MATRICI

Definizioni e operazioni fondamentali

Autovalori e autovettori

Potenza

Esponenziale

Limiti, derivate e integrali

DEFINIZIONI E OPERAZIONI FONDAMENTALI

Generalità

- Matrice: tabella di numeri o funzioni organizzate in n righe e m colonne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

  - ⋆ $A = 0$: matrice nulla
  - ⋆ $n = 1$: vettore riga
  - ⋆ $m = 1$: vettore colonna
  - ⋆ $n = m = 1$: scalare

- Matrice quadrata ($n = m$)
  - ⋆ elementi a_{ii}: diagonale
  - ⋆ $a_{ij} = 0$, $i < j$: matrice triangolare inferiore
  - ⋆ $a_{ij} = 0$, $i > j$: matrice triangolare superiore
  - ⋆ $a_{ij} = 0$, $i \neq j$: matrice diagonale, $A = I$ ($a_{ii} = 1$): matrice diagonale

- Partizione in blocchi

$$A_{(n_1+n_2)\times(m_1+m_2)} = \begin{bmatrix} B_{n_1\times m_1} & C_{n_1\times m_2} \\ D_{n_2\times m_1} & E_{n_2\times m_2} \end{bmatrix}$$

- Matrice quadrata con blocchi (di pari indice) quadrati
  - ⋆ matrice diagonale a blocchi
  - ⋆ matrice triangolare a blocchi
  - ⋆ diagonale dei blocchi
- Matrici uguali: stesse dimensioni ed elementi uguali

Operazioni su una matrice

- Trasposta: $b_{ij} = a_{ji}$
$$B = A'$$

- Complemento algebrico $\hat{A}_{ij}$ di a_{ij} di una matrice quadrata $n \times n$: matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la riga i e la colonna j

- Determinante

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\left(\hat{A}_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\left(\hat{A}_{ij}\right) \end{cases}$$

  ⋆ $n = 2$
$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  ⋆ $n = 3$

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

  ⋆ matrice triangolare a blocchi con blocchi quadrati sulla diagonale: prodotto dei determinanti dei blocchi

- Matrice aggiunta di una matrice quadrata

$$\mathrm{adj}(A) = [(-1)^{i+j}\det(\hat{A}_{ij})]'_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

- Matrice non singolare (invertibile)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\star$ $n = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\star$ $A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$A^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right\}$$

- Prodotto di uno scalare α per una matrice A: αA (moltiplicando tutti gli elementi di A per α)
  - ⋆ matrice quadrata

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

- Minore: determinante del blocco quadrato estratto
- Rango $\rho(A)$ di una matrice $n \times m$: massimo intero per cui esiste un minore diverso da zero

$$0 \leq \rho(A) \leq \min\{n, m\}$$

  - ⋆ matrice di rango massimo: $\rho(A) = \min\{n, m\}$, $n = m \Rightarrow \det(A) \neq 0$

- k righe (colonne) A_i linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i A_i \neq 0 \qquad \forall \gamma_i \neq 0$$

  - ⋆ max numero di righe (colonne) linearmente indipendenti = rango

- Traccia

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A)$$
$$\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$$

- Norma di un vettore ($w \in R^n$)

$$\|w\| = \left(w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2\right)^{1/2}$$

Operazioni tra matrici

- Somma

$$C = A + B \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A + 0 = A$$

- Prodotto

$$C_{n\times q} = A_{n\times m}B_{p\times q} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

  - ⋆ $AB \neq BA$!
  - ⋆ $AI_m = I_nA = A$
  - ⋆ $n = m$: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - ⋆ A, B quadrate: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- Potenza ($k \in N$)

$$A^k = AA\dots A$$

$$A^{-k} = \left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k \qquad A^0 = I$$

  - ⋆ A diagonale

$$A^k = \mathrm{diag}\left\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right\}$$

- Proprietà

  ⋆ $A_{n\times m}$, $B_{m\times n}$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \det(AB) = \det(BA)$$

  ⋆ A, B quadrate

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Generalità

- Polinomio caratteristico: $A_{n\times n}$, $\lambda \in C$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

  ⋆ equazione caratteristica ($\alpha_i \in R$)

$$\varphi(\lambda) = 0$$

  soluzioni: autovalori di A (reali o complessi coniugati a coppie)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

  ⋆ matrice diagonale (triangolare) a blocchi: autovalori dei blocchi sulla diagonale

- Trasformazione di similitudine: T non singolare

$$\begin{aligned}\det\left(\lambda I - TAT^{-1}\right) &= \det\left(T\lambda T^{-1} - TAT^{-1}\right)\\ &= \det(T)\det(\lambda I - A)\det\left(T^{-1}\right)\\ &= \det(\lambda I - A)\end{aligned}$$

  ⋆ teorema di Cayley-Hamilton

$$\varphi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$$

- Autovettore $v_i \neq 0$:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

Forma diagonale

- $\lambda_i(A)$ distinti

$$A \, [\, v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n \,] = [\, v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n \,] \, \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

  ⋆ matrice degli autovettori non singolare

$$T_D^{-1} = [\, v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n \,]$$

$$\Downarrow$$

$$A_D = T_D A T_D^{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

POTENZA

- $A_{n\times n},\, k \in N$

$$
\begin{aligned}
\Phi(k) &= A^k \\
&= \left(T_D^{-1} A_D T_D\right)^k = T_D^{-1} A_D^k T_D \\
&= T_D^{-1} \Phi_D(k) T_D
\end{aligned}
$$

$\star$ $\Phi(k)$ diagonalizzata per similitudine

$$
\begin{aligned}
\Phi_D(k) &= T_D \Phi(k) T_D^{-1} \\
&= \operatorname{diag}\left\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{i=1}^{n} r_{\alpha\beta i} \lambda_i^k
$$

ESPONENZIALE

- $A_{n\times n}$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\Psi(t) = e^{At} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \\ &= T_D^{-1} \mathrm{diag} \Psi_D(t) T_D\end{aligned}$$

$\star$ $\Psi(t)$ diagonalizzata per similitudine

$$\begin{aligned}\Psi_D(t) &= T_D \Psi(t) T_D^{-1} \\ &= \left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right\}\end{aligned}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha\beta i} e^{\lambda_i t}$$

LIMITI, DERIVATE E INTEGRALI

- Mera estensione dal caso scalare

- Derivata di un vettore rispetto a un vettore

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$