Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2018/19

Trasformata di Laplace

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Concetti Principali

- Definizione
- Trasformate fondamentali
- Principali proprietà

Trasformata: Definizione

- La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$ si definisce come

$$f(t) \rightarrow F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Si noti che t è una variabile reale, mentre s è una variabile complessa.

Antitrasformata: Definizione

- Viceversa, data la $F(s)$, è possibile ottenere la funzione originaria $f(t)$ mediante anti-trasformazione

$$F(s) \;\rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Funzioni di Interesse

- Le funzioni di interesse per le applicazioni nel settore dell'automatica (di cui ci interessa calcolare la trasformata di Laplace) sono
  - Il gradino $1(t)$
  - La rampa $t \cdot 1(t)$
  - L'impulso $\delta(t)$
  - Le funzioni polinomiali in generale
  - Le funzioni esponenziali
  - Le funzioni sinusoidali

Trasformate dei Segnali Fondamentali (Ingressi)

- Queste trasformate rivestono una particolare importanza perché sono quelle legate ai tipici segnali di ingresso di un sistema di controllo

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t\,1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n\,1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Trasformate dei Segnali Fondamentali (Modi di Evoluzione)

- Queste trasformate rivestono una particolare importanza perché sono quelle legate all'andamento temporale della risposta dei sistemi lineari (modi di evoluzione)

$$\mathcal{L}[e^{at}1(t)] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)\,1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\,1(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Principali proprietà –1

- Linearità

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s)$$

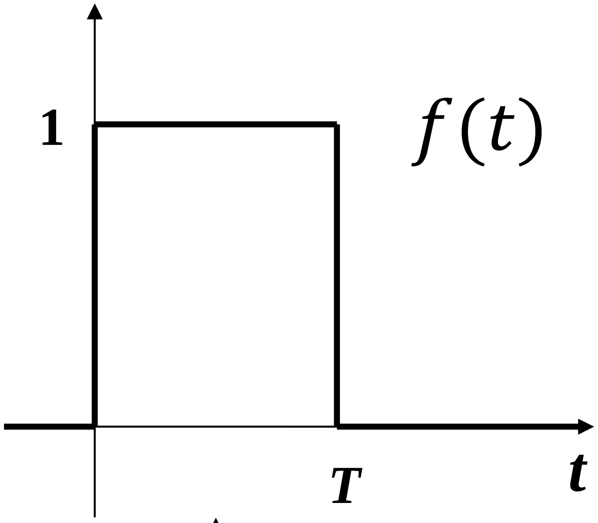
- Traslazione del dominio della s

$$\mathcal{L}[e^{at}\,f(t)] = F(s-\alpha)$$

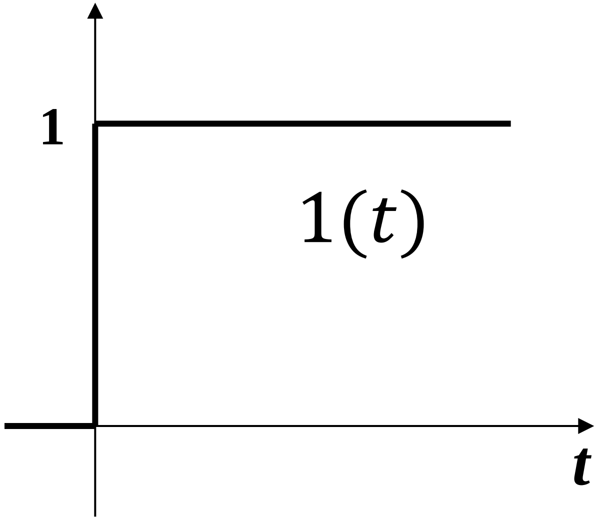
- Traslazione nel dominio della t

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = F(s)e^{-sT}$$

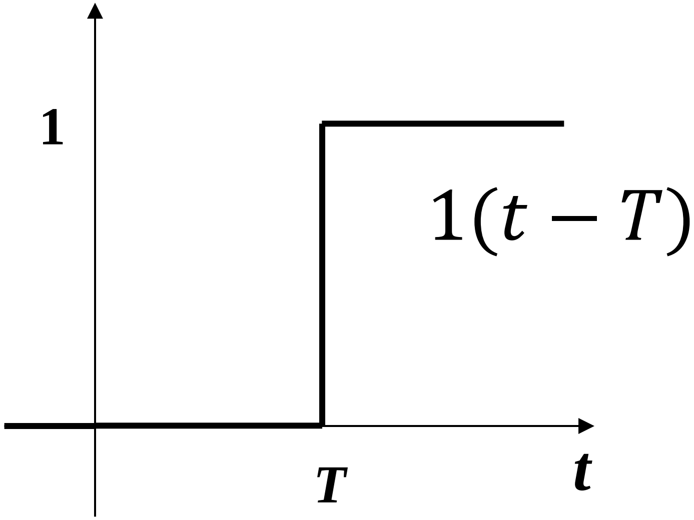
Esempio: Segnale a Finestra



$$\boxed{f(t) = 1(t) - 1(t-T)}$$



—



Esempio: Segnale a Finestra

- La trasformata della finestra si può quindi calcolare a partire dalle trasformate dei due gradini

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[1(t) - 1(t-T)] \\
&= \mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[1(t-T)] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

Esempi di Trasformate

$$\mathcal{L}[te^{\alpha t}\,1(t)] = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin(\omega \mathrm{t})\,1(t)] = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos(\omega t)\,1(t)] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

Principali proprietà - 2

- Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0)$$

- Integrazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\,F(s)$$

Principali proprietà - 3

- Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

- Teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

- Calcolo del valore iniziale della derivata

$$\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{s\to\infty} s^2\,F(s) - sf(0)$$

Principali proprietà – 4

- Date due funzioni f_1 e f_2, il loro prodotto di convoluzione è

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\eta)\, f_2(t)\, d\eta = f_2(t) * f_1(t)$$

- La trasformata di Laplace gode della seguente proprietà

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = F_1(s)\, F_2(s)$$