

RISPOSTA IN FREQUENZA

Risposta esponenziale

Risposta sinusoidale

Risposta a segnali dotati di serie o trasformata di Fourier

Identificazione della risposta in frequenza

Diagrammi di Bode

Diagrammi polari

Azione filtrante dei sistemi dinamici

RISPOSTA ESPONENZIALE

Esistenza di un'uscita esponenziale

- Sistema SISO di ordine n

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- ★ funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Ingresso esponenziale

$$u(t) = \hat{u}(t) = e^{\lambda t} \quad t \geq 0$$

★ movimento forzato dell'uscita: combinazione lineare dei modi propri e di un contributo esponenziale associato alla trasformata dell'ingresso $1/(s - \lambda)$

★ movimento libero dell'uscita: un particolare $x(0)$ potrebbe annullare completamente i contributi dovuti ai modi ($x(t) = x(0)e^{\lambda t}$)

$$\lambda x(0)e^{\lambda t} = Ax(0)e^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$$

$\Downarrow$

$$\hat{x}(0) = (\lambda I - A)^{-1}B$$

$$x(t) = \hat{x}(t) = (\lambda I - A)^{-1}Be^{\lambda t} \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \hat{y}(t) = [C(\lambda I - A)^{-1}B + D] e^{\lambda t} = G(\lambda)e^{\lambda t} \quad t \geq 0$$

★ sistema asintoticamente stabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0$$

RISPOSTA SINUSOIDALE

Esistenza di un'uscita sinusoidale

- Ingresso sinusoidale

$$u(t) = \tilde{u}(t) = \sin(\omega t) = \text{Im}(e^{j\omega t}) \quad t \geq 0$$

$$\star \hat{u}(t) = e^{j\omega t} \quad (A \text{ non ha autovalori in } \pm j\omega)$$

$$\hat{x}(0) = (j\omega I - A)^{-1} B$$

$$\hat{x}(t) = (j\omega I - A)^{-1} B e^{j\omega t} \quad t \geq 0$$

$$\hat{y}(t) = G(j\omega) e^{j\omega t} \quad t \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\tilde{x}(t) = \text{Im}(\hat{x}(t)) \quad t \geq 0$$

$$\tilde{y}(t) = \text{Im}(\hat{y}(t)) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)) \quad t \geq 0$$

- Risposta sinusoidale ($G(s)$ non ha autovalori in $\pm j\omega_0$)
 - ★ ingresso

$$\tilde{u}(t) = U \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad t \geq 0$$

- ★ $\exists \hat{x}(0)$: uscita

$$\tilde{y}(t) = Y \sin(\omega_0 t + \psi) \quad t \geq 0$$

$$Y = |G(j\omega_0)|U \quad \psi = \varphi + \arg G(j\omega_0)$$

- ★ sistema asintoticamente stabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \tilde{y}(t)) = 0$$

$\Downarrow$

- ★ conoscenza di modulo e fase di $G(j\omega)$ al variare di $\omega \Rightarrow$ determinazione del comportamento (asintotico) del sistema nei riguardi di ingressi sinusoidali di diversa pulsazione

- Esempio: circuito elettrico

★ movimenti ($t_0 = 0$, $u(t) = U \sin(\omega_0 t)$, $t \geq 0$, $x(0) = x_0$)

$$x(t) = e^{-t/RC} x_0 + \frac{U \omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 R^2 C^2} e^{-t/RC} + \frac{U}{\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan(\omega_0 RC))$$

$$y(t) = -e^{-t/RC} x_0 - \frac{U \omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 R^2 C^2} e^{-t/RC} + \frac{U \omega_0 RC}{\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \cos(\omega_0 t - \arctan(\omega_0 RC))$$

★ $x(2\pi/\omega_0) = x_0$

$$x_0 = e^{-2\pi/\omega_0 RC} x_0 + \frac{U \omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 R^2 C^2} e^{-2\pi/\omega_0 RC} - \frac{U \omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}$$

$\Downarrow$

$$x_0 = -\frac{U \omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{U \omega_0 RC}{\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \cos(\omega_0 t - \arctan(\omega_0 RC))$$

★ in maniera alternativa

$$G(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

$\Downarrow$

$$|G(j\omega_0)| = \frac{\omega_0 RC}{\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \quad \arg G(j\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_0 RC)$$

- ★ attenuazione di sinusoidi a bassa pulsazione (bloccaggio a $\omega = 0$)
- ★ passaggio praticamente inalterato di sinusoidi a pulsazione elevata ($|G(j\omega)| \rightarrow 1, \arg G(j\omega) \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \infty$)

Risposta in frequenza: definizione e proprietà

- Risposta in frequenza ($\omega \geq 0$)

$$G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

- ★ restrizione di $G(s)$ ai punti del semiasse immaginario positivo (escluso eventuali poli di $G(s)$ sull'asse immaginario)

$$G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$$

- ★ ritardo di tempo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad \omega \geq 0$$

$$\tilde{u}(t) = U \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad t \geq 0$$

$$y(t) = U \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi) \quad t \geq \tau$$

RISPOSTA A SEGNALI DOTATI DI SERIE O TRASFORMATA DI FOURIER

- Effetto della singola armonica (principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi lineari e stazionari)

Segnali sviluppabili in serie di Fourier

- Ingresso periodico $\tilde{u}(t + T) = \tilde{u}(t), \forall t, T > 0$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

★ U_n : contributo dell'armonica

- $\exists x_0$: uscita periodica ($G(s)$ senza poli in $\pm jn\omega_0$)

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t} \quad t \geq t_0$$

$$Y_n = G(jn\omega_0)U_n$$

- ★ sistema asintoticamente stabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \tilde{y}(t)) = 0$$

particolarmente utile se $t_0 \rightarrow -\infty$

- ★ la n -esima armonica all'ingresso subisce un'amplificazione pari a $|G(jn\omega_0)|$ e uno sfasamento angolare pari ad $\arg G(jn\omega_0)$

- Esempio: circuito elettrico

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < -T/4 \\ V & -T/4 \leq t < T/4 \\ 0 & T/4 \leq t < T/2 \end{cases}$$

★ armoniche

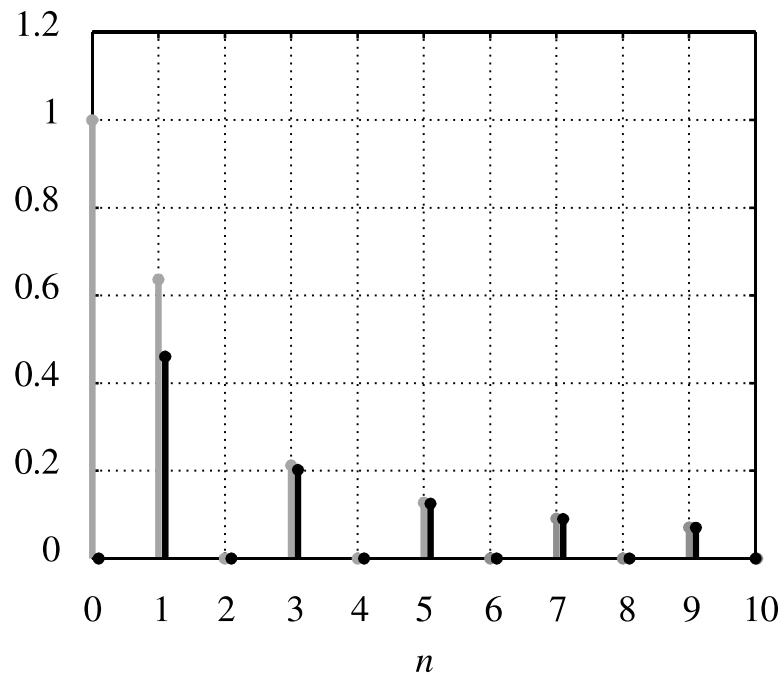
$$U_0 = \frac{V}{2} \quad U_n = \frac{V}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \quad n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

★ spettro dell'uscita (periodica: $\omega_0 = 2\pi/T$)

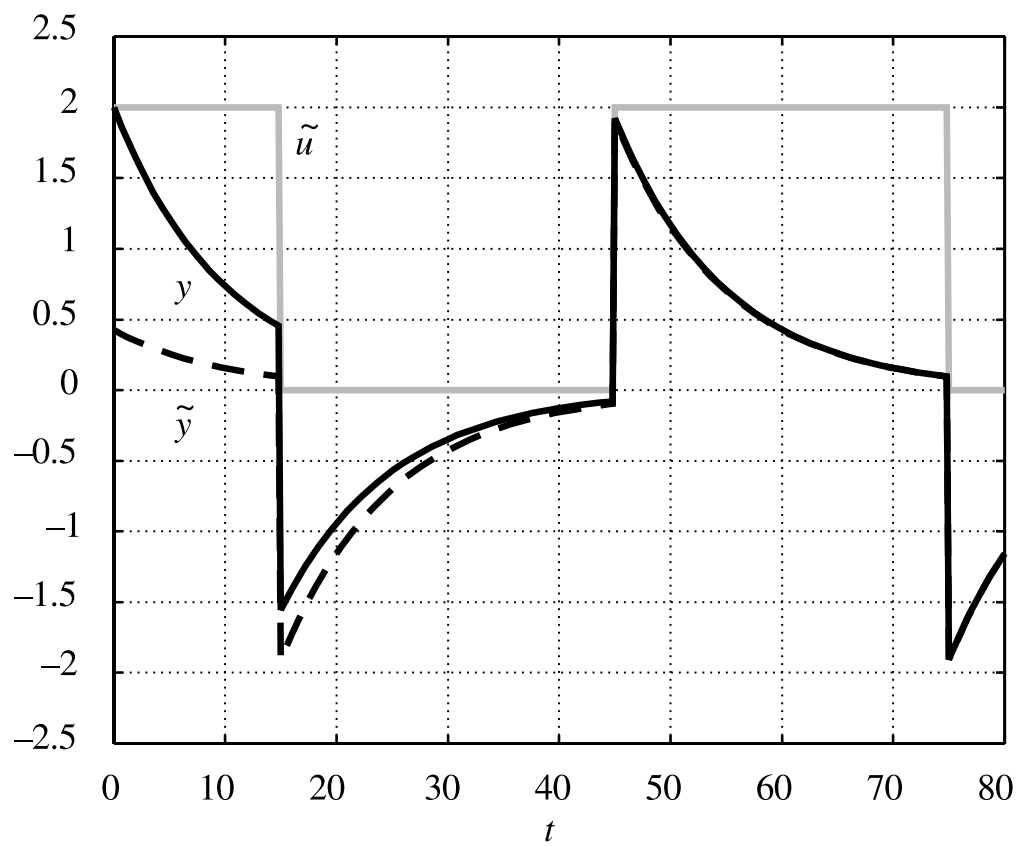
$$Y_0 = 0$$

$$Y_n = \frac{jn\omega_0 RC}{1 + jn\omega_0 RC} \frac{V}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \quad n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

★ spettro dell'ingresso (in grigio) e dell'uscita (in nero) per
 $RC = 10, V = 2, T = 60$



★ andamento dell'ingresso e dell'uscita



Segnali dotati di trasformata di Fourier

- Ingresso $\tilde{u}$ dotato di trasformata $U(j\omega) = \mathcal{F}[\tilde{u}(t)]$

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- ★ infinità non numerabile di armoniche, ognuna moltiplicata per il coefficiente $U(j\omega) \Rightarrow$ proprietà di linearità

$\Downarrow$

- $\exists x_0$: uscita periodica ($G(s)$ senza poli in $\pm j\omega_0$)

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad t \geq t_0$$

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

- ★ sistema asintoticamente stabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \tilde{y}(t)) = 0$$

particolarmente utile se $t_0 \rightarrow -\infty$ (trasformata di Fourier della componente forzata dell'uscita)

- Esempio: sistema massa-molla

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

- ★ ingresso ($x_0 = 0$)

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$U(j\omega) = e^{-j\omega T/2} T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

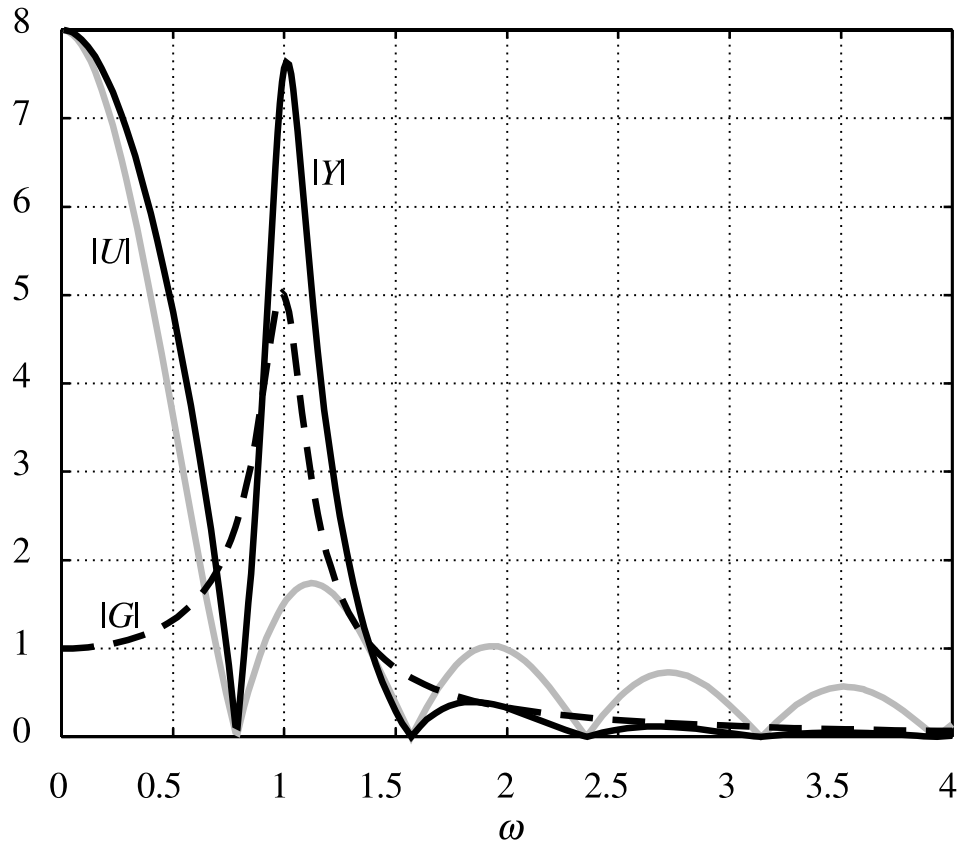
$$|U(j\omega)| = T \frac{|\sin(\omega T/2)|}{\omega T/2}$$

- ★ spettro dell'uscita

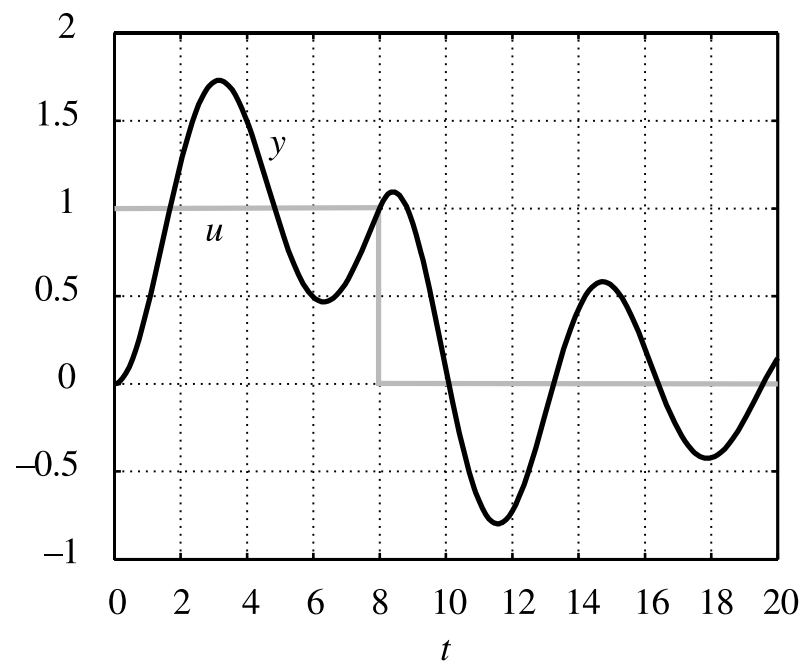
$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) = \frac{1}{k - M\omega^2 + jh\omega} e^{-j\omega T/2} T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + h^2\omega^2}} T \frac{|\sin(\omega T/2)|}{\omega T/2}$$

- ★ spettro dell'ingresso (in grigio) e dell'uscita (in nero) per $k = 1$, $M = 1$, $h = 0.2$, $T = 8$: fenomeno di risonanza



★ andamento dell'ingresso e dell'uscita



IDENTIFICAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

- Determinazione a partire dalla rilevazione di misure sperimentali
 - ★ sistemi SISO lineari, stazionari e asintoticamente stabili
- Esperimento
 - ★ ingresso $u(t) = U \sin(\omega_0 t + \varphi)$
 - ★ attesa tempo sino a regime
 - ★ misura fase e ampiezza sinusoide in uscita

↓

 - ★ modulo = rapporto tra ampiezze, fase = differenza tra fasi
 - ★ ... ingressi a diverse pulsazioni $\Rightarrow$ tecniche di interpolazione
- Segnali di ingresso “ricchi” di armoniche $\Rightarrow$ uso di filtri sulle armoniche di uscita

DIAGRAMMI DI BODE

- Strumento efficace per la rappresentazione grafica della risposta in frequenza (sistemi SISO)
 - ★ diagramma del modulo
 - ★ diagramma della fase
 - ★ uso di scala logaritmica in base dieci per l'ascissa (ω) $\Rightarrow$ decade = intervallo tra due pulsazioni tra loro in rapporto pari a dieci
- Forma fattorizzata della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s / \alpha_{ni} + s^2 / \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s / \omega_{ni} + s^2 / \omega_{ni}^2)}$$

- ★ risposta in frequenza

$$G(j\omega) = \frac{\mu \prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i\omega / \alpha_{ni} - \omega^2 / \alpha_{ni}^2)}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i\omega / \omega_{ni} - \omega^2 / \omega_{ni}^2)}$$

Diagramma del modulo

- Ordinata: valore del modulo espresso in decibel, in scala lineare

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20\log|G(j\omega)| \\
 &= 20\log|\mu| - 20g\log|j\omega| + \sum_i 20\log|1 + j\omega\tau_i| \\
 &\quad + \sum_i 20\log\left|1 + 2j\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2\right| \\
 &\quad - \sum_i 20\log|1 + j\omega T_1| \\
 &\quad - \sum_i 20\log\left|1 + 2j\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2\right|
 \end{aligned}$$

- ★ somma dei vari termini (contributi dei fattori corrispondenti agli zeri = contributi dei poli cambiati di segno)

- Termini fondamentali

$$G_a(s) = \mu$$

$$G_b(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_c(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2}$$

- ★ diagrammi asintotici (andamento qualitativo)

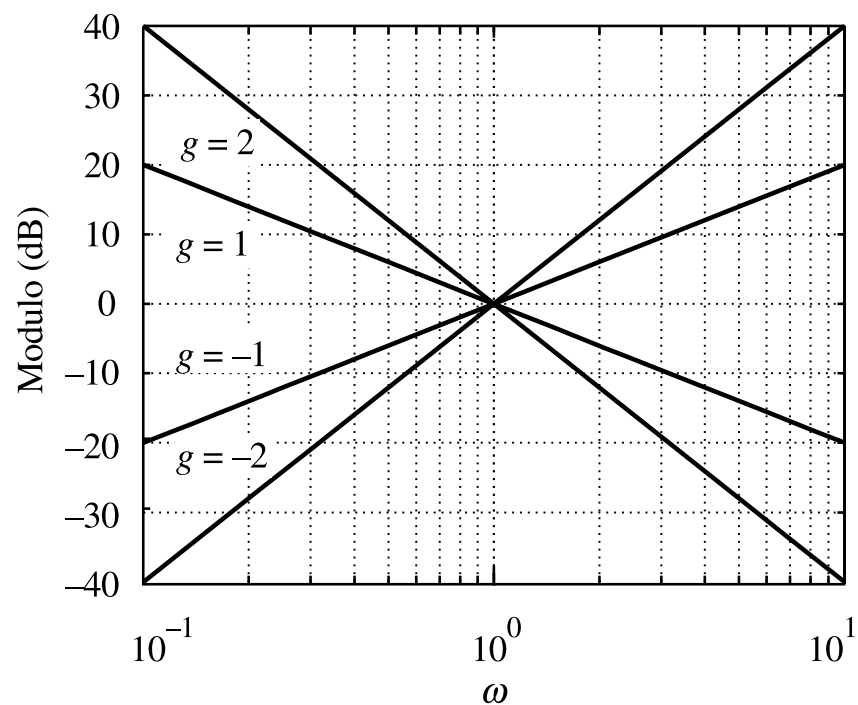
- Diagramma del modulo di $G_a(j\omega)$

$$|G_a(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log|\mu|$$

★ retta parallela all'asse delle ω , con ordinata positiva ($|\mu| > 1$), negativa ($|\mu| < 1$) o nulla ($|\mu| = 1$)

- Diagramma del modulo di $G_b(j\omega)$

$$|G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$$

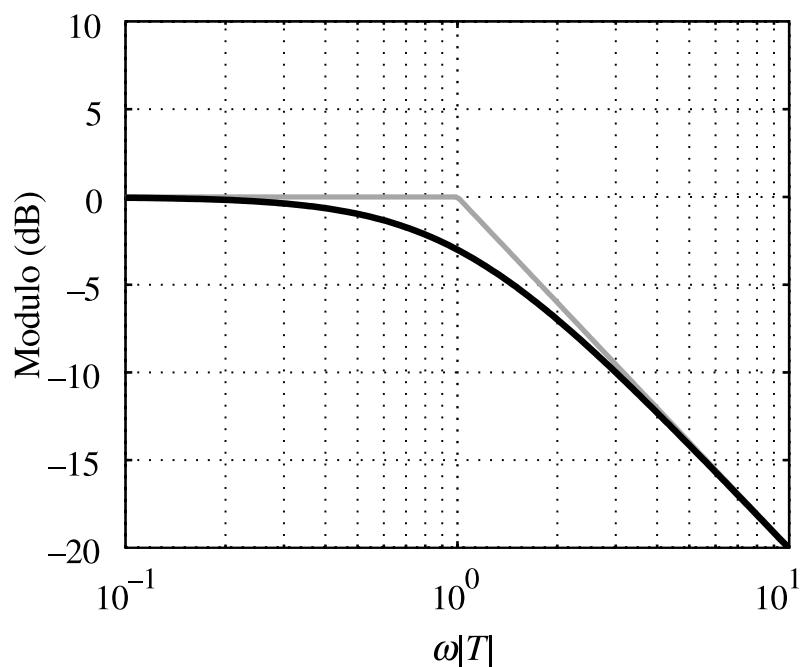


- Diagramma del modulo di $G_c(j\omega)$

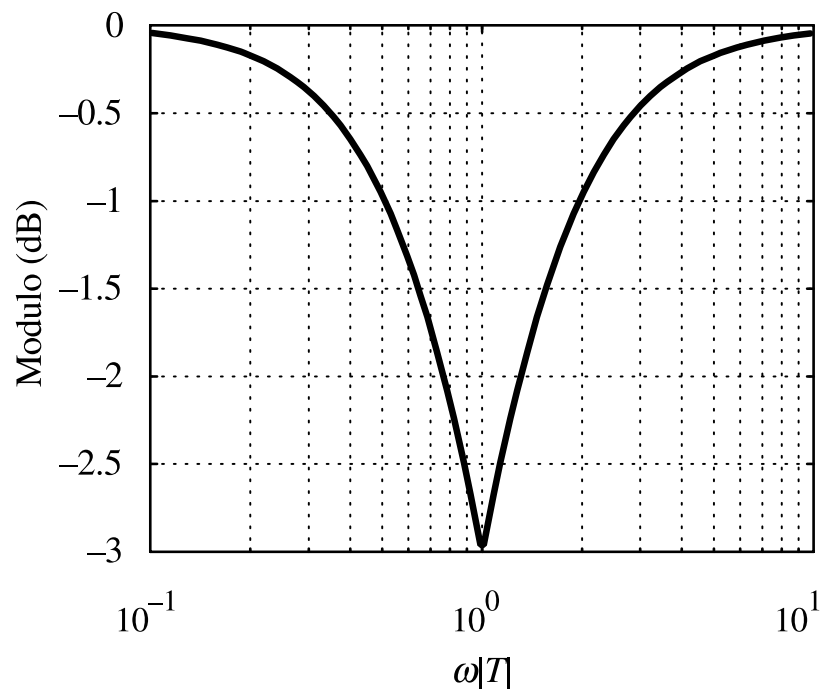
$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20\log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

★ diagramma asintotico (in grigio)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} -20\log 1 = 0 & \omega \ll 1/|T| \\ -20\log \omega |T| & \omega \gg 1/|T| \end{cases}$$

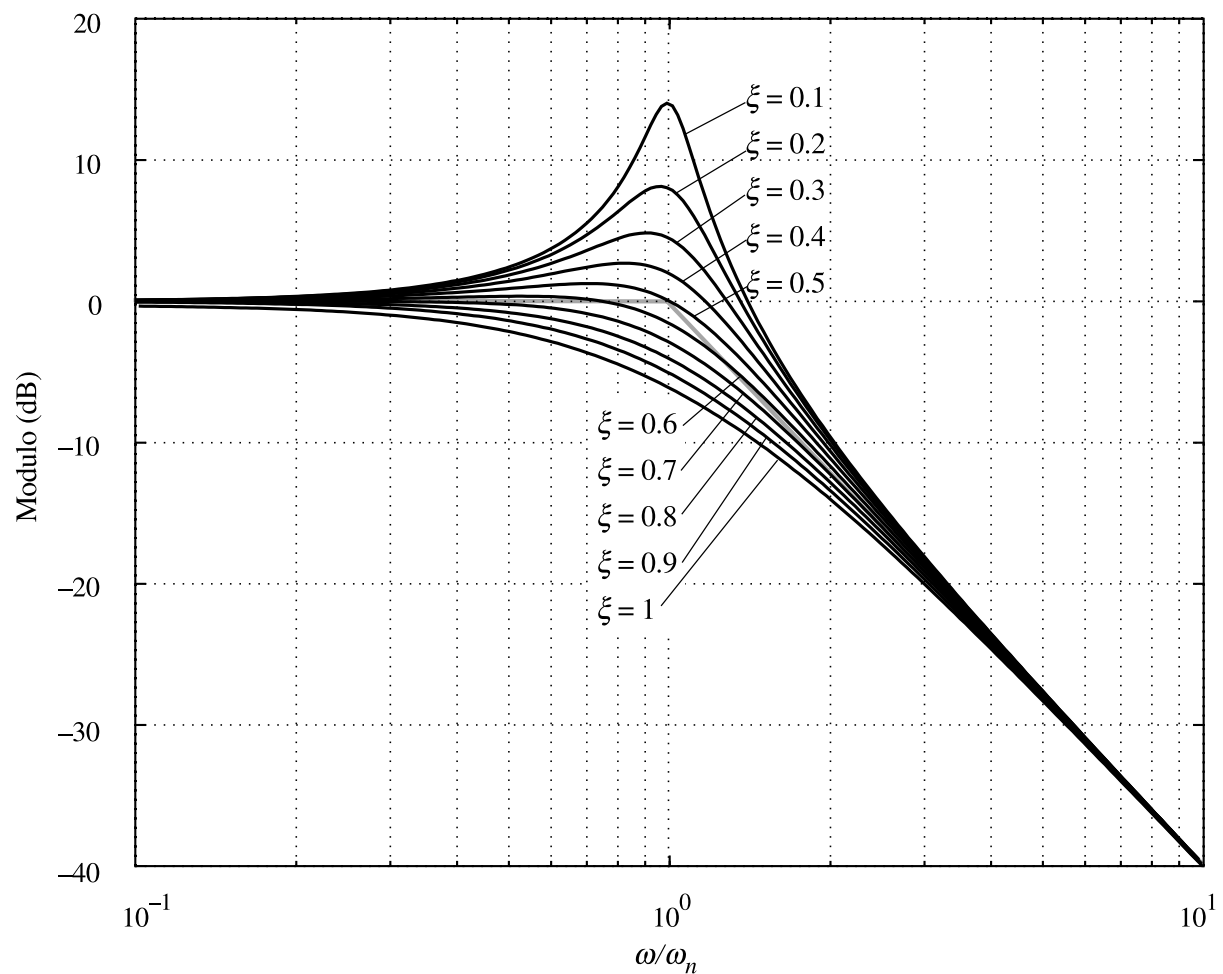


★ diagramma dell'errore $E_c(\omega)$



- Diagramma del modulo di $G_d(j\omega)$

$$\begin{aligned}|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20\log \left| \frac{1}{1 + 2j\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2} \right| \\ &= -20\log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_n^2}\end{aligned}$$



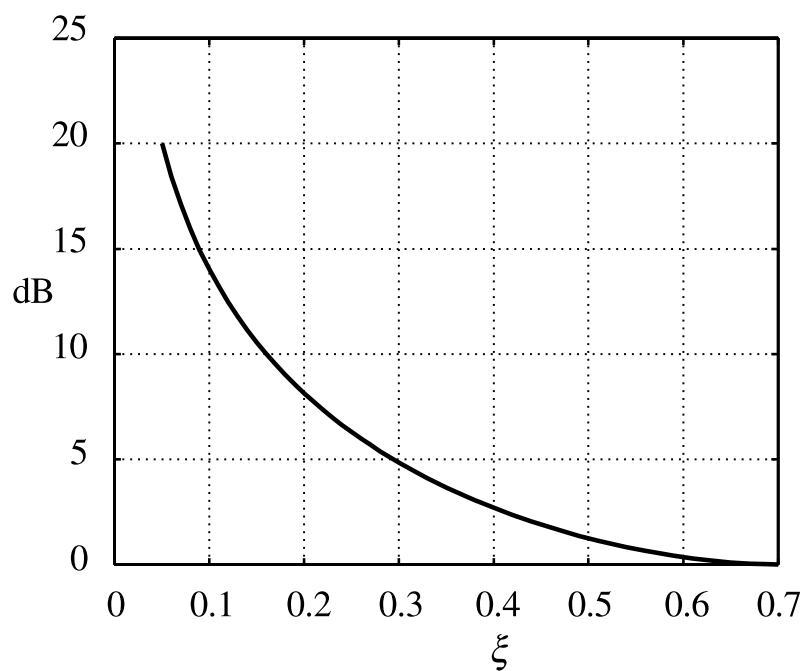
★ in corrispondenza della pulsazione di risonanza

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

⇓

★ picco di risonanza (infinito per $\xi = 0$)

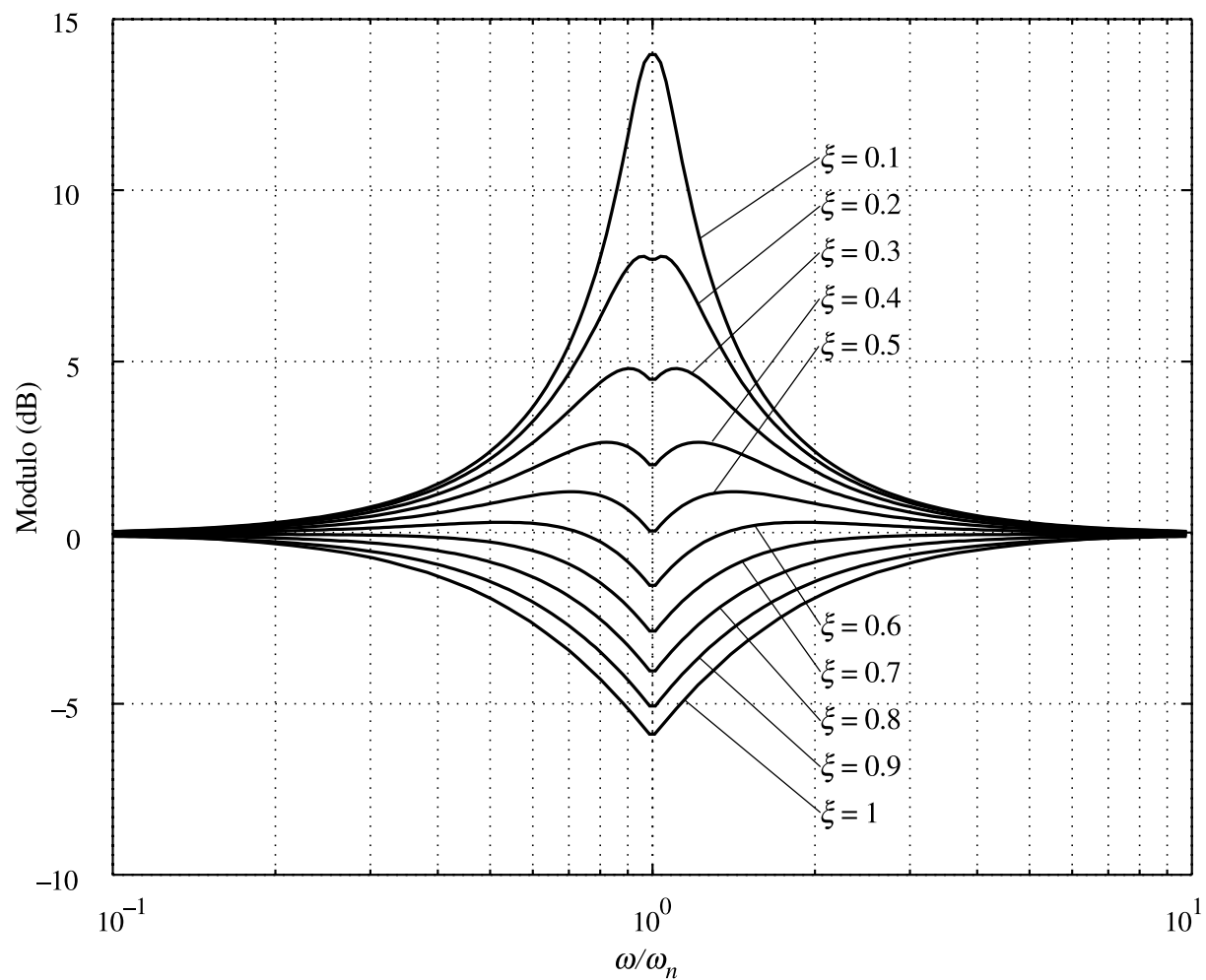
$$|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}}$$



$$|G_d(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|} \implies |G_d(j\omega_n)|_{\text{dB}} = 0, |\xi| = 0.5$$

★ diagramma asintotico

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} -20\log 1 = 0 & \omega \ll \omega_n \\ -40\log(\omega/\omega_n) & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

★ diagramma dell'errore $E_d(\omega)$ 

- Tracciamento del diagramma asintotico del modulo

- ★ somma dei diagrammi associati ai singoli fattori

- ★ tracciamento diretto

si parte dai fattori μ e $1/(j\omega)^g$ (pendenza $-g$ e in $\omega = 1$ il prolungamento assume il valore $20\log|\mu|$)

alle pulsazioni $1/|\tau_i|$ o $1/|T_i|$ la pendenza aumenta o diminuisce di un numero di unità pari alla molteplicità dello zero o del polo

alle pulsazioni naturali α_{ni} o ω_{ni} la pendenza aumenta o diminuisce di un numero di unità pari al doppio della molteplicità dello zero o del polo

diagramma esatto ottenuto apportando le correzioni

- ★ poli o zeri vicini in frequenza

- ★ pendenza del diagramma asintotico per $\omega \rightarrow \infty =$ grado relativo col segno cambiato della funzione di trasferimento (negativa per sistemi strettamente propri, nulla per sistemi propri)

- Esempio

$$G(s) = \frac{100s(1 - 0.1s)}{(1 + 16s + 100s^2)(1 + 0.01s)}$$

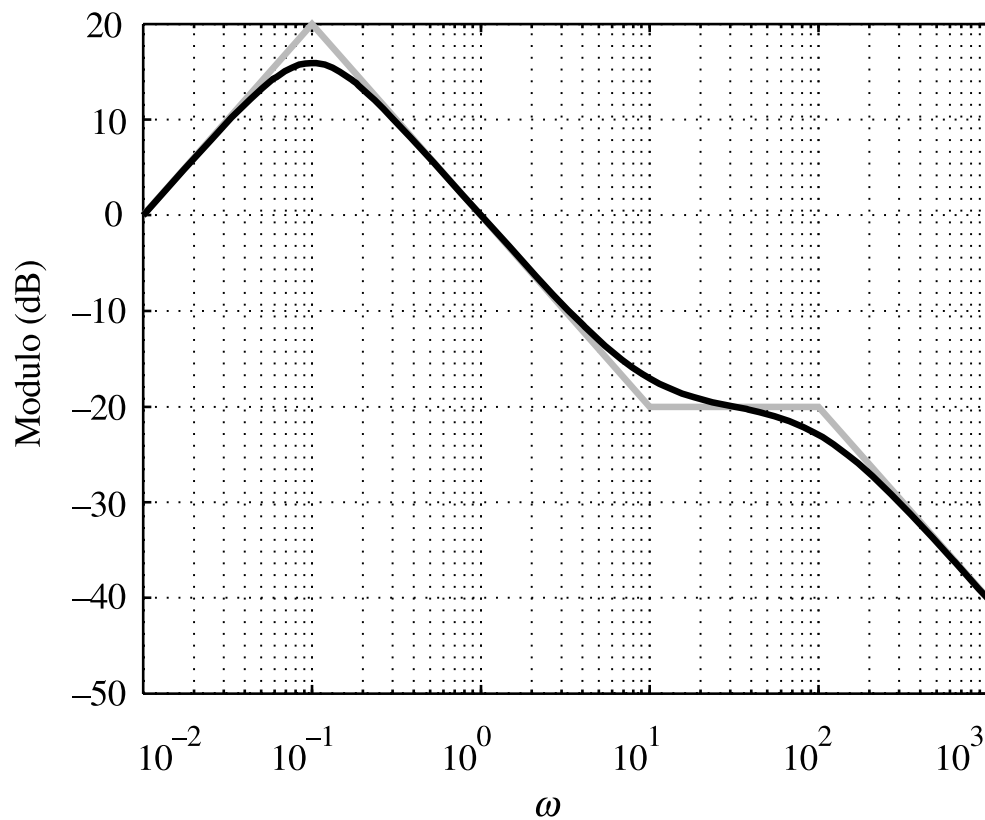


Diagramma della fase

- Ordinata: valore della fase espressa in gradi o radianti

$$\begin{aligned}\arg G(j\omega) = & \arg \mu - g \arg(j\omega) + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) \\ & + \sum_i \arg(1 + 2j\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2) \\ & - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) \\ & - \arg(1 + 2j\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)\end{aligned}$$

- ★ somma dei vari termini fondamentali (convenzione di considerare valori in modulo non superiori a 180°)

- Diagramma della fase di $G_a(j\omega)$

$$\arg G_a(j\omega) = \arg \mu = \begin{cases} 0^\circ & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$$

★ retta parallela all'asse delle ω , con ordinata 0° o -180°

- Diagramma della fase di $G_b(j\omega)$

$$\arg G_b(j\omega) = \arg \left(\frac{1}{j\omega} \right) = -90^\circ$$

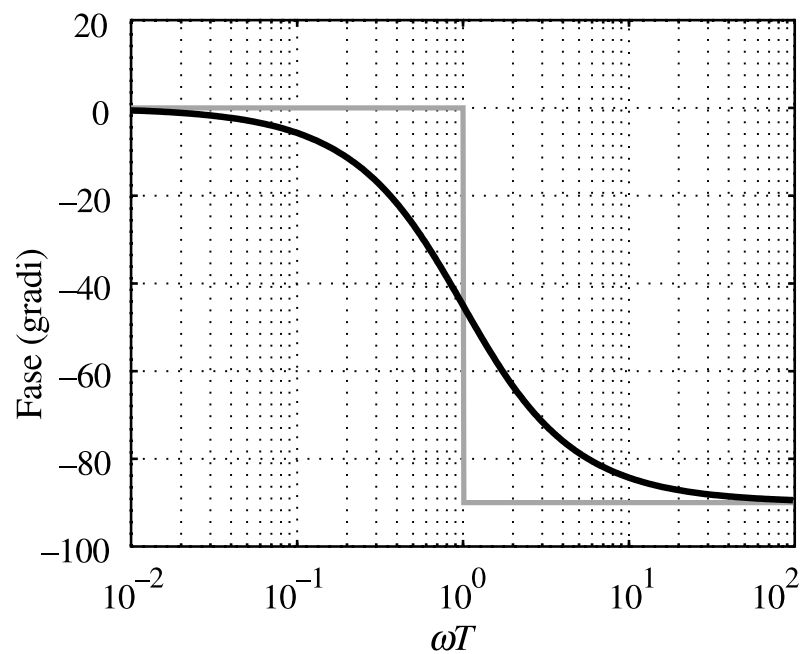
★ retta parallela all'asse delle ω , con ordinata -90° (polo: ritardo di fase, zero: anticipo di fase)

- Diagramma della fase di $G_c(j\omega)$

$$\arg G_c(j\omega) = -\arg(1 + j\omega T) = -\arctan(\omega T)$$

★ diagramma asintotico (in grigio)

$$\arg G_c(j\omega) \simeq \begin{cases} -\arg(1) = 0^\circ & \omega \ll 1/|T| \\ -\arg(j\omega T) = \begin{cases} -90^\circ & T > 0 \\ +90^\circ & T < 0 \end{cases} & \omega \gg 1/|T| \end{cases}$$



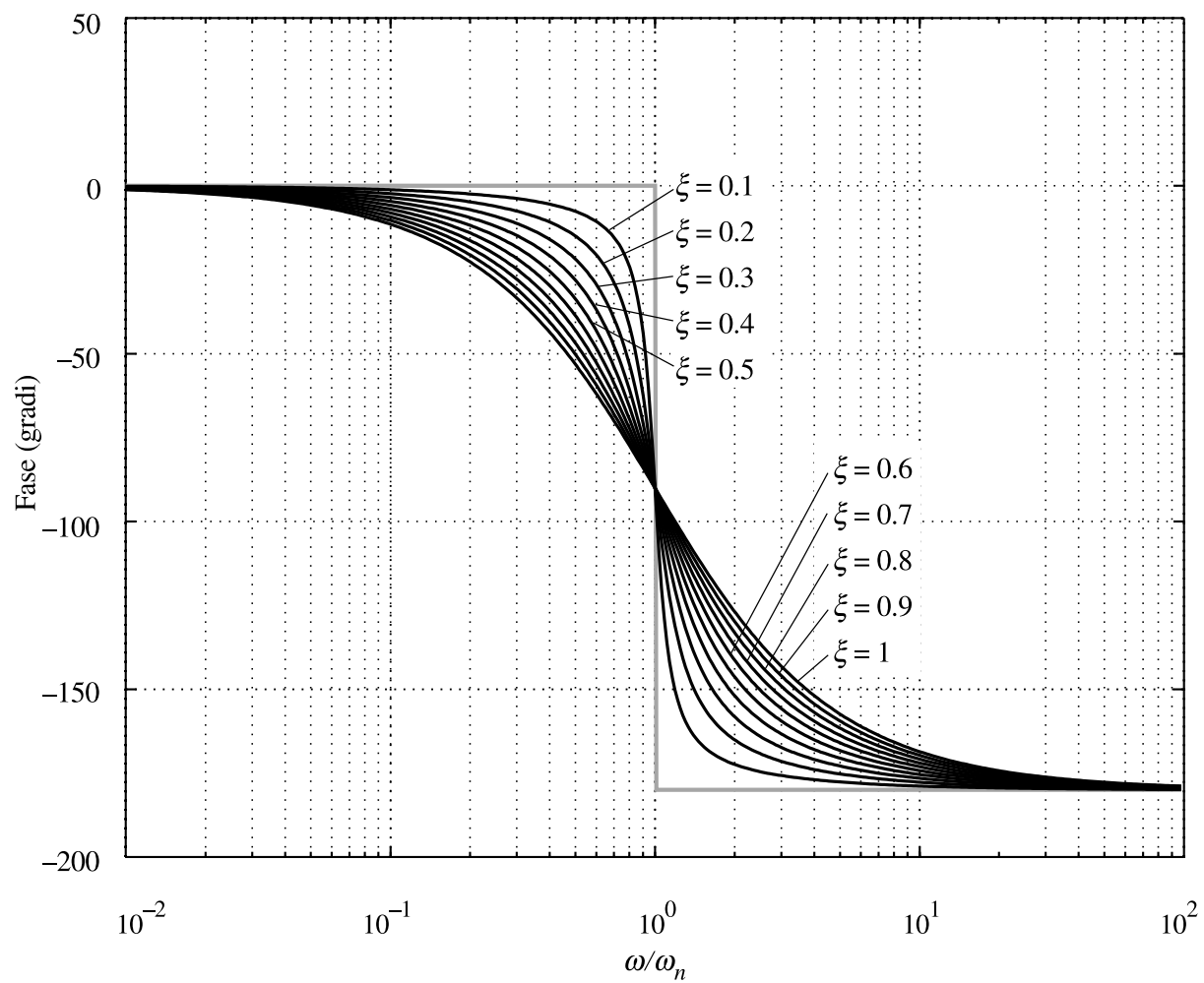
- Diagramma della fase di $G_d(j\omega)$

$$\arg G_d(j\omega) = -\arg(1 + 2j\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2) = -\arctan \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

★ $\xi = 0 \Rightarrow G_d(j\omega) = 1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)$

★ diagramma asintotico (in grigio)

$$\arg G_d(j\omega) \simeq \begin{cases} -\arg(1) = 0^\circ & \omega \ll \omega_n \\ -\arg(-\omega^2/\omega_n^2) = \begin{cases} -180^\circ & \xi \geq 0 \\ +180^\circ & \xi < 0 \end{cases} & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



- Tracciamento del diagramma asintotico della fase

- ★ somma dei diagrammi associati ai singoli fattori

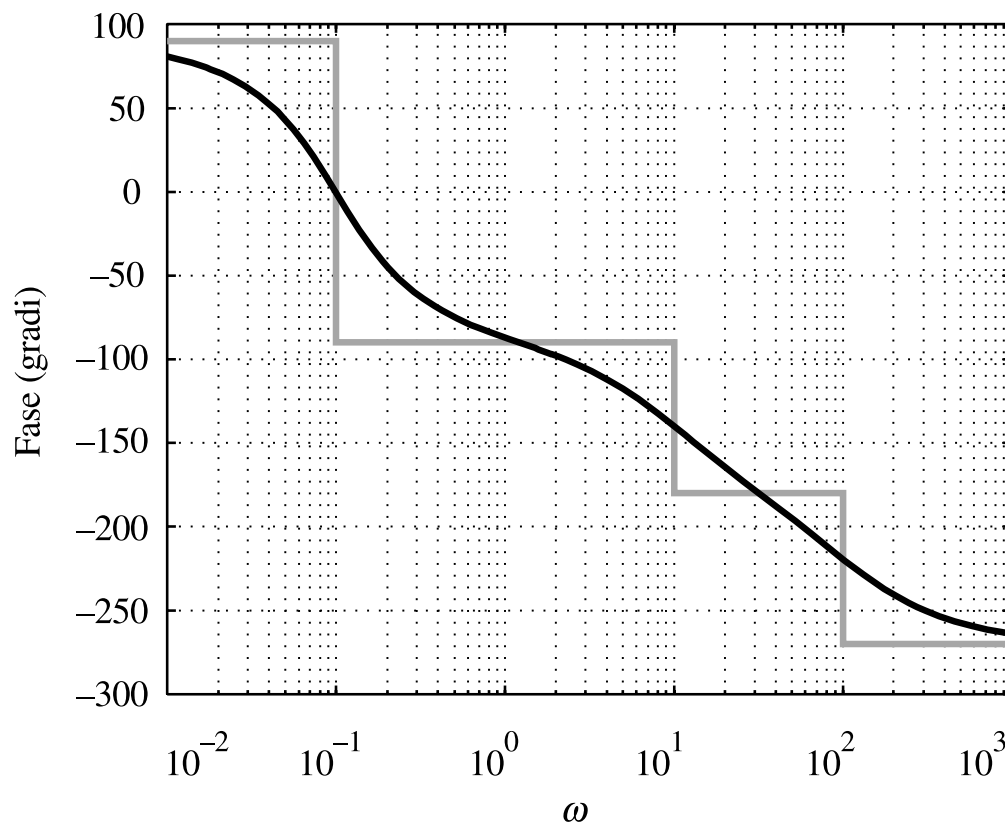
- ★ tracciamento diretto

si parte dai fattori μ e $1/(j\omega)^g$ (ordinata $\arg\mu - g90^\circ$)

alle pulsazioni $1/|\tau_i|$ o $1/|T_i|$ l'ordinata aumenta ($\tau_i > 0$ e $T_i < 0$) o diminuisce ($\tau_i < 0$ e $T_i > 0$) di 90°

alle pulsazioni naturali α_{ni} o ω_{ni} l'ordinata aumenta ($\zeta_i \geq 0$ e $\xi_i < 0$) o diminuisce ($\zeta_i < 0$ e $\xi_i \geq 0$) di 180°

- Esempio (precedente)

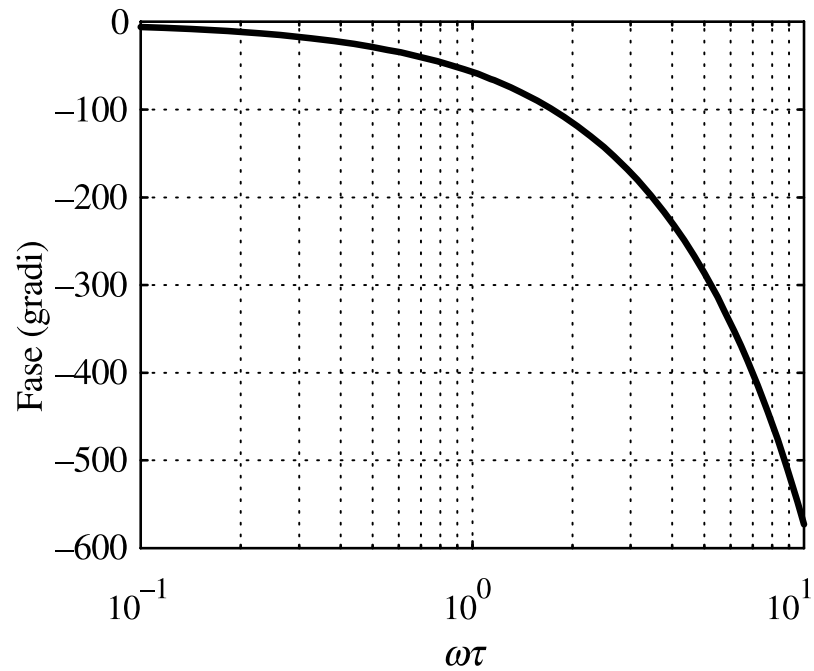


Ritardo di tempo

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad \tau > 0$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \quad \arg G(j\omega) = -\omega\tau 180/\pi$$

★ diagramma della fase



Sistemi a sfasamento minimo

- $G(s)$ a fase minima: tutti i poli e gli zeri hanno parte reale negativa o nulla, e non sono presenti ritardi di tempo
 - ★ diagramma di Bode della fase dedotto dalla conoscenza del diagramma di Bode del modulo: cambio di pendenza in diminuzione (in aumento) $\Rightarrow$ contributo angolare di ritardo (anticipo) dovuto a poli (zeri)

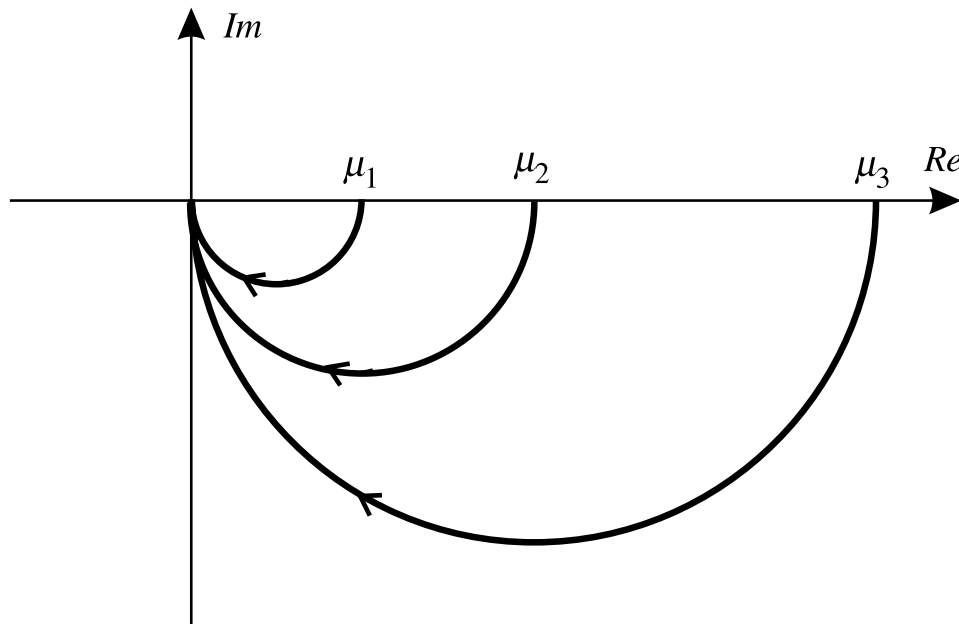
DIAGRAMMI POLARI

- Rappresentazione grafica alternativa della risposta in frequenza nel piano complesso
 - ★ immagine attraverso $G(s)$ del semiasse immaginario non negativo
 - ★ tracciamento per punti, a partire dai diagrammi di Bode o con l'ausilio di un mezzo di calcolo

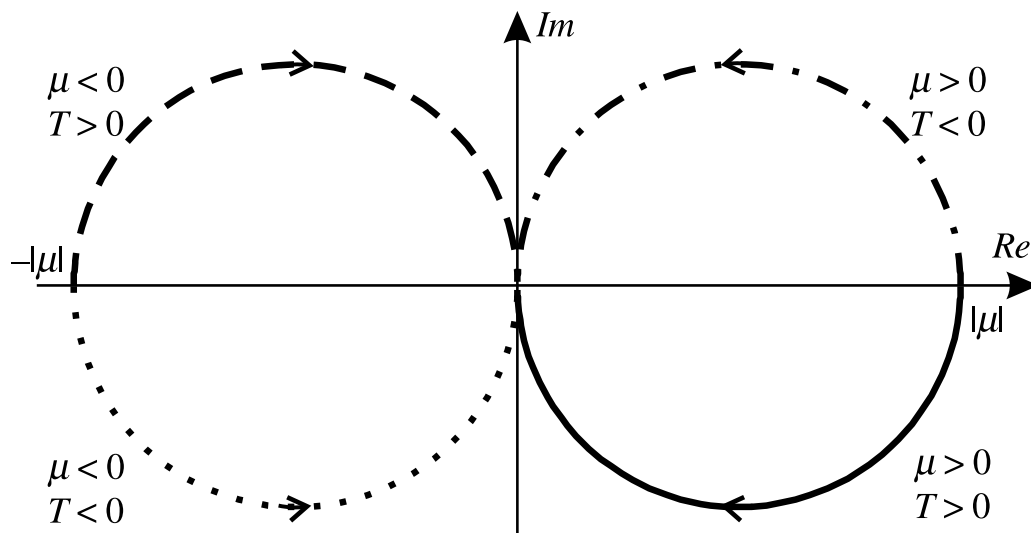
- Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

- ★ diagramma polare per $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2 = 2\mu_1$ e $\mu = \mu_3 = 4\mu_1$

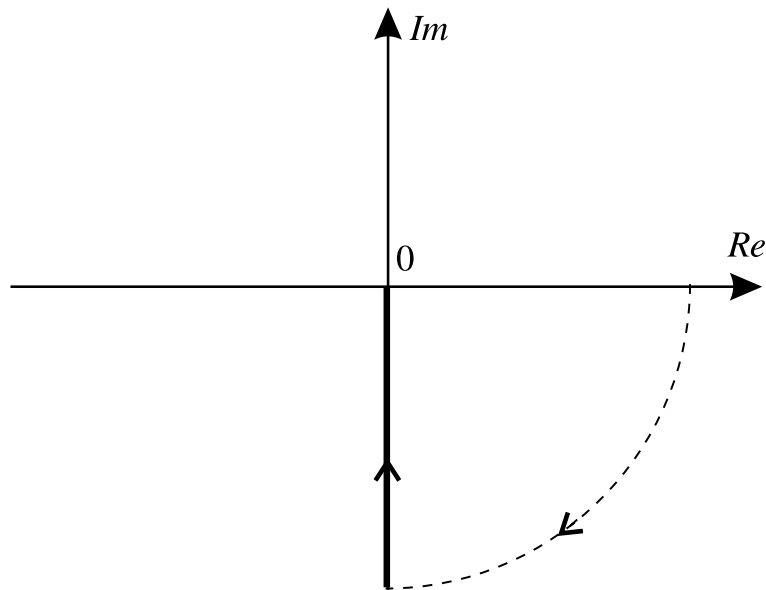


- ★ diagramma polare per diverse combinazioni di segno di μ e T



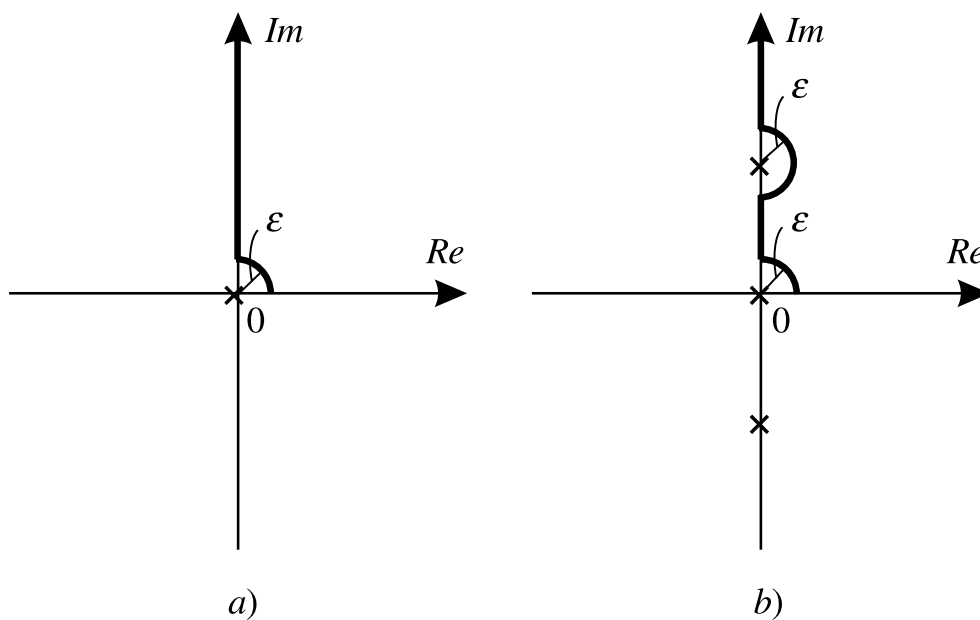
- Esempio: integratore

$$G(s) = \frac{1}{s}$$



- $G(s)$ con poli sull'asse immaginario

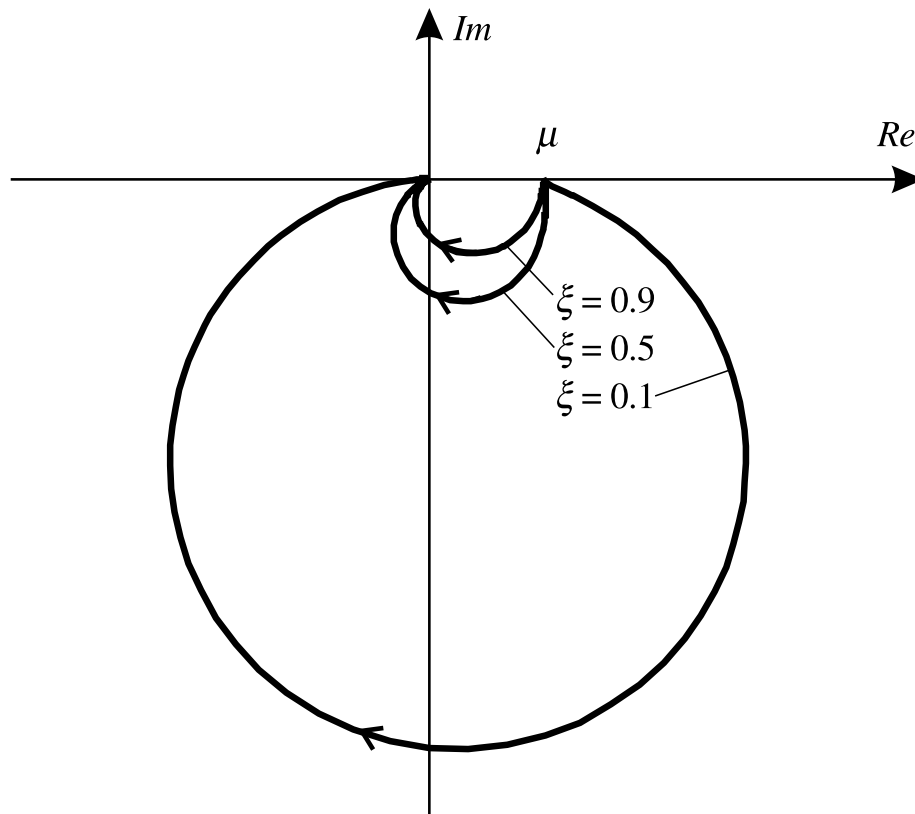
★ diagramma polare connesso: immagine dei punti $j\bar{\omega} + \epsilon e^{j\theta}$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, ϵ infinitesimo



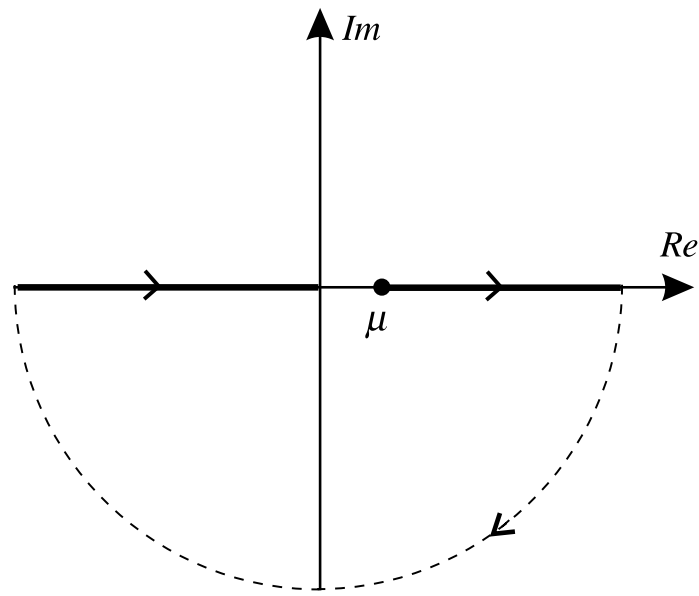
- Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2}$$

★ diagramma polare per $\mu > 0$ e $\xi > 0$



★ diagramma polare per $\mu > 0$ e $\xi = 0$



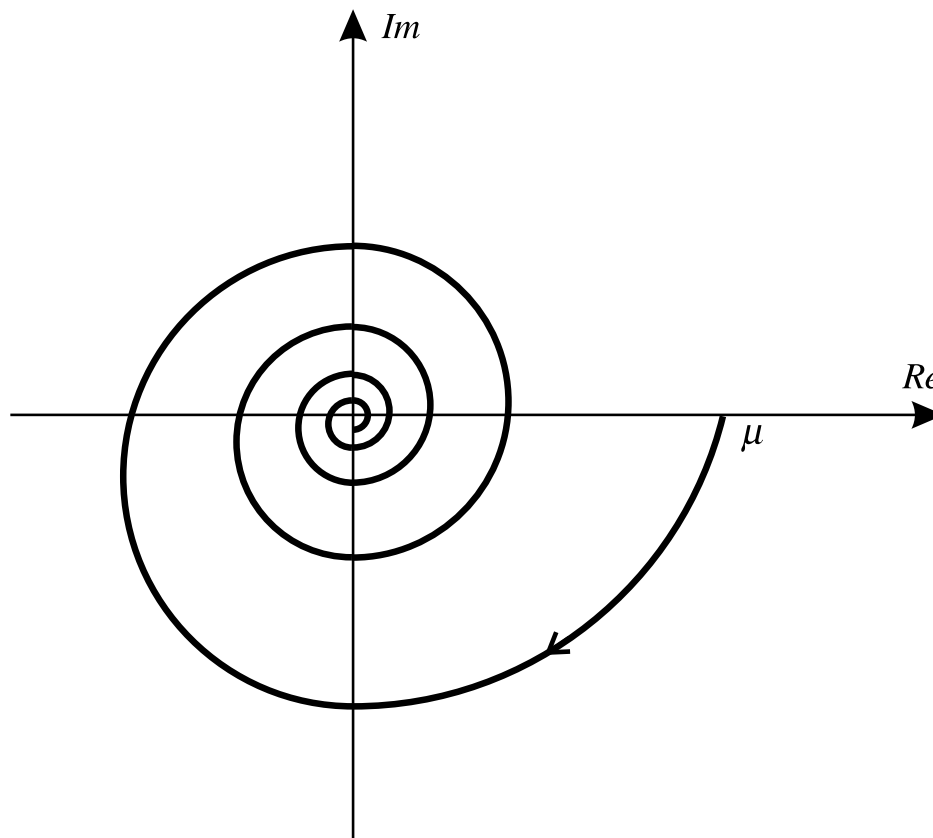
- Esempio: ritardo di tempo

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

- ★ diagramma polare: circonferenza di raggio unitario percorsa un numero infinito di volte in senso orario a partire dal semiasse reale positivo

- Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-\tau s} \quad \mu, T > 0$$



AZIONE FILTRANTE DEI SISTEMI DINAMICI

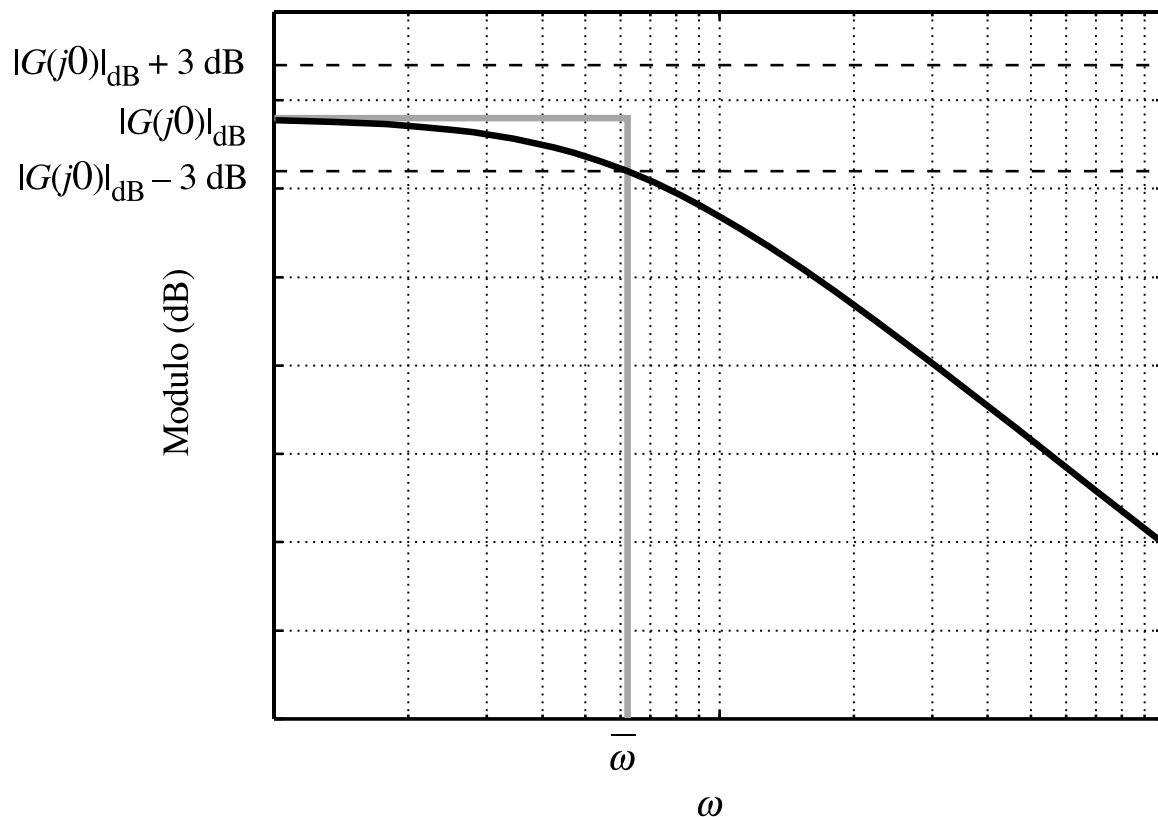
- Segnale di ingresso, dotato di serie o trasformata di Fourier
 - ★ sistema amplifica (attenua) e sfasa le armoniche presenti nel segnale (comportamento da filtro)
 - ★ classificazione in relazione alle caratteristiche filtranti

Filtri passa-basso

- ★ lasciano passare inalterate (filtri ideali), o al più amplificate di un valore costante, unicamente le armoniche con pulsazione inferiore o uguale a un dato valore $\bar{\omega}$ ed eliminano le armoniche con pulsazione maggiore di $\bar{\omega}$
- Filtro reale passa-basso

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \leq \bar{\omega} \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega > \bar{\omega} \end{cases}$$

- ★ banda passante $[0, \bar{\omega}]$



- Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad \mu, T > 0$$

- ★ filtro passa-basso con banda passante $[0, 1/T]$
- ★ risposta allo scalino tanto più veloce quanto più piccolo è T , *alias* quanto più grande è la banda passante (ampiezza banda $\Leftrightarrow$ velocità del sistema)

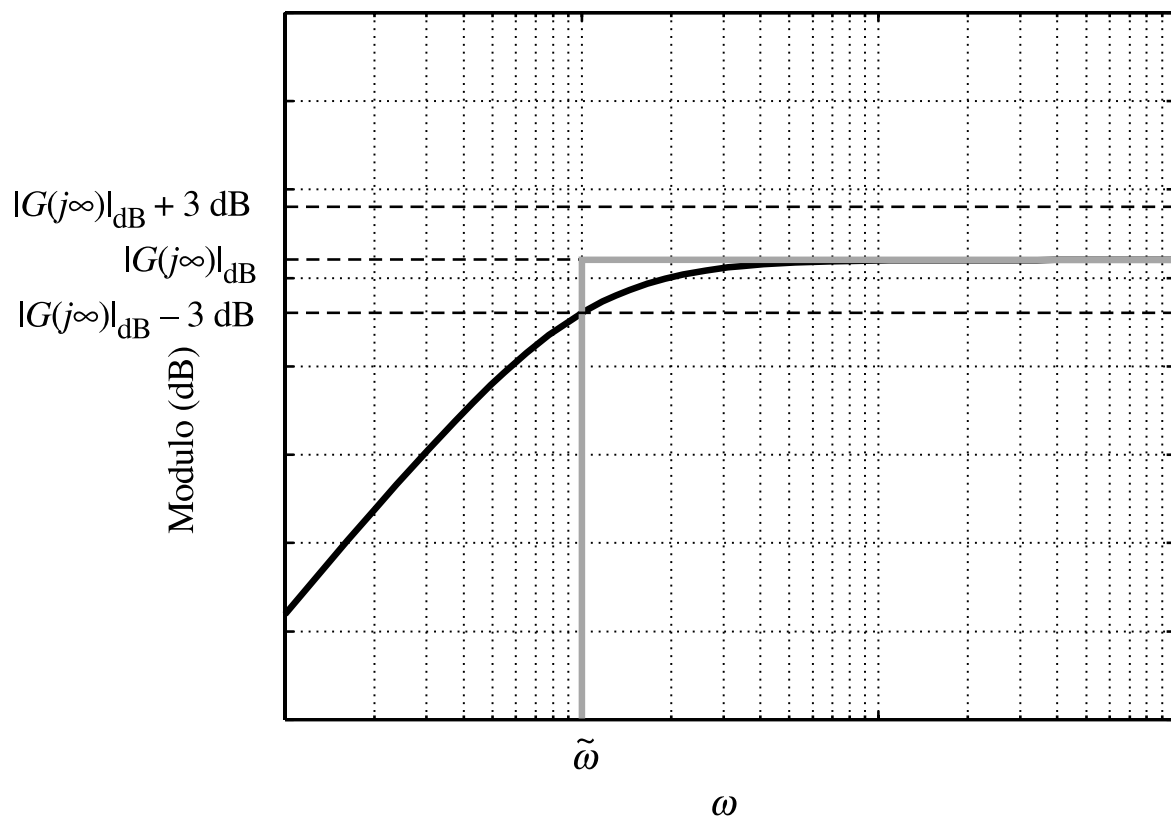
Altri tipi di filtro

- Filtri passa-alto
 - ★ lasciano passare inalterate (filtri ideali), o al più amplificate di un valore costante, unicamente le armoniche con pulsazione maggiore o uguale a un dato valore $\bar{\omega}$ ed eliminano le armoniche con pulsazione minore di $\bar{\omega}$

- Filtro reale passa-alto

$$\begin{cases} \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega < \bar{\omega} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \geq \bar{\omega} \end{cases}$$

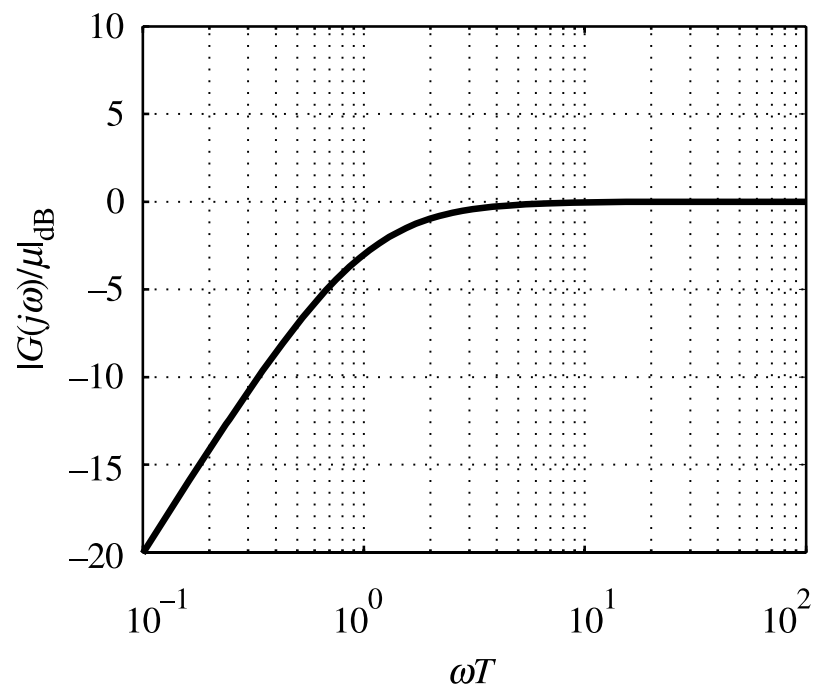
★ banda passante $[\bar{\omega}, \infty)$



- Esempio

$$G(s) = \frac{\mu s}{1 + Ts} \quad T > 0$$

★ filtro passa-alto con banda passante $[1/T, \infty)$



- Filtri passa-banda
 - ★ lasciano passare unicamente le armoniche con pulsazione compresa in un intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ (banda passante)
- Filtri arresta-banda
 - ★ bloccano unicamente le armoniche con pulsazione compresa in un intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ (banda passante: $[0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$)

- Filtri a spillo (*notch filters*)

- ★ filtri arresta-banda con banda passante $[0, \infty) - \{\hat{\omega}\}$

- ★ esempio

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

