

Corso di "Fondamenti di Automatica"  
A.A. 2018/19

# Modellistica dei Sistemi Elettro-Meccanici

*Prof. Carlo Cosentino*

Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica  
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro  
tel: 0961-3694051

[carlo.cosentino@unicz.it](mailto:carlo.cosentino@unicz.it)

<http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino>

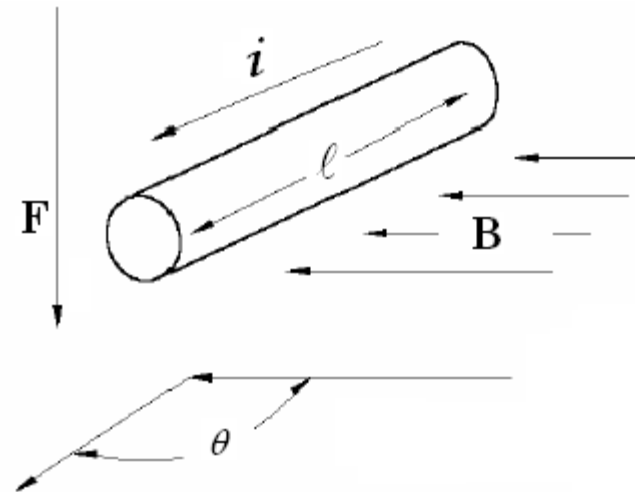
- ✦ I sistemi elettromeccanici sono dispositivi in grado di trasformare energia meccanica in energia elettrica (generatori) e viceversa (motori).
- ✦ In particolare il motore elettrico converte energia elettrica (tensioni e correnti) in energia meccanica (moto di rotazione di un asse).
- ✦ Nel seguito considereremo come caso di studio il motore in corrente continua.

- ✦ Il principio di funzionamento del motore in corrente continua si basa sull'interazione tra correnti e campo magnetico.
- ✦ Si ricordi che una spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico è sottoposta ad una forza dipendente dalla forma della spira, dall'intensità del campo magnetico e dall'intensità della corrente.

- ✦ Se un conduttore di lunghezza  $\ell$  è percorso da una corrente  $\mathbf{i}$  ed è immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , sul conduttore agisce una forza  $\mathbf{F}$  pari a:

$$\vec{F} = l \cdot (\vec{i} \times \vec{B})$$

$$F = iB\ell \sin(\theta)$$

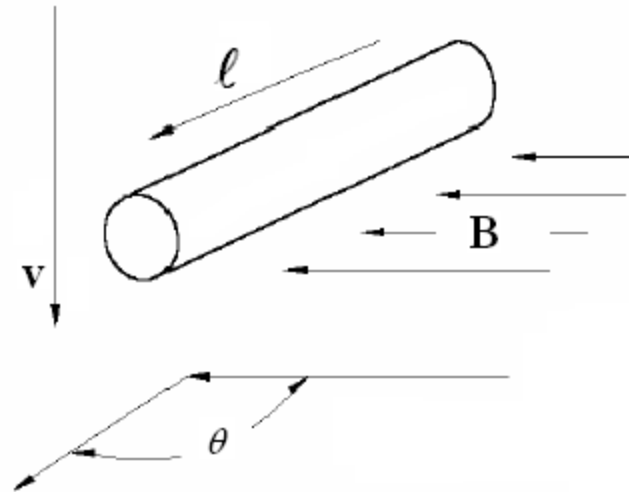


dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{B}$ . Il vettore  $\mathbf{F}$  è perpendicolare al piano formato da  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{B}$ .

- ✦ Di conseguenza, il conduttore si muove per effetto della forza  $\mathbf{F}$ .

- ✦ Inoltre se un conduttore (o una spira) è immerso in un campo magnetico costante ed è mosso con una velocità  $\mathbf{v}$ , si genera una f.e.m. indotta:

$$\mathbf{e} = (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{l}}$$

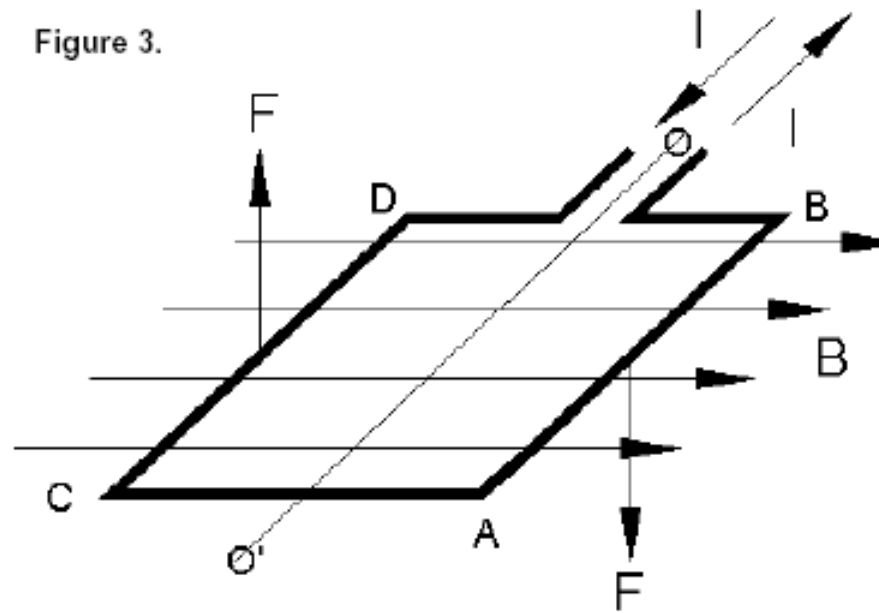


- ✦ Se il conduttore fa parte di un circuito elettrico, e possiede una resistenza  $R$ , allora si genera una corrente  $\mathbf{i}$  e la f.e.m. sarà chiamata f.c.e.m. indotta.

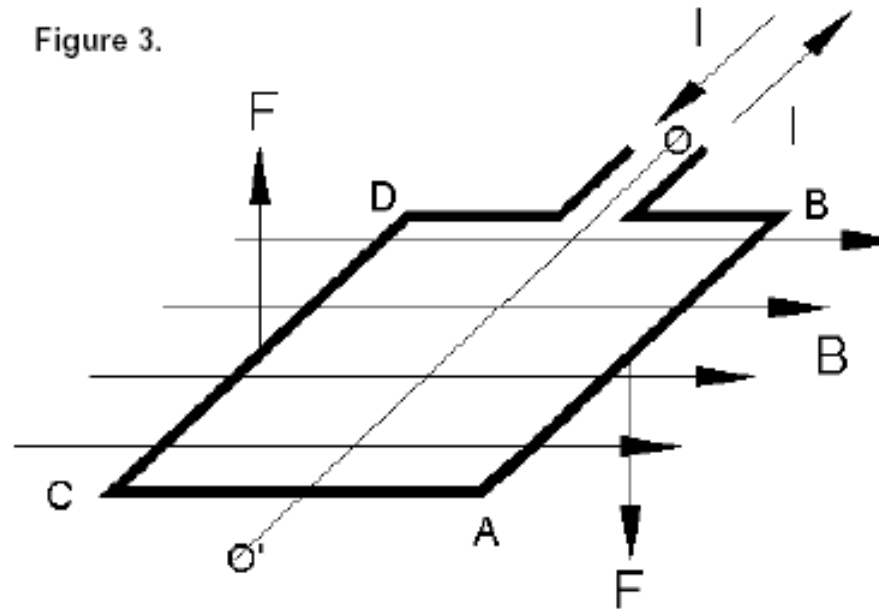
$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{e}}{R}$$

- ✦ La forza elettromotrice (f.e.m.) indotta dipende dalla forma della spira, dal movimento e dall'intensità del campo.
- ✦ Se la spira è percorsa da corrente, la f.e.m. indotta si oppone a quella che genera la corrente (in questo caso si parla di forza controelettromotrice (f.c.e.m.) indotta)

- ✦ Dalla prima legge, si può ottenere un dispositivo che riceve in input una tensione e dà in uscita un movimento meccanico rotazionale
- ✦ Consideriamo un circuito percorso da una corrente  $I$  e immerso in un campo magnetico  $B$

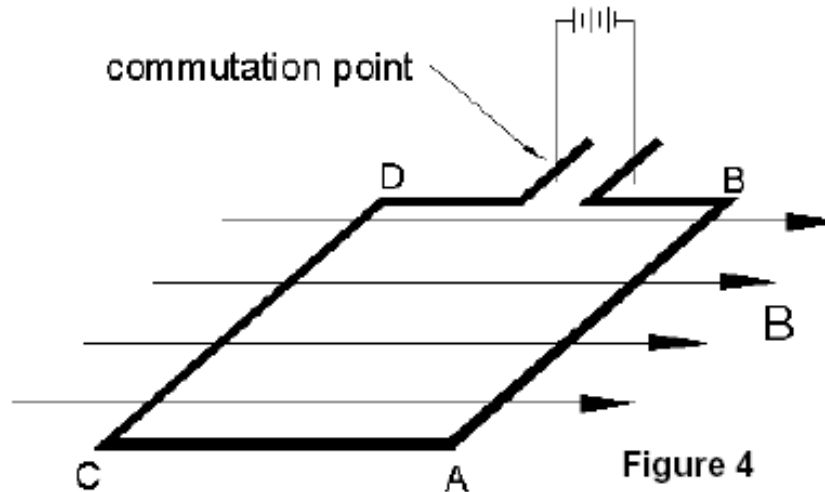


- ✦ Nei segmenti CD e AB si genera una forza  $F$  uguale ed opposta. Nei segmenti AC e BD la corrente e la forza  $F$  sono paralleli (Forza nulla)
- ✦ La spira inizia a ruotare attorno a  $OO'$  in senso orario
- ✦ A  $90^\circ$  si blocca



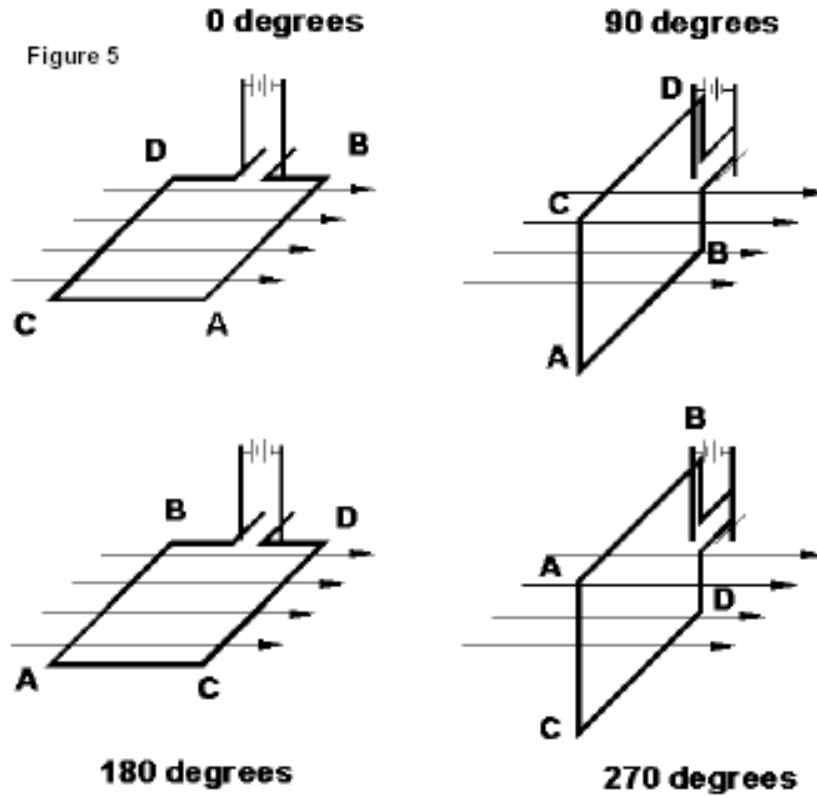


- ✦ Consideriamo un motore a c.c. a singola bobina



- ✦ La corrente è condotta attraverso delle spazzole (commutation point).

- La corrente deve essere commutata a  $90^\circ$  e  $270^\circ$ .



- ⤴ Diagramma della coppia in funzione della posizione angolare (singola bobina)

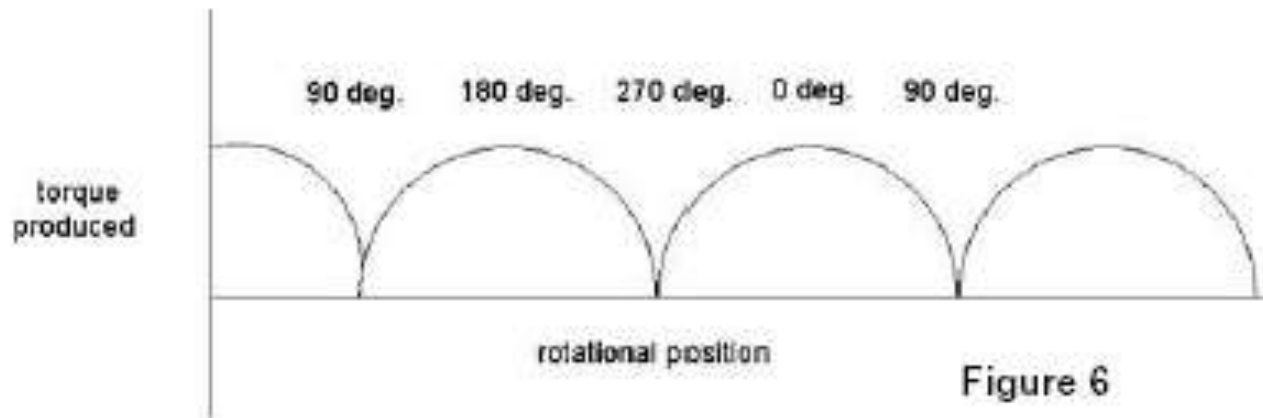
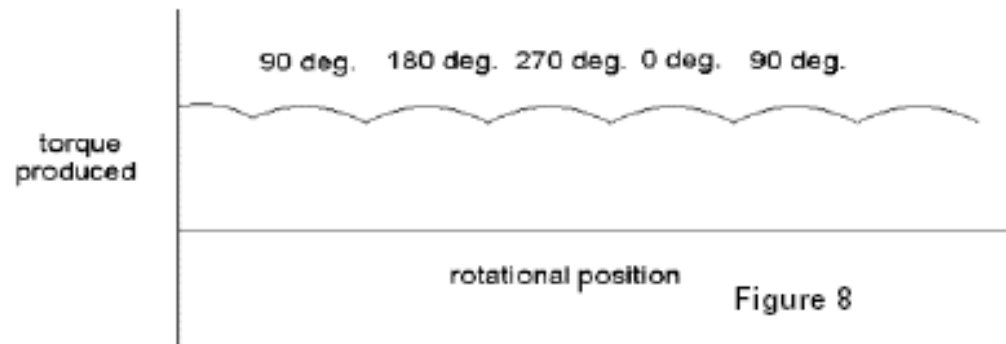
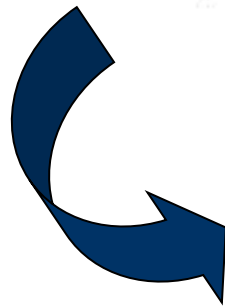
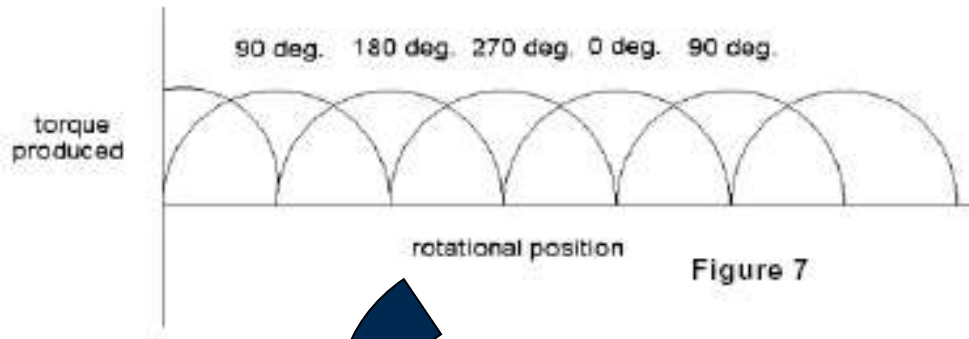
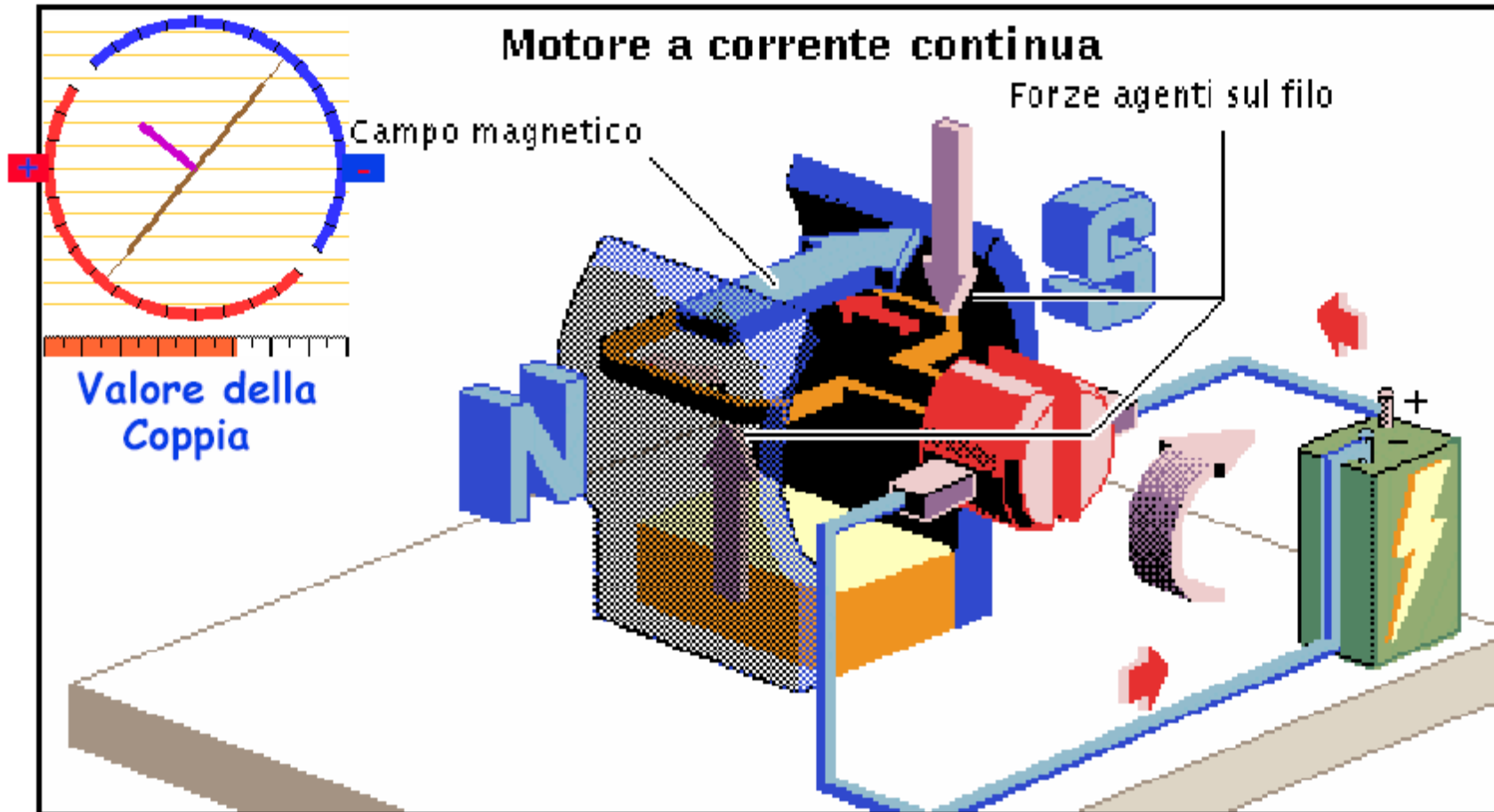


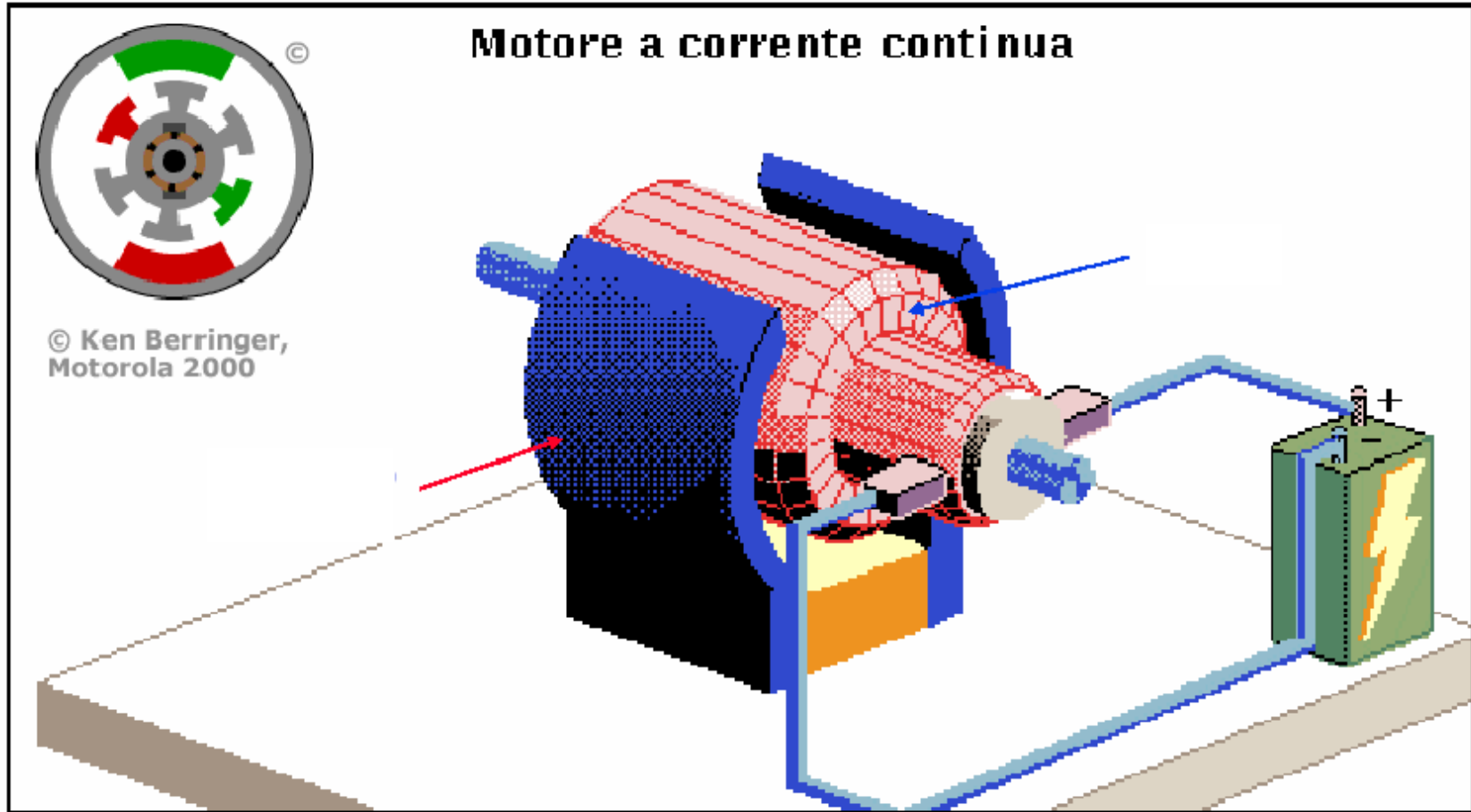
Figure 6

- ⤴ Diagramma della coppia in funzione della posizione angolare (Doppia bobina in opposizione)

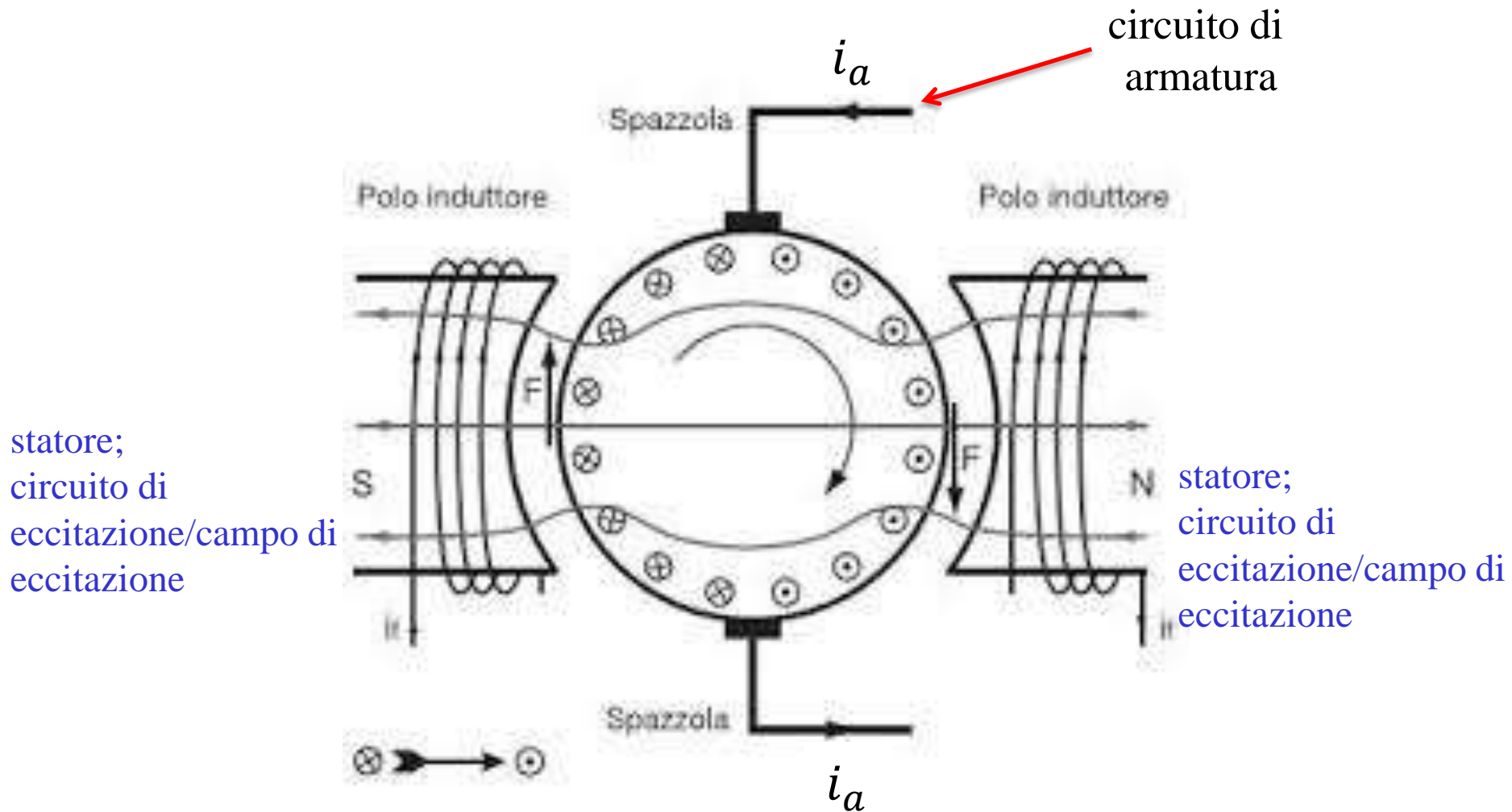


- ⤴ Diminuisce il ripple (coppia costante)

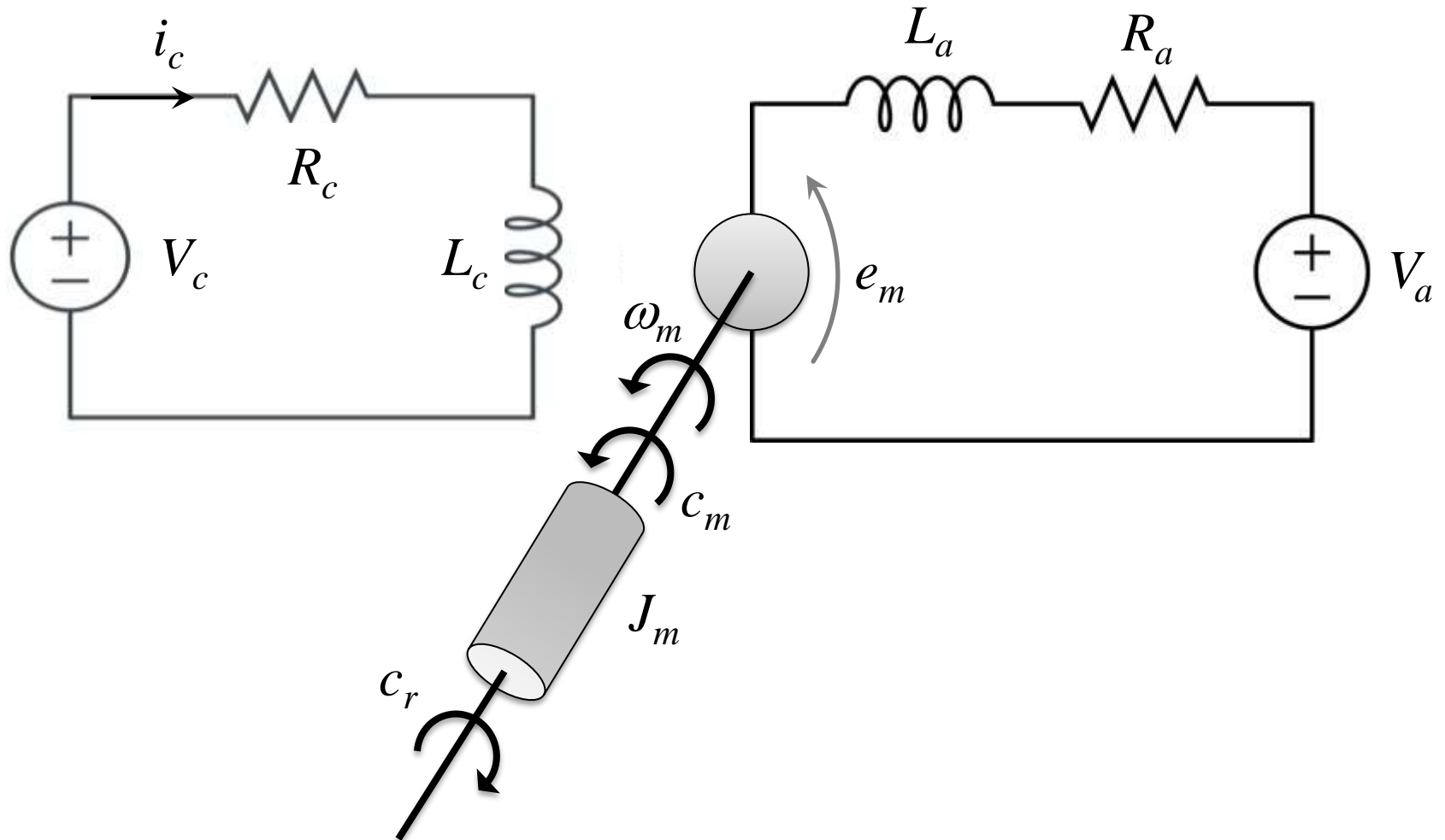




Lo schema di un motore è rappresentato nel seguito



✦ Ai nostri fini il motore si può schematizzare come in figura





- ✦ Le relazioni costitutive che accoppiano parte meccanica ed elettrica sono

$$e_m(t) = K_e i_c(t) \omega_m(t)$$

$$c_m(t) = K_c i_c(t) i_a(t)$$

dove  $e_m$  è la f.c.e.m. e  $c_m$  è la coppia motrice all'albero motore.

✧ Applicando i principi di Kirchoff si ottiene

$$L_c \frac{di_c(t)}{dt} + R_c i_c(t) = v_c(t)$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_m(t) = v_a(t)$$

✧ Utilizzando la 2° legge di Newton (per moti rotazionali)

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) = c_m(t) - c_r(t)$$

- ✦ Supponiamo di essere interessati a studiare l'andamento della velocità angolare dell'asse. Dunque  $y(t) = \omega_m(t)$ .
- ✦ Inoltre ci sono tre ingressi:  $u_2 = v_a$  e  $u_3 = v_c$  che sono rispettivamente la tensione di armatura e l'eccitazione (variabili manipolabili), e  $u_1 = c_r$  che rappresenta la coppia resistente all'albero motore (disturbo).
- ✦ Infine come scelta delle variabili di stato poniamo:  $x_1 = \omega_m$ ,  $x_2 = i_a$ ,  $x_3 = i_c$ .

✦ Si arriva alla rappresentazione ISU *nonlineare*

$$\dot{x}_1 = -\frac{B_m}{J_m} x_1 + \frac{K_c}{J_m} x_2 x_3 - \frac{1}{J_m} u_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_a}{L_a} x_2 - \frac{K_e}{L_a} x_1 x_3 + \frac{1}{L_a} u_2$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R_c}{L_c} x_3 + \frac{1}{L_c} u_3$$

$$y = x_1$$

- ✦ Spesso il motore lavora ad eccitazione costante (motore controllato sull'armatura).
- ✦ In tal caso il circuito di eccitazione è alimentato in continua, quindi  $v_c = V_{c_0}$  e  $i_c = I_{c_0} = V_{c_0}/R_0$  sono costanti (l'induttanza si comporta corto circuito).
- ✦ In questo caso l'unico ingresso manipolabile diventa  $v_a$ . Le equazioni diventano

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + K_\omega \omega_m(t) = v_a(t) \quad K_\omega = K_e I_{c_0}$$

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) = K_t i_a(t) - c_r(t) \quad K_t = K_c I_{c_0}$$

- ✧ Si noti che spesso  $K_t = K_\omega$  (macchina compensata).
- ✧ Per un motore controllato sull'armatura il modello si riduce e diventa lineare; la rappresentazione ISU diventa

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{B_m}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ -\frac{K_\omega}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{J_m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)x$$

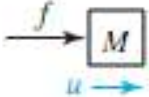
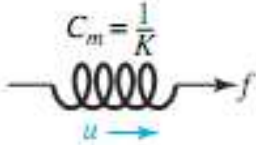
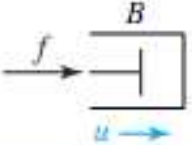
- ✦ Possiamo identificare due tipi di variabili, genericamente dette «effort» (variabile di tipo across) e «flow» (variabile di tipo through)
- ✦ Il prodotto di queste due variabili è una potenza

**Physical Variables**

System	Through variable	Across variable
Translation	Force (F)	Velocity (v)
Rotation	Torque ( $\tau$ )	Angular velocity ( $\omega$ )
Electrical	Current (i)	Voltage (V)
Fluid	Volumetric flow rate (Q)	Pressure (P)
Thermal	Heat flow rate (q)	Temperature (T)

- ✦ Nel caso dei sistemi meccanici esistono due possibili alternative per definire l'analogia con i circuiti elettrici

**TABLE** Mechanical-Electrical Analogs

Quantity	Unit	Symbol	Mathematical Relation	Force-Current Analog	Force-Voltage Analog
Force	N	$f(t)$	...	$i(t)$	$v(t)$
Velocity	m/s	$u(t)$	...	$v(t)$	$i(t)$
Mass	kg		$f = M \frac{du}{dt}$ (Newton's law)	$C$	$L$
Compliance (= 1/stiffness)	m/N		$f = \frac{1}{C_m} \int u dt$ (Hooke's law)	$L$	$C$
Viscous friction or damping	$N \cdot s/m$		$f = Bu$	$G = 1/R$	$R$



ELECTRIC-HYDRAULIC TECHNOLOGIES							
Electrical variable				Hydraulic variable			
Analogous Electrical Property or Variable	Unit of Measure Unit Symbol(s)	Algebra Symbol	Schematic Notation	Analogous Hydraulic Property or Variable	Unit of Measure Unit Symbol(s)	Algebra Symbol	Schematic Notation
Electron	n/a	n/a	n/a	Fluid molecule	n/a	n/a	n/a
Electrical Charge	coulomb Q	Q, q	Q, q	Fluid Volume	in. <sup>3</sup> , gallon mm <sup>3</sup> , cm <sup>3</sup>	V, v	V, v
Voltage	volt V	V, E, v, e	V, E, v, e	Pressure	P, p	P, p	P, p
Current	ampere A	I, i	I, i	Fluid Flow	in. <sup>3</sup> /sec, gpm litre/min	Q, q	Q, q
Electrical Charge	coulomb Q	Q, q	Q, q	Fluid Volume	in. <sup>3</sup> , gallon mm <sup>3</sup> , cm <sup>3</sup>	V, v	V, v
Electrical Resistance	ohm Ω	R	R	Hydraulic Resistance	psi/(in. <sup>3</sup> /sec)	R	R
Electrical Conductivity	mho U	G	G	Hydraulic Conductivity	(in. <sup>3</sup> /sec) / √psi	K <sub>v</sub>	K <sub>v</sub>
Power	Watt	P	W	Power	hp, kW	W	HP kW

✦ Vedi dispensa «Success stories in control».