Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2016/17

Realizzazione, Raggiungibilità e Osservabilità

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Rappresentazioni i.s.u. e i.u.

- Data una rappresentazione i.s.u. di un sistema LTI, si è visto che la corrispondente f.d.t.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è univocamente determinata

- Il viceversa non è vero!

- Data una fdt esistono infinite rappresentazioni i.s.u. che forniscono lo stesso comportamento ingresso-uscita

Rappresentazioni Similari

- Per convincersi di quanto detto, si consideri il sistema

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ y = C_1 x + D_1 u \end{cases}$$

- Presa una qualsiasi matrice quadrata e invertibile, T, si applichi il cambio di variabili di stato $z=Tx$

- Si ottiene il sistema

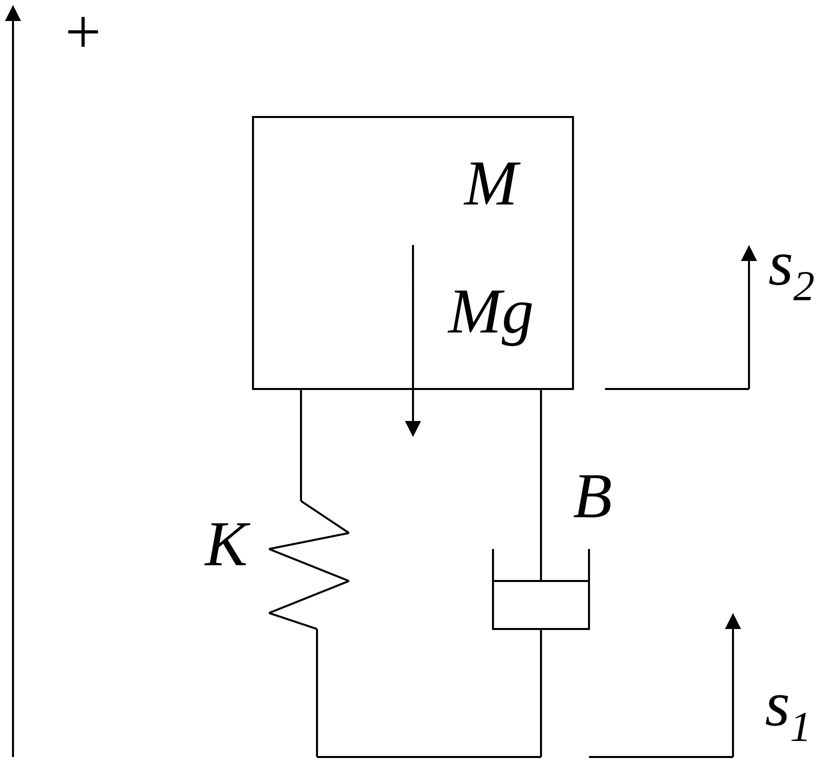
$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{z} = TA_1T^{-1}z + TB_1u := A_2 z + B_2 u \\ y = C_1T^{-1}z + D_1 u := C_2 z + D_2 u \end{cases}$$

Rappresentazioni Similari

- I due sistemi, Σ_1 e Σ_2, sono indistinguibili dal punto di vista ingresso-uscita
- Si può verificare facilmente che le corrispondenti fdt sono, infatti, identiche
- (Es: si dimostri quanto sopra calcolando $W_2(s)$)

Problema della Realizzazione

- Nell'ambito della modellistica di sistemi dinamici, abbiamo visto come spesso si possa arrivare in maniera semplice ad una rappresentazione i.s.u.
- In questi casi, partendo dalle equazioni di governo del sistema, ossia la rappresentazione i.u. nel tempo, si arrivava alla rappresentazione i.s.u. mediante opportune scelte delle variabili di stato
- Tuttavia, abbiamo visto che in alcuni casi le usuali regole per la scelta delle variabili di stato non portano ad una rappresentazione i.s.u.



s_1: quota del supporto inferiore (supposto privo di massa)

s_2: spostamento della massa

Mg: forza peso

$u=s_1$
$y=s_2$

Esempio: Sospensione Automobilistica

- Si arriva alla rappresentazione i.u.

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = B\dot{u}(t) + Ku(t) - Mg$$

- In questo caso non è possibile derivare la rappresentazione i.s.u. scegliendo lo stato in modo usuale (posizione e velocità).

Forme Canoniche di Rappresentazione

- Tipicamente si incontrano difficoltà quando nelle equazioni di governo compaiono le derivate dell'ingresso
- In tali casi si può comunque arrivare ad una rappresentazione i.s.u., ma è necessario utilizzare delle ***forme canoniche di rappresentazione***

Derivazione delle Forme Canoniche

- Si consideri la generica rappresentazione i.u.

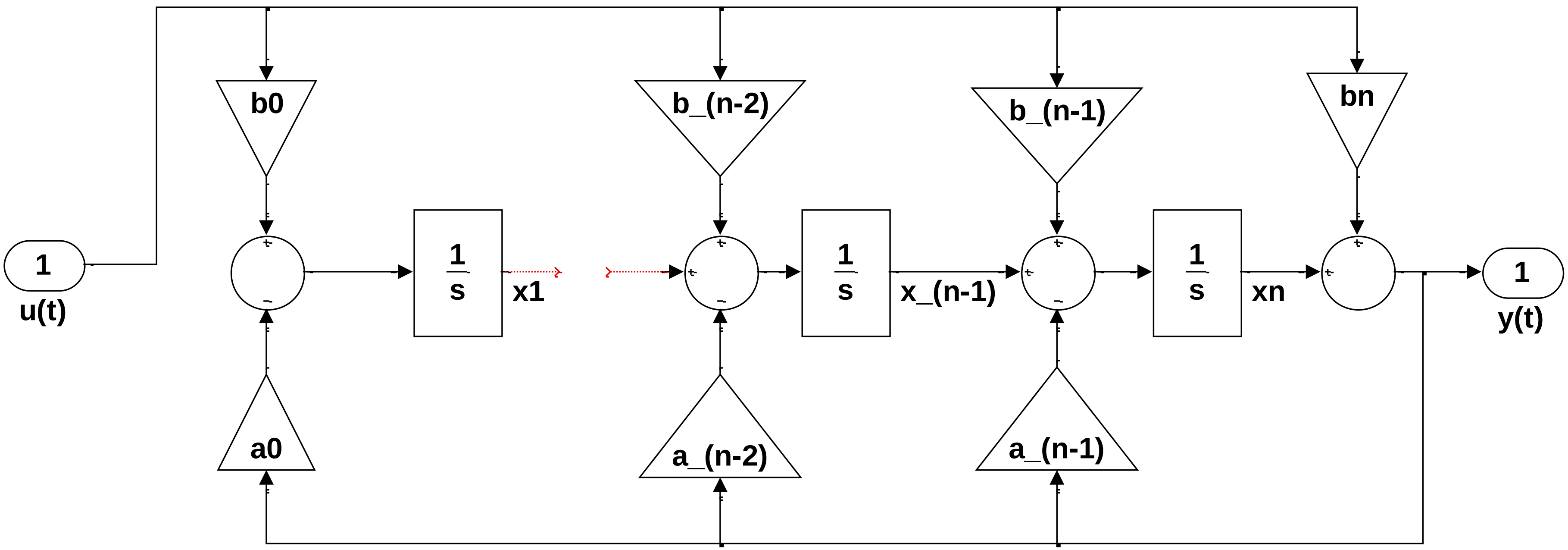
$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + b_0 u$$

- Portando tutti i termini al secondo membro, tranne $y^{(n)}$, e integrando n volte si ottiene

$$y = b_n u + \int \left(b_{n-1} u - a_{n-1} y\right) dt + \iint \left(b_{n-2} u - a_{n-2} y\right) dt + \ldots + \underbrace{\iint \ldots \int}_{n \text{ volte}} \left(b_0 u - a_0 y\right) dt$$

- A partire da questa equazione si può costruire uno schema di realizzazione

Schema Canonico di Realizzazione



- Per tale schema, risulta naturale scegliere come variabili di stato le uscite degli integratori

Forma Canonica di Osservabilità

- Dallo schema precedente si ricava la seguente rappresentazione, detta **forma canonica di osservabilità**

$$
\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix} u
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \hat{b}_n u
$$

$$
\hat{b}_n = b_n, \quad \hat{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, \dots, n-1
$$

Forma Canonica di Raggiungibilità

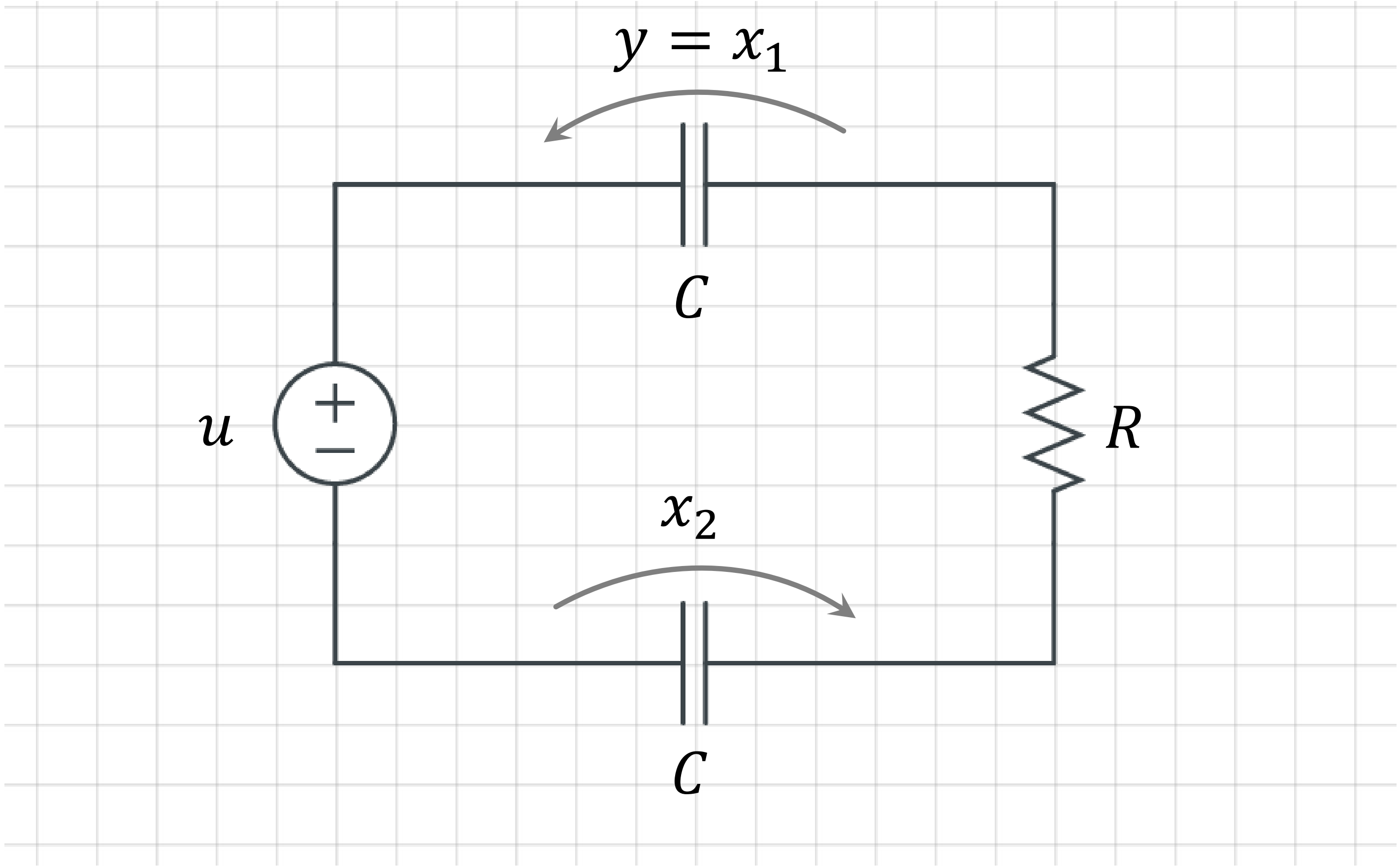
- La duale della precedente viene detta **forma canonica di raggiungibilità**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \dots & \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix} x + \hat{b}_n u$$

$$\hat{b}_n = b_n, \quad \hat{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Esempio di sistema non completamente raggiungibile



Esempio di sistema non completamente raggiungibile

- La rappresentazione ISU del sistema nell'esempio 2 risulta essere

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$y(t) = x_1(t)$$

- Definiamo il cambio di variabili

$$\hat{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$\hat{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Esempio di sistema non completamente raggiungibile

- Il sistema a valle del cambio di variabili diventa

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1(t) - u(t))$$
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = 0$$
$$y(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t))$$

- La differenza tra le tensioni ai capi dei condensatori non è modificabile tramite l'ingresso $u(t)$.

- Scegliendo opportunamente $u(t)$, invece, è possibile far assumere alla variabile $\hat{x}_1$ qualsiasi valore finito in un tempo arbitrario $\tilde{t} > 0$. (dimostrare)

Raggiungibilità: definizione

- Dato un sistema LTI, **uno stato $\tilde{x}$ del sistema si dice raggiungibile se** esistono un istante di tempo finito $\tilde{t} > 0$ e un ingresso $\tilde{u}$, definito tra 0 e $\tilde{t}$, tali che, detto $\tilde{x}_f(t)$, il movimento forzato dello stato generato da $\tilde{u}$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$, risulti $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$.

- **Un sistema i cui stati siano tutti raggiungibili si dice completamente raggiungibile**.

- Quindi, uno stato è raggiungibile se è possibile, con un'opportuna scelta dell'ingresso, condurre in esso la traiettoria del sistema in un tempo finito arbitrario $\tilde{t}$.

- Si noti che la raggiungibilità dipende solo dall'eq. di stato, ossia dalle matrici A e B.

Raggiungibilità: teorema

- Un sistema LTI (ovvero la coppia (A, B)) è completamente raggiungibile se e solo se il rango della **matrice di raggiungibilità**

$$M_r = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times mn}$$

è pari a n

- Se il sistema ha un solo ingresso ($m = 1$), la matrice M_r è quadrata e la condizione di sopra diventa $\det(M_r) \neq 0$.

- Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, si può isolare la sua parte dotata della proprietà di raggiungibilità.

Raggiungibilità: decomposizione

- Dato un sistema LTI, la sua eq. di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

- può essere trasformata, mediante un opportuno, non univoco, cambio di variabili di stato $\hat{x} = T_r x$, nella forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{B}\,u(t),$$

dove $n_r = \rho\left(\left[\hat{B}_a \quad \hat{A}_a\hat{B}_a \quad \hat{A}_a^2\hat{B}_a \dots \quad \hat{A}_a^{n-1}\hat{B}_a\right]\right)$,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$$

Gli autovalori di $\hat{A}$ sono quelli dei blocchi sulla diagonale

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

Raggiungibilità: decomposizione

- La matrice T_r^{-1} si ottiene selezionando n_r colonne indipendenti da M_r e completando con $n - n_r$ colonne arbitrarie linearmente indipendenti dalle prime

- Partizionando il vettore $\hat{x}$, si ottiene il sistema decomposto nella forma

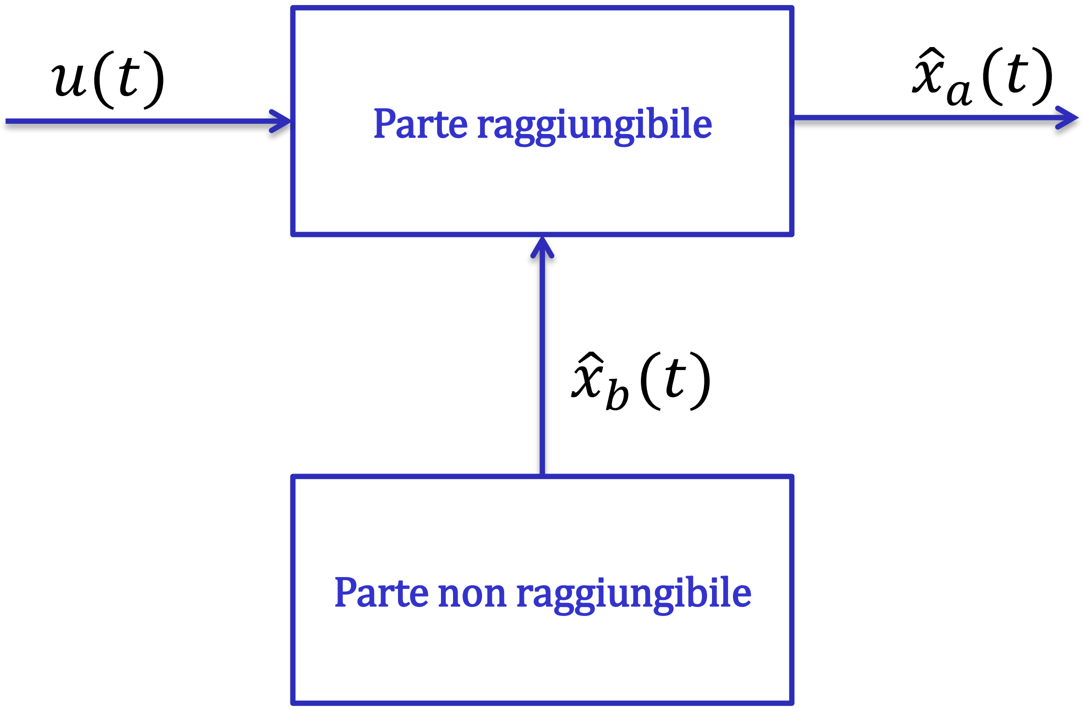
$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(t) + \hat{B}_a u(t)$$
$$\dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t)$$

- Da questa forma si evince che $u(t)$ non è in grado di influenzare la **parte non raggiungibile** del sistema, ossia le equazioni di $\hat{x}_b(t)$

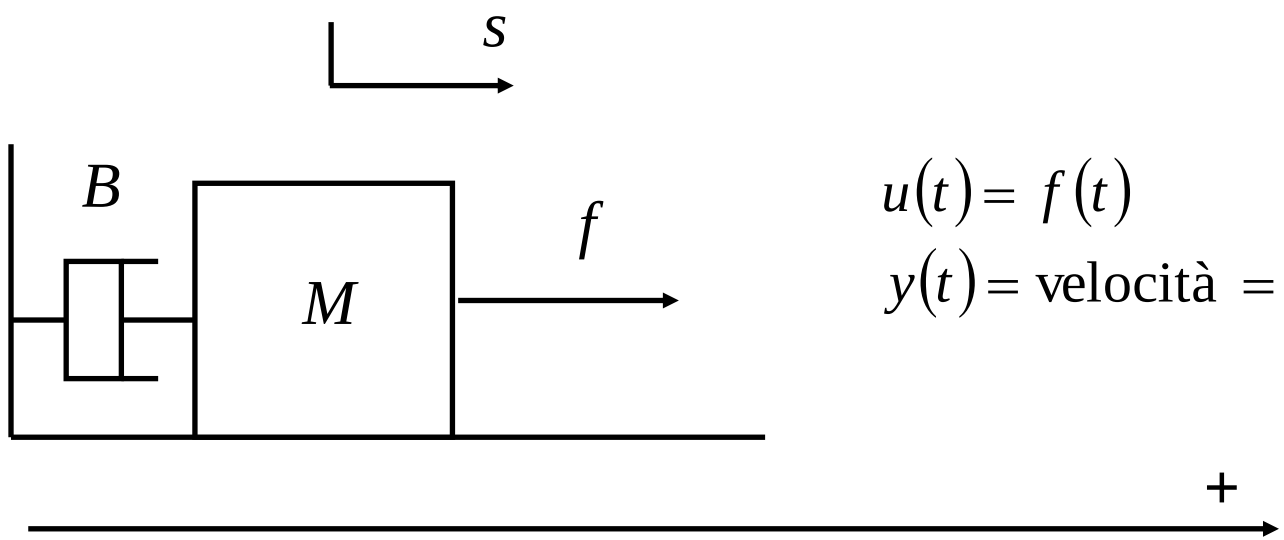
- Viceversa, le equazioni di $\hat{x}_a(t)$ rappresentano la **parte raggiungibile del sistema**

Raggiungibilità: decomposizione

- Rappresentiamo mediante un diagramma a blocchi il sistema decomposto



Esempio di sistema non completamente osservabile



$$u(t) = f(t)$$
$$y(t) = \text{velocità} = \dot{s}$$

Esempio di sistema non completamente osservabile

- Scegliendo posizione e velocità come variabili di stato, otteniamo la ISU

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

- L'esame di un qualunque transitorio dell'uscita non permette di ricavare informazioni circa il valore della posizione $x_1(t_0)$ all'istante iniziale.

- Se si scegliesse come uscita la posizione, sarebbe invece possibile ricavare l'intero stato iniziale a partire dal movimento dell'uscita.

Osservabilità: definizione

- Dato un sistema LTI, **uno stato $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ del sistema si dice non osservabile se**, qualunque sia $\tilde{t} > 0$ finito, detto $\tilde{y}_l(t)$, $t \geq 0$, il movimento libero dell'uscita generato da $\tilde{x}$, risulta $\tilde{y}_l(t) = 0$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$.

- **Un sistema privo di stati non osservabili si dice completamente osservabile**.

- Quindi, uno stato $\tilde{x}$ è non osservabile se l'evoluzione libera a partire da tale stato è indistinguibile da quella che si ottiene partendo dallo stato nullo.

- Si noti che l'osservabilità dipende solo dalla coppia di matrici (A, C).

Osservabilità: teorema

- Un sistema LTI (ovvero la coppia (A, C)) è completamente osservabile se e solo se il rango della **matrice di osservabilità**

$$M_o = \left[C^T \quad A^T C^T \quad {A^T}^2 C^T \quad \dots \quad {A^T}^{n-1} C^T \right] \in \mathbb{R}^{n \times pn}$$

  è pari a n.

- Se il sistema ha una sola uscita ($p = 1$), la matrice M_o è quadrata e la condizione di sopra diventa $\det(M_o) \neq 0$.

- Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, si può isolare la sua parte dotata della proprietà di osservabilità.

Osservabilità: decomposizione

- Dato un sistema LTI, con $u(t) = 0$, esso può essere trasformato, mediante un opportuno, non univoco, cambio di variabili di stato $\hat{x} = T_o x$, nella forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\,\hat{x}(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) \end{aligned},$$

dove $n_o = \rho\left(\begin{bmatrix} \hat{C}^T & \hat{A}^T\hat{C}^T & {\hat{A}^T}^2\hat{C}^T & \dots & {\hat{A}^T}^{n-1}\hat{C}^T \end{bmatrix}\right)$,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$$

Gli autovalori di $\hat{A}$ sono quelli dei blocchi sulla diagonale

$$\hat{C} = [\hat{C}_a \quad 0], \qquad \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$$

Osservabilità: decomposizione

- La matrice T_o^{-1} si ottiene selezionando $n - n_o$ colonne indipendenti ζ_i da M_o, tali che $M_o \zeta_i = 0$, e anteponendo n_o colonne arbitrarie linearmente indipendenti dalle prime

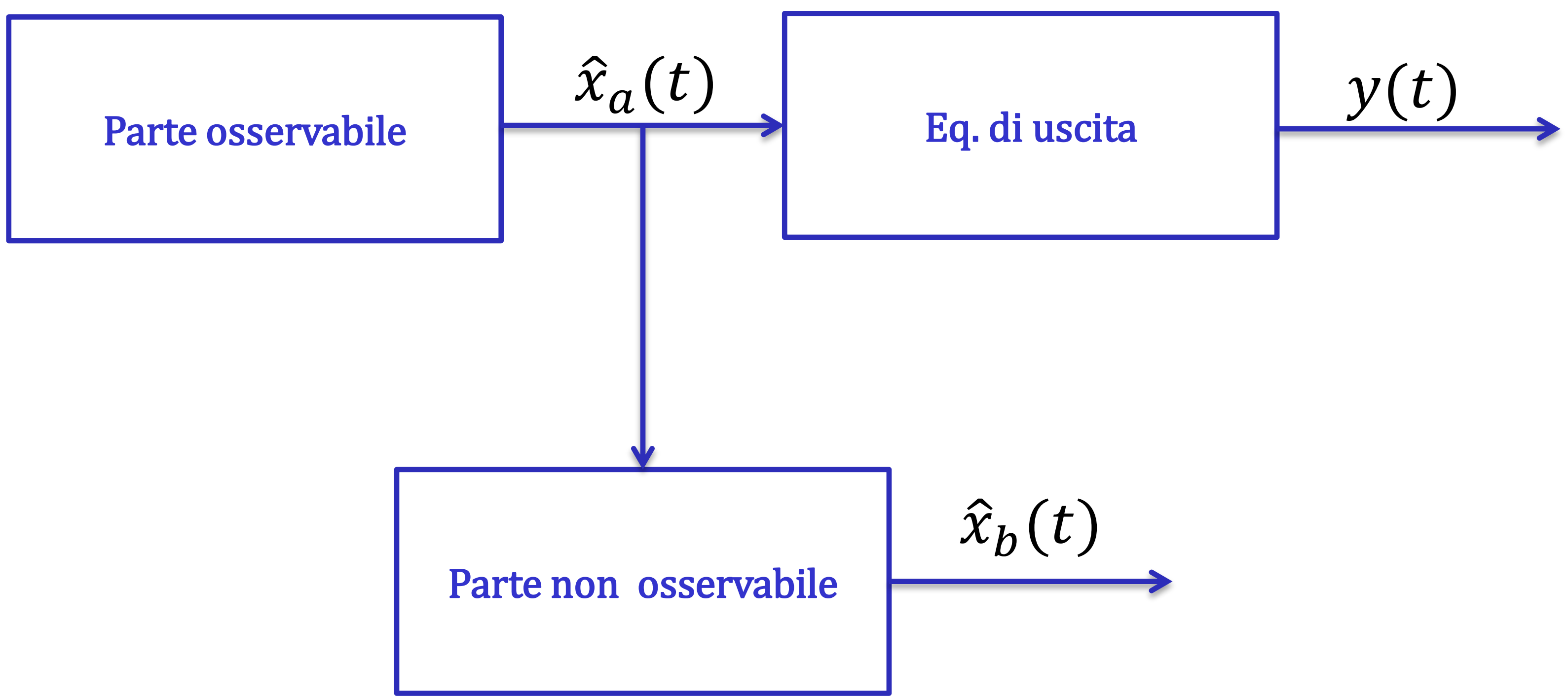
- Partizionando il vettore $\hat{x}$, si ottiene il sistema decomposto nella forma

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_a(t) &= \hat{A}_a \hat{x}_a(t) \\
\dot{\hat{x}}_b(t) &= \hat{A}_{ba} \hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \\
y(t) &= \hat{C}_a \hat{x}_a(t)
\end{aligned}
$$

- Da questa forma si evince che i movimenti della **parte non osservabile** del sistema, ossia le equazioni di $\hat{x}_b(t)$, non influenzano l'uscita

- Viceversa, le equazioni di $\hat{x}_a(t)$ rappresentano la **parte osservabile del sistema**

- Rappresentiamo mediante un diagramma a blocchi il sistema decomposto



Decomposizione canonica e forma minima

- Un sistema LTI può essere sia non completamente raggiungibile sia non completamente osservabile.
- In questo caso, è possibile definire un cambio di variabili che decompone il sistema in quattro sottosistemi:
  - Sottosistema completamente raggiungibile ed osservabile
  - Sottosistema completamente raggiungibile ma non osservabile
  - Sottosistema completamente osservabile ma non raggiungibile
  - Sottosistema non completamente raggiungibile né osservabile
- Questa è detta **decomposizione canonica, o di Kalman**
- Se è completamente raggiungibile ed osservabile si dice **sistema in forma minima**: non è possibile ricavare un sistema equivalente con un numero inferiore di variabili.

Forme di Rappresentazione Minime

- Le forme canoniche di osservabilità e di raggiungibilità sono rappresentazioni minime, ossia non esiste una rappresentazione di ordine minore

- Si dimostri che la forma canonica di raggiungibilità (osservabilità) è sempre completamente raggiungibile (osservabile)

- Particolare attenzione va prestata nel caso in cui i valori dei coefficienti sono di ordini di grandezza differenti, poiché la matrice A può essere fortemente mal condizionata

Esempio