UMG

Dubium sapientiae initium

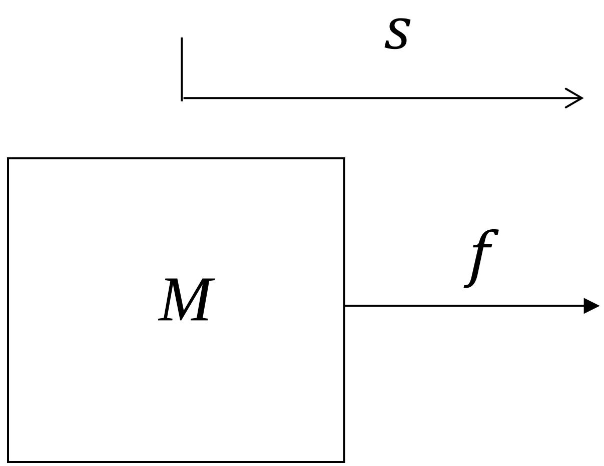
Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2018/19

Modellistica dei Sistemi Meccanici

Prof. Carlo Cosentino

Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

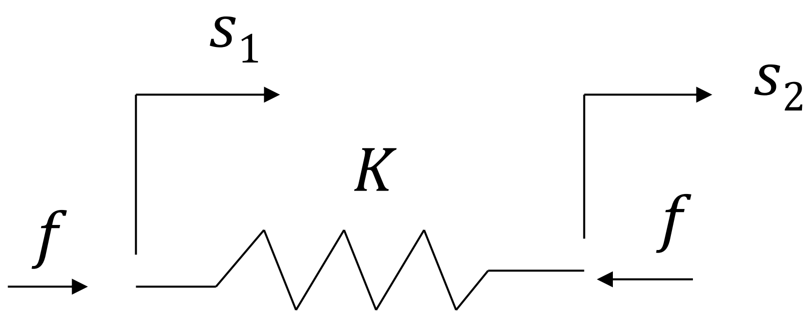
Principali Componenti: Massa



s = *spostamento*
f = *forza applicata*

Relazione costitutiva: $f = M\ddot{s}$

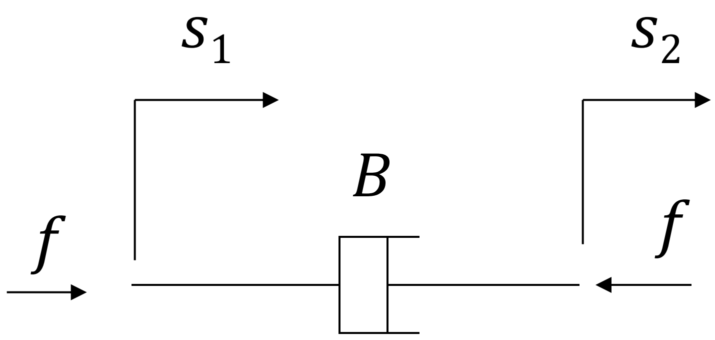
Principali Componenti: Molla



K = *rigidezza*

Relazione costitutiva: $f = K(s_2 - s_1)$

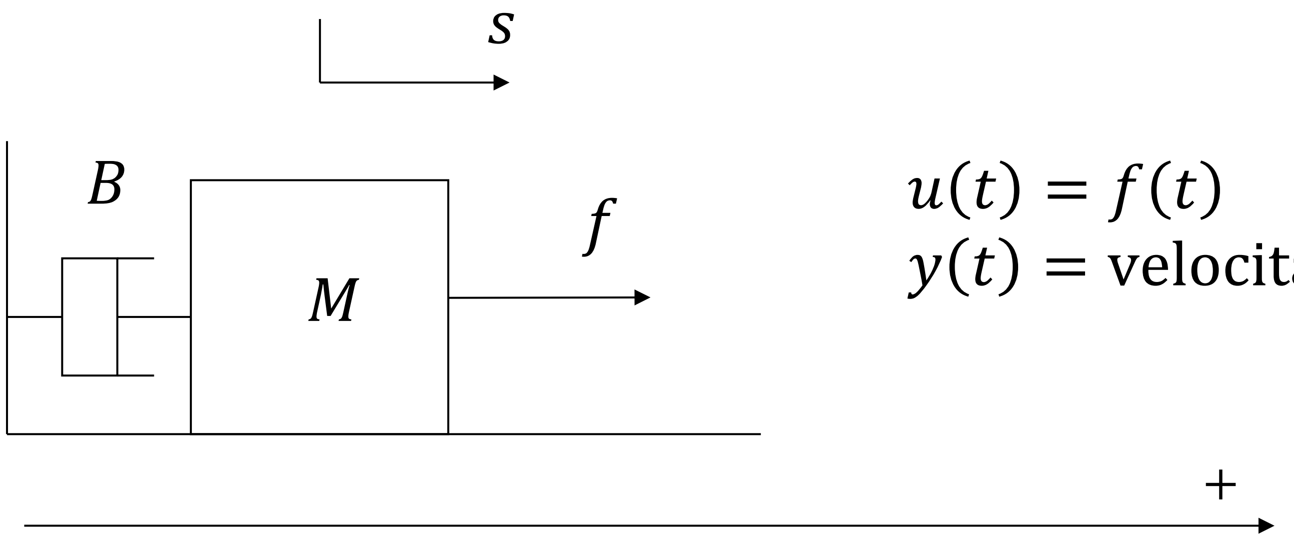
Principali Componenti: Smorzatore



B = *coefficiente di attrito viscoso*

Relazione costitutiva: $f = B(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)$

Esempio: Sistema Massa-Smorzatore



$$u(t) = f(t)$$
$$y(t) = \text{velocità} = \dot{s}$$

Esempio: Sistema Massa-Smorzatore

- Alla fine si arriva alla seguente rappresentazione IU

$$M\dot{y}(t) + By(t) = u(t)$$

- Oppure alla seguente rappresentazione ISU utilizzando come variabile di stato la velocità:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{B}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned} \qquad\qquad x = \dot{s}$$

Scelta delle Variabili di Stato

- Per i sistemi meccanici le variabili di stato tipiche sono la posizione e la velocità della massa.

- Riconsideriamo ora l'esempio precedente, prendendo come uscita la posizione della massa invece della velocità.

Rappresentazione ISU

- Si arriva alla rappresentazione IU:

$$M\dot{y}(t) + By(t) = u(t)$$

oppure alla rappresentazione ISU

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}$$

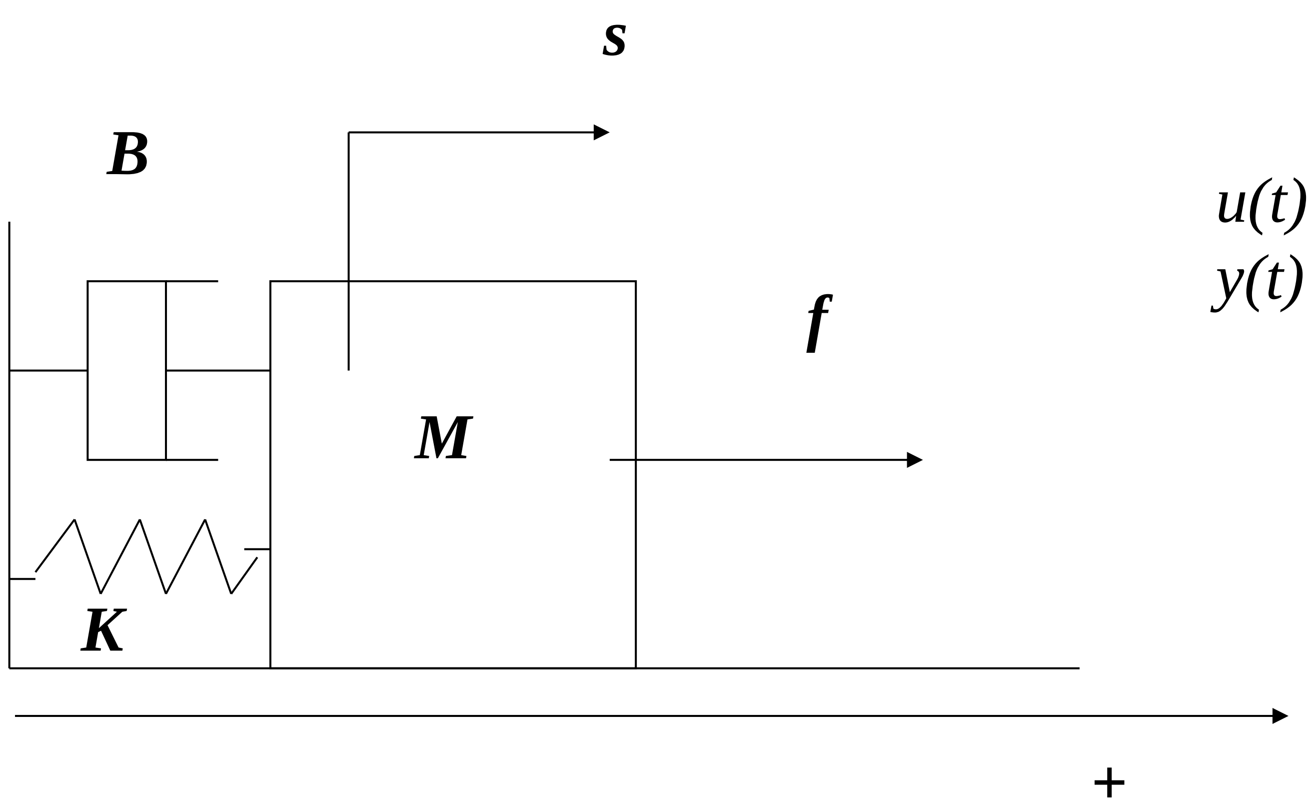
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

- Si noti che, prendendo come uscita la velocità, era sufficiente un modello del primo ordine; per avere come uscita la posizione, invece, il modello deve essere del secondo ordine

Classificazione del Sistema

- Il sistema considerato negli esempi precedenti è
  - lineare,
  - stazionario,
  - dinamico;
  - in entrambi i casi la rappresentazione ottenuta è strettamente propria.

Esempio: Sistema Massa-Molla-Smorzatore



$u(t)=f(t)$
$y(t)=s(t)$

- Si arriva alla rappresentazione IU:

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

oppure, scegliendo

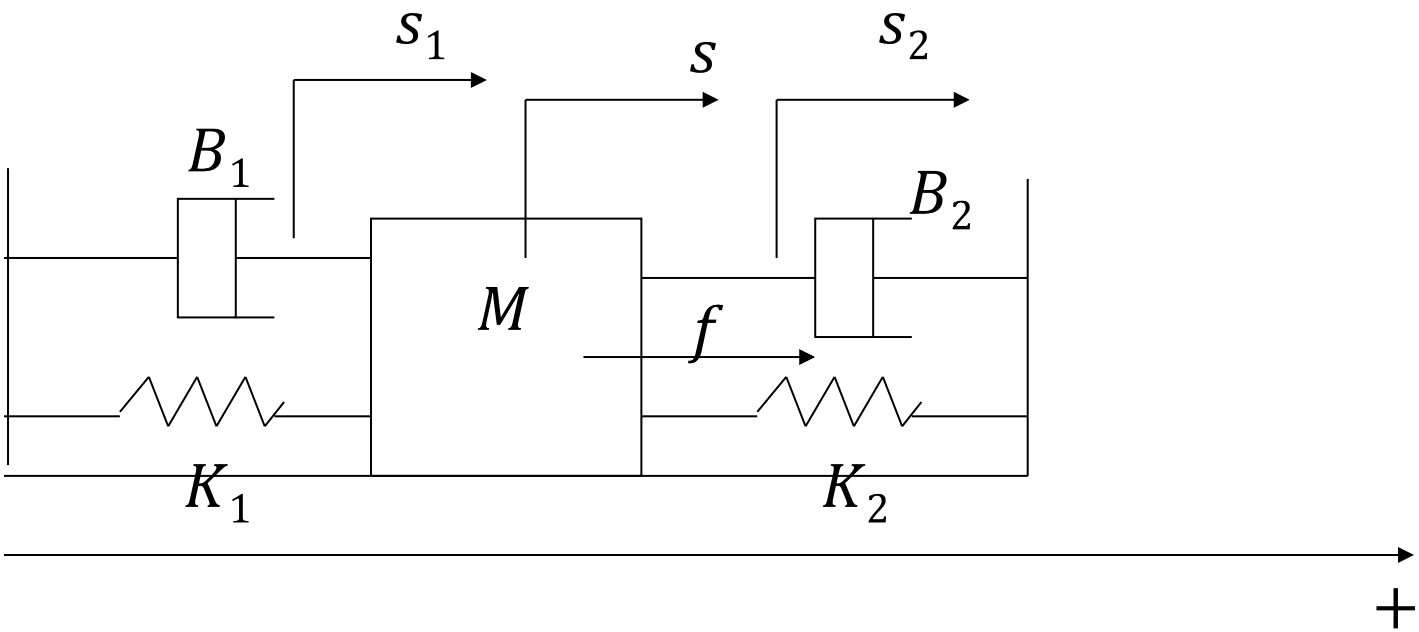
$$x_1 = s \qquad x_2 = \dot{s}$$

alla rappresentazione ISU

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Esempio: Sistema con Doppia Molla e Smorzatore



$$u(t) = f(t)$$
$$y(t) = s(t)$$

Esempio: Sistema con Doppia Molla e Smorzatore

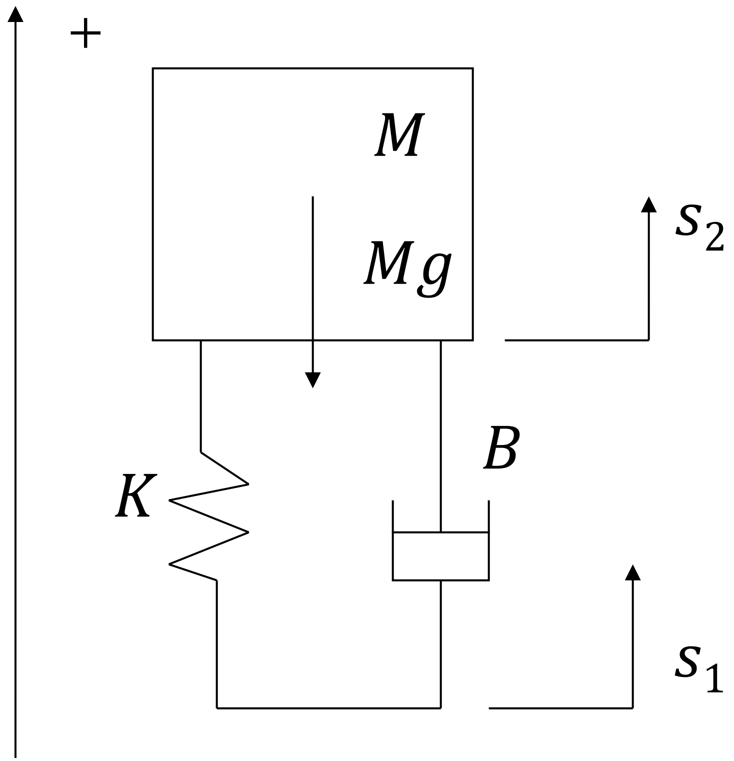
- Si arriva alla rappresentazione IU

$$M\ddot{y}(t) + (B_1 + B_2)\dot{y}(t) + (K_1 + K_2)y(t) = u(t)$$

oppure alla ISU

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_1 + K_2}{M} & -\frac{B_1 + B_2}{M} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

- s_1 è la quota del supporto inferiore (supposto privo di massa)
- s_2 è lo spostamento della massa, Mg è la forza peso



$$u = s_1$$
$$y = s_2$$

Esempio: Sospensione Automobilistica

- Si arriva alla rappresentazione IU

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = B\dot{u}(t) + Ku(t) - Mg$$

- In questo caso non è possibile scrivere la rappresentazione ISU scegliendo lo stato in modo usuale (posizione e velocità).

- Vedremo che esistono tecniche sistematiche per passare da una rappresentazione IU ad una ISU e viceversa.

Cambio di Variabile

- E' possibile far scomparire la forza peso dall'equazione ingresso-uscita effettuando un opportuno cambio di variabile.

- Indichiamo con $\hat{y}$ lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio statico che la massa assume sotto l'azione della forza peso in assenza di ingressi esterni ($u = 0$). Quindi

$$\hat{y} = y - \hat{s}$$

dove

$$K\hat{s} = -Mg$$

Cambio di Variabile

- Con questa nuova scelta della variabile di uscita la rappresentazione IU diventa

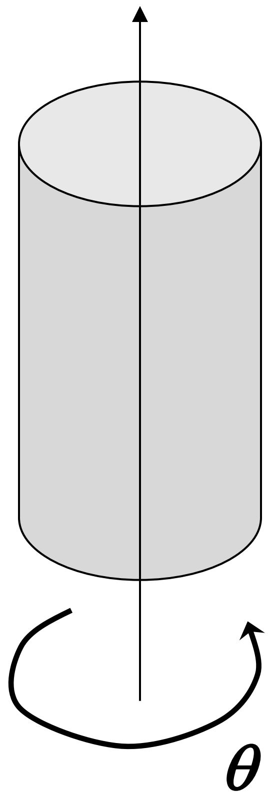
$$M\ddot{\hat{y}}(t) + B\dot{\hat{y}}(t) + K\hat{y}(t) = B\dot{u}(t) + Ku(t)$$

Rotazione di un Corpo Libero

- La relazione costitutiva è analoga al caso lineare:

$$T = J\ddot{\theta}$$

- θ è l'angolo
- T rappresenta la risultante dei **momenti**
- J è il **momento di inerzia** del corpo



Elementi Rotazionali di Base

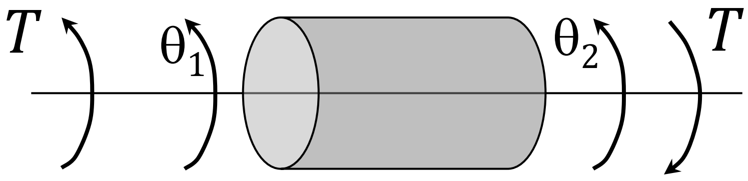
- Analogamente al caso lineare possiamo definire

- **Molla torsionale**: la coppia resistente è proporzionale all'angolo di torsione, secondo un coefficiente *K*

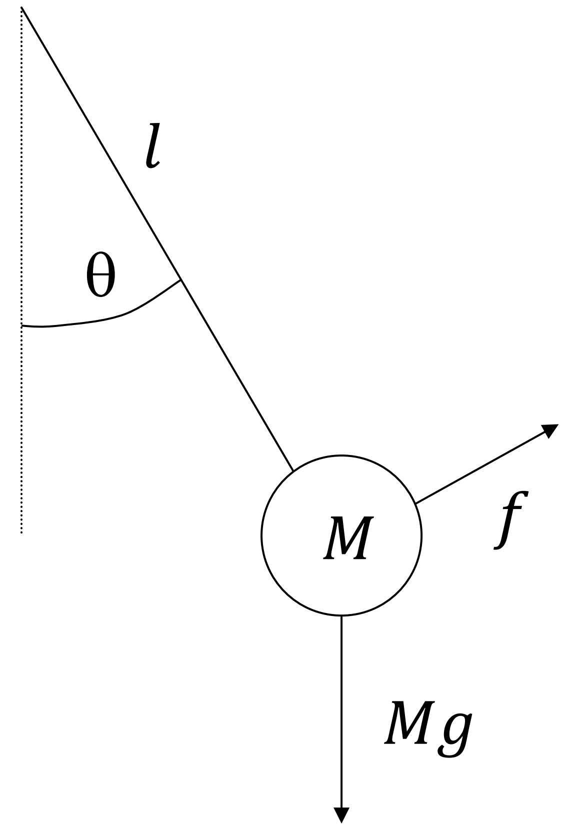
$$T = K(\theta_2 - \theta_1)$$

- **Smorzatore torsionale**: la coppia resistente è proporzionale alla **velocità angolare** di torsione, secondo un coefficiente *B*

$$T = B\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)$$



Esempio di Sistema Meccanico Nonlineare: Il Pendolo



B = *coefficiente di attrito viscoso*

Esempio di Sistema Meccanico Nonlineare: Il Pendolo

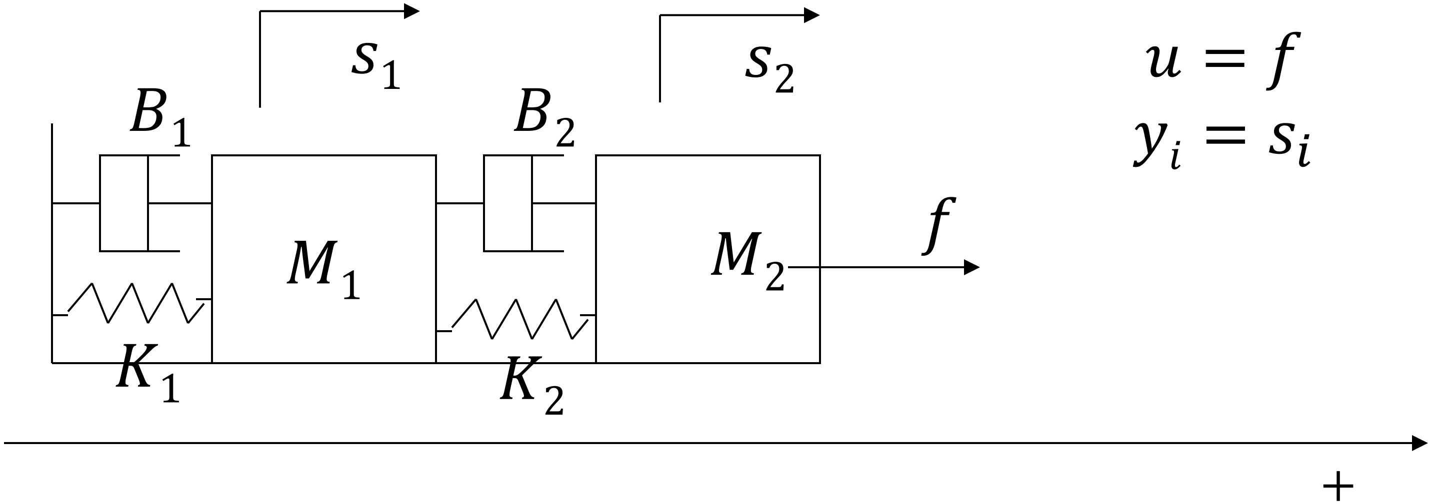
- Ponendo $u = f$ e $y =$ si arriva alla rappresentazione IU

$$\ddot{y}(t) + \frac{B}{Ml^2}\dot{y}(t) + \frac{g}{l}\sin\big(y(t)\big) = \frac{1}{Ml}u(t)$$

- Ponendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = d\theta/dt$, si arriva alla rappresentazione ISU

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{B}{Ml^2}x_2 + \frac{1}{Ml}u$$
$$y = x_1$$

Esercizio: Sistema con Due masse



$$u = f$$
$$y_i = s_i$$

Esercizio: Sistema con Due masse

- Se si scelgono come variabili di stato posizione e velocità della massa M_1 (x_1 e x_2) e posizione e velocità della massa M_2 (x_3 e x_4), si arriva alla rappresentazione ISU

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} & -\dfrac{B_1 + B_2}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & \dfrac{B_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{B_2}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_2}{M_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_2} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$