

Richiami: funzione di trasferimento e risposta al gradino



Funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento di un sistema lineare è il rapporto di due polinomi della variabile complessa s .
- Essa è definita come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$



- I termini notevoli che compaiono nell'espressione di $W(s)$ sono:
 - Poli (zeri) reali semplici $(1+s\tau)^{\pm 1}$, dove τ è detta costante di tempo.
 - Poli (zeri) reali multipli $(1+s\tau)^{\pm 2}$
 - Poli (zeri) complessi semplici $(s^2/\omega_n^2 + 2\xi/\omega_n s + 1)^{\pm 1}$ dove ω_n è detta pulsazione naturale e ξ coefficiente di smorzamento.
 - Poli complessi multipli (raro)
- Vogliamo adesso studiare che tipo di evoluzione temporale originano i poli di $W(s)$.
- Le antitrasformate dei poli che compaiono in $W(s)$ si chiamano **modi di evoluzione** del sistema.



- **Poli reali semplici.** L'antitrasformata di $1/(1+s \tau)$ è proporzionale a $e^{-t/\tau} 1(t)$. L'andamento nel tempo di questo termine dipende dal valore di τ :
 - Se $\tau > 0$ il modo è convergente
 - Se $\tau = 0$ il modo è stazionario
 - Se $\tau < 0$ il modo è divergente
- Questo tipo di modo si chiama **aperiodico**.



- Se il modo è convergente la costante di tempo dà conto del tempo che il modo di evoluzione impiega ad estinguersi da un punto di vista ingegneristico.
- Dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo, l'ampiezza del modo di evoluzione si riduce a 1 centesimo del valore iniziale.



- **Poli reali multipli.** Consideriamo ad esempio $1/(1+s\tau)^2$. L'antitrasformata di $1/(1+s\tau)^2$ è proporzionale a $te^{-t/\tau} 1(t)$. L'andamento nel tempo di questo termine dipende dal valore di τ :
 - Se $\tau > 0$ il modo è convergente
 - Se $\tau \leq 0$ il modo è divergente



- **Poli complessi semplici.** Consideriamo $(s^2/\omega_n^2 + 2\xi/\omega_n s + 1)^{-1}$. L'antitrasformata è proporzionale a $e^{\alpha t} \sin(\omega t) 1(t)$, dove α rappresenta la parte reale del polo e ω la parte immaginaria.
- Un termine di questo tipo contiene oscillazioni modulate da una esponenziale. Il carattere del modo dipende dal valore di α :
 - Se $\alpha < 0$ il modo è convergente
 - Se $\alpha = 0$ il modo è stazionario
 - Se $\alpha > 0$ il modo è divergente
- Questo tipo di modo si chiama **pseudoperiodico**



- Ricordiamo che:

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\xi = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$



- Se il modo pseudoperiodico è convergente, allora $\xi \in [0,1]$.
- In questo caso uno ξ piccolo significa che il modo pseudoperiodico compie molte oscillazioni prima di estinguersi.



Interconnessione di sistemi

- Due sistemi con funzione di trasferimento $W_1(s)$ e $W_2(s)$ possono essere interconnessi
 - In serie $W_1(s) W_2(s)$
 - In parallelo $W_1(s) + W_2(s)$
 - In retroazione $W_1(s) / (1 + W_1(s) W_2(s))$



La risposta indiciiale

- La risposta indiciiale è la risposta *forzata* al *gradino*.
- Essa ha grande importanza per almeno due motivi:
 - In molti impianti industriali il controllo del sistema avviene usando come ingressi segnali costanti nel tempo;
 - La risposta indiciiale fornisce molte informazioni sul comportamento del sistema e quindi risulta molto utile per studiare per via sperimentale quei sistemi per i quali è difficile trovare un modello analitico.



- Il valore iniziale della risposta indiciale è sempre 0 a meno che il sistema non sia proprio. Infatti applicando il Teorema del Valore Iniziale si ha

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} sW(s) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \begin{cases} 0 & \text{se il sistema è strettamente proprio} \\ \neq 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$



- Applicando iterativamente il Teorema del Valore Iniziale si può anche ricavare un'altra informazione: quante sono le derivate nulle nell'origine.
- Questa informazione è importante perché ci permette di capire come parte la risposta indiciale.



- Il valore finale della risposta indiciale coincide con $W(0)$, infatti applicando il Teorema del valore finale si ha

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = W(0)\end{aligned}$$



- **Sistemi del primo ordine senza zeri.** Un sistema del primo ordine asintoticamente stabile è caratterizzato dalla fdt

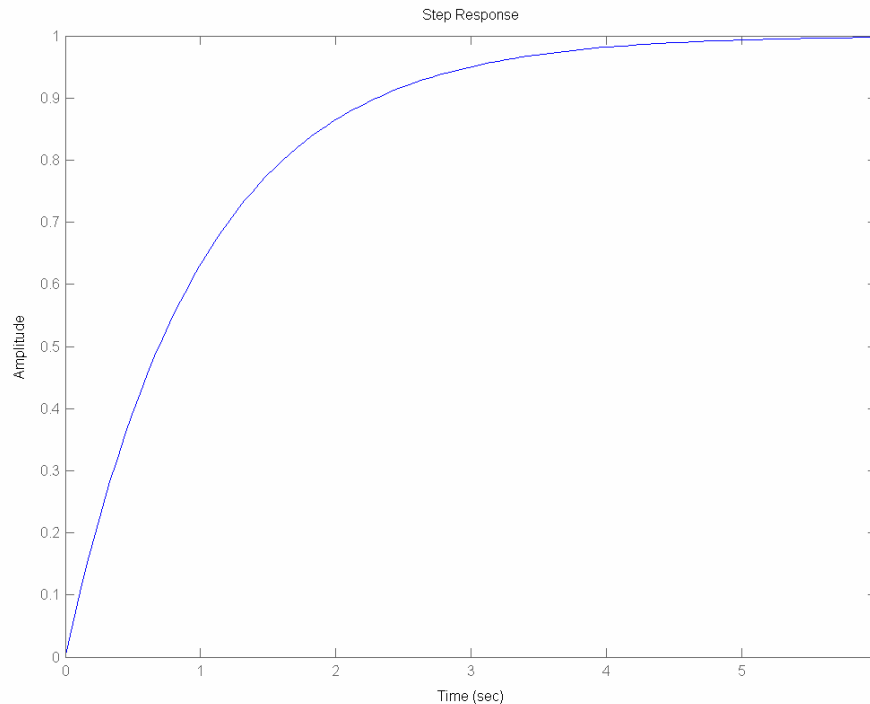
$$W(s) = \frac{k}{1 + \tau s} \quad \tau > 0$$

- Effettuando l'antitrasformata di $W(s)/s$ si ottiene

$$y(t) = k(1 - e^{-t/\tau})1(t)$$



- L'andamento tipico della risposta indiciale di un sistema del primo ordine è riportata di seguito.



- Si noti che il raggiungimento del valore finale è legato all'estinzione del termine $e^{-t/\tau}$.
- Dunque, dopo un tempo pari a 4-5 volte la costante di tempo τ , si può ritenere, da un punto di vista ingegneristico, che la risposta $y(t)$ abbia raggiunto il suo valore finale.



- **Sistema del secondo ordine con due poli reali e uno zero.** La fdt (sistema asintoticamente stabile) è

$$W(s) = \frac{k(1 + sT)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad \tau_1 > 0 \quad \tau_2 > 0$$

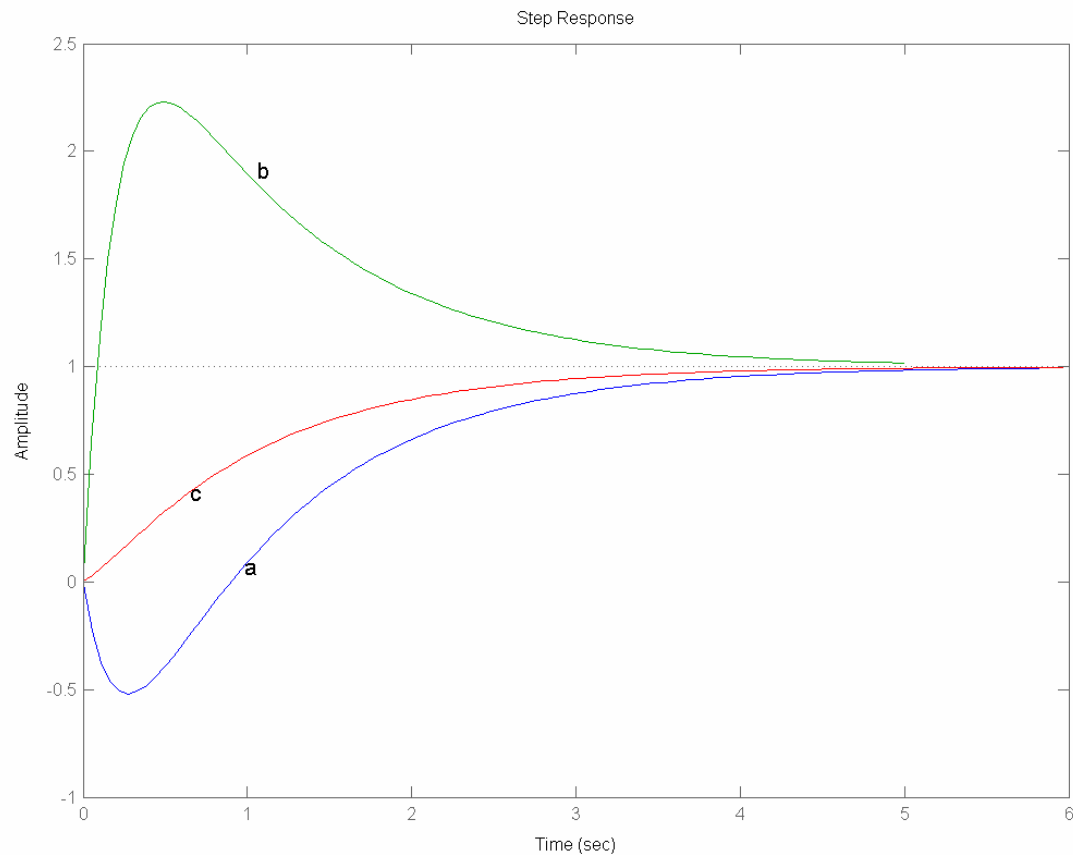
- Effettuando l'antitrasformata di $W(s)/s$ si ottiene

$$y(t) = k \left(1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) 1(t)$$



- In presenza di uno zero reale l'andamento temporale della risposta indiciale dipende fortemente dalla posizione dello zero.
- Nel seguito sono riportati tre andamenti tipici:
 - a) Zero positivo
 - b) Zero negativo più vicino all'origine del piano complesso rispetto ai poli
 - c) Zero negativo più lontano dall'origine del piano complesso rispetto ai poli





- **Sistema con due poli complessi coniugati senza zero.** Un sistema del genere possiede una fdt del tipo

$$W(s) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

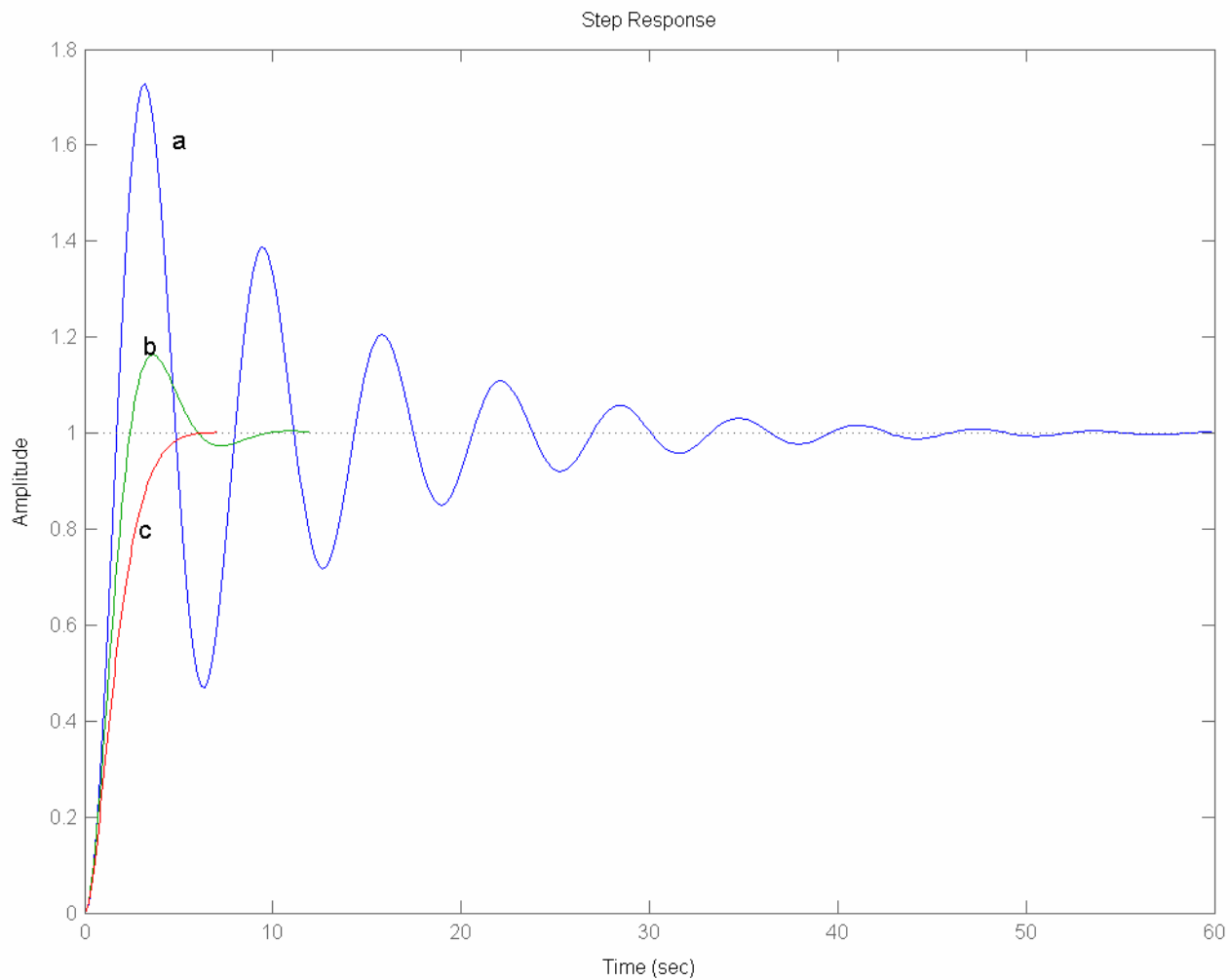
- Calcolando l'antitrasformata di $W(s)/s$ si ottiene

$$y(t) = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos \left(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t - \arctan \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \right) 1(t)$$



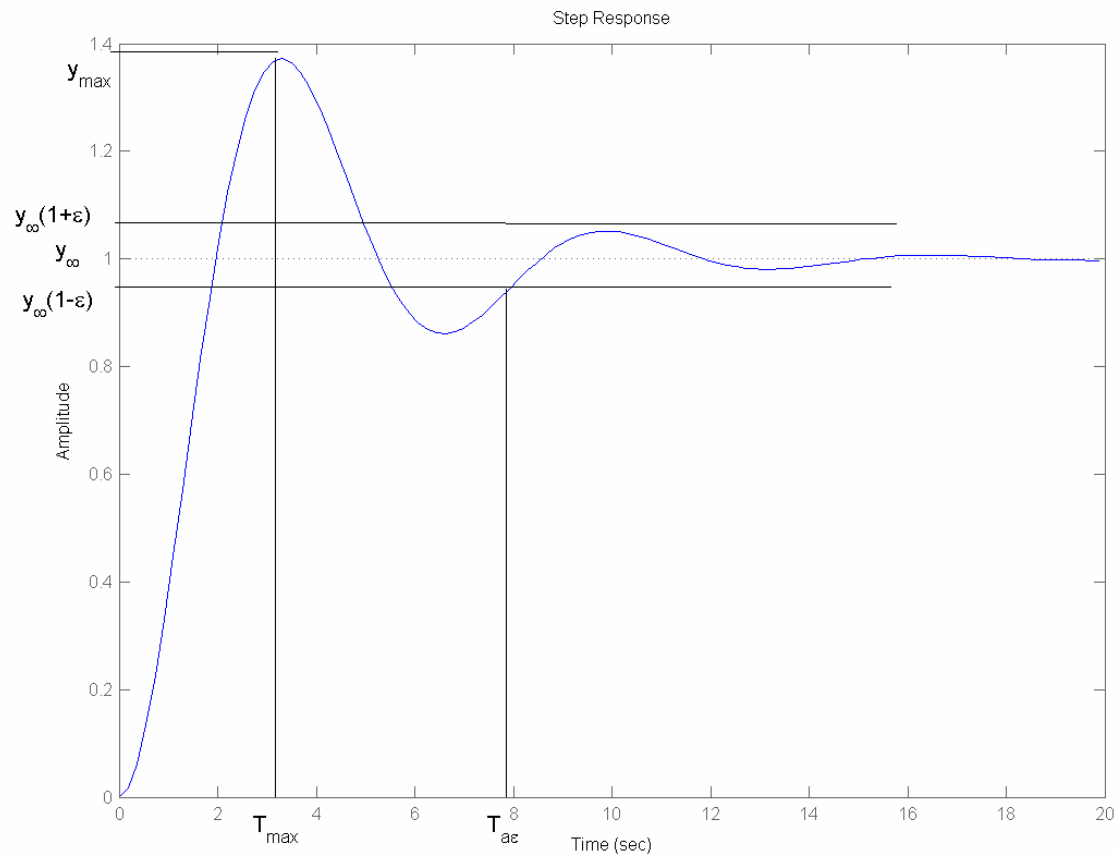
- L'andamento dell'uscita dipende fortemente dal valore di ξ . Nel seguito saranno considerati tre casi
 - ξ piccolo ($\xi=0.1$)
 - $\xi=0.5$
 - ξ grande ($\xi=0.9$)





- Nel seguito è riportata una tipica risposta indiciale di un sistema del secondo ordine, con indicazione di alcuni parametri caratteristici:
 - $T_{\max}$: istante in cui è attinto il massimo della risposta
 - $y_{\max}$: valore massimo della risposta
 - y_{∞} : valore finale della risposta al gradino (in figura = 1)
 - $T_{a\varepsilon}$: tempo di assestamento all' $\varepsilon\%$ (tempo affinché $y(t)$ entri nella fascia $y_{\infty}(1 \pm 0.01\varepsilon)$)
 - $S\% = (y_{\max} - y_{\infty}) / y_{\infty} * 100$: massima sovraelongazione percentuale





- Si può dimostrare che:

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$y_{\max} = k \left(1 + e^{-\xi\pi / \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$S\% = 100e^{-\xi\pi / \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$T_{a\varepsilon} \cong -\frac{\ln(0.01\varepsilon)}{\xi\omega_n} \quad \text{per } \varepsilon = 1 \quad T_{a1} \cong \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$



Andamento della sovraelongazione in funzione di ξ .

