SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Impulso e altri segnali canonici

Trasformata di Laplace

Serie di Fourier

Trasformata di Fourier

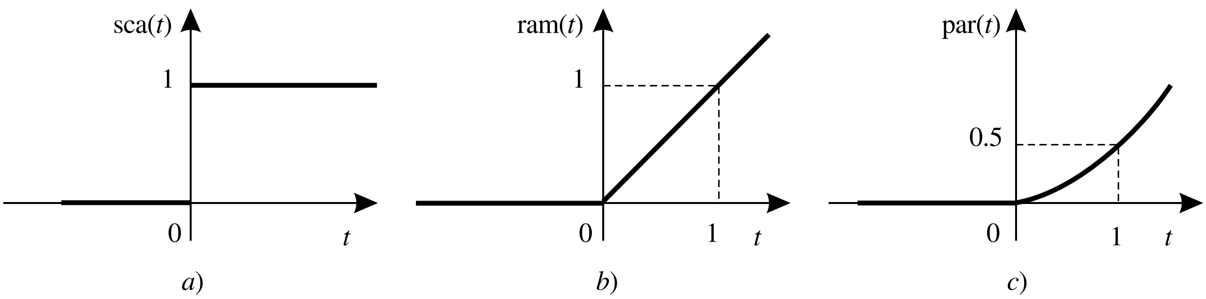
IMPULSO E ALTRI SEGNALI CANONICI

- Segnali canonici

$$\mathrm{sca}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(scalino)}$$

$$\mathrm{ram}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(rampa)}$$

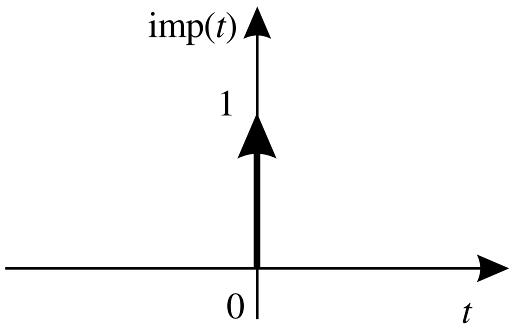
$$\mathrm{par}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2/2 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(parabola)}$$



$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{sca}(\tau)d\tau = \mathrm{ram}(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \mathrm{ram}(\tau)d\tau = \mathrm{par}(t)$$

- Impulso di Dirac

$$\begin{aligned} \mathrm{imp}(t) &= 0 \qquad t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t)dt &= 1 \end{aligned}$$



$$\mathrm{imp}_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < \epsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{imp}_\epsilon(t) = \mathrm{imp}(t)$$

$$\varphi(t)\mathrm{imp}(t-\tau) = \varphi(\tau)\mathrm{imp}(t-\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{imp}(t-\tau)dt = \varphi(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t-\tau)dt = \varphi(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{imp}(\tau)d\tau = \mathrm{sca}(t) \qquad t \neq 0$$

$$\frac{d(\mathrm{sca}(t))}{dt} = \mathrm{imp}(t)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

Generalità

- Funzione complessa f di variabile reale t, $s = \sigma + j\omega$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

  - ⋆ $\exists s$: convergenza integrale $\Rightarrow$ $\bar{\sigma}$: ascissa di convergenza ($F(s)$ esiste nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \bar{\sigma}$

- Trasformata razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

  - ⋆ radici di $N(s) = 0$: zeri
  - ⋆ radici di $D(s) = 0$: poli (f reale: $\bar{\sigma} = \max(\mathrm{Re}(s))$)

- Formula di antitrasformazione ($\sigma > \bar{\sigma}$)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

  - ⋆ $f(t) = 0$, $t < 0 \Rightarrow$ corrispondenza biunivoca

- Trasformata dell'impulso

$$\mathcal{L}[\mathrm{imp}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \mathrm{imp}(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

- Trasformata dello scalino ($\bar{\sigma} = 0$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t)] &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{sca}(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0}^{+\infty} = \left. \left[\frac{e^{-\sigma t}}{-(\sigma + j\omega)} (\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \right] \right|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{0 - 1}{-(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Proprietà principali

- Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- Traslazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\hat{f}(t)\right] = \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$$

$\star$ $f(t) = \alpha \mathrm{sca}(t-\tau_1) + \beta \mathrm{sca}(t-\tau_2)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\alpha \mathrm{sca}(t-\tau_1)] + \mathcal{L}[\beta \mathrm{sca}(t-\tau_2)] \\ &= \alpha\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t-\tau_1)] + \beta\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t-\tau_2)] \\ &= \alpha\frac{e^{-\tau_1 s}}{s} + \beta\frac{e^{-\tau_2 s}}{s}\end{aligned}$$

- Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}\left[\hat{f}(t)\right] = \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha)$$

  - ⋆ trasformata dell'esponenziale ($\bar{\sigma} = \alpha$)

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)\right] = \frac{1}{s-\alpha}$$

  - ⋆ trasformata del coseno ($\bar{\sigma} = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\mathrm{sca}(t)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

- Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sF(s) - f(0^-)$$

  - $\star$ derivate successive (s operatore di derivazione)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right] &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\\ \vdots \quad &= \quad \vdots\\ \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{d^{i-1}f(t)}{dt^{i-1}}\right|_{t=0}\end{aligned}$$

  - $\star$ trasformata del seno ($\bar{\sigma} = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(\omega t)\mathrm{sca}(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\left(\mathrm{imp}(t) - \frac{d(\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t))}{dt}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\omega}\left[1 - \left(s\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

  - ⋆ trasformata della rampa

$$\mathcal{L}[\mathrm{ram}(t)] = -\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

- Integrazione nel dominio del tempo ($1/s$ operatore di integrazione)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

  - $\star$ trasformata della parabola

$$\mathcal{L}[\mathrm{par}(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\mathrm{ram}(t)] = \frac{1}{s^3}$$

- Convoluzione nel dominio del tempo
  - $\star$ prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} f_1(t) \star f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\eta)f_2(\eta)d\eta \\ &= \int_{0}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} f_1(t-\eta)f_2(\eta)d\eta \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

  - $\star$ $f_1(t) = e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$, $f_2(t) = \mathrm{sca}(t)$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = \frac{1}{s(s-\alpha)}$$

- Teorema del valore iniziale (f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore)

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- Teorema del valore finale (f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o con parte reale negativa)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$\star$ $f(t) = e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$

$$\left[e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)\right]\Big|_{t=0^+} = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s-\alpha} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

- Tabella di trasformate

$f(t)$	$F(s)$
$\mathrm{imp}(t)$	1
$\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathrm{ram}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\mathrm{par}(t)$	$\frac{1}{s^3}$
$e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$te^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{\sigma t}\sin(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t}\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$te^{\sigma t}\sin(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{2\omega(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]^2}$
$te^{\sigma t}\cos(\omega t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{(s-\sigma)^2-\omega^2}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]^2}$

Sviluppo di Heaviside

- Antitrasformazione di funzione razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

  - ⋆ grado di $D(s)$ maggiore del grado di $N(s)$
  - ⋆ $N(s)$ e $D(s)$ a coefficienti reali

- Poli distinti

$$D(s) = \prod_{i=1}^{n} (s + p_i) \qquad p_h \neq p_j, h \neq j$$

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + p_i)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{s + p_i}$$

$\star$ calcolo dei residui

$$P_i = \frac{N(-p_i)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(p_j - p_i)} = \frac{N(-p_i)}{\left.\frac{dD(s)}{ds}\right|_{s=-p_i}} = \left.[(s+p_i)F(s)]\right|_{s=-p_i}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{s+p_i}\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i e^{-p_i t}\right) \mathrm{sca}(t)$$

- Esempio

$$F(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$$

$$\frac{s-10}{(s+2)(s+5)} \equiv \frac{P_1}{s+2} + \frac{P_2}{s+5}$$

$$P_1 = \frac{-2-10}{-2+5} = -4 \qquad P_2 = \frac{-5-10}{-5+2} = 5$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-10}{(s+2)(s+5)}\right] = \left(-4e^{-2t} + 5e^{-5t}\right) \mathrm{sca}(t)$$

- Poli complessi coniugati ($p_j = \bar{p}_i$)

$$\frac{P_i}{s+p_i} + \frac{P_j}{s+p_j} = \frac{P_i}{s+p_i} + \frac{\bar{P}_i}{s+\bar{p}_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} P_i e^{-p_i t} + P_j e^{-p_j t} &= P_i e^{-p_i t} + \bar{P}_i e^{-\bar{p}_i t} \\ &= 2|P_i| e^{\mathrm{Re}(-p_i)t} \cos\,(\mathrm{Im}(-p_i)t + \arg P_i) \end{aligned}$$

$\star$ in alternativa: identità dei polinomi

- Esempio

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

$$P_1 = \frac{100}{(2-j3-1)(2+j3-1)} = 10$$

$$P_2 = \frac{100}{(1-2+j3)(2+j3-2+j3)} = -\frac{5}{3}(3-j)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}\right] \\ &= 10\left[e^{-t} + \frac{\sqrt{10}}{3}e^{-2t}\cos\left(3t + \arg(j-3)\right)\right]\mathrm{sca}(t) \end{aligned}$$

⋆ in alternativa

$$\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)} \equiv \frac{P_1}{s+1} + \frac{\Phi s + \Psi}{s^2+4s+13}$$

$$100 \equiv 10(s^2+4s+13) + (\Phi s + \Psi)(s+1)$$

$$\Downarrow \quad (s=0,\, s=1)$$

$$100 = 130 + \Psi$$
$$100 = 180 + (\Phi + \Psi)2$$

$$\Phi = -10 \qquad \Psi = -30$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s+1} - \frac{10(s+3)}{s^2+4s+13}\right] \\
&= 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+3}{s^2+4s+13}\right] \\
&= 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] \\
&= 10\left[e^{-t} - e^{-2t}\left(\cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)\right)\right]\mathrm{sca}(t)
\end{aligned}$$

- Poli multipli

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i} \qquad p_h \neq p_j, h \neq j$$

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}} \equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

⋆ calcolo dei residui

$$P_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \left. \frac{d^{n_i - h}[(s + p_i)^{n_i} F(s)]}{ds^{n_i - h}} \right|_{s=-p_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h} \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} P_{i,h} \frac{t^{h-1} e^{-p_i t}}{(h-1)!} \right) \mathrm{sca}(t) \end{aligned}$$

- Esempio

$$F(s) = \frac{s+18}{s(s+3)^2}$$

$$\frac{s+18}{s(s+3)^2} \equiv \frac{P_{1,1}}{s} + \frac{P_{2,1}}{s+3} + \frac{P_{2,2}}{(s+3)^2}$$

$$P_{1,1} = \left[sF(s)\right]\Big|_{s=0} = \left.\frac{s+18}{(s+3)^2}\right|_{s=0} = 2$$

$$P_{2,1} = \left.\frac{d\left[(s+3)^2F(s)\right]}{ds}\right|_{s=-3} = -2$$

$$P_{2,2} = \left[(s+3)^2F(s)\right]\Big|_{s=-3} = -5$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+18}{s(s+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} - \frac{5}{(s+3)^2}\right]$$

$$= \left(2 - 2e^{-3t} - 5te^{-3t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

SERIE DI FOURIER

Forma esponenziale

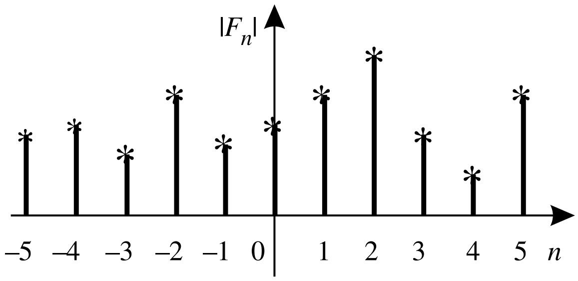
- Funzione periodica

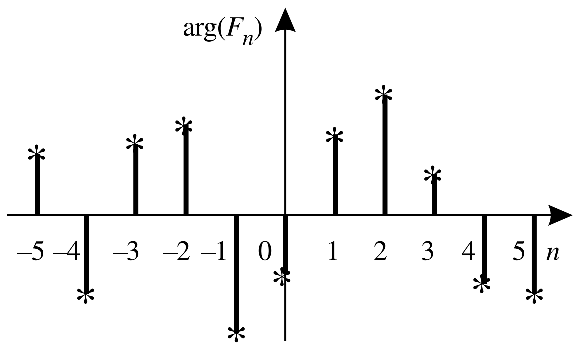
$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t$$

  ⋆ coefficienti di Fourier ($\omega_0 = 2\pi/T$)

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- Spettro di f: F_n
  - ⋆ spettro di ampiezza: $|F_n|$
  - ⋆ spettro di fase: $\arg(F_n)$





- serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

Forma trigonometrica

- f reale ($F_{-n} = \bar{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[F_n e^{jn\omega_0 t} + \bar{F}_n e^{-jn\omega_0 t} \right] \\ &= F_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[F_{cn} \cos(n\omega_0 t) + F_{sn} \sin(n\omega_0 t) \right] \\ &= F_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |F_n| \cos(n\omega_0 t + \arg F_n) \end{aligned}$$

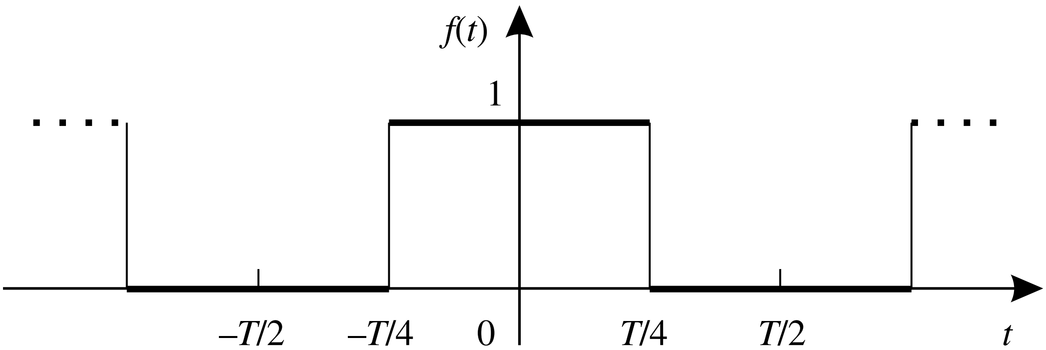
$$F_{cn} = 2\mathrm{Re}(F_n) = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$F_{sn} = -2\mathrm{Im}(F_n) = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- Analisi armonica (nel dominio della frequenza)
  - ⋆ F_0: componente a pulsazione nulla
  - ⋆ F_n: armoniche ($n = 1$ fondamentale)
  - ⋆ min $n_1 : F_{n_1} \neq 0$ (pulsazione minima), max $n_2 : F_{n_2} \neq 0$ (pulsazione massima) $\Rightarrow [n_1\omega_0, n_2\omega_0]$ (banda)

- Sviluppo in serie dell'onda quadra

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \le t < -T/4 \\ 1 & -T/4 \le t < T/4 \\ 0 & T/4 \le t < T/2 \end{cases}$$



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

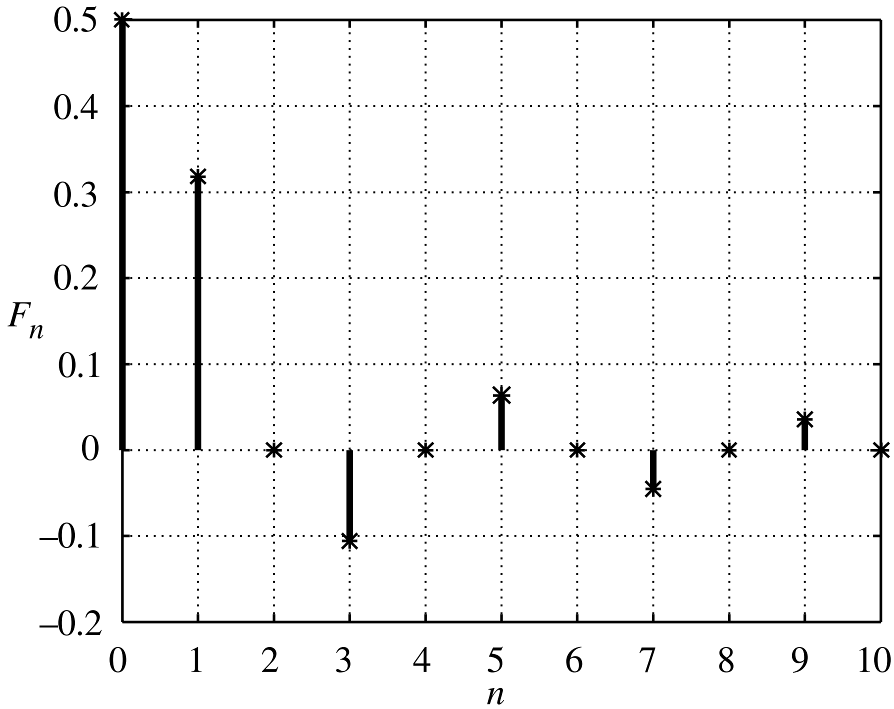
$$\Downarrow$$

⋆ segnale a banda illimitata

$$F_0 = \frac{1}{2}$$

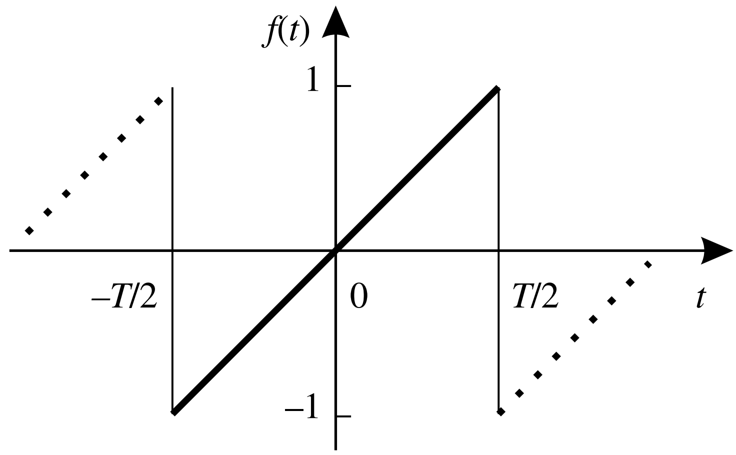
$$|F_n| = \left|\frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right| = \begin{cases} 1/n\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\arg F_n = \arg\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 1, 5, 9\ldots \\ \pi & n = 3, 7, 11\ldots \end{cases}$$



- Esempio

$$f(t) = \frac{2}{T}t \qquad -T/2 \le t < T/2$$

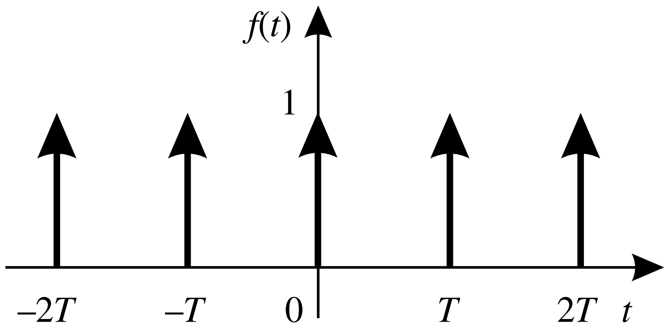


⋆ segnale a banda illimitata

$$F_0 = 0 \qquad F_n = j\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\right) \qquad n = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$$

- Sviluppo in serie di un treno di impulsi

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{imp}(t - kT)$$

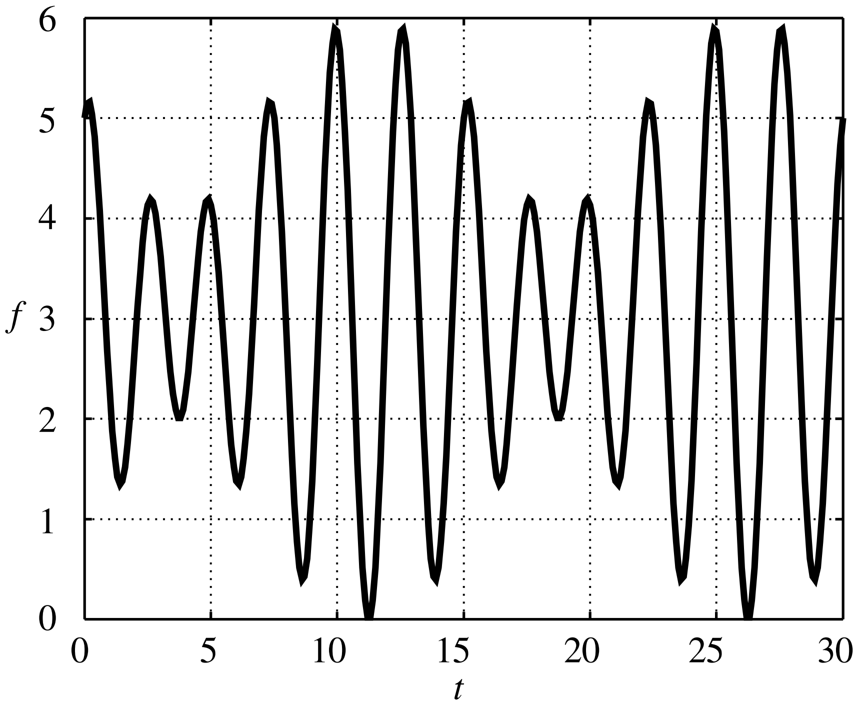


  ⋆ segnale a banda illimitata

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{imp}(t-kT)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{imp}(t-kT)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

- Esempio ($\omega_0 = 2\pi/15$)

$$f(t) = 3 + \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2\cos\left(\frac{4}{5}\pi t\right)$$



⋆ segnale a banda limitata $[0, 4\pi/5]$

$$F_0 = 3 \qquad F_{s5} = 1 \qquad F_{c6} = 2$$

Proprietà principali

- Linearità: f con spettro F_n, g con spettro $G_n \Rightarrow \alpha f + \beta g$ con spettro $\alpha F_n + \beta G_n$

- Funzione pari: $f(-t) = f(t) \Rightarrow F_{sn} = 0, n = 1, 2, \ldots$

- Funzione dispari: $f(-t) = -f(t) \Rightarrow F_0 = 0$, $F_{cn} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

- Uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{=\infty} |F_n|^2$$

  - ⋆ f reale $\Rightarrow$ potenza media del segnale
  - ⋆ banda essenziale: tra la minima e quella a cui 95% della potenza media

TRASFORMATA DI FOURIER

Forma esponenziale

- Funzione f complessa $\Rightarrow$ spettro di f

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

  - $\star$ $|F(j\omega)|$: spettro di ampiezza
  - $\star$ $\arg F(j\omega)$: spettro di fase

- Formula di antitrasformazione

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

  - $\star$ f reale ($F(-j\omega) = \bar{F}(j\omega)$)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left[F(j\omega)e^{j\omega t} + \bar{F}(j\omega)e^{-j\omega t}\right] d\omega$$

Forma trigonometrica

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \left[F(j\omega)\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \bar{F}(j\omega)\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right)\right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \left[F_c(j\omega)\cos(\omega t) + F_s(j\omega)\sin(\omega t)\right] d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |F(j\omega)|\cos(\omega t + \arg F(j\omega)) d\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_c(j\omega) &= 2\mathrm{Re}(F(j\omega)) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\
F_s(j\omega) &= -2\mathrm{Im}(F(j\omega)) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt
\end{aligned}
$$

- Analisi armonica (nel dominio della frequenza)
  - ⋆ infinità di armoniche
  - ⋆ min $\omega_1 : F_{j\omega_1} \neq 0$ (pulsazione minima), max $\omega_2 : F_{j\omega_2} \neq 0$ (pulsazione massima) $\Rightarrow [\omega_1, \omega_2]$ (banda)

- Trasformata dell'impulso

$$\mathcal{F}[\mathrm{imp}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

- Trasformata di funzioni esponenziali ($\sigma \in R^-$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{\sigma t}\mathrm{sca}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma t}\mathrm{sca}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{(\sigma - j\omega)t} dt = \left.\frac{e^{(\sigma - j\omega)t}}{\sigma - j\omega}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega - \sigma}\end{aligned}$$

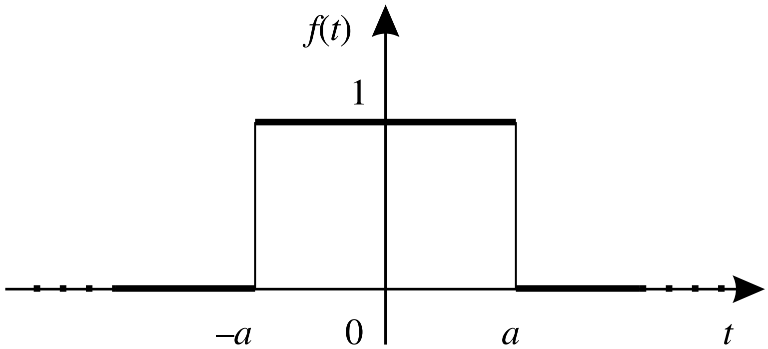
$$\mathcal{F}[e^{-\sigma t}\mathrm{sca}(-t)] = \int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \frac{-1}{j\omega + \sigma}$$

- Esempio (banda: $\omega = \omega_0$)

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi \mathrm{imp}(\omega - \omega_0)$$

- Trasformata dell'impulso rettangolare ($a > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -a \leq t < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

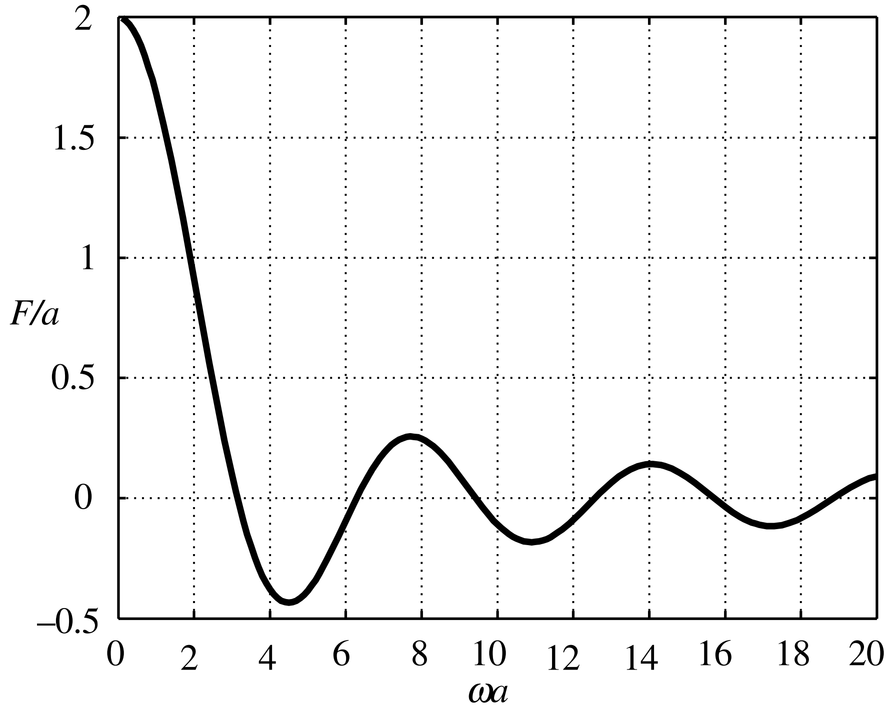


$$\Downarrow$$

⋆ segnale a banda illimitata

$$F(j0) = 2a$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt = 2a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$$



2
1.5
1
F/a
0.5
0
–0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
ωa

Proprietà principali

- Linearità

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega)$$

- Trasformata del seno, del coseno e delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\mathrm{imp}(\omega - \omega_0) + \mathrm{imp}(\omega + \omega_0)]$$
$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = j\pi[\mathrm{imp}(\omega + \omega_0) - \mathrm{imp}(\omega - \omega_0)]$$

- Trasformata della funzione segno

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{\sigma \to 0^-} \left(e^{\sigma t}\mathrm{sca}(t) - e^{-\sigma t}\mathrm{sca}(-t) \right) \qquad t \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \lim_{\sigma \to 0^-} \left(\frac{1}{j\omega - \sigma} + \frac{1}{j\omega + \sigma} \right) = \frac{2}{j\omega}$$

- Trasformata della costante

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\mathrm{imp}(-\omega) = 2\pi\mathrm{imp}(\omega)$$

- Trasformata dello scalino

$$\mathcal{F}[\mathrm{sca}(t)] = \pi\mathrm{imp}(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

- Funzione pari: $f(t) = f(-t) \Rightarrow F_s(j\omega) = 0, \omega \geq 0$
- Funzione dispari: $f(t) = -f(-t) \Rightarrow F_c(j\omega) = 0, \omega \geq 0$
- Uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

  - ⋆ f reale $\Rightarrow$ energia del segnale
  - ⋆ banda essenziale: tra la minima e quella a cui 95% dell'energia totale

- Tabella di trasformate

$f(t)$	$F(j\omega)$
$\mathrm{imp}(t)$	1
1	$2\pi\mathrm{imp}(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$ $\sin(\omega_0 t)$ $\cos(\omega_0 t)$	$2\pi\mathrm{imp}(\omega-\omega_0)$ $j\pi\left[\mathrm{imp}(\omega+\omega_0)-\mathrm{imp}(\omega-\omega_0)\right]$ $\pi\left[\mathrm{imp}(\omega-\omega_0)+\mathrm{imp}(\omega+\omega_0)\right]$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\mathrm{sca}(t)$	$\pi\mathrm{imp}(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$e^{\sigma t}\mathrm{sca}(t), \sigma<0$	$\frac{1}{j\omega-\sigma}$
$e^{-\sigma t}\mathrm{sca}(-t), \sigma<0$	$-\frac{1}{j\omega+\sigma}$
$\sin(\omega_0 t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\mathrm{imp}(\omega-\omega_0)-\mathrm{imp}(\omega+\omega_0)\right]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega}$
$\cos(\omega_0 t)\mathrm{sca}(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{imp}(\omega-\omega_0)+\mathrm{imp}(\omega+\omega_0)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega}$
$e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)\mathrm{sca}(t), \sigma<0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega-\sigma)^2+\omega_0^2}$
$e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t)\mathrm{sca}(t), \sigma<0$	$\frac{j\omega-\sigma}{(j\omega-\sigma)^2+\omega_0^2}$

Relazioni con la trasformata di Laplace

- $f(t) = 0, t < 0, \bar{\sigma} < 0$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = F(s) = \mathcal{L}[f(t)]|_{s=j\omega}$$

- $\bar{\sigma} \geq 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$$

- Utilità della trasformata di Fourier in forma trigonometrica: segnali (non periodici) come somma di un'infinità numerabile di armoniche