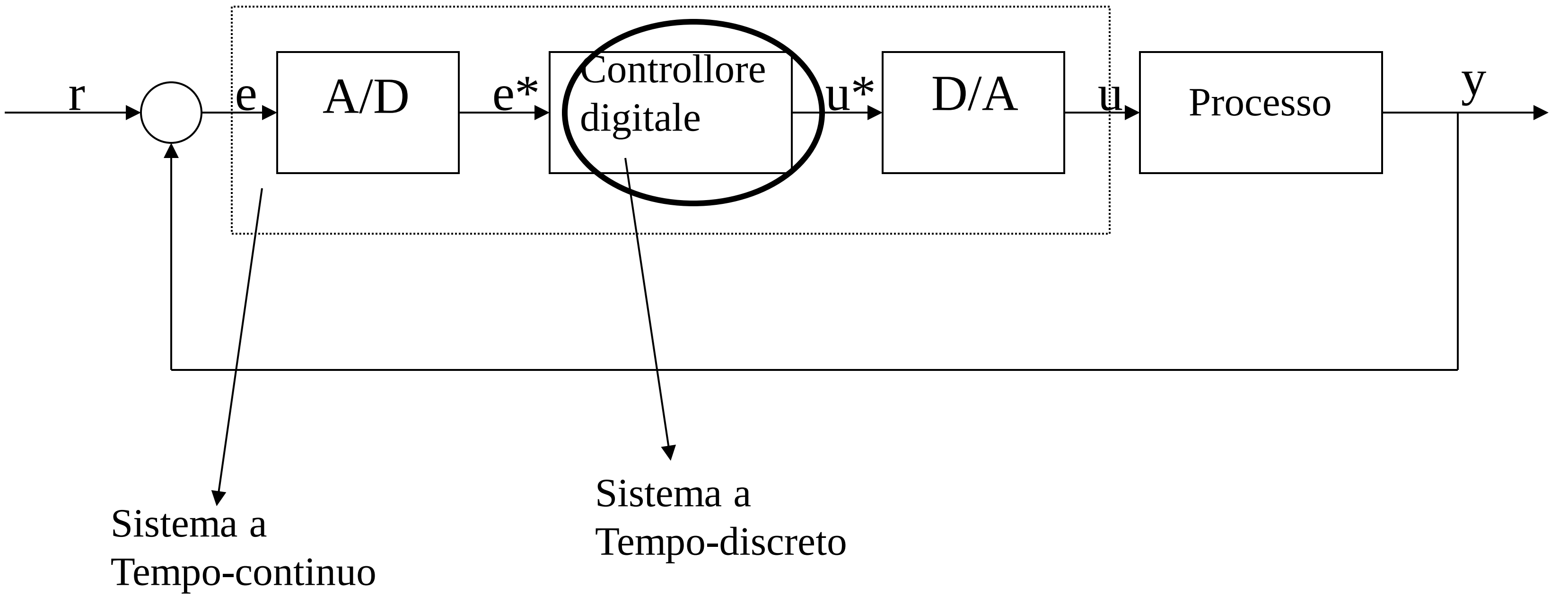
Progetto dei Sistemi di Controllo Digitali

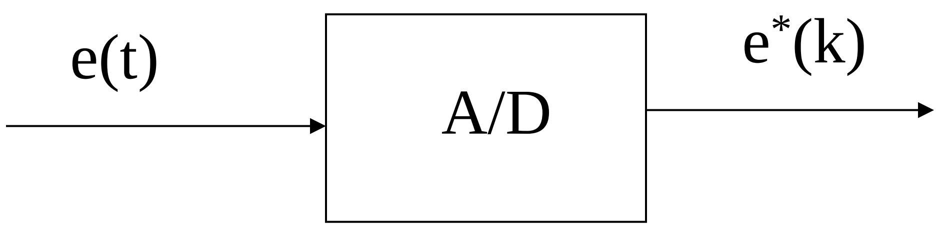
Docente: Prof. Francesco Amato

Schema di un sistema di controllo digitale



Il convertitore analogico/digitale (campionatore)

- Poiché il controllore digitale è un sistema a tempo-discreto e l’impianto da controllare è un sistema a tempo-continuo, abbiamo bisogno di un dispositivo che trasformi un segnale continuo in uno discreto.

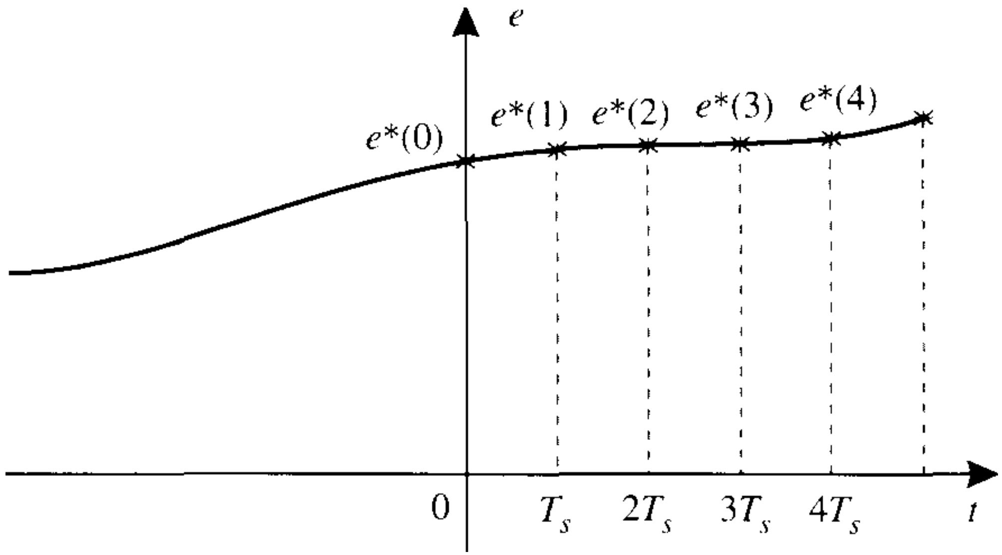


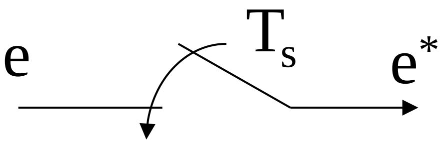
- Tale dispositivo si chiama convertitore analogico – digitale (A/D).

- Il convertitore analogico-digitale più diffuso è il campionatore, il quale effettua la seguente operazione

$$e^*(k) = e(kT_s)$$

dove T_s si chiama *periodo di campionamento* e rappresenta la durata dell'intervallo di tempo che intercorre tra due campioni successivi.


e
e*(0)
e*(1)
e*(2)
e*(3)
e*(4)
0
T_s
2T_s
3T_s
4T_s
t


e
T_s
e*

- A partire da T_s si definiscono la frequenza di campionamento

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

e la pulsazione di campionamento

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Problema fondamentale del campionamento

- Il problema fondamentale quando si campiona un segnale è la perdita di informazione.
- Infatti è ovvio che lo stesso segnale $e^*(k)$ può essere generato da infinite funzioni a tempo-continuo $e(t)$.
- Per cui dato un segnale $e^*(k)$ impossibile risalire al segnale originale $e(t)$.
- Come limitare questo problema sarà discusso in seguito.

Quantizzazione

- Il campionatore definito precedentemente è *ideale* in quanto si suppone che negli istanti di campionamento il valore di e^* coincida con quello di e.
- In realtà $e^*(k)$ è rappresentato all'interno di una parola macchina di un calcolatore, che ha lunghezza finita.
- Dunque il campionamento introduce un'altra approssimazione, detta *quantizzazione*, che è dovuta all'arrotondamento del valore vero di $e^*(k)$.

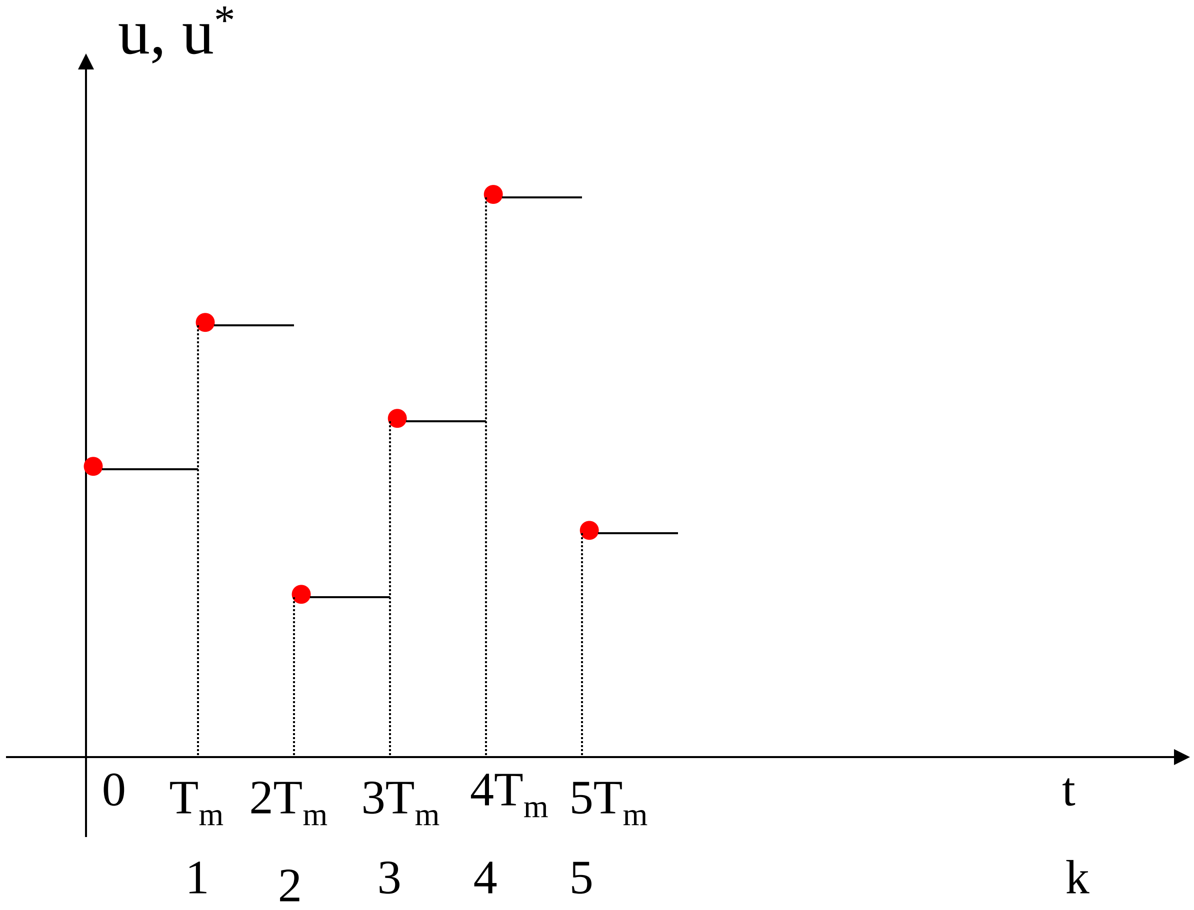
- A causa della quantizzazione non sono distinguibili, dopo il campionamento, valori di *e(t)* che differiscono tra loro di una quantità inferiore al livello di quantizzazione impiegato.
- La quantizzazione è un fenomeno difficilmente analizzabile in modo rigoroso.
- Il suo effetto si sente tanto più quanto minore è la lunghezza della parola macchina e quanto più piccolo è T_s .

Convertitori Digitali-Analogici (D/A)

- Il convertitore D/A ha il compito di trasformare il segnale di controllo a tempo-discreto $u^*(k)$ calcolato dal regolatore digitale in un segnale a tempo-continuo $u(t)$.
- Il convertitore D/A più usato è la *tenuta (mantenitore) di ordine zero (ZOH, zero order hold)* che opera come segue

$$u(t) = u^*(k) \quad t \in \left[kT_m, (k+1)T_m\right]$$

dove T_m è il *passo di mantenimento*.


u, u*
0
T_m
2T_m
3T_m
4T_m
5T_m
t
1
2
3
4
5
k

Il regolatore digitale

- Il regolatore digitale calcola in tempo reale la sequenza $u^*(k)$ in funzione della sequenza $e^*(k)$.
- E' importante notare che il legame tra e^* e u^*, cioè la legge di controllo, può essere realizzato da un generico algoritmo realizzato via software.
- Quindi in principio si possono utilizzare leggi di controllo anche molto complicate.
- E' questo uno dei grossi vantaggi dell'utilizzo dei regolatori digitali.

- Per semplicità, nel seguito, considereremo solo regolatori digitali costituiti da sistemi a tempo-discreto lineari e stazionari.
- Dunque il regolatore digitale viene individuato dalla sua funzione di trasferimento $R^*(z)$ e si ha

$$U^*(z) = R^*(z)E^*(z)$$

Temporizzazione

- Nel seguito si assumerà che il periodo di campionamento e quello di mantenimento coincidano, cioè

$$T_m = T_s = T$$

- Nel seguito si discuterà in maggiore dettaglio il comportamento dei vari elementi che compongono un sistema di controllo digitale.
- Per poter proseguire è necessario introdurre il concetto di trasformata di Fourier discreta.

La trasformata di Fourier discreta

- Data una funzione discreta *f(k)* si chiama trasformata di Fourier discreta di *f(k)* la seguente funzione complessa di variabile reale

$$F^*\left[f(k)\right] = F(\theta) = F\left(e^{j\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-j\theta k}$$

Campionamento: relazioni che intercorrono tra la trasformata di Fourier di un segnale tempocontinuo e della sua versione trasformata

- Sia *f(t)* un segnale a tempo-continuo e *f*(k)=f(kT)* il corrispondente segnale campionato. Si ha innanzitutto

$$F^*\left[f^*(k)\right] = F^*\left(e^{j\theta}\right)$$
$$F\left[f(t)\right] = F\left(j\omega\right)$$

- Allora si ha

$$F^*\left(e^{j\theta}\right)\Big|_{\theta=\omega T} = \frac{1}{T} F_S\left(j\omega\right)$$

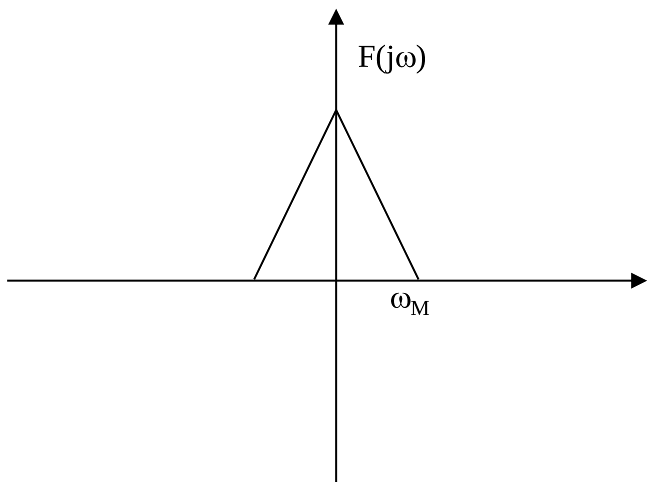
- F_S è legato alla trasformata di Fourier della funzione continua in accordo alla seguente relazione

$$F_S(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_S)) \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T}$$

- Si noti che F_s è periodica di periodo ω_s ed Hermitiana.
- Quindi tale funzione è nota quando sia noto il suo comportamento per $\omega \in [0, \omega_N]$, dove $\omega_N = \omega_S/2$ è detta pulsazione di Nyquist.

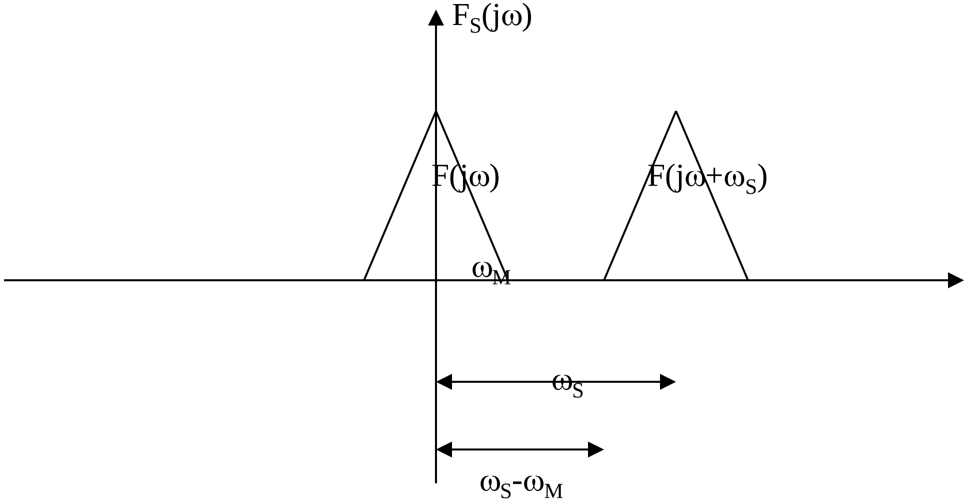
Aliasing: il Teorema del Campionamento

- Supponiamo che $F(j\omega)$ sia a banda rigorosamente limitata in $[0, \omega_M)$.



- Facendo riferimento alla figura si comprende che perché non si abbia sovrapposizione tra gli spettri replicati occorre e basta che

$$\omega_S - \omega_M > \omega_M$$



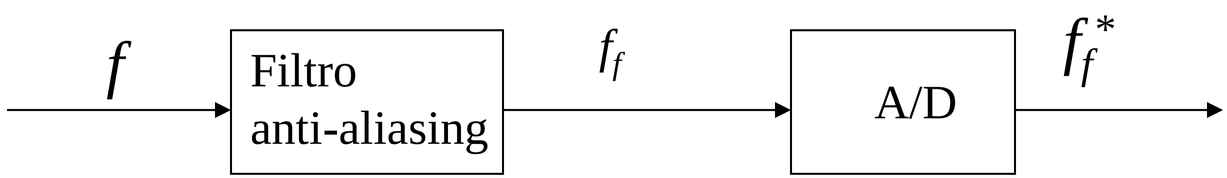
- E quindi

$$\omega_M < \frac{\omega_S}{2} = \omega_N = \frac{\pi}{T}$$

- Se tale condizione è soddisfatta è possibile (utilizzando un filtro passa - basso ideale) ricostruire il segnale di partenza (*Teorema di Shannon*).

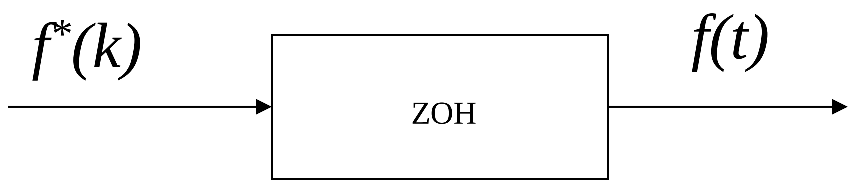
Filtri anti-aliasing

- Quando si campiona un segnale *f(t) p*er ridurre gli effetti dell'aliasing è conveniente prefiltrare *f(t)* con un filtro anti-aliasing.
- Il filtro anti-aliasing è un filtro passa-basso con opportuna banda passante $[0,\omega_f]$, in modo che lo spettro del segnale da campionare non abbia componenti significative al di sopra di ω_f.
- Ovviamente dovrà essere $\omega_f < \omega_N$.



La tenuta di ordine zero

- L'obiettivo è trovare la funzione di trasferimento del dispositivo di tenuta di ordine zero.
- Sia $f^*(k)=f(kT)$ il segnale campionato discreto in ingresso alla tenuta e $f(t)$ il corrispondente segnale di uscita.



- Si ha

$$Z\left[f^*(k)\right] = F^*(z)$$
$$L\left[f(t)\right] = F(s)$$

- Ora supponiamo che sia *$f^*(k)=\delta(k)$;* in questo caso

$$F^*(z) = 1$$

- Inoltre

$$f(t) = 1(t) - 1(t-T) = h_0(t)$$

- Quindi

$$F(s) = H_0(s) = \frac{1}{s} - e^{-sT}\,\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

- Dunque è come se $H_0(s)$ fosse la trasformata di Laplace della risposta all'impulso (discreto) in ingresso.
- Quindi a buon titolo si può dire che $H_0(s)$ possa essere interpretata come la funzione di trasferimento della tenuta.

- Studiamo ora l'andamento di $H_0(s)$ nel dominio della frequenza

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

$$= e^{-j\omega T/2} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \frac{2}{\omega}$$

$$= e^{-j\omega T/2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \frac{T}{\omega T/2}$$

$$= Te^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

- Dunque

$$\left|H_0(j\omega)\right| = T\left|\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right|$$

$$\arg\big(H_0(j\omega)\big) = -\frac{\omega T}{2} + \arg\big(\sin(\omega T/2)\big)$$

- Dai diagrammi di Bode di $H_0(j\omega)$ si evince che
  - Ha un valore in continua pari a T ;
  - è praticamente costante in $[0,\omega_N]$
  - decade molto rapidamente dopo ω_N
  - risulta

$$\frac{\left|H_0(j\omega_N)\right|}{T} = \left|\frac{\sin(\omega_N T/2)}{\omega_N T/2}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cong -3db$$

- Quindi la frequenza di taglio superiore dello ZOH è circa uguale a ω_N .
- In altri termini lo ZOH si comporta come un filtro passa – basso quasi ideale.
- Per quanto riguarda la fase, poiché nell'intervallo il *sin(ωT/2)* è sempre positivo e dunque il suo argomento è nullo, si ha

$$\arg\left(H_0\left(j\omega\right)\right) = -\frac{\omega T}{2} \qquad \omega \in \left[0, \omega_N\right]$$

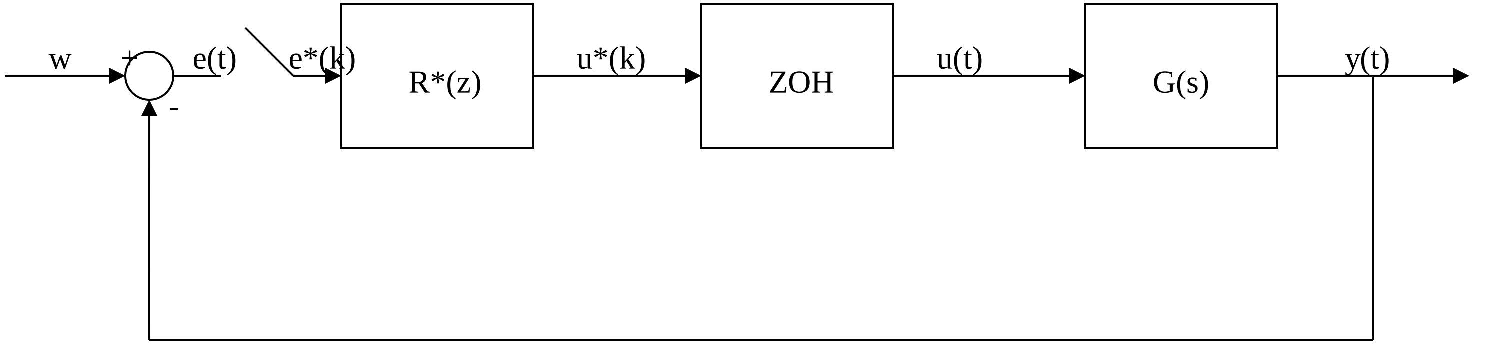
cioè si comporta come un ritardo puro pari a *T/2*.

- In definitiva

$$H_0\left(j\omega\right) \cong Te^{-j\omega T/2} \qquad \omega \in \left[0, \omega_N\right]$$

Analisi in continua dei sistemi di controllo ibridi

- Questa analisi è importante nel momento in cui si vuole effettuare la sintesi dei controllori effettuando la discretizzazione del controllore tempocontinuo.



- L’obiettivo è trovare la relazione tra *U(s)* e *E(s)*. Si ha

$$E^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} E_s\left(j\omega\right)$$

- D’altro canto poichè

$$U^*(z) = R^*(z)E^*(z)$$

Si può scrivere

$$U^*(e^{j\omega T}) = R^*(e^{j\omega T})E^*(e^{j\omega T})$$

- Abbiamo visto che

$$U(s) = H_0(s)U^*\left(e^{sT}\right)$$

- L’ultima relazione ponendo $s=j\omega$ si può riscrivere

$$U(j\omega) = H_0(j\omega)U^*\left(e^{j\omega T}\right)$$

- Alla fine si ottiene

$$U(j\omega) = \frac{1}{T}H_0(j\omega)R^*(e^{j\omega T})E_s\left(j\omega\right)$$

- Per far comparire *E(jω)* facciamo la seguente assunzione: *il segnale e(t) è a banda limitata con frequenza superiore inferiore alla frequenza di Nyquist.*
- Poiché $H_0(j\omega)$ si comporta come un filtro passa – basso con banda $[0,\omega_N]$ si ha

$$H_0(j\omega)E_s(j\omega) \cong H_0(j\omega)E(j\omega)$$

quindi

$$U(j\omega) \cong \frac{1}{T} H_0(j\omega) R^*(e^{j\omega T}) E(j\omega)$$

- Dunque la serie di campionatore, regolatore e tenuta viene approssimato dalla funzione di trasferimento

$$R(s) = \frac{1}{T} H_0(s) R^*(e^{sT})$$

- Se si approssima $H_0(j\omega)$ con $Te^{-j\omega T/2}$ nell'intervallo $[0,\omega_N]$ si ottiene

$$U(j\omega) \cong e^{-j\omega T/2} R^*(e^{j\omega T}) E(j\omega)$$

da cui

$$R(s) = e^{-sT/2} R^*(e^{sT})$$

- L’ultima formula mostra che la discretizzazione del controllore *porta un ritardo che può determinare le prestazioni e che deve essere portato in conto all’atto del progetto del controllore nel tempo continuo*.