Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2016/17

Linearizzazione e stabilità dei sistemi nonlineari

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Sistemi nonlineari

- I metodi presentati in questi corso sono validi per sistemi lineari e tempo invarianti

- Vediamo come è possibile estendere questi risultati ad un sistema lineare generico, descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$u \in R^m$$
$$x \in R^n$$
$$y \in R^p$$

- La strategia adottata consiste nell'approssimare il comportamento del sistema nonlineare con quello di un modello lineare

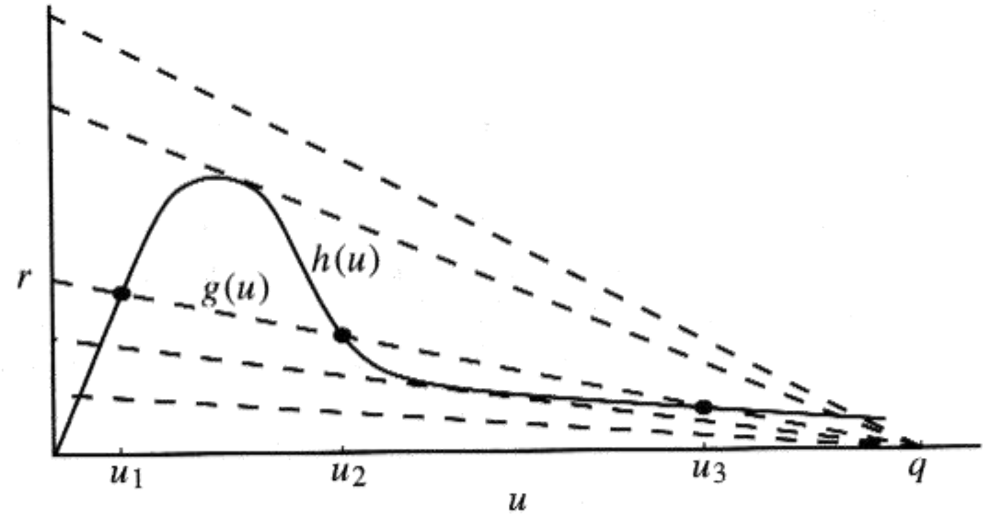
- Un sistema LTI ammette un'unico punto di equilibrio, che coincide con l'origine dello spazio di stato (x=0)

- I sistemi nonlineari possono ammettere zero, uno o più punti equilibrio (anche infiniti); ad esempio

$$\frac{du}{d\tau} = ru\left(1-\frac{u}{q}\right)-\frac{u^2}{1+u^2}=0$$

$$\underbrace{r\left(1-\frac{u}{q}\right)}_{g(u)}=\underbrace{\frac{u}{1+u^2}}_{h(u)}$$

Le intersezioni sono i punti di equilibrio: possono essere 1 o 3 a seconda del valore dei parametri r e q



Punti di equilibrio di un sistema nonlineare

- Si consideri un sistema soggetto ad un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$
- In corrispondenza di tale ingresso avremo un punto di equilibrio se esiste un valore dello stato $\bar{x}$ tale che

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

- Corrispondentemente avremo

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

- In corrispondenza di uno stesso ingresso $\bar{u}$ possiamo avere più soluzioni, se esistono diversi valori di $\bar{x}$ che soddisfano queste condizioni

Linearizzazione nell'intorno di un p. di eq.

- Consideriamo le variazioni rispetto ai valori di equilibrio

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \bar{u} + \delta u(t) \\
x(t) &= \bar{x} + \delta x(t) \\
y(t) &= \bar{y} + \delta y(t) \\
x_0 &= \bar{x} + \delta x_0
\end{aligned}
$$

- Il sistema diventa

$$
\begin{aligned}
\delta \dot{x}(t) &= f\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\right) \\
\bar{y} + \delta y(t) &= g\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\right)
\end{aligned}
$$

con la condizione iniziale

$$
\bar{x} + \delta x(t_0) = \bar{x} + \delta x_0
$$

Linearizzazione nell'intorno di un p. di eq.

- Supponendo che le funzioni f e g siano sufficientemente regolari, esse possono essere sviluppate in serie di Taylor rispetto a x e u nell'intorno del punto di equilibrio

$$\delta\dot{x}(t) = f(\bar{x},\bar{u}) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta u(t)$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x},\bar{u}) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{aligned} \qquad \delta x(t_0) = \delta x_0$$

Linearizzazione nell'intorno di un p. di eq.

- Abbiamo posto

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \qquad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

$$C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \qquad D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

Validità del sistema linearizzato

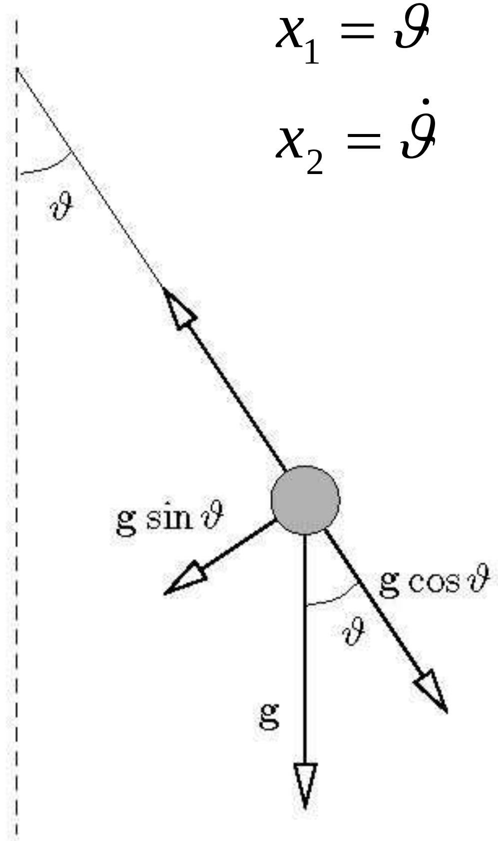
- Esaminando lo sviluppo in serie di Taylor ci si rende facilmente conto che l'approssimazione risulta valida a patto che
  - Le variazioni dal punto di equilibrio siano contenute
  - I termini di ordine superiore al primo dello sviluppo in serie siano abbastanza piccoli
- Affinché l'ultima ipotesi sia soddisfatta, le derivate di ordine superiore al primo delle funzioni f e g devono essere abbastanza piccole
- Questa condizione equivale a richiedere che le funzioni f e g abbiano un andamento 'abbastanza' lineare

Metodo indiretto di stabilità di Lyapunov

- Per valutare la stabilità di un sistema nonlineare nell'intorno di un punto di equilibrio possiamo utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov
- Le traiettorie del sistema nonlineare convergono asintoticamente al punto di equilibrio considerato se il sistema linearizzato associato è asintoticamente stabile (condizione solo sufficiente)

Esempio

- Si riconsideri l'esempio del pendolo



$$x_1 = \vartheta$$

$$x_2 = \dot{\vartheta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{B}{Ml^2}x_2 + \frac{1}{Ml}u$$

$$y = x_1$$