu = 1$): risposta all'impulso

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \left(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

modo si estingue tanto più velocemente quanto più è elevato il valore di $\xi \omega_n > 0$

RISPOSTA ALLO SCALINO

- Sistemi dinamici sollecitati con segnali costanti per lunghi periodi di tempo
 - ★ scalino unitario (attenzione linearizzazione)
- Sistemi del primo e del secondo ordine
 - ★ funzione di trasferimento di un sistema di ordine qualunque = somma di funzioni di trasferimento di sistemi del primo o del secondo ordine
 - ★ risposta = buona approssimazione di quella di sistemi di ordine più elevato

Valore iniziale e finale

- Sistema asintoticamente stabile ($m \leq n$)

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

★ valore iniziale della risposta allo scalino

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} \frac{1}{s} \\ &= \begin{cases} 0 & m < n \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & m = n \end{cases} \end{aligned}$$

★ $m < n$, $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s (sY(s) - y(0)) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} \frac{1}{s} \\ &= \begin{cases} 0 & m < n - 1 \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & m = n - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Risposta ad altri segnali canonici

- Ingresso $u(t)$: segnale canonico

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}[u(t)]$$

- Trasformata di Laplace dell'integrale

$$G(s)\mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau)d\tau\right] = G(s)\frac{U(s)}{s} = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{s} = \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)d\tau\right]$$

★ risposta alla rampa = integrazione della risposta allo scalino

★ risposta alla parabola = doppia integrazione della risposta allo scalino

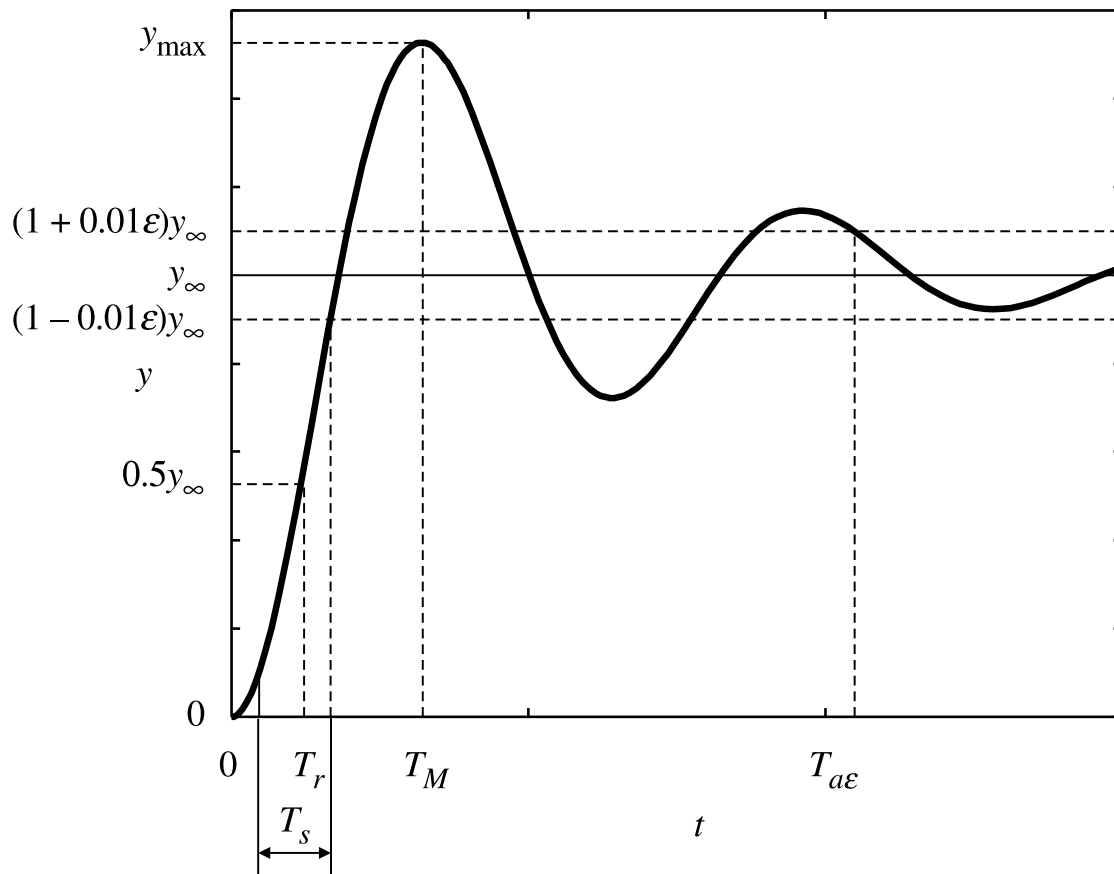
- Trasformata di Laplace della derivata ($u(0^-) = 0, y(0^-) = 0$)

$$\begin{aligned} G(s)\mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right] &= G(s)(sU(s) - u(0^-)) \\ &= s\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + y(0^-) = \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] \end{aligned}$$

★ risposta all'impulso = derivazione della risposta allo scalino

Caratteristiche della risposta allo scalino

- Parametri di sistema asintoticamente stabile ($\mu > 0$)



★ valore di regime y_{∞} : valore dell'uscita a transitorio esaurito

$$y_{\infty} = \begin{cases} \mu \\ 0 \end{cases} \quad g < 0$$

★ valore massimo $y_{\max}$: massimo valore assunto dall'uscita

- ★ sovraelongazione massima percentuale $S\%$: ampiezza, in percentuale, della sovraelongazione massima rispetto al valore di regime

$$S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

- ★ tempo di massima sovraelongazione T_M : primo istante in cui $y = y_{\max}$
- ★ tempo di salita T_s : tempo richiesto perché l'uscita passi per la prima volta dal 10% al 90% del suo valore di regime
- ★ tempo di ritardo T_r : tempo necessario perché l'uscita raggiunga la prima volta il valore $0.5y_{\infty}$
- ★ tempo di assestamento $T_{a\epsilon}$: tempo necessario perché la differenza tra l'uscita e il valore di regime y_{∞} rimanga definitivamente al di sotto di $\epsilon\%$, cioè l'uscita sia nell'intervallo $[(1 - 0.01\epsilon)y_{\infty}, (1 + 0.01\epsilon)y_{\infty}]$

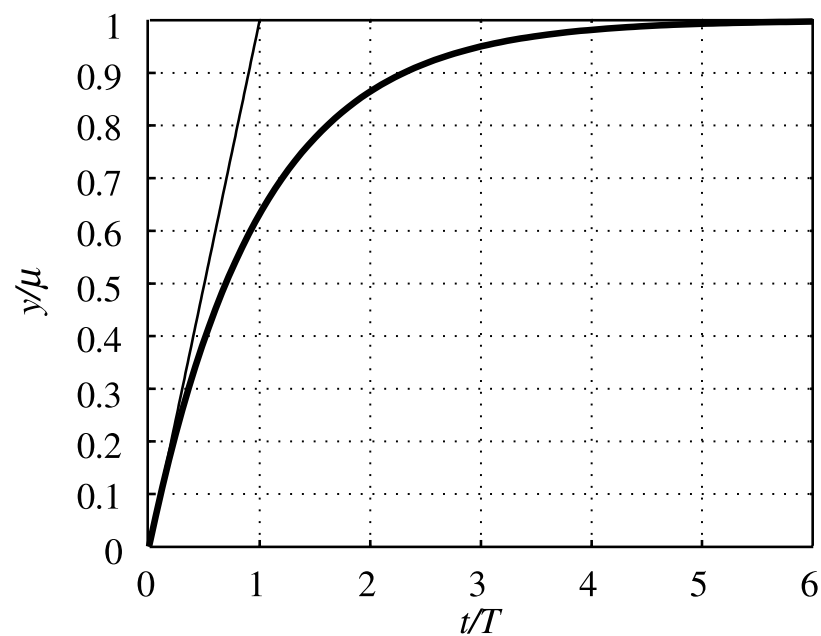
Sistemi del primo ordine

- Sistema strettamente proprio ($T > 0$)

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

★ uscita

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-t/T} \right) \quad t \geq 0$$



★ parametri caratteristici

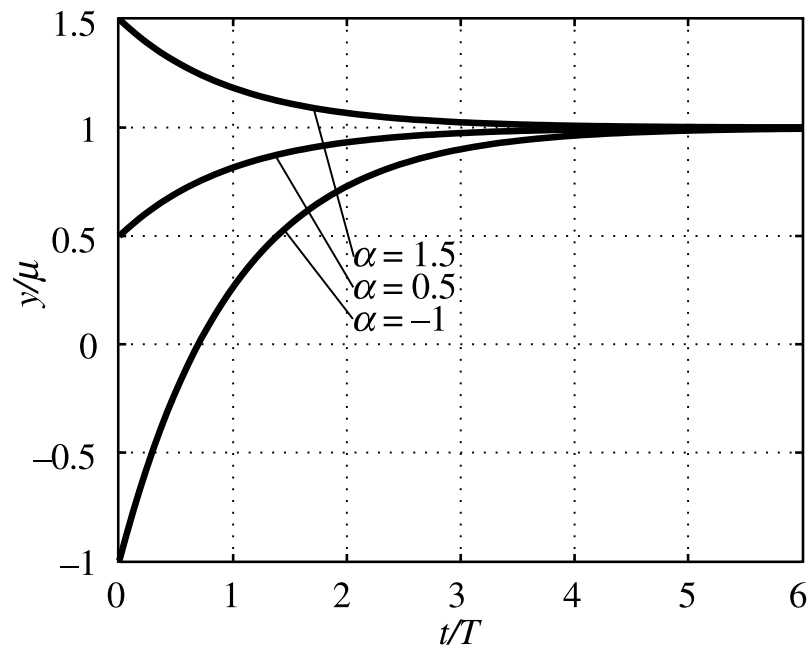
y_{∞}	T_s	T_r	T_{a5}	T_{a1}
μ	$\simeq 2.2T$	$\simeq 0.7T$	$\simeq 3T$	$\simeq 4.6T$

- Sistema proprio ($T > 0$)

$$G(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{1 + Ts}$$

★ uscita

$$y(t) = \mu \left(1 + (\alpha - 1)e^{-t/T} \right) \quad t \geq 0$$



★ tempo di assestamento

$$T_{a\epsilon} = T \ln \frac{|1 - \alpha|}{0.01\epsilon}$$

Sistemi del secondo ordine

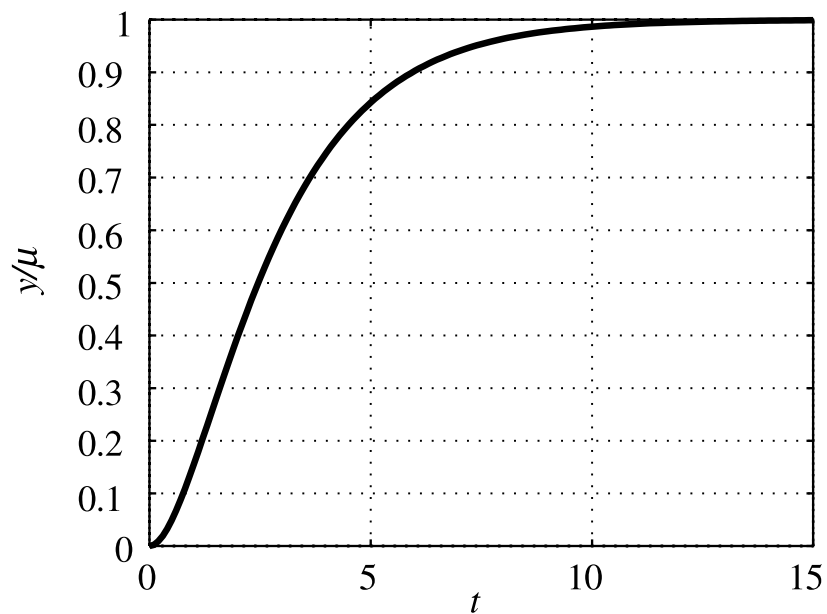
- Sistema con solo poli reali (poli distinti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad T_1 > T_2 > 0$$

★ risposta

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \quad t \geq 0$$

★ risposta per $T_1 = 2, T_2 = 1$



★ parametri caratteristici

y_∞	T_s	T_r	T_{a5}	T_{a1}
μ	$\simeq 3.36T$	$\simeq 1.68T$	$\simeq 4.74T$	$\simeq 6.64T$

★ $T_1 \gg T_2$ ($t \simeq 4 \div 5T_2$)

$$y(t) \simeq \mu(1 - e^{-t/T_1})$$

- Sistema con solo poli reali (poli coincidenti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} \quad T > 0$$

★ risposta

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T} \right) \quad t \geq 0$$

qualitativamente non diverso dal precedente (valori espliciti dei parametri)

- Sistema con poli reali e uno zero

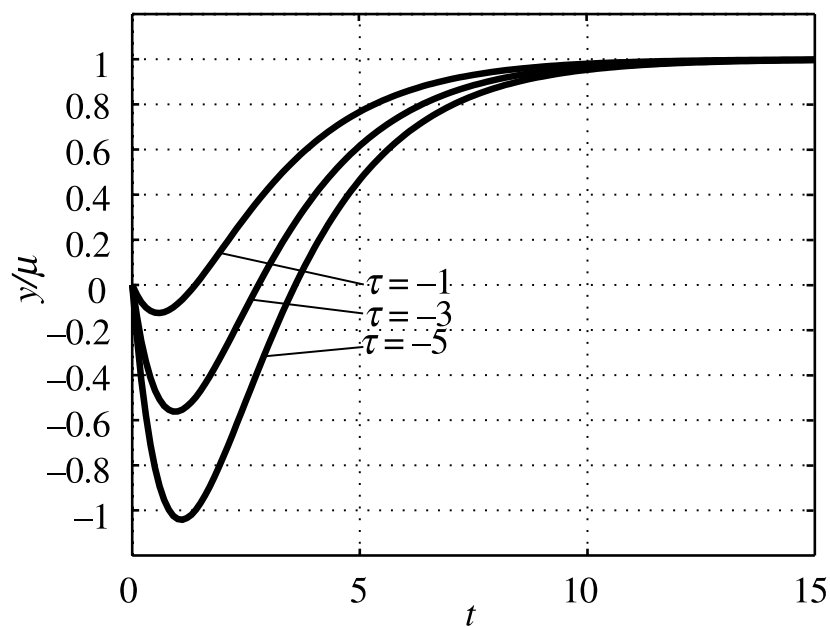
$$G(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad T_1 \neq \tau, T_2 \neq \tau$$

★ risposta

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \quad t \geq 0$$

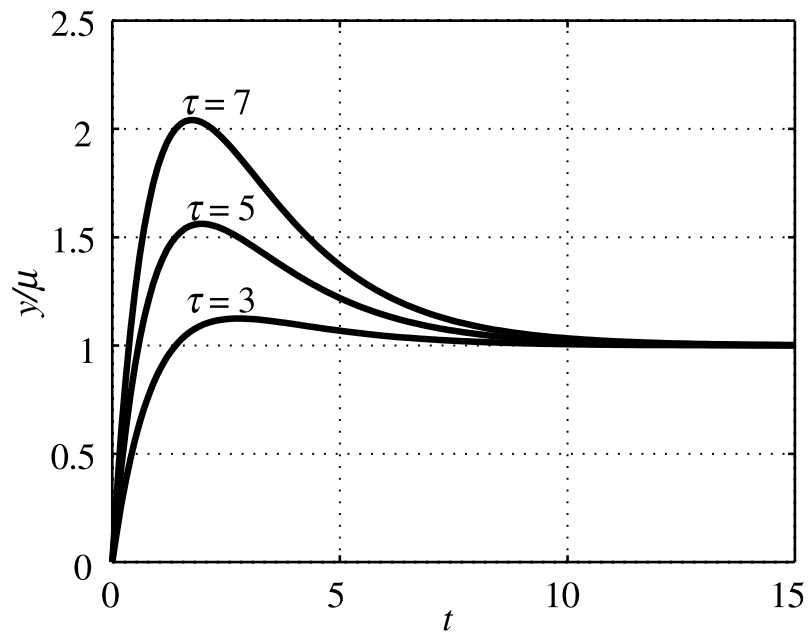
★ $\tau < 0$ (sottoelongazione o risposta inversa)

★ risposta per $T_1 = 2, T_2 = 1$



★ $\tau \gg T_1 > T_2$

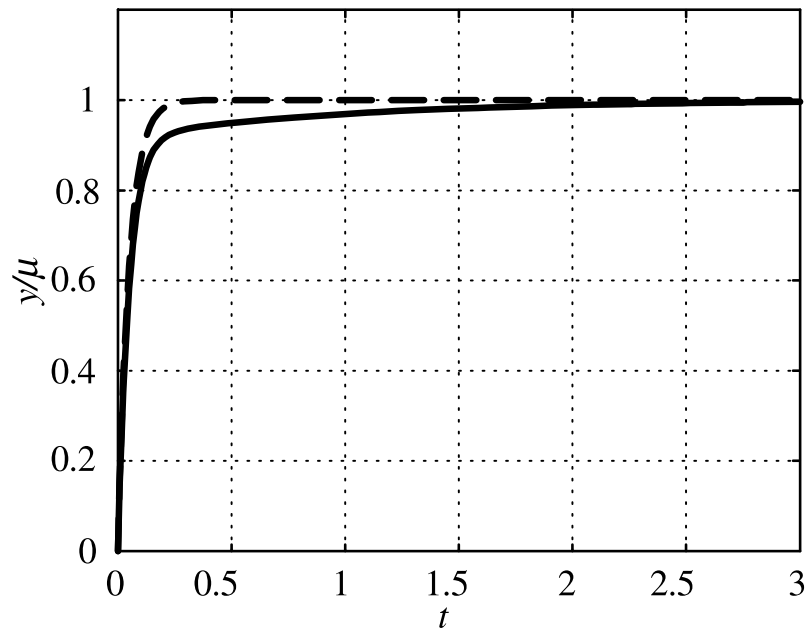
★ risposta per $T_1 = 2, T_2 = 1$



$$\star \tau \simeq T_1 \gg T_2$$

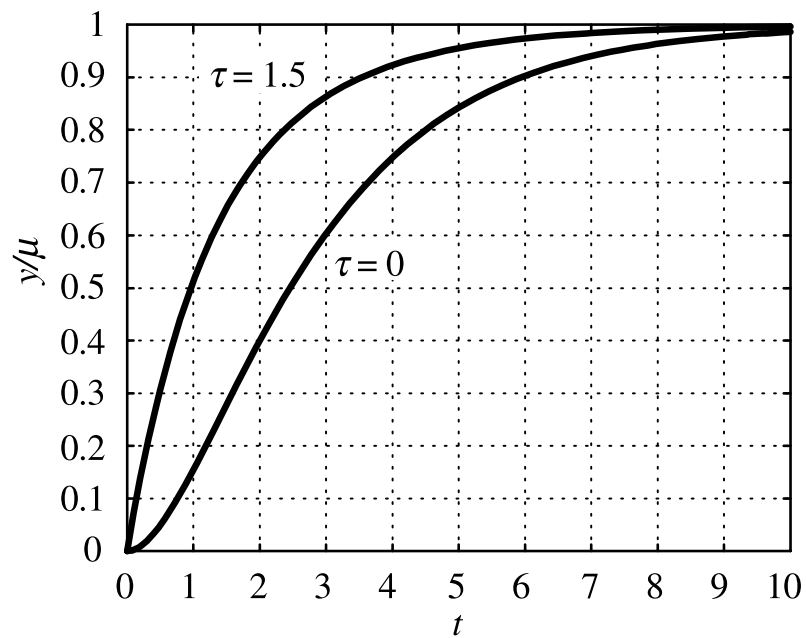
$$y(t) \simeq \mu \left(1 - e^{-t/T_2} \right) \quad t \geq 0$$

★ risposte per $T_1 = 1$, $T_2 = 0.05$, $\tau = 0.92$ (linea continua: sistema esatto; linea tratteggiata: sistema approssimato)



$$\star T_1 > \tau > T_2$$

$\star$ risposta per $T_1 = 2, T_2 = 1$

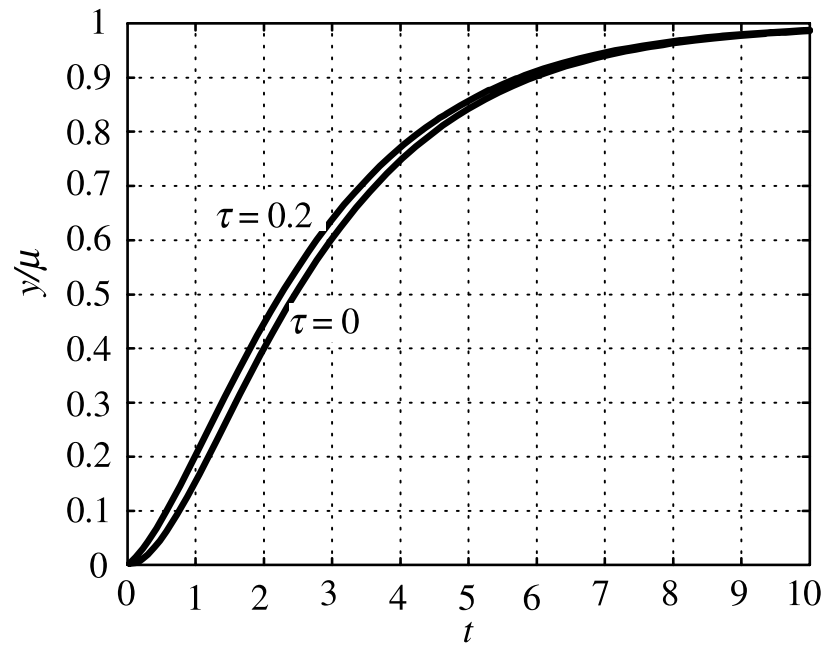


$$\star \tau \simeq T_2$$

$$y(t) \simeq \mu \left(1 - e^{-t/T_1} \right) \quad t \geq 0$$

★ $T_1 > T_2 > \tau > 0$

★ risposta per $T_1 = 2, T_2 = 1$

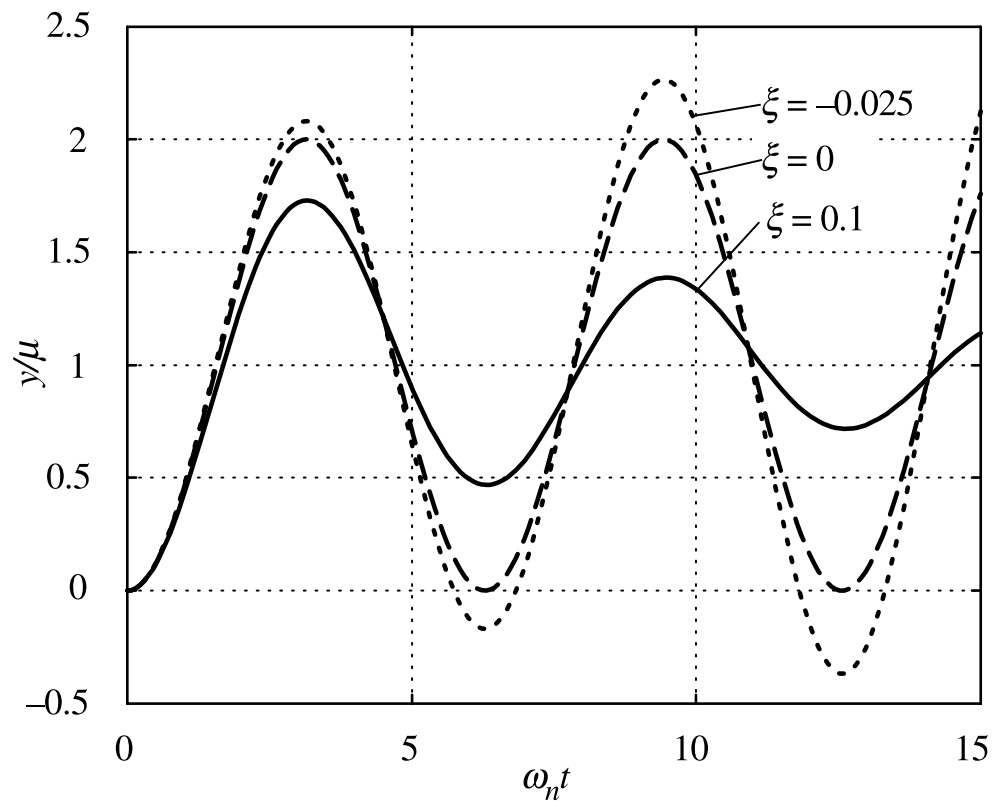


- Sistema con solo poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n > 0, |\xi| < 1$$

★ risposta

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \arccos(\xi) \right) \right)$$



★ istanti di stazionarietà ($0 < \xi < 1$)

$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad k \in N_+$$

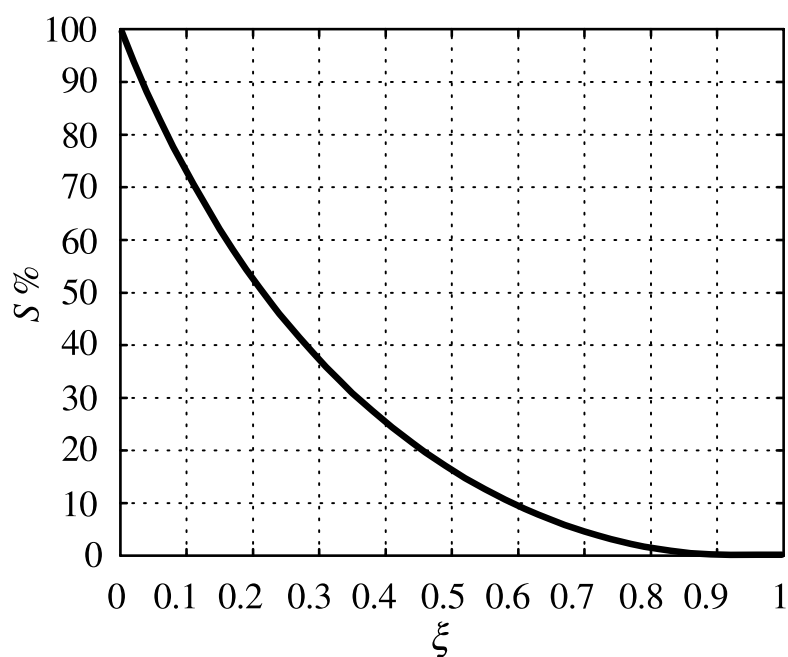
$$y(\bar{t}_k) = \mu \left(1 - (-1)^k e^{-\xi k \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$\Downarrow$

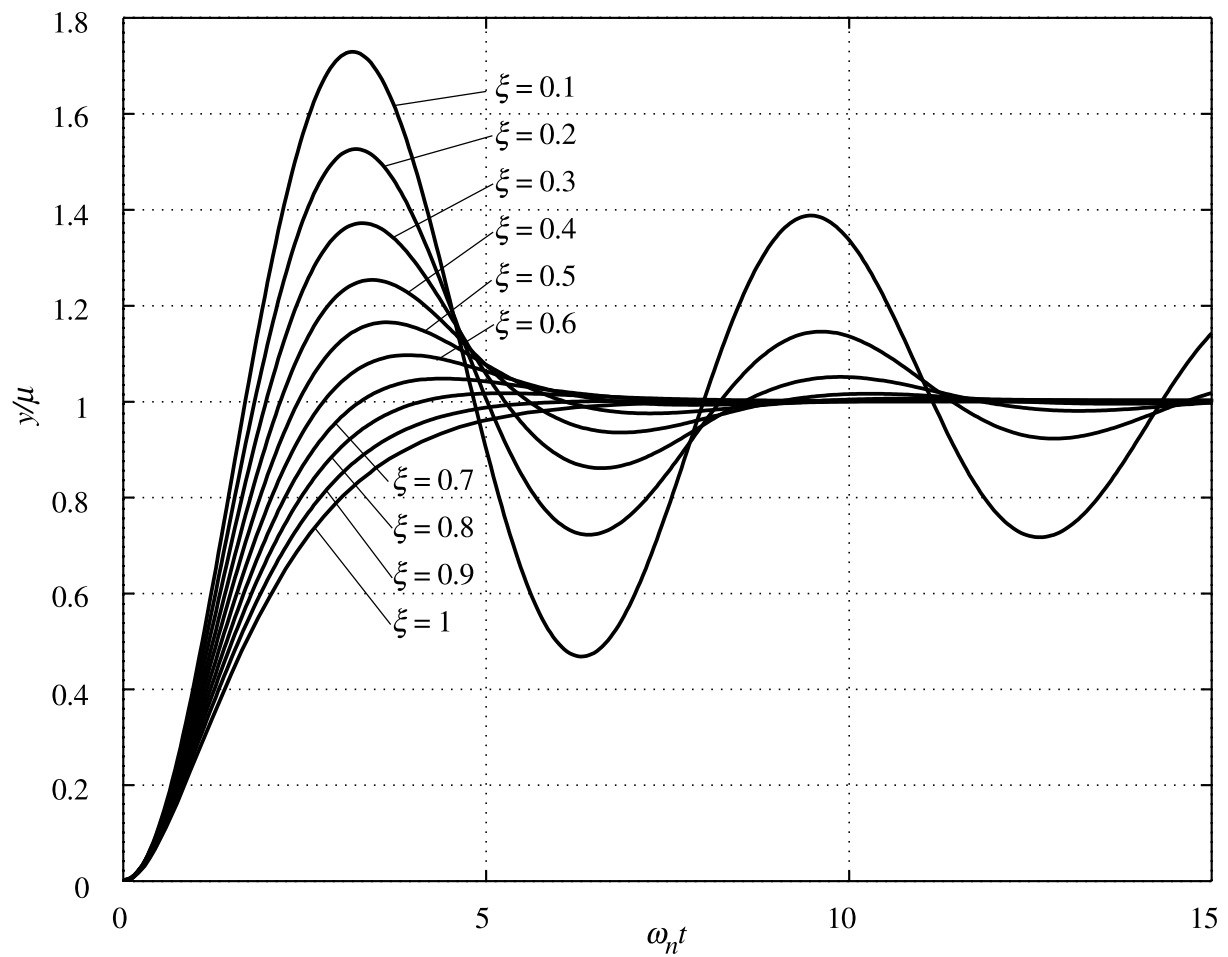
$$y_{\max} = \mu \left(1 + e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$S\% = 100 e^{-\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}}$$



★ risposta



★ parametri caratteristici

y_∞	$S\%$	T_M	stima di $T_{a\epsilon}$
μ	$100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$	$-\frac{1}{\xi\omega_n} \ln 0.01\epsilon$

- Sistema con poli complessi coniugati e uno zero

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2(1 + \tau s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \tilde{G}(s) + \tau s \tilde{G}(s)$$

⇓

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{G}(s)}{s} \right] + \tau \mathcal{L}^{-1} \left[s \frac{\tilde{G}(s)}{s} \right] = \tilde{y}(t) + \tau \frac{d\tilde{y}(t)}{dt}$$

