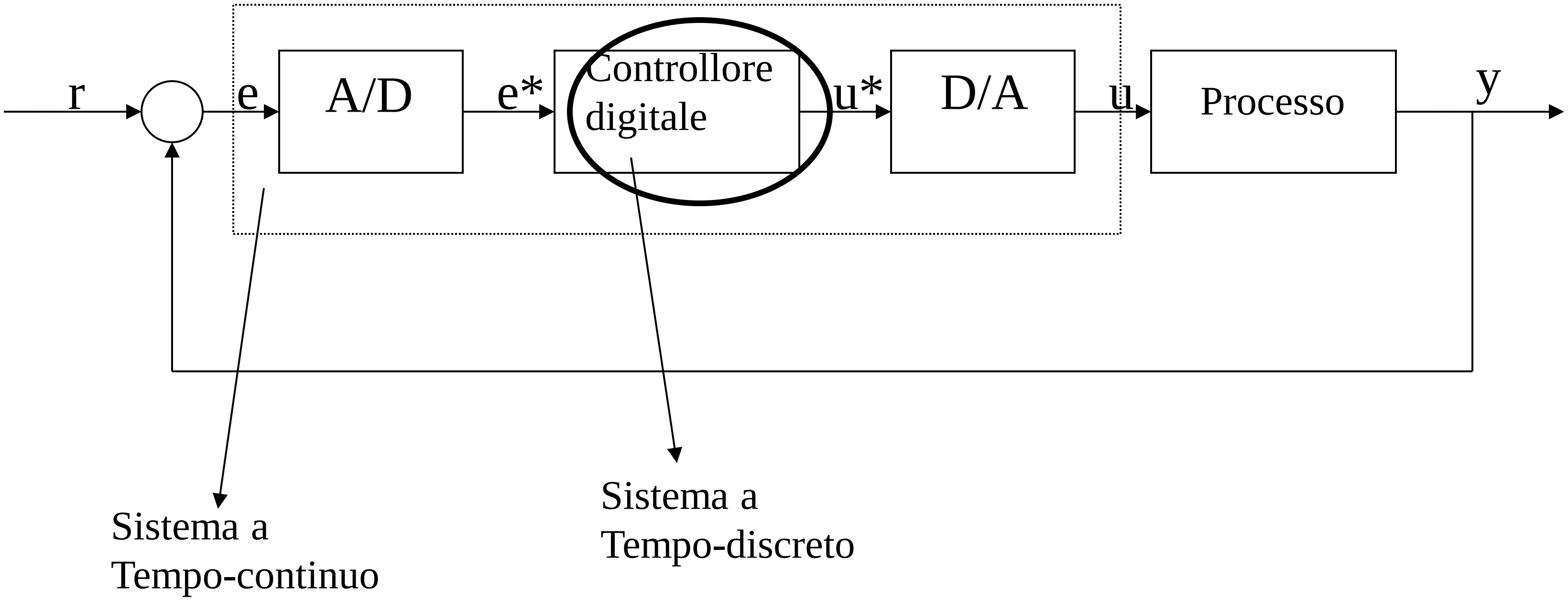
Controllo Digitale

Docente Prof. Francesco Amato

- I vantaggi esibiti dai controllori digitali sono:
  - Basso costo
  - Flessibilità
  - Possibilità di implementare leggi di controllo comunque complesse
  - Integrazione delle funzionalità proprie di un sistema di controllo con funzionalità di altra natura (supervisione, diagnostica, etc.)
- Il controllore digitale è in pratica un processore, *cioè un sistema a tempo-discreto*, che va interfacciato in modo opportuno con il processo da controllare.



Si evidenzia l'interazione tra sistemi a tempo-continuo e a tempo-discreto; per questo motivo si parla di sistemi di controllo "ibridi".

- Si può avere una descrizione del processo complessivo
  – Dal punto di vista “continuo”
  – Dal punto di vista “discreto”
- Dunque lo studio dei sistemi di controllo digitale richiede la conoscenza dei
  – Sistemi a tempo-continuo (Fondamenti di Automatica + prima parte di questo corso)
  – Sistemi a tempo-discreto (la seconda parte di questo corso)

- I sistemi a tempo-discreto sono caratterizzati dal fatto che la variabile temporale è intera invece che reale.
- Dunque ingresso e uscita sono sequenze di numeri

$$\{u(k)\}_{k\in N} \qquad \{y(k)\}_{k\in N}$$

e sono più semplicemente denotati con *u(k)* e *y(k)*.

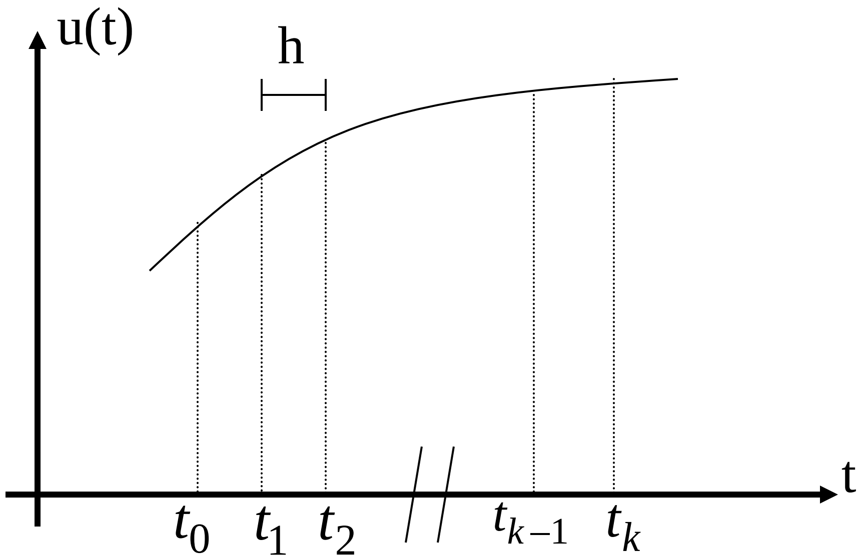
Esempio 1

- Si consideri il processo di ammortamento di un capitale *C* mediante rate semestrali.
- Per tale processo si può considerare come ingresso la rata da pagare semestralmente e come uscita il capitale restante da ammortare.
- Se si indica con *i* il tasso di interesse annuo si ha che il sistema è descritto dalla seguente *equazione alle differenze*

$$y(k) = \left(1 + \frac{i}{2}\right) y(k-1) - u(k)$$

Esempio 2

- Questo esempio evidenzia come un algoritmo di calcolo possa essere visto come un sistema a tempo-discreto.
- Supponiamo di voler calcolare l'integrale di una funzione *u(t)* con il metodo dei trapezi



- Si può vedere l'integrazione della funzione con il metodo dei trapezi come un processo che alla sequenza di ingresso $u(t_k)$ associa $y(t_k)$, dove
  - $u(t_k)$ rappresenta il valore della funzione all'istante t_k
  - $y(t_k)$ rappresenta il valore dell'integrale da t_0 a t_k
- Si ha

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + \frac{\left(u(t_k) + u(t_{k-1})\right)h}{2}$$

- Ponendo $k \rightarrow t_k$ si ha

$$y(k) = y(k-1) + \frac{\left(u(k) + u(k-1)\right)h}{2}$$

Funzione di trasferimento dei sistemi discreti – la Z-trasformata

- La Z-trasformata gioca per i sistemi discreti lo stesso ruolo che la trasformata di Laplace gioca per i sistemi continui.
- Data una funzione discreta *f(k)*, la trasformata Z di *f(k)* è definita come

$$F(z) = Z\big(f(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

Principali proprietà della Z-trasformata

- Anticipo

$$Z\big(f(k+1)\big) = zF(z) - zf(0)$$

- Ritardo

$$Z\big(f(k-1)\big) = \frac{1}{z}F(z)$$

- Teorema del valore finale

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

- Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Coppie di *Z*-trasformate di interesse

- Impulso

$$\delta(k) \leftrightarrow 1$$

- Gradino

$$1(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

- Potenza

$$\lambda^k \leftrightarrow \frac{z}{z-\lambda}$$

- Posto

$$\lambda_{\pm} = \alpha \pm j\omega = \rho e^{j\theta}$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \theta = \arctan \frac{\omega}{\alpha}$$

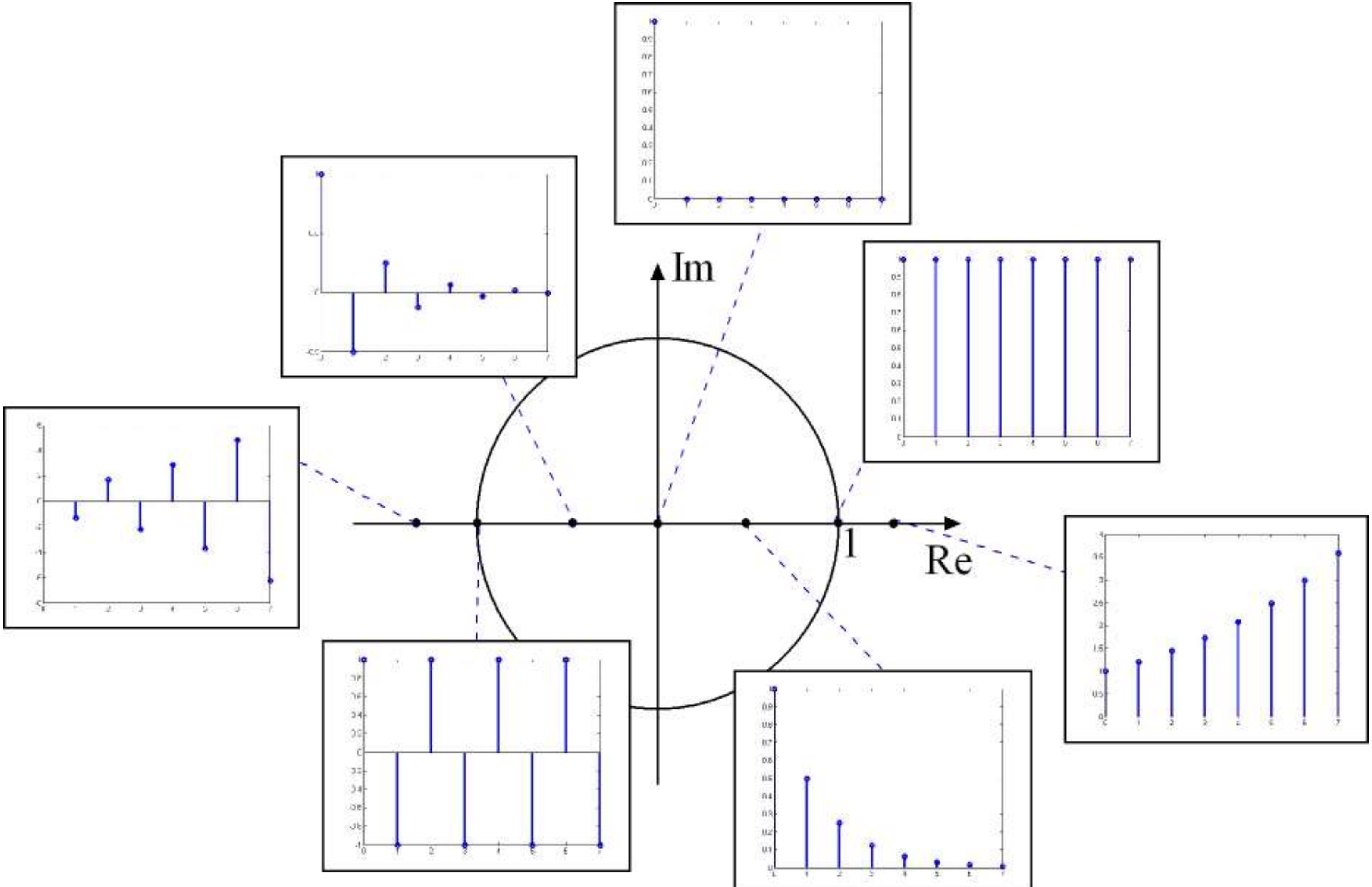
- Si ha

$$\rho^k sen(\theta k) \leftrightarrow z \frac{\omega}{(z-\alpha)^2 + \omega^2}$$

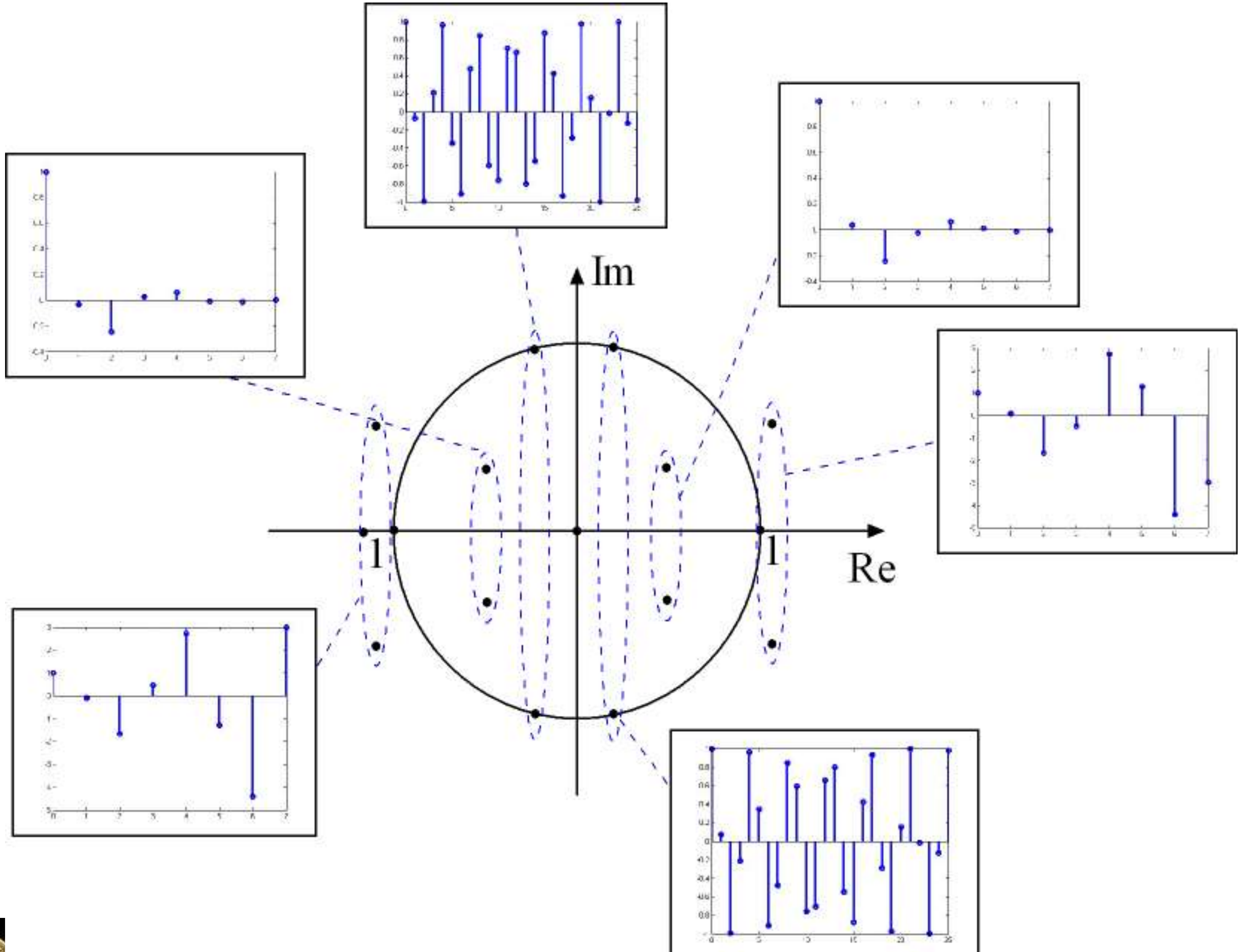
$$\rho^k \cos(\theta k) \leftrightarrow z \frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$a\rho^k \cos(\theta k) + \frac{b + \alpha a}{\omega} \rho^k sen(\theta k) \leftrightarrow z \frac{az + b}{(z-\alpha)^2 + \omega^2}$$

Modi di evoluzione di un sistema LTI tempo-discreto: modi aperiodici

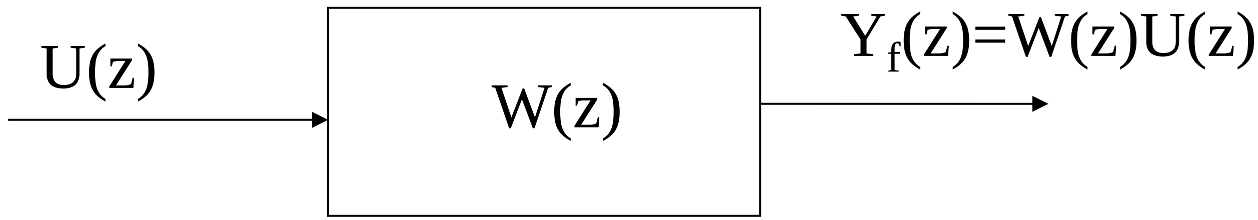


Modi di evoluzione di un sistema LTI tempo-discreto: modi pseudoperiodici



- Per trovare l’antitrasformata di una data funzione *F(z)* bisogna, al solito, effettuare uno sviluppo in fratti semplici e quindi antitrasformare ogni addendo utilizzando le trasformate fondamentali viste prima.
- Si noti che, per quanto riguarda l’antitrasformata di una data *F(z)*, nello svilupparla in fratti semplici conviene mettere in evidenza una *z*.

Funzione di trasferimento



La fdt di un sistema discreto è il rapporto tra la trasformata Z dell’uscita e quella dell’ingresso.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Esercitazione

- Calcolare la risposta forzata al gradino (*risposta indiciale*) per gli Esempi 1,2.

Esercizio

- Calcolare la risposta forzata del sistema avente fdt

$$W(z) = \frac{z - 1/3}{z^2 - 3/4z + 1/8}$$

per $u(k)=sen(\pi/6\ k)$.