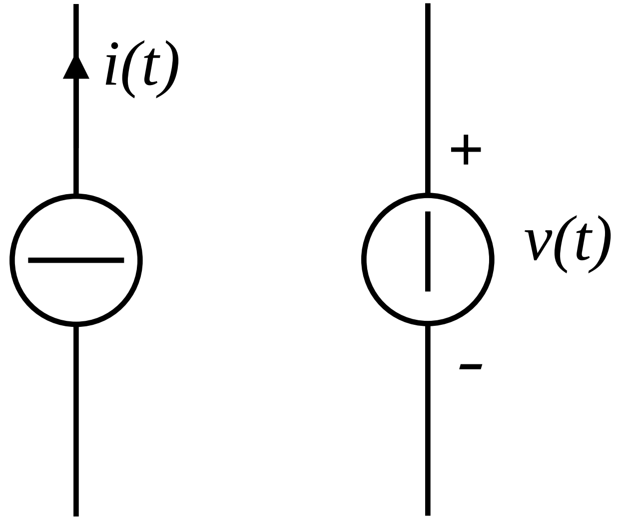
Corso di "Fondamenti di Automatica"
A.A. 2018/19

Modellistica dei Sistemi Elettrici

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino
http://wpage.unina.it/cosentino

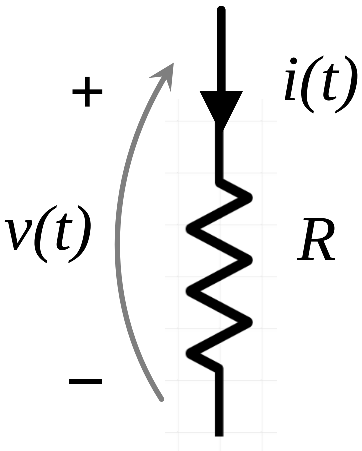
- Generatori ideali di corrente e di tensione

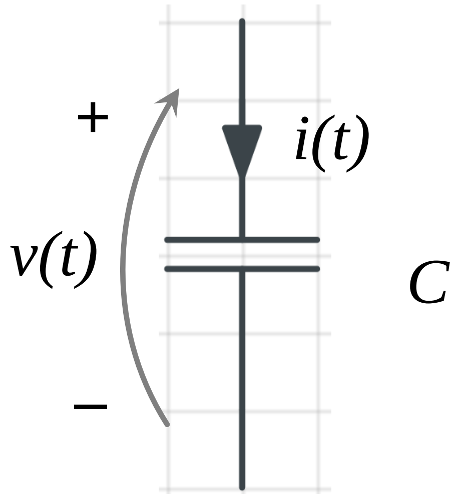


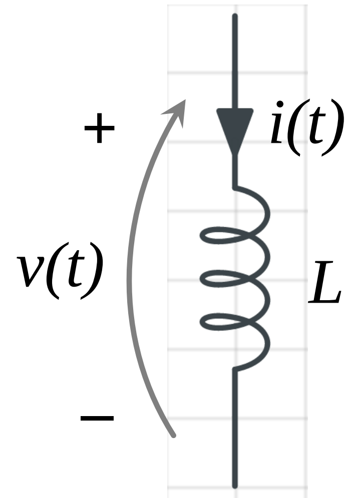
- Un generatore ideale di corrente (tensione) è tale da imporre la corrente che lo attraversa (la tensione ai suoi morsetti) indipendentemente dalla rete in cui è inserito.

Principali Componenti

- Resistore, condensatore, induttore





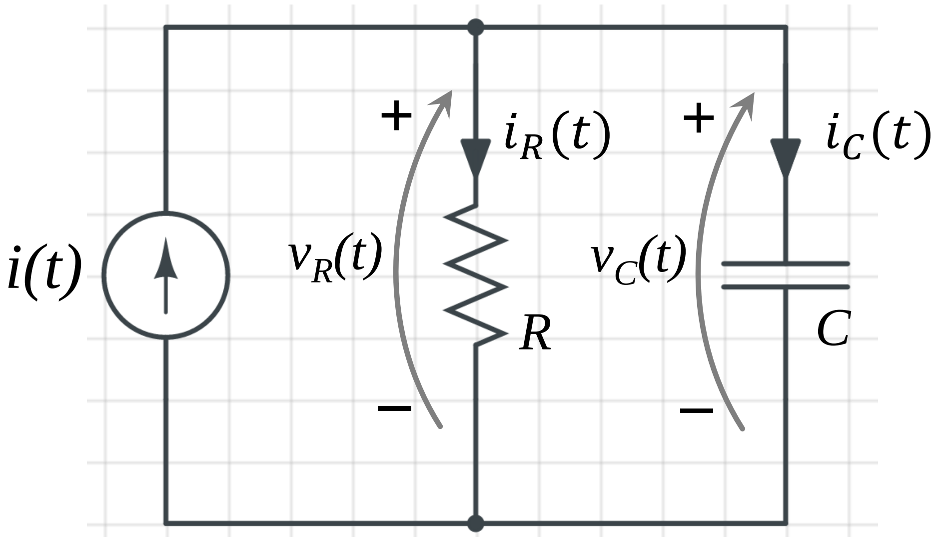


$$v(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Esempio: Modello Circuito RC Parallelo



$u(t)=i(t)$
$y(t)=v_C(t)$

- L'obiettivo è scrivere le equazioni del modello solo in funzione di u(t) e y(t) e delle loro derivate.

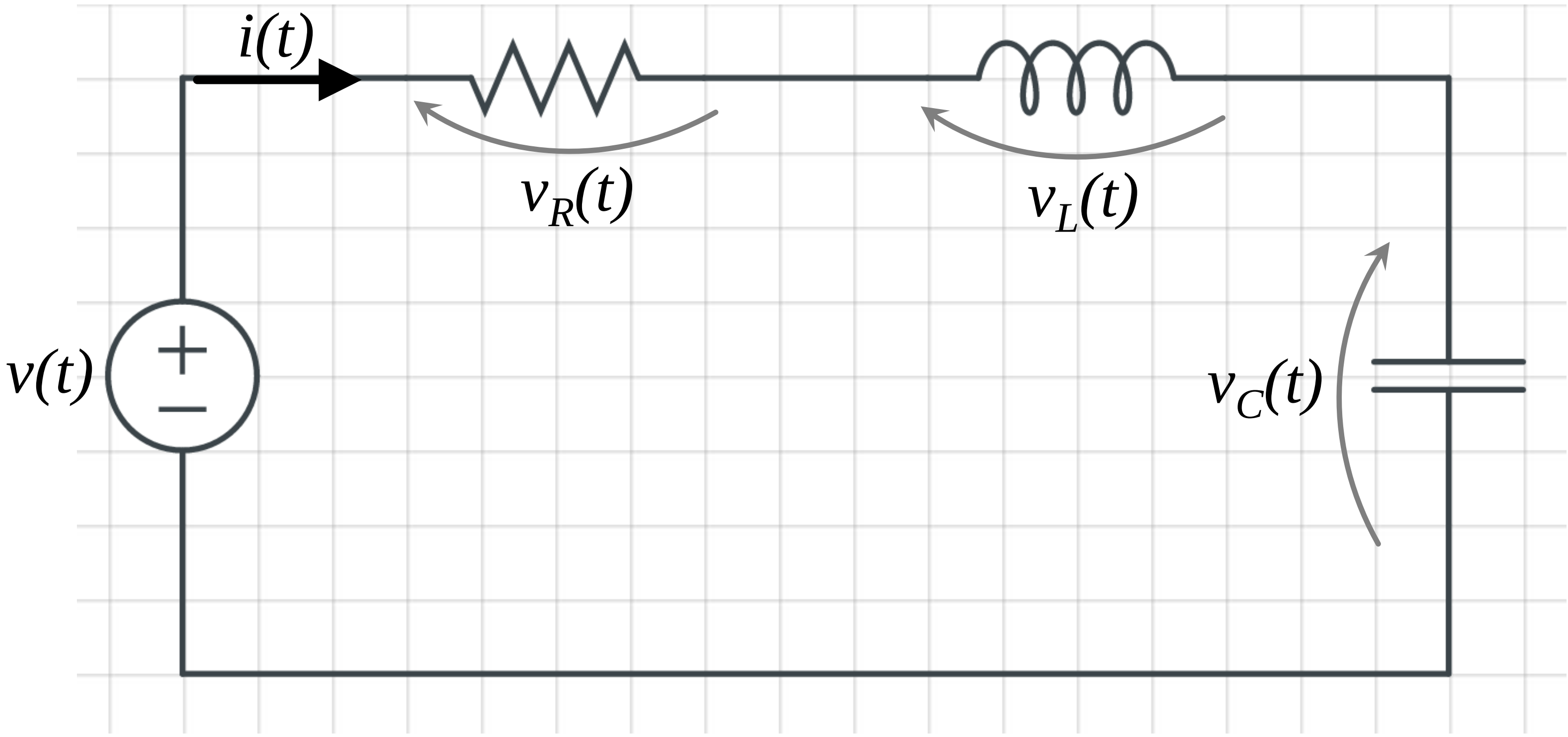
Rappresentazione Ingresso–Uscita

- Alla fine si arriva alla seguente equazione

$$C\dot{y}(t) + \frac{1}{R}y(t) = u(t)$$

- Il modello a cui siamo arrivati si chiama **Rappresentazione Ingresso-Uscita (IU).**

Esempio: Circuito RLC Serie



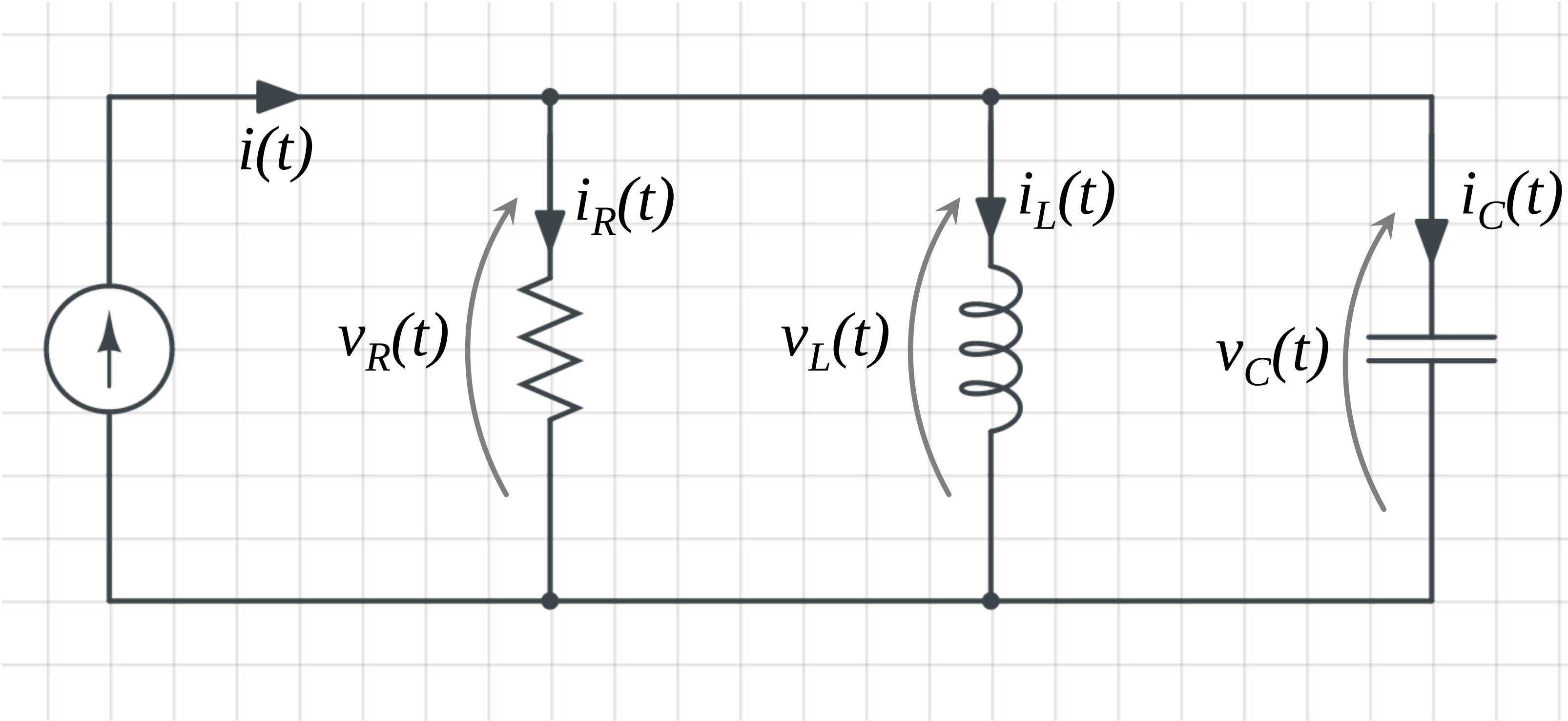
$$u(t)=v(t)$$
$$y(t)=v_C(t)$$

Esempio: Circuito RLC Serie

- Alla fine si arriva alla seguente rappresentazione IU:

$$LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Esempio: Circuito RLC Parallelo



$u(t)=i(t)$

$y(t)=i_L(t)$

Esempio: Circuito RLC Parallelo

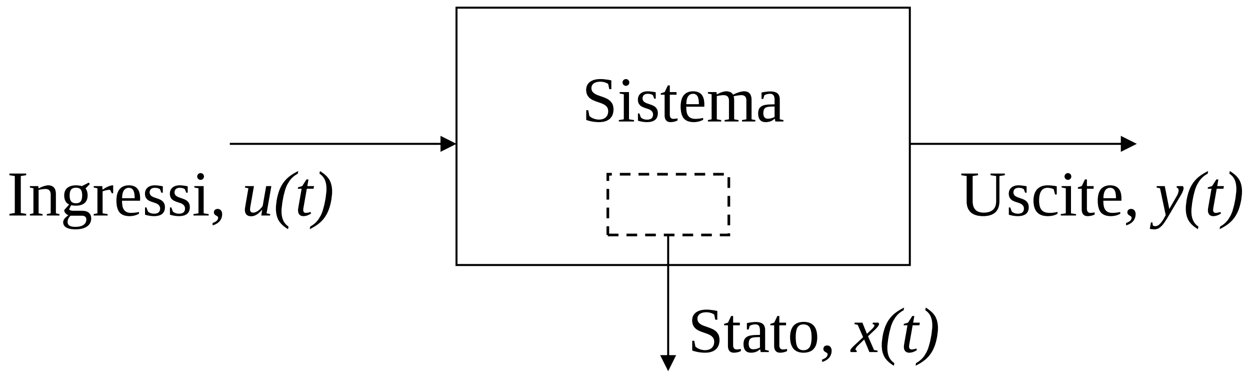
- Si arriva alla rappresentazione IU:

$$LC\ddot{y}(t) + \frac{L}{R}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Rappresentazione Ingresso-Stato-Uscita

- Oltre alla rappresentazione IU, un’altra rappresentazione equivalente è quella ISU (ingresso-stato-uscita).

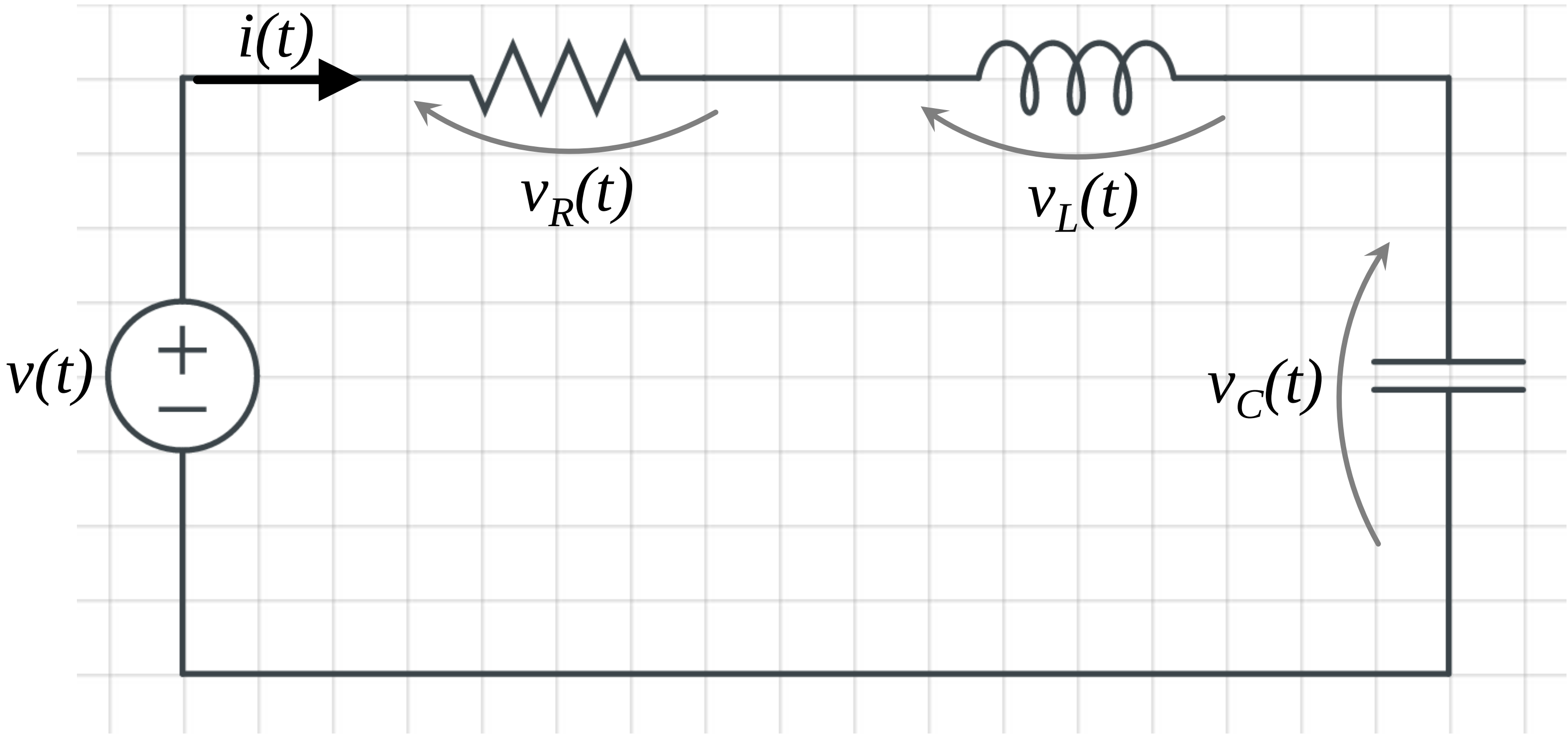
- In questo tipo di rappresentazione accanto alle variabili “esterne” (ingressi e uscite), si utilizzano altre variabili, dette *variabili di stato*.



Rappresentazione Ingresso-Stato-Uscita

- Le variabili di stato sono quelle coinvolte nell'operazione di derivazione.
- Ad esempio nel caso dei sistemi elettrici, le variabili di stato sono le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori.
- Come esempio si riconsideri il circuito RLC serie.

Esempio: Circuito RLC Serie – ISU



$$u(t)=v(t) \qquad x_1(t)=v_C(t)$$
$$y(t)=v_C(t) \qquad x_2(t)=i(t)$$

Esempio: Circuito RLC Serie – ISU

- Si arriva al seguente modello

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$y = x_1$$

Rappresentazione ISU Matriciale

- Tale modello si può scrivere in forma più sintetica usando le matrici

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- Si noti che lo stato è stato definito in forma vettoriale

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Se si pone

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- si può riscrivere il modello nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Modello Generale ISU

- In generale, il comportamento di un sistema dinamico a tempo-continuo può essere descritto dal sistema di equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$u \in \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$

$y \in \mathbb{R}^p$

- f → Funzione di transizione (o di stato)
- g→ Funzione di uscita
- Si dice **ordine del sistema** la dimensione dello spazio di stato, n

Sistemi SISO e MIMO

- Si dicono **monovariabili** (o **SISO**, dall'inglese Single-Input-Single-Output) i sistemi dotati di una sola variabile di ingresso e di una sola variabile di uscita ($m = p = 1$)

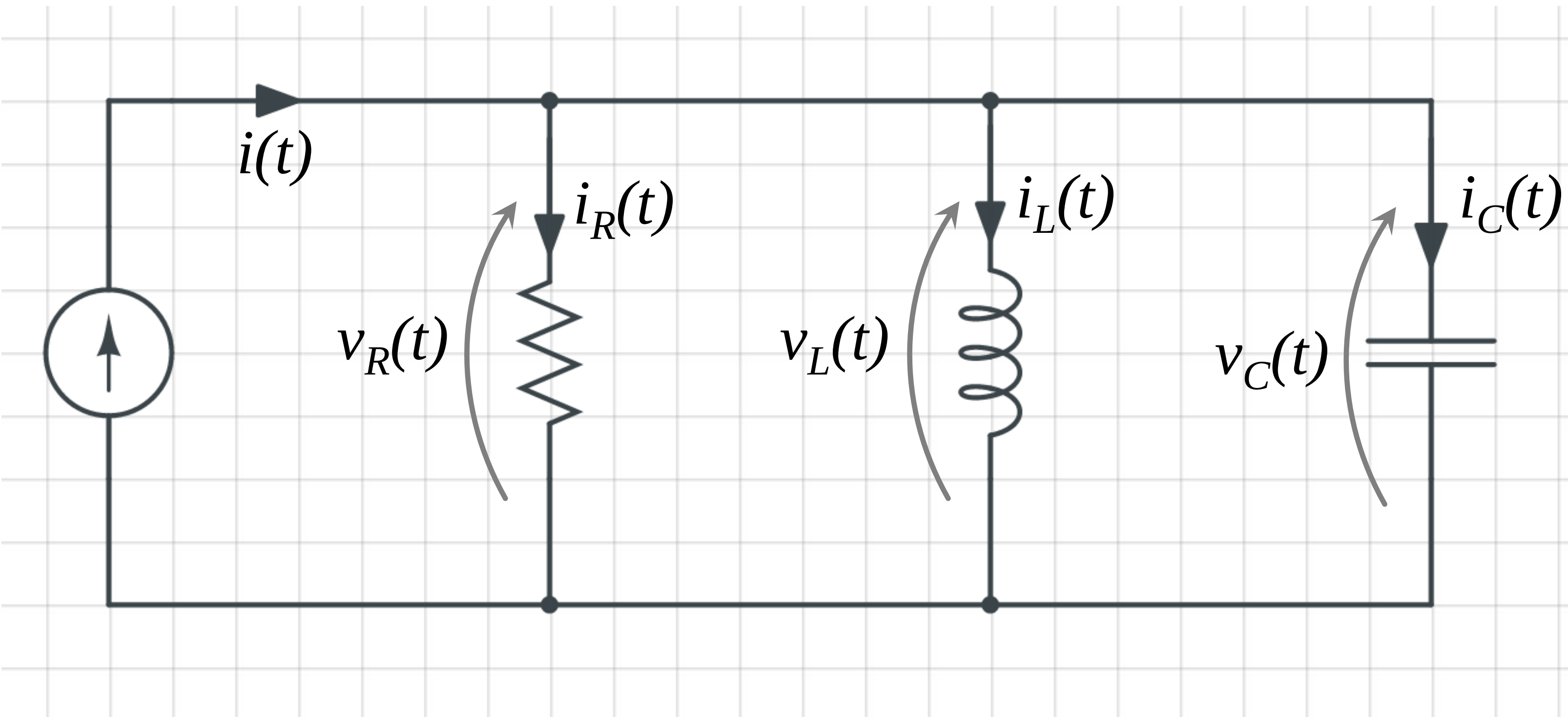
- I sistemi che non sono SISO si dicono **multivariabili** (o **MIMO**, dall'inglese Multiple-Input-Multiple-Output)

- In questo corso ci concentreremo prevalentemente sui sistemi SISO

Esercizio: Circuito RLC Parallelo

- Trovare il modello ISU per la rete RLC parallelo.

$$u = i \qquad x_1 = i_L$$
$$y = i_L \qquad x_2 = v_C$$



Esercizio: Circuito RLC Parallelo

- Si arriva alla rappresentazione ISU

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{RC} x_2 + \frac{1}{C} u$$

$$y = x_1$$

- Che può scriversi in forma più compatta utilizzando la notazione matriciale

Esercizio: Circuito RLC Parallelo

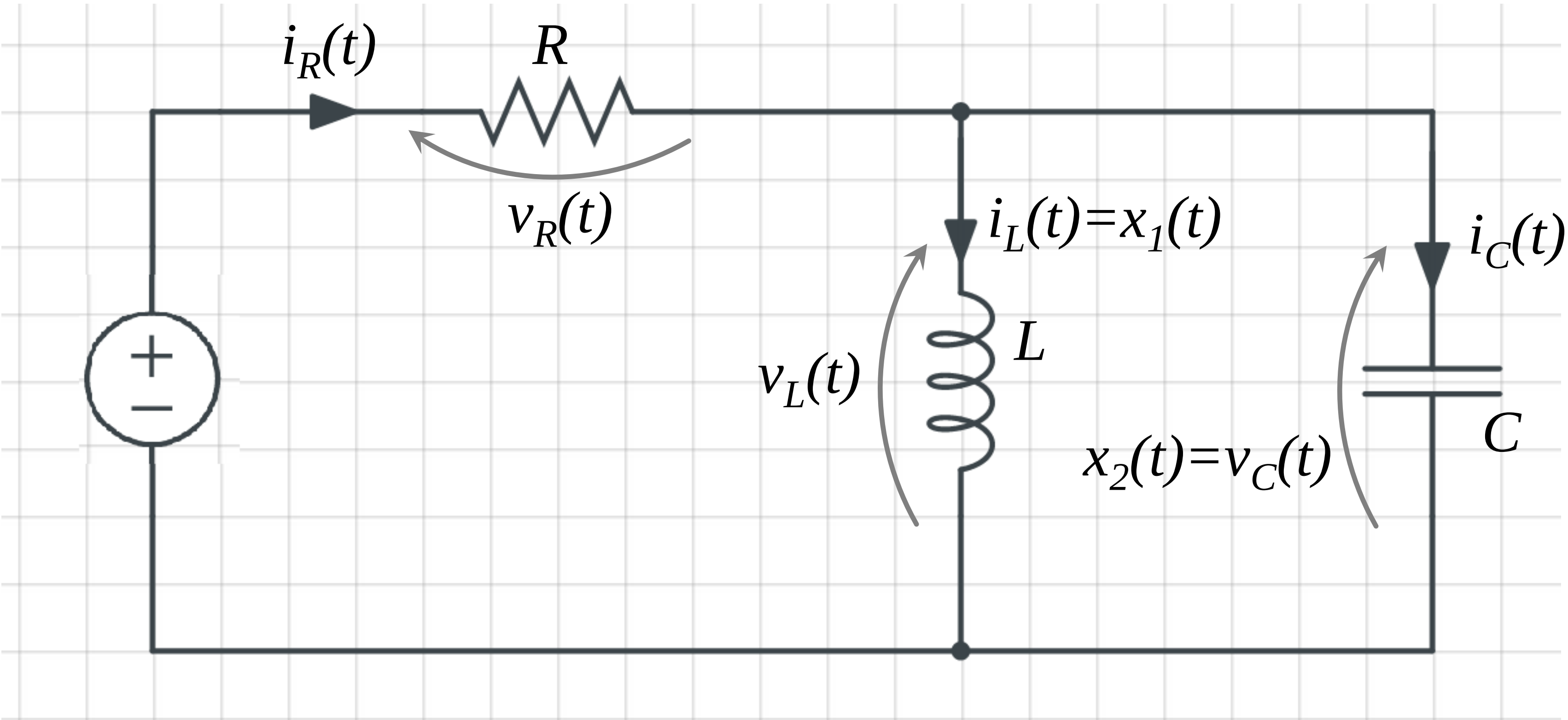
- La rappresentazione ISU è molto utile per semplificare la scrittura del modello.

- Questo fatto risulterà chiaro sviluppando i prossimi esempi.

Esercizio

- Trovare la rappresentazione ISU del seguente sistema

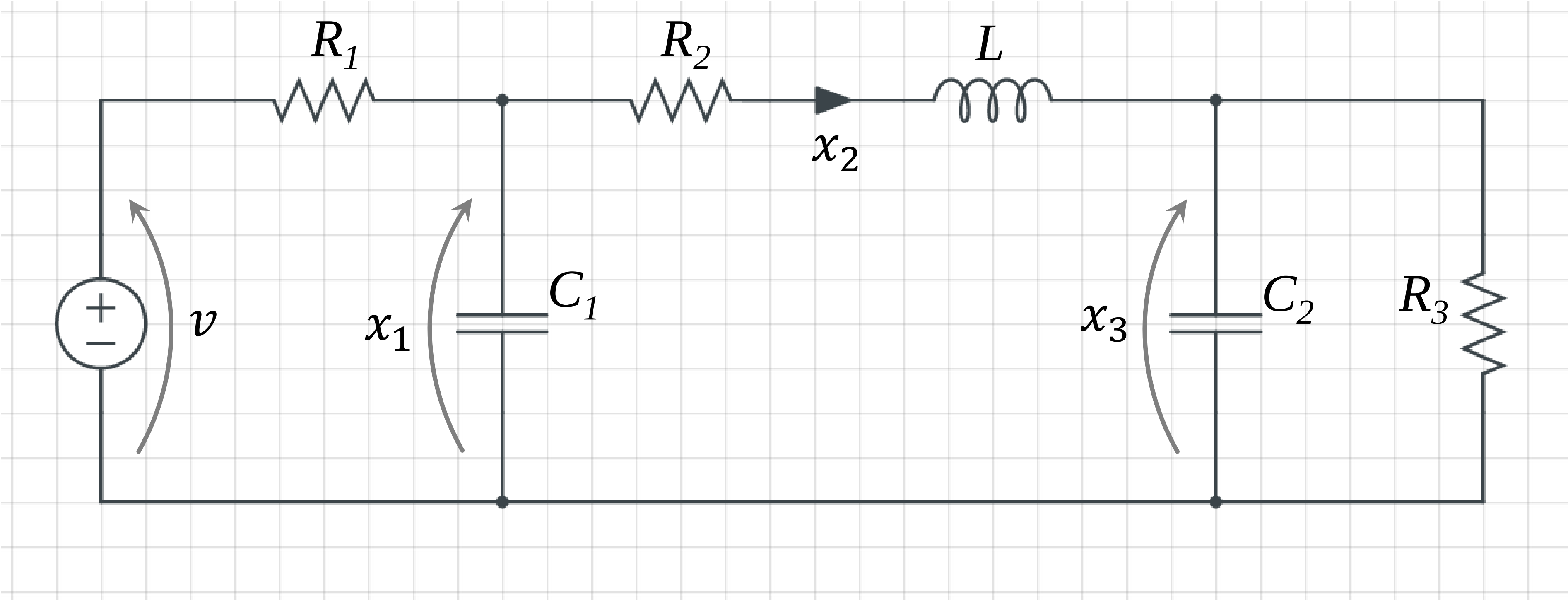
$$u = v$$
$$y = x_2$$



Esercizio

- Trovare la rappresentazione ISU del seguente sistema

$$u = v$$
$$y = x_3$$



Esercizio

- Se ora si prova a riscrivere questo modello utilizzando la rappresentazione IU, si incontrano maggiori difficoltà.

- Importante: per un dato sistema le rappresentazioni IU e ISU sono equivalenti.

Procedura di Costruzione del Modello

- Riassumendo quanto visto finora:
  - Per scrivere il modello di un sistema si possono utilizzare due tipi di rappresentazione: IU e ISU;
  - Queste due rappresentazioni, per un dato modello sono equivalenti.
  - La rappresentazione ISU, oltre a presentare altri vantaggi che vedremo in seguito, permette anche di arrivare più facilmente alla scrittura del modello.
- Inoltre:
  - Una volta che si sono assegnati gli ingressi e le uscite di un dato sistema, la sua rappresentazione IU è unica.
  - Viceversa, poiché la scelta delle variabili di stato non è univoca, esistono infinite rappresentazioni ISU, tutte equivalenti tra loro.
- **Nota: nella IU compaiono sia le derivate dell'uscita che dell'ingresso. Nella ISU devono comparire solo le derivate (prime) dello stato.**

Unicità della Rappresentazione

- Per convincersi del fatto che la rappresentazione ISU non è unica, si calcoli il modello della rete RLC serie prendendo come variabili di stato la carica accumulata sul condensatore e la corrente nell'induttore:

$$x_1 = v_C \qquad\qquad x_1 = q_C = Cv_C$$

$$x_2 = i \qquad\qquad x_2 = i$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)x \qquad\qquad y = (1/C \quad 0)x$$

Sistemi Lineari

- Tutti i sistemi (modelli) degli esempi considerati finora sono lineari.

- Un sistema ***lineare*** ammette una rappresentazione ISU nella forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

con $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ opportune funzioni (matriciali) del tempo.

Sistemi Lineari

- Facendo riferimento alla rappresentazione IU, un sistema è lineare quando può porsi nella forma

$$y^{(n)} + A_{n-1}\mathrm{y}^{(\mathrm{n}-1)} + \cdots + A_0\mathrm{y} = B_n\mathrm{u}^{(\mathrm{n})} + B_{n-1}\mathrm{u}^{(\mathrm{n}-1)} + \cdots + B_0 u$$

- Si noti che le matrici A_i e B_i possono essere funzioni del tempo, e non è detto che siano tutte diverse da zero

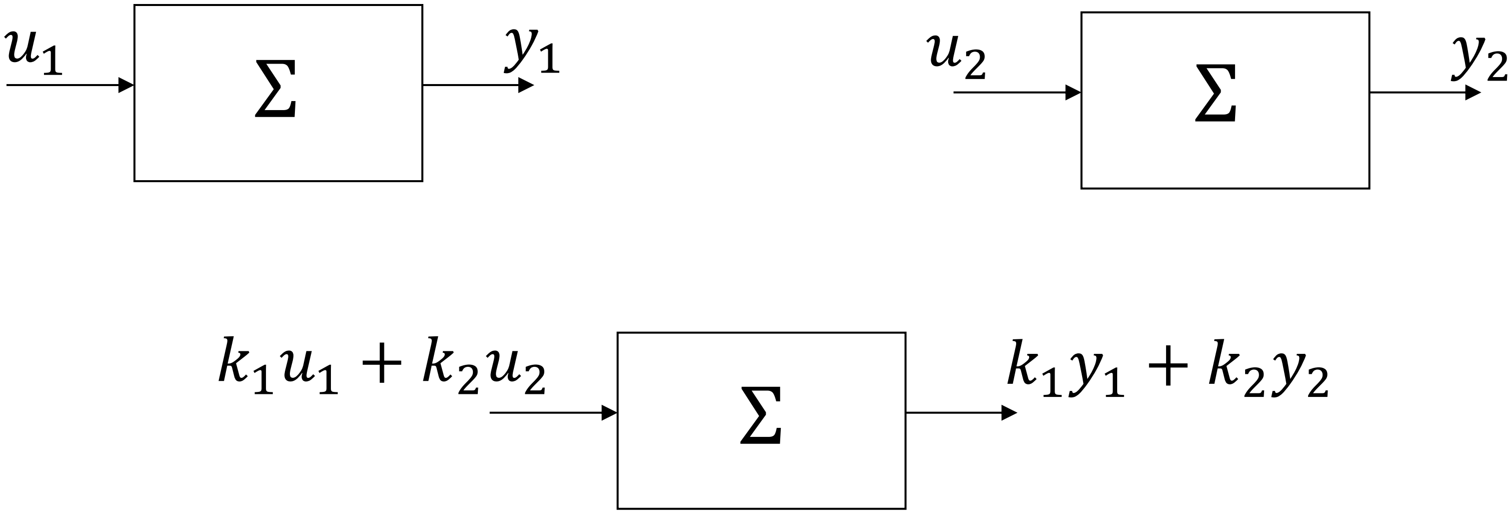
- Nel caso generale, l'uscita y e l'ingresso u sono vettori (sistema MIMO)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Proprietà di Linearità

- Il termine lineare deriva dal fatto che tali sistemi godono di una peculiare proprietà detta anche ***sovrapposizione degli effetti***.

- **Ad una combinazione lineare degli ingressi corrisponde una combinazione lineare delle corrispondenti uscite.**

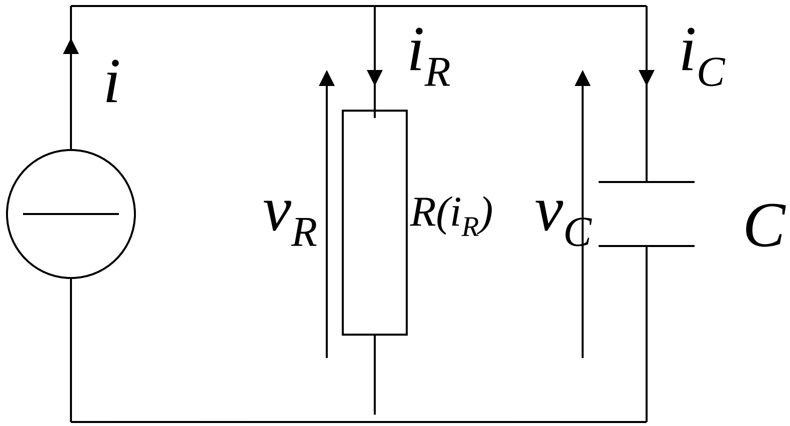


Sistemi Nonlineari

- Ovviamente un sistema si dice ***nonlineare*** quando non è lineare.
- A questo proposito si faccia riferimento al prossimo esempio.

Esempio: Circuito Nonlineare

- Si consideri il seguente circuito elettrico



$$u = i$$
$$y = v_C$$

- Supponiamo che $R(i_R)$ sia una resistenza variabile con la corrente secondo la legge

$$R(i_R) = k \cdot i_R^2 \Rightarrow V_R = R(i_R) \cdot i_R = k \cdot i_R^3$$

Esempio: Circuito Nonlineare

- Si arriva alla rappresentazione ISU

$$\dot{x} = -\frac{1}{C\sqrt[3]{k}}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{C}u$$

$$y = x$$

che non è lineare per la presenza del termine $\sqrt[3]{x}$

Sistemi Stazionari

- Un sistema lineare si dice ***stazionario*** o ***tempo-invariante*** quando le matrici coinvolte nella rappresentazione (IU o ISU) non dipendono dal tempo (sono costanti).

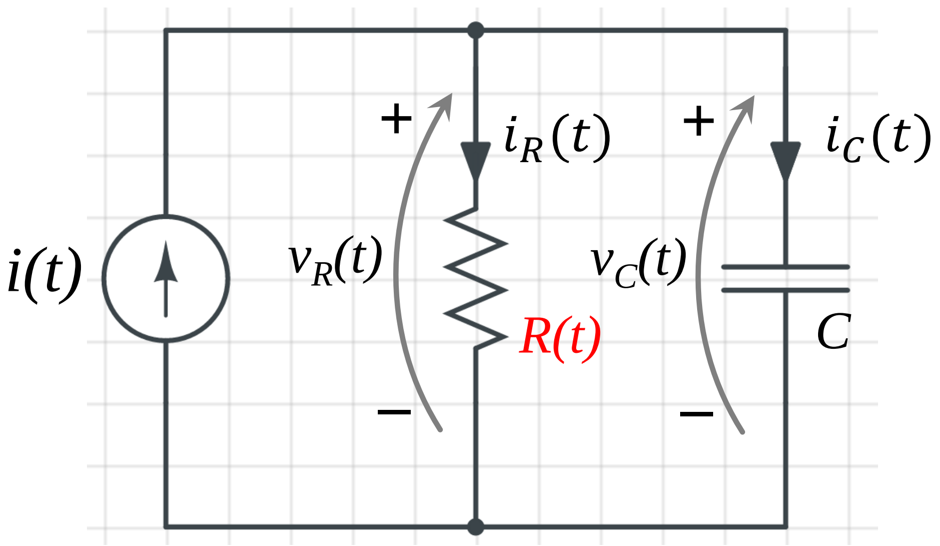
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Tutti i sistemi che abbiamo incontrato finora sono stazionari

Sistemi Non–Stazionari

- Esempio di sistema non-stazionario: circuito RC con resistenza variabile nel tempo



$$u(t) = i(t)$$
$$y(t) = v_C(t)$$

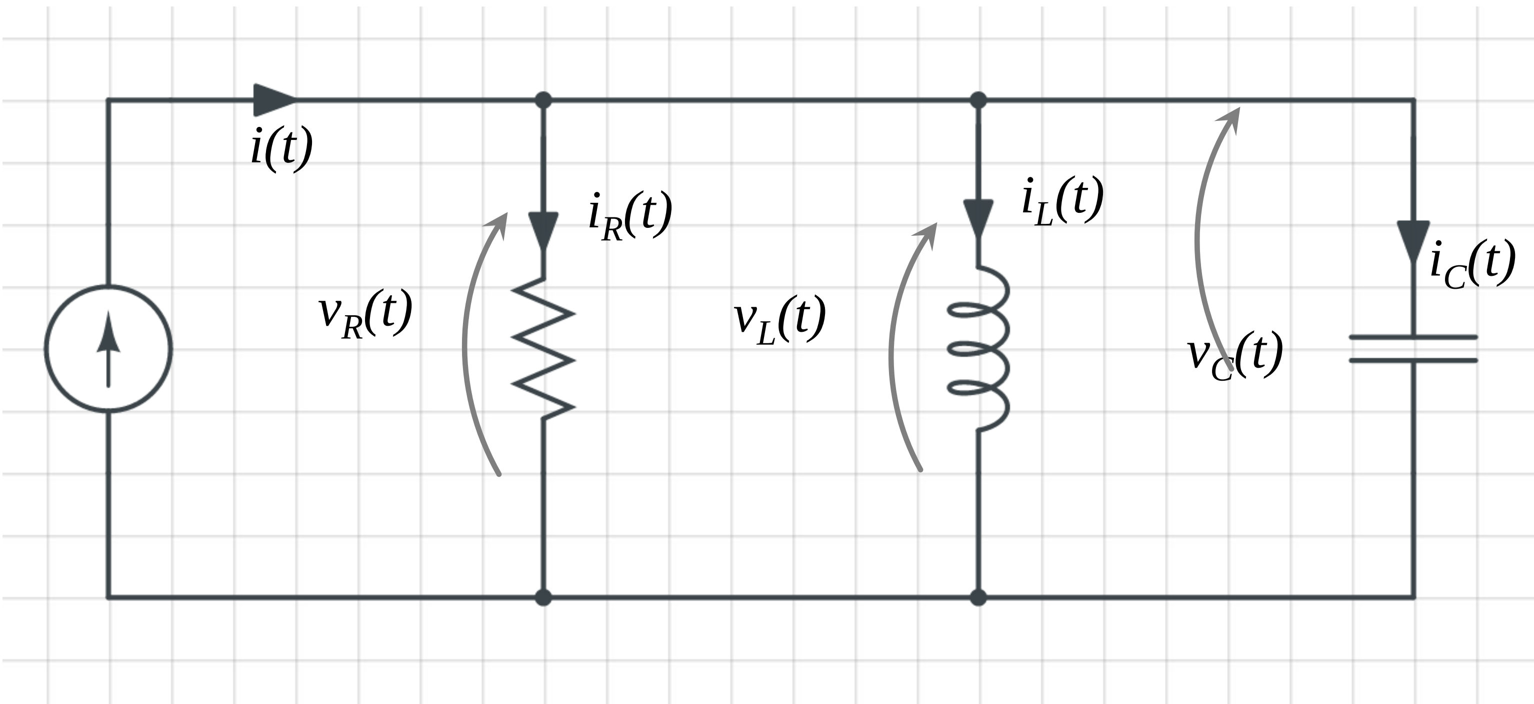
Sistemi Strettamente Propri

- Un sistema lineare si dice ***strettamente proprio*** se si verificano le seguenti situazioni:
  - Per le rappresentazioni ISU la matrice D=0
  - Per le rappresentazioni IU il massimo ordine di derivazione dell'ingresso è minore di quello dell'uscita.
- Un sistema si dice ***(semplicemente) proprio*** se non è strettamente proprio.
- Tutti i sistemi lineari considerati finora sono strettamente propri.
- Per un esempio di sistema proprio si consideri il seguente sistema.

Esempio di S. Semplicemente Proprio

- Esempio di sistema proprio: circuito RLC con uscita uguale alla somma delle correnti nel condensatore e nell'induttore

$$u = i \qquad x_1 = i_L$$
$$y = i_L + i_C \qquad x_2 = v_C$$



Esempio di S. Semplicemente Proprio

- Si arriva alla rappresentazione IU

$$RC\ddot{y} + \dot{y} + \frac{R}{L}y = RC\ddot{u} + \frac{R}{L}u$$

- oppure alla rappresentazione ISU

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/C \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & -1/R \end{pmatrix} x + u$$

Sistemi Combinatori

- Un sistema si dice ***combinatorio*** o ***senza memoria*** quando la relazione ingresso–uscita è di tipo istantaneo, cioè non coinvolge le derivate.
- Ad esempio il resistore, visto come sistema che ha in ingresso la corrente e in uscita la tensione, è un sistema combinatorio.
- Un sistema in cui la relazione tra ingresso e uscita coinvolge le derivate (come è capitato in tutti gli esempi considerati) si dice ***dinamico***.

Classificazione dei Sistemi

- Riassumendo, abbiamo suddiviso i sistemi nelle seguenti categorie:
  - Sistemi lineari e non-lineari
  - Sistemi stazionari e non-stazionari
  - Sistemi propri e strettamente propri
  - Sistemi dinamici e combinatori
- Nel seguito concentreremo la nostra attenzione sulla classe dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti (LTI).