

Corso di "Fondamenti di Automatica"
A.A. 2016/17

Analisi Parametrica della Stabilità

Prof. Carlo Cosentino

Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051

carlo.cosentino@unicz.it
<http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino>

- ✦ Quando il sistema è di ordine elevato non è possibile ricavare l'espressione analitica delle radici
- ✦ In tal caso risulta difficile effettuare un'analisi della stabilità del sistema al variare di uno o più parametri
- ✦ Ad es. si supponga di voler determinare il range di valori di p per cui risulta stabile il seguente sistema

$$G(s) = \frac{s + 1}{2s^3 + 5ps^2 + (3 + p)s + 1}$$

- ✧ Il criterio di Routh-Hurwitz permette di studiare il segno della parte reale delle radici di un polinomio
- ✧ Non è necessario calcolare esplicitamente le radici
- ✧ E' molto utile nello studio della stabilità dei sistemi lineari tempo-invarianti, in forma di fdt o di rappresentazione i-u

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- ✧ Infatti i poli sono le soluzioni dell'eq.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

✧ Consideriamo la fdt

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

✧ Nel seguito assumeremo che la $G(s)$ sia in forma tale che

✧ Il coefficiente a_n sia positivo

✧ Il coefficiente a_0 sia diverso da zero

✧ **Condizione necessaria:** se i poli hanno tutti parte reale negativa i coefficienti a_0, \dots, a_n hanno tutti lo stesso segno

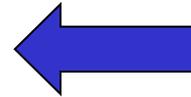
✧ **Nel caso di polinomio di 2° grado la condizione è anche sufficiente**

✧ Si consideri l'equazione caratteristica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

✧ Il primo passo consiste nel costruire la **tabella di Routh**

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots	$b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix}$
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	\dots	$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{pmatrix}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots

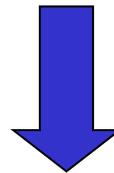


- ✦ Procedendo dalla riga n -esima verso il basso il numero di elementi non nulli decresce progressivamente
- ✦ La tabella di Routh ha $n+1$ righe (non nulle) e l'ultima riga ha un solo elemento diverso da zero
- ✦ Ad es. si costruisca la tabella di Routh del polinomio

$$f(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

✦ Si costruisca la tabella di Routh del polinomio

$$f(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$



<i>4</i>		<i>1</i>	<i>3</i>	<i>10</i>
<i>3</i>		<i>2</i>	<i>5</i>	<i>0</i>
<i>2</i>		<i>0.5</i>	<i>10</i>	<i>0</i>
<i>1</i>		<i>-35</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>0</i>		<i>10</i>	<i>0</i>	<i>0</i>

✦ Si consideri la tabella di Routh di un dato polinomio $f(s)$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

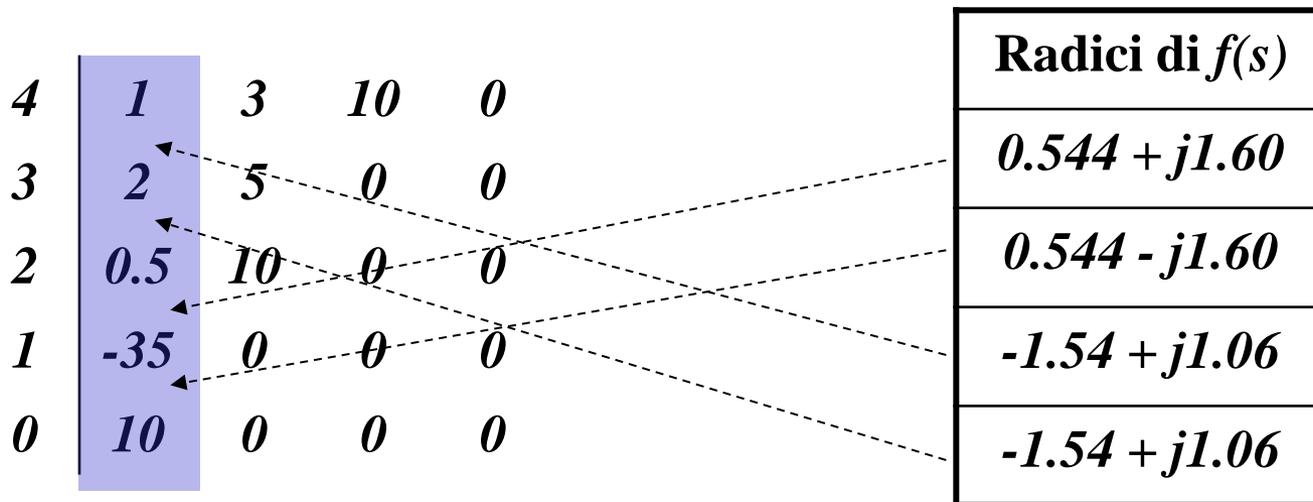
✦ Ad ogni variazione di segno nella prima colonna, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa

- Si consideri il polinomio dato nel precedente esempio

$$f(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

- Quante variazioni ci sono nella prima colonna della tabella di Routh?

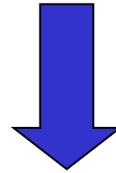
4	1	3	10	0	<p style="text-align: center;">Radici di $f(s)$</p> <p style="text-align: center;">$0.544 + j1.60$</p> <hr/> <p style="text-align: center;">$0.544 - j1.60$</p> <hr/> <p style="text-align: center;">$-1.54 + j1.06$</p> <hr/> <p style="text-align: center;">$-1.54 - j1.06$</p>
3	2	5	0	0	
2	0.5	10	0	0	
1	-35	0	0	0	
0	10	0	0	0	



- ✦ Se i termini di una riga sono moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo, il numero di variazioni di segno rimane immutato
- ✦ Sfruttando questa proprietà si può costruire più semplicemente la tabella trascurando la divisione per il primo elemento della riga superiore (si noti però che il suo segno va sempre portato in conto)

✦ Esempio: si calcoli la tabella di Routh semplificata di

$$f(s) = 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$



4	5	3	1	
3	4	2	0	
2	2	4		(non divido per 4)
1	-12	0		(non divido per 2)
0	4			

- Si voglia determinare il range di valori del parametro p tali che la seguente fdt risulti stabile

$$G(s) = \frac{s + 1}{2s^3 + 5ps^2 + (3 + p)s + 1}$$

- Dalla tabella di Routh semplificata del denominatore si ricava

3	2	$3+p$		$\left\{ \begin{array}{l} 5p > 0 \\ 5p^2 + 15p - 2 > 0 \end{array} \right.$
2	$5p$	1		
1	$5p^2 + 15p - 2$	0		$\left\{ \begin{array}{l} p > 0 \\ p < -3.13 \wedge p > 0.128 \end{array} \right.$
0	1	0		

 $p > 0.128$

- ✦ Nella costruzione della tabella di Routh si possono presentare i seguenti due casi singolari
 - a) *Il primo termine di una riga è nullo*
 - b) *Tutti i termini di una riga sono nulli*

- ✦ In questi due casi il completamento della tabella richiede l'utilizzo di opportuni artifici matematici che esulano dagli scopi della presente trattazione

- ✦ Un altro strumento di grande utilità ai fini dell'analisi parametrica è il criterio di Kharitonov
- ✦ Si applica quando si conoscono gli intervalli di variazione dei coefficienti del polinomio caratteristico, ossia

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

dove

$$a_k^- \leq a_k \leq a_k^+$$

✦ Dato il polinomio $p(s)$, descritto sinteticamente nella forma

$$p(s): \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

si definiscano i quattro polinomi ausiliari

$$p_a(s): \{a_0^+, a_1^+, a_2^-, a_3^-, a_4^+, a_5^+, a_6^-, \dots\}$$

$$p_b(s): \{a_0^-, a_1^-, a_2^+, a_3^+, a_4^-, a_5^-, a_6^+, \dots\}$$

$$p_c(s): \{a_0^+, a_1^-, a_2^-, a_3^+, a_4^+, a_5^-, a_6^-, \dots\}$$

$$p_d(s): \{a_0^-, a_1^+, a_2^+, a_3^-, a_4^-, a_5^+, a_6^+, \dots\}$$

- Le radici del polinomio $p(s)$ hanno parte reale negativa per qualsiasi valore dei coefficienti, purché compreso nell'intervallo assegnato, **se e solo se** tutte le radici dei polinomi p_a, p_b, p_c, p_d hanno parte reale negativa

✦ Si consideri il polinomio caratteristico

$$p(s) = s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120$$

✦ e si supponga di conoscere i coefficienti a meno di un errore del 10%, per cui possiamo definire gli intervalli

$$0.9 \leq a_0 \leq 1.1 \qquad 13.5 \leq a_1 \leq 16.5$$

$$76.5 \leq a_2 \leq 93.5 \qquad 202.5 \leq a_3 \leq 247.5$$

$$246.6 \leq a_4 \leq 301.4 \qquad 108 \leq a_5 \leq 132$$

✦ Determinare se il polinomio ha sempre radici a parte reale negativa all'interno di tali intervalli di valori dei parametri

✦ I polinomi ausiliari sono

$$p_a(s) = 1.1s^5 + 16.5s^4 + 76.5s^3 + 202.5s^2 + 301.4s + 132$$

$$p_b(s) = 0.9s^5 + 13.5s^4 + 93.5s^3 + 247.5s^2 + 246.6s + 108$$

$$p_c(s) = 1.1s^5 + 13.5s^4 + 76.5s^3 + 247.5s^2 + 301.4s + 108$$

$$p_d(s) = 0.9s^5 + 16.5s^4 + 93.5s^3 + 202.5s^2 + 246.6s + 132$$

✦ Utilizzando un calcolatore, ovvero il criterio di Routh, si vede che le radici di questi polinomi hanno tutte parte reale negativa, e quindi anche $p(s)$ per qualsiasi valore dei coefficienti all'interno degli intervalli assegnati