Dubium sapientiae initium

Corso di "Fondamenti di Automatica"
A.A. 2018/19

Analisi dei Sistemi Lineari e Tempo Invarianti nel Dominio del Tempo

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Calcolo della Risposta dei Sistemi Lineari

- Consideriamo un sistema lineare e stazionario

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

- Effettuando la trasformata di Laplace di ambo i membri della prima equazione si ha

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

da cui

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

Matrice di Transizione

- Quindi

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

- La funzione matriciale $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ si chiama ***Matrice di Transizione***. Quindi

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)$$

Inversa di una Matrice n×n

- Data una matrice quadrata e invertibile

$$A = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,1} & \dots & x_{i,j} \end{pmatrix}$$

- la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathrm{cof}(A, x_{1,1}) & \dots & \mathrm{cof}(A, x_{1,j}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}(A, x_{i,1}) & \dots & \mathrm{cof}(A, x_{i,j}) \end{pmatrix}^T$$

dove il cofattore è definito come

$$\mathrm{cof}\,(A, i, j) = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{minor}\,(A, i, j))$$

e il minore i,j è il determinante della matrice che si ottiene eliminando le righe i e j.

Inversa di una Matrice 2×2

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversa di una Matrice 3×3

- Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

la sua inversa è

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Polinomio Caratteristico e Autovalori

- Il denominatore di $\Phi(s)$ coincide con il polinomio caratteristico di A.
- Le radici di tale polinomio sono i poli di $\Phi(s)$ e coincidono con gli autovalori di A.
- Ricordiamo che gli autovalori di A sono i valori di λ per cui risulta

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

per un qualche vettore $\bar{x}$ che viene detto autovettore associato all'autovalore λ.

Esempi di Calcolo del Polinomio Caratteristico

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$p(s) = s^2 + 3s - 10$$

Autovalori

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$p(s) = s^3 - 5s^2 - 22s - 24$$

Autovalori

$$\lambda_1 = 8.09$$

$$\lambda_2 = \text{-}1.54 + j0.765$$

$$\lambda_3 = \text{-}1.54 \text{-} j0.765$$

Funzione di Trasferimento

- Trasformando l'equazione di uscita e sostituendo le equazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ &= C\Phi(s)x_0 + C\Phi(s)BU(s) + DU(s) \\ &= C\Phi(s)x_0 + \left(C\Phi(s)B + D\right)U(s) \end{aligned}$$

- La funzione matriciale $W(s) = C\Phi(s)B + D$ si chiama ***Funzione di Trasferimento***, dunque

$$Y(s) = C\Phi(s)x_0 + W(s)U(s)$$

Esempi di Calcolo della Funzione di Trasferimento

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+3}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} -1.5 & -1.25 \end{pmatrix} x + u$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{s^2+s}{s^2+4s+5}$$

Evoluzione Libera e Forzata

- Il termine $C\Phi(s)x_0 = Y_l(s)$ si chiama **evoluzione libera**, e rappresenta l'evoluzione dell'uscita a partire dalla condizione iniziale x_0 in presenza di ingresso nullo.

- Il termine $W(s)U(s) = Y_f(s)$ si chiama **evoluzione forzata,** e rappresenta l'evoluzione dell'uscita a partire da condizioni iniziali nulle con ingresso $u(t)$.

- L'evoluzione forzata ha grande importanza, perché molto spesso i sistemi fisici si trovano in condizioni iniziali nulle per cui la risposta coincide con la risposta forzata.

Calcolo della Risposta Complessiva

- In definitiva per calcolare la risposta di un sistema
  - Si calcola $U(s)$
  - Si calcola $\Phi(s)$
  - Si calcolano $Y_l(s)$ e $Y_f(s)$
  - Si effettua l'antitrasformata per ottenere $y_l(t)$ e $y_f(t)$
  - Infine $y(t) = y_l(t) + y_f(t)$

Esempi

- Calcolare la risposta al gradino del sistema lineare

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

con la condizione iniziale

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempi

- Calcolare la risposta al gradino del sistema lineare

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + 3u$$

con la condizione iniziale

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Calcolare la risposta anche per $u(t) = t1(t)$ e per $u(t) = \sin(2t)\,1(t)$.

Esempi

- Calcolare la risposta al gradino del sistema lineare

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

con la condizione iniziale

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Modi di Evoluzione

- I termini notevoli che compaiono nell'espressione di $\Phi(s)$ sono:
  - Poli reali semplici

$$\frac{1}{s-\alpha}$$

in corrispondenza di un autovalore reale semplice α della matrice dinamica

  - Poli reali multipli

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

in corrispondenza di un autovalore di molteplicità doppia α della matrice dinamica

  - Poli complessi semplici

$$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \quad \text{oppure} \quad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

in corrispondenza di una coppia di autovalori complessi coniugati in $\alpha \pm j\omega$

  - Poli complessi multipli (raro)

- Vogliamo adesso studiare che tipo di evoluzione temporale originano questi termini.

- Le antitrasformate dei termini che compaiono in $\Phi(s)$ si chiamano **modi di evoluzione** del sistema.

Polo Reale Semplice

- Si consideri l'antitrasformata del polo reale semplice

$$\frac{1}{s-\alpha} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} e^{\alpha t}1(t)$$

- L'andamento nel tempo di questo termine dipende dal valore di α:
  - Se $\alpha < 0$ il modo è convergente
  - Se $\alpha = 0$ il modo è stazionario
  - Se $\alpha > 0$ il modo è divergente
- Questo tipo di modo si chiama **aperiodico**.

Costante di Tempo

- Se il modo è convergente il numero positivo

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}$$

si chiama ***costante di tempo***. Essa dà conto del tempo che il modo di evoluzione impiega ad estinguersi da un punto di vista ingegneristico.

- Dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo, l'ampiezza del modo di evoluzione si riduce a un centesimo del valore iniziale.

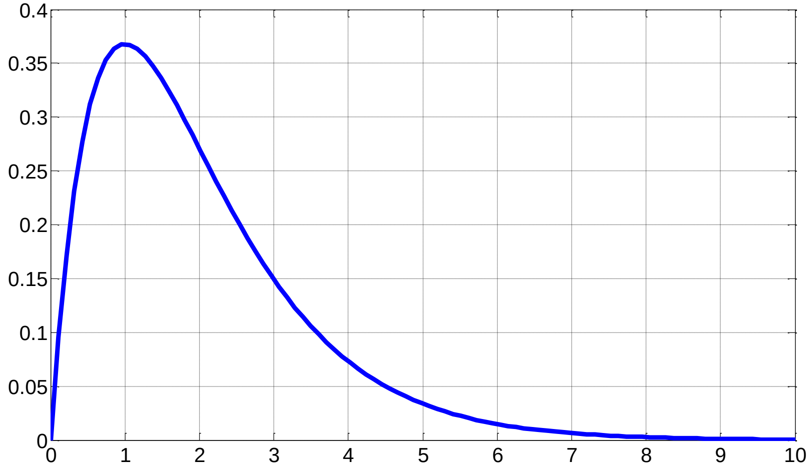
Poli Reali Multipli

- Consideriamo ad esempio

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} te^{\alpha t}1(t)$$

- L'andamento nel tempo di questo termine dipende dal valore di α:
  - Se $\alpha < 0$ il modo è ***convergente***
  - Se $\alpha \geq 0$ il modo è ***divergente***

$$\frac{1}{(s+1)^2}$$



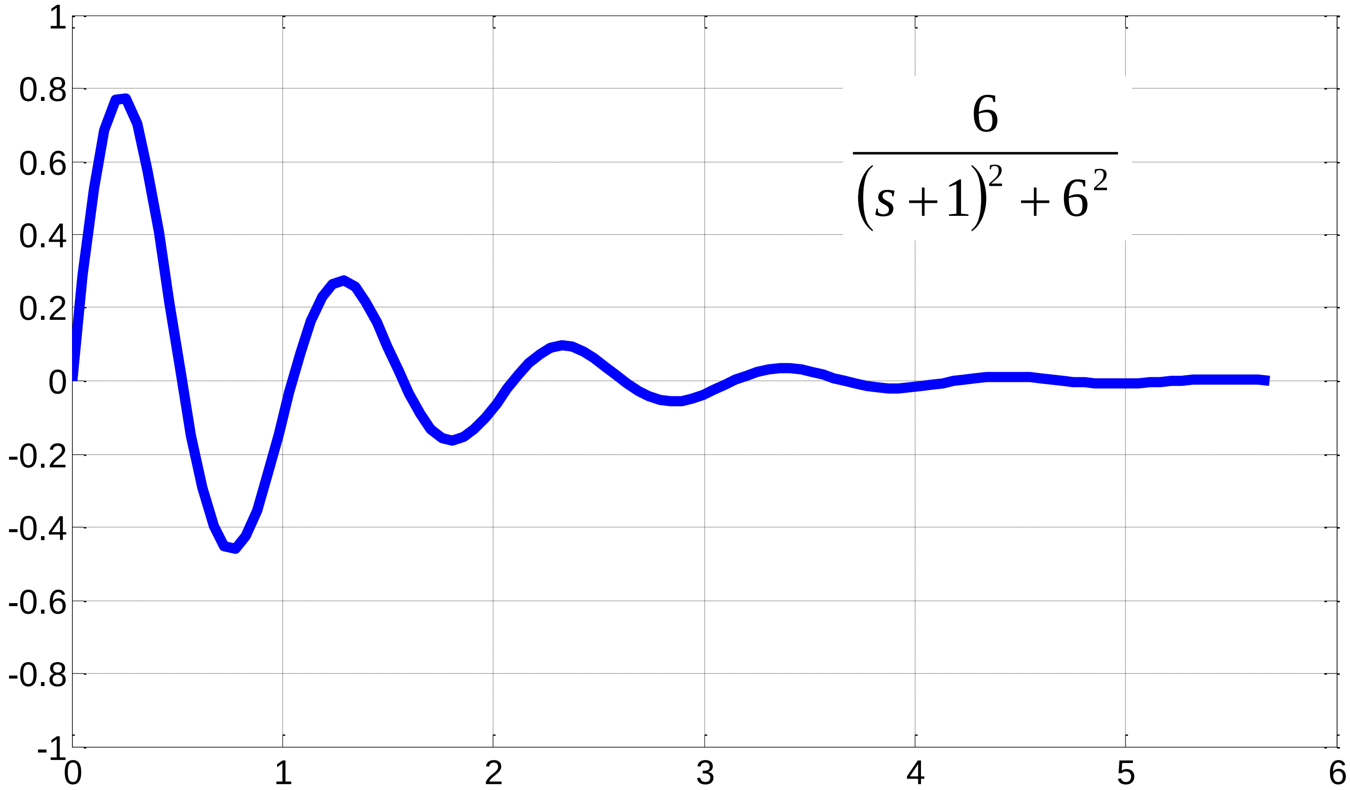
Poli Complessi Semplici

- Consideriamo ad esempio

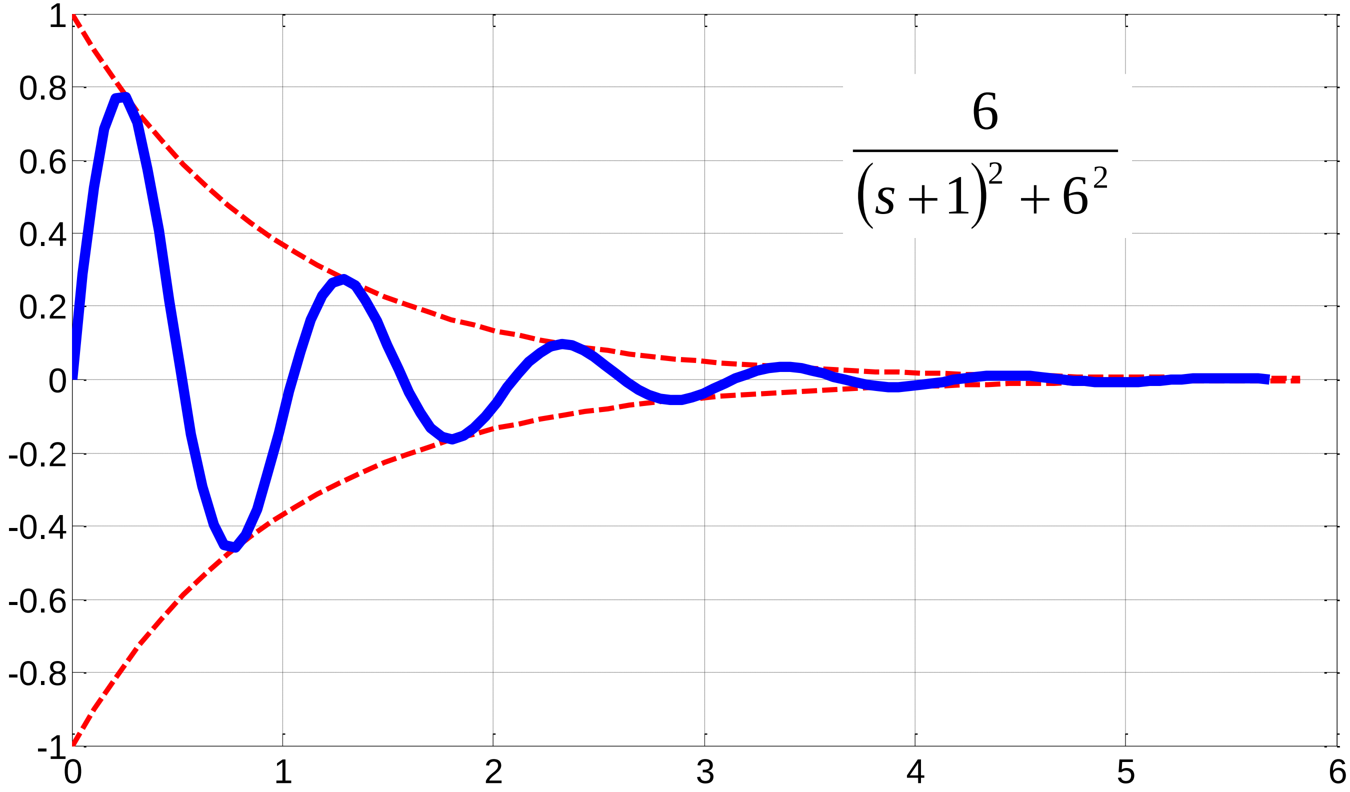
$$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} e^{\alpha t}\sin(\omega t)1(t)$$

- Un termine di questo tipo contiene oscillazioni modulate da una esponenziale. Il carattere del modo dipende dal valore di α:
  - Se $\alpha < 0$ il modo è convergente
  - Se $\alpha = 0$ il modo è stazionario
  - Se $\alpha > 0$ il modo è divergente
- Questo tipo di modo si chiama ***pseudoperiodico***

Modi Pseudo-Periodici



Modi Pseudo-Periodici



Pulsazione Naturale e Coefficiente di Smorzamento

- Per i modi pseudo-periodici oltre alla costante di tempo $\tau = -\frac{1}{\alpha}$ si definiscono la ***pulsazione naturale***

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

e il ***coefficiente di smorzamento***

$$\zeta = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Coefficiente di Smorzamento

- Se il modo pseudo-periodico è **convergente**, allora

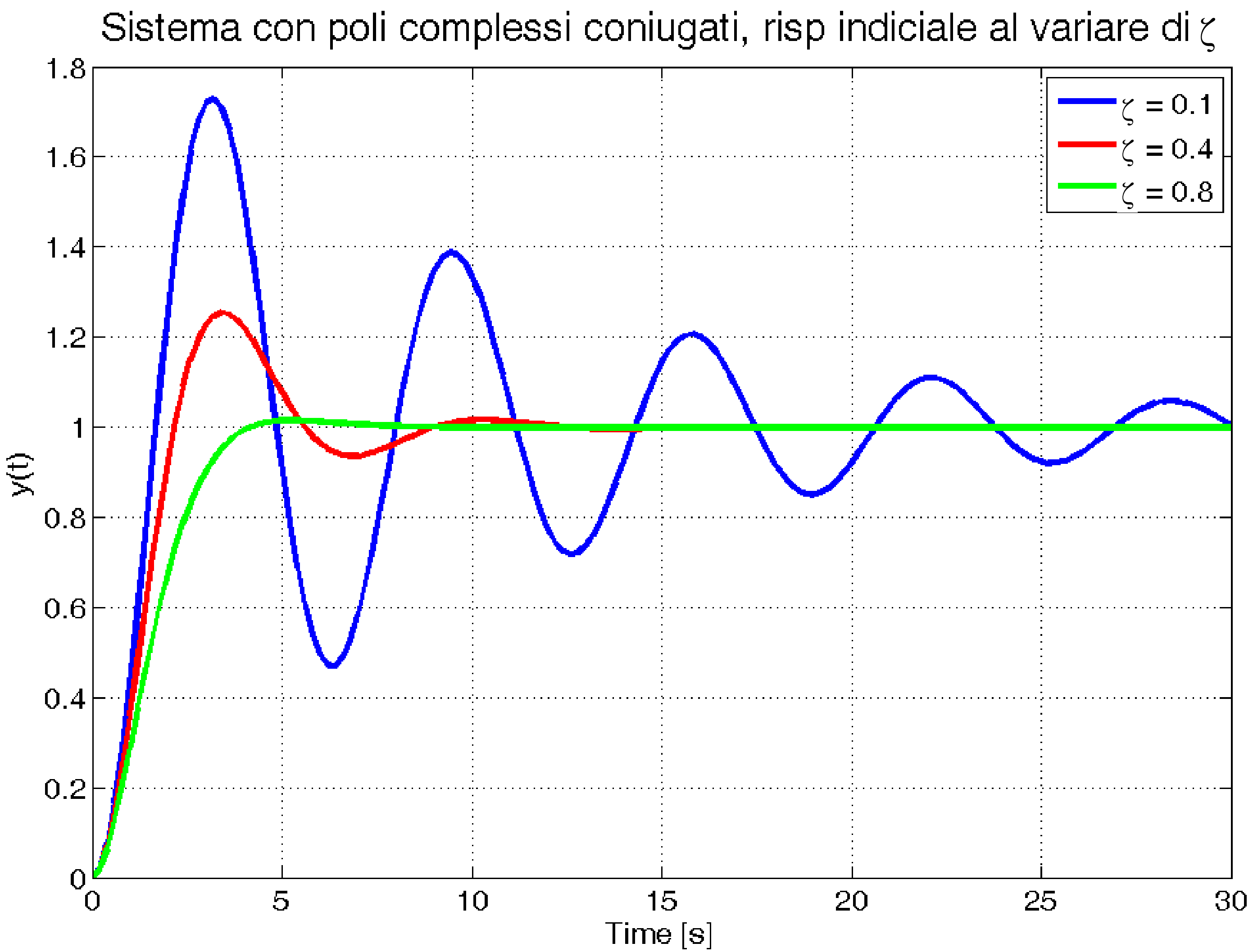
$$\zeta \in (0,1]$$

- Se il modo pseudo-periodico è **divergente**, allora

$$\zeta \in [-1,0)$$

- Nel caso di modo convergente uno ζ piccolo significa che il modo pseudo-periodico compie molte oscillazioni prima di estinguersi.

Esempi di risposte con diverso coefficiente smorzamento



Formula di Lagrange

- Dato il sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

il ***movimento dello stato*** può essere calcolato direttamente nel tempo mediante la formula di Lagrange

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau, \quad t \geq t_0$$

- Il ***movimento dell'uscita*** risulta, quindi, essere

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau + D\,u(t), \quad t \geq t_0$$

Calcolo dell'evoluzione nel tempo

L'esponenziale di una matrice M è definito come

$$e^M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} M^i = I_n + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots$$

- La matrice A ha autovalori reali distinti se e solo se è diagonalizzabile; in questo caso (prendendo $t_0 = 0$), si ha

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A\,t)^i = T_D^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A\,t)^i \, T_D$$

$$= T_D^{-1} \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} \, T_D$$

- Nel caso di matrice non diagonalizzabile (autovalori con multeplicità maggiore di uno), si deve ricorrere alla ***forma di Jordan*** (v. testo per approfondimenti).

Formula di Lagrange

- Per verificare che la funzione data è soluzione dell'eq. di stato, utilizziamo la seguente formula di derivazione

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,\tau)\,d\tau = f\big(t,b(t)\big)\frac{db(t)}{dt} - f\big(t,a(t)\big)\frac{da(t)}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,\tau)\,d\tau$$

- Derivando la formula di Lagrange (per $t_0 = 0$), otteniamo

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) + e^{A(t-t)}Bu(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\right]d\tau$$

$$= Ae^{At}x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= A\left[e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + Bu(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Convoluzione nel dominio del tempo

- Nelle formule precedenti appare un ***integrale di convoluzione***
- Date due funzioni f_1 e f_2, il loro prodotto di convoluzione è

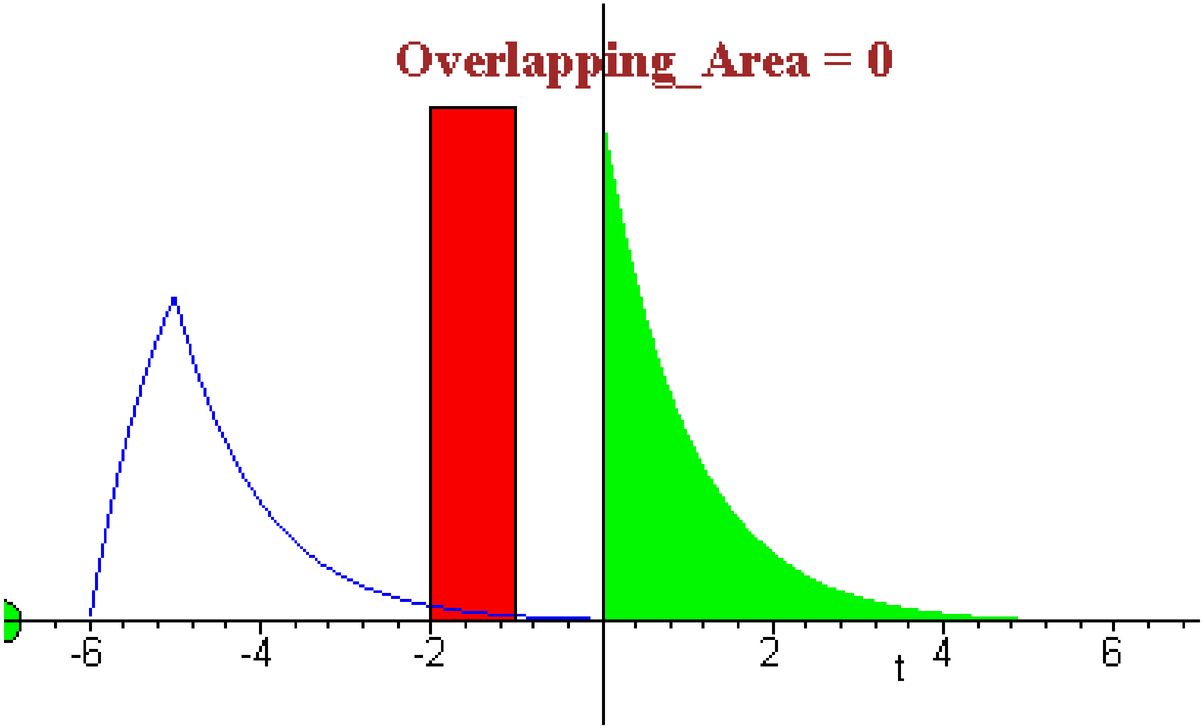
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\eta)\, f_2(t)\, d\eta = f_2(t) * f_1(t)$$

- La trasformata di Laplace gode della seguente proprietà

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = F_1(s)\, F_2(s)$$

Convoluzione nel dominio del tempo



Risposta all'impulso

- Consideriamo un sistema LTI asintoticamente stabile, con fdt $G(s)$, soggetto ad un ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t)$
- Utilizzando la trasformata di Laplace ricaviamo facilmente che

$$X_\delta(s) = \Phi(s)B\,U(s) = \Phi(s)B$$
$$Y_\delta(s) = G(s)\,U(s) = G(s)$$

- Quindi l'antitrasformata della fdt è anche la risposta forzata all'impulso
- Applicando la formula di Lagrange otteniamo, nel dominio del tempo,

$$x_\delta(t) = e^{At}B$$
$$y_\delta(t) = Ce^{At}B + D\,\mathrm{imp}(t)$$

Risposta all'impulso

- A partire dalla risposta all'impulso è possibile calcolare la risposta forzata del sistema a qualsiasi altro segnale $u(t)$

$$x(t) = x_\delta(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x_\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\, u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = y_\delta(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= C\int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\, u(\tau)d\tau + D\, u(t)$$

Stabilità Asintotica

- Un sistema lineare si dice essere ***asintoticamente stabile*** se i modi di evoluzione sono tutti convergenti.
- Ciò accade se tutti gli autovalori di A sono a parte reale negativa.
- In un sistema asintoticamente stabile l'evoluzione libera tende asintoticamente a zero qualunque sia la condizione iniziale; l'evoluzione forzata si mantiene limitata qualunque sia l'ingresso (purché anch'esso limitato).

Instabilità

- Un sistema lineare si dice essere ***instabile*** se esiste almeno un modo di evoluzione divergente.

- Ciò accade se si verificano una o entrambe le seguenti condizioni

  - almeno un autovalore di A possiede parte reale positiva

  - almeno un autovalore possiede parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno.

- In un sistema instabile l'evoluzione libera può tendere all'infinito; l'evoluzione forzata può tendere all'infinito anche se l'ingresso è limitato.

Stabilità Semplice

- Un sistema lineare si dice ***semplicemente stabile*** se non esistono modi di evoluzione divergenti, ma possono esistere modi stazionari.

- Ciò accade se tutti gli autovalori di A posseggono parte reale negativa o nulla e gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità unitaria.

- In un sistema semplicemente stabile l'evoluzione libera non diverge ma può non tendere a zero; l'evoluzione forzata può tendere all'infinito anche se l'ingresso è limitato.

Esempi di Studio della Stabilità

- Studiare la stabilità del sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- Questo sistema è asintoticamente stabile perché gli autovalori sono tutti a parte reale negativa.

Esempi di Studio della Stabilità

- Studiare la stabilità del sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- Questo sistema è instabile perché c'è un autovalore a parte reale positiva

Esempi di Studio della Stabilità

- Studiare la stabilità del sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}
$$

- Questo sistema è semplicemente stabile perché c'è un autovalore nullo e uno a parte reale negativa.

Esempi di Studio della Stabilità

- Studiare la stabilità del sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2(s+5)}$$

- Il sistema è instabile perché ha una coppia di poli nell'origine

Una Risposta Importante: la Risposta Indiciale

- La **risposta indiciale** è la risposta *forzata* al *gradino* *unitario*.
- Essa ha grande importanza per almeno due motivi:
  - In molti impianti industriali il controllo del sistema avviene usando come ingressi segnali costanti nel tempo
  - La risposta indiciale fornisce molte informazioni sul comportamento del sistema e quindi risulta molto utile per studiare per via sperimentale quei sistemi per i quali è difficile trovare un modello analitico

Valore Iniziale della Risposta

- Il valore iniziale della risposta indiciale è sempre 0 a meno che il sistema non sia (semplicemente) proprio. Infatti applicando il teorema del valore iniziale si ha

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) = \\
&= \lim_{s\to\infty} sW(s)\frac{1}{s} \\
&= \lim_{s\to\infty} W(s) = \begin{cases} 0 & \text{se il sistema è strettamente proprio} \\ \neq 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Valore Iniziale della Derivata

- Applicando iterativamente il teorema del valore iniziale si può anche ricavare un'altra informazione: quante sono le derivate nulle nell'origine.

- Questa informazione è importante perché ci permette di capire come parte la risposta indiciale.

Valore Finale della Risposta

- Il valore finale della risposta indiciale coincide con $W(0)$, infatti applicando il teorema del valore finale si ha

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\ &= \lim_{s\to 0} sW(s)\frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0} W(s) = W(0)\end{aligned}$$

- Tale valore viene anche detto ***guadagno statico*** del sistema

Sistemi del Primo Ordine senza Zeri

- Un sistema del primo ordine asintoticamente stabile è caratterizzato dalla fdt

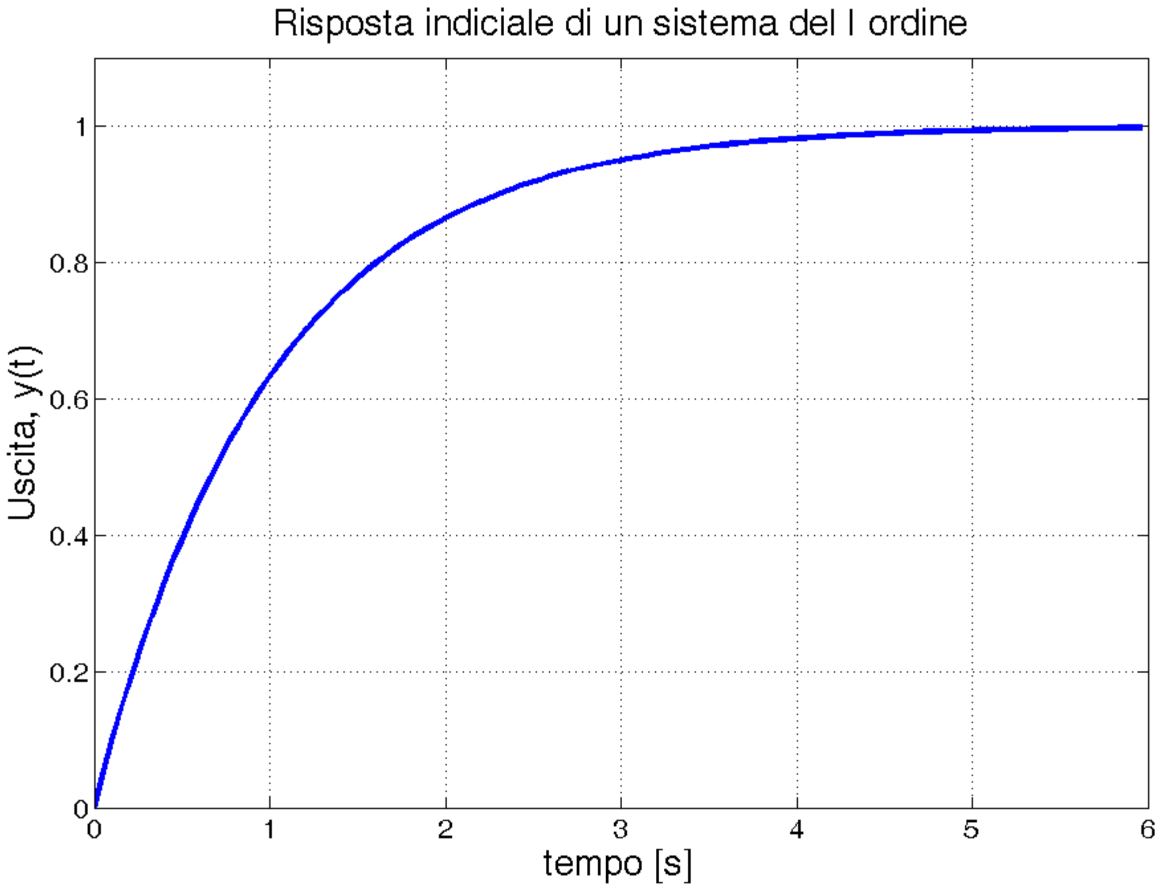
$$W(s) = \frac{k}{1+\tau s} \qquad \tau > 0$$

- Effettuando l'antitrasformata di $Y(s) = \frac{1}{s} W(s)$ si ottiene

$$y(t) = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right) 1(t)$$

Sistemi del Primo Ordine senza Zeri

- L'andamento tipico della risposta indiciale di un sistema del primo ordine è riportata di seguito.



Tempo di Assestamento

- Si noti che il raggiungimento del valore finale è legato all'estinzione del termine $e^{-t/\tau}$.

- Dunque, dopo un tempo pari a 4-5 volte la costante di tempo τ, si può ritenere, da un punto di vista ingegneristico, che la risposta $y(t)$ abbia raggiunto il suo valore finale.

Sistemi del Secondo Ordine con Poli Reali e senza Zeri

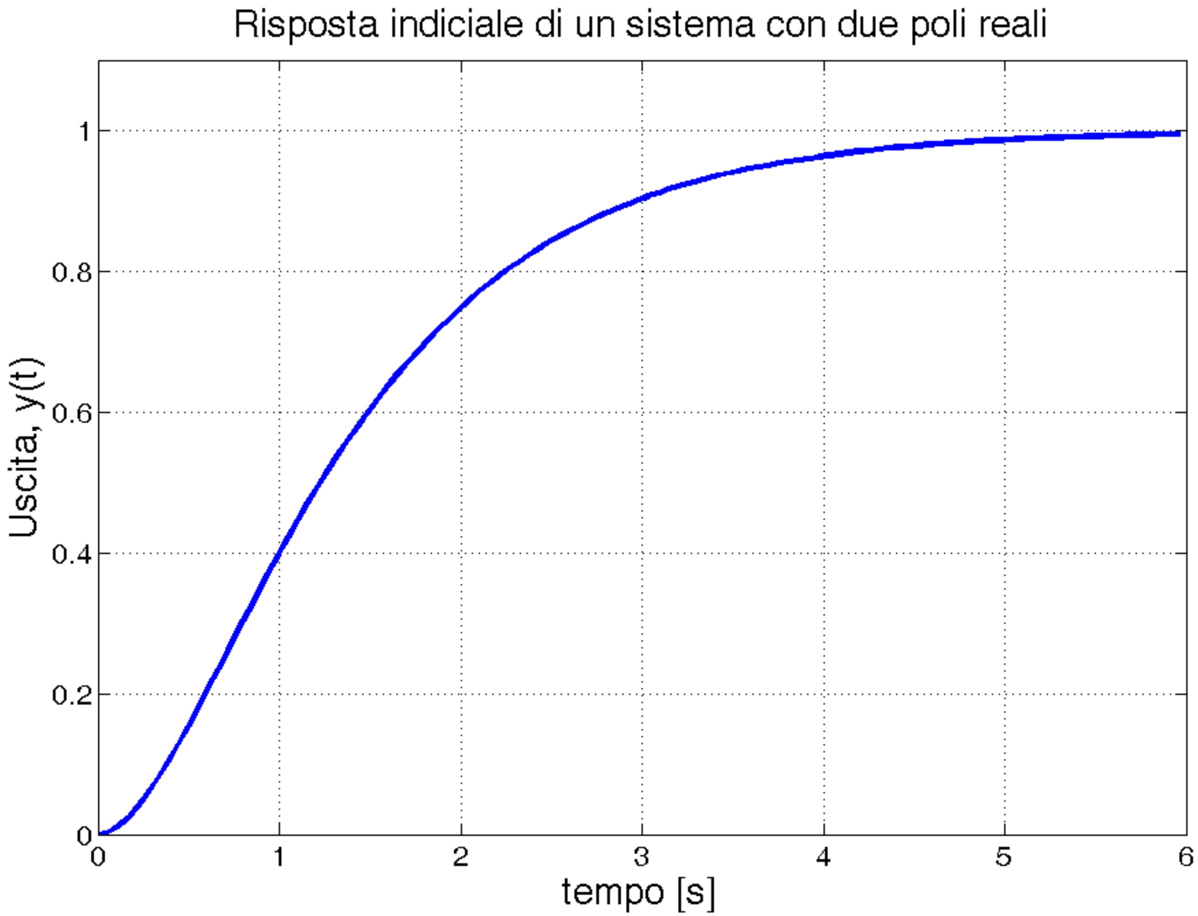
- La fdt (sistema asintoticamente stabile) è

$$W(s)=\frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \qquad \tau_1>0 \qquad \tau_2>0$$

- Effettuando l'antitrasformata di W(s)/s si ottiene

$$y(t)=k\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right)1(t)$$

- L'andamento tipico della risposta indiciale di un sistema con due poli reali e senza zeri è riportato di seguito.



Sistema del Secondo Ordine con Due Poli Reali e uno Zero

- La fdt (sistema asintoticamente stabile) è

$$W(s)=\frac{k(1+sT)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \qquad \tau_1>0 \qquad \tau_2>0$$

- Effettuando l'antitrasformata di W(s)/s si ottiene

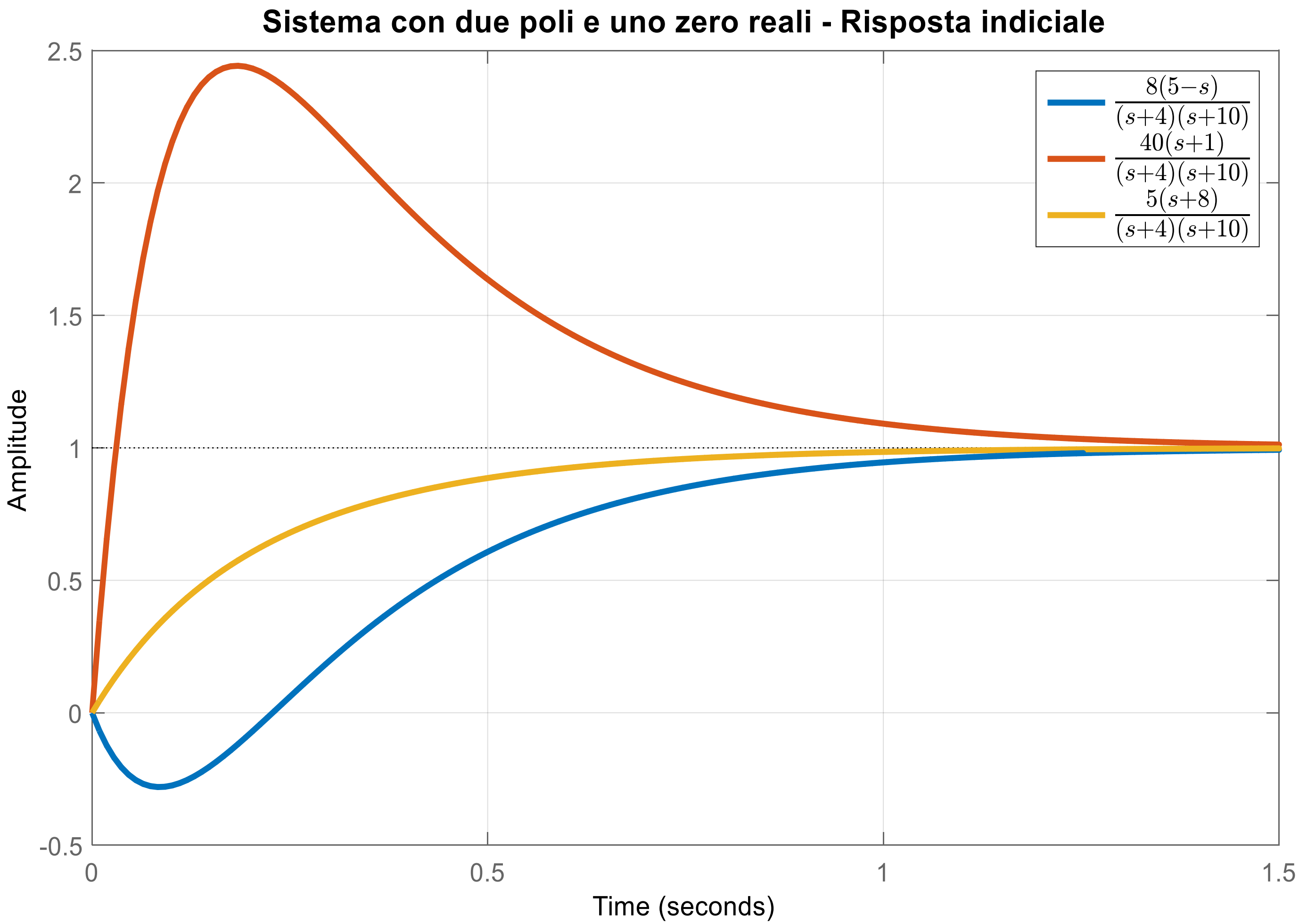
$$y(t)=k\left(1-\frac{\tau_1-T}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1}+\frac{\tau_2-T}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right)1(t)$$

Sistema del Secondo Ordine con Due Poli Reali e uno Zero

- In presenza di uno zero reale l'andamento temporale della risposta indiciale dipende fortemente dalla posizione dello zero.

- Nel seguito sono riportati tre andamenti tipici:
  - a) Zero positivo
  - b) Zero negativo più vicino all'origine del piano complesso rispetto ai poli
  - c) Zero negativo più lontano dall'origine del piano complesso rispetto ai poli

Sistema del Secondo Ordine con Due Poli Reali e uno Zero



Sistema con Due Poli Complessi Coniugati senza Zero

- Un sistema del genere possiede una fdt del tipo

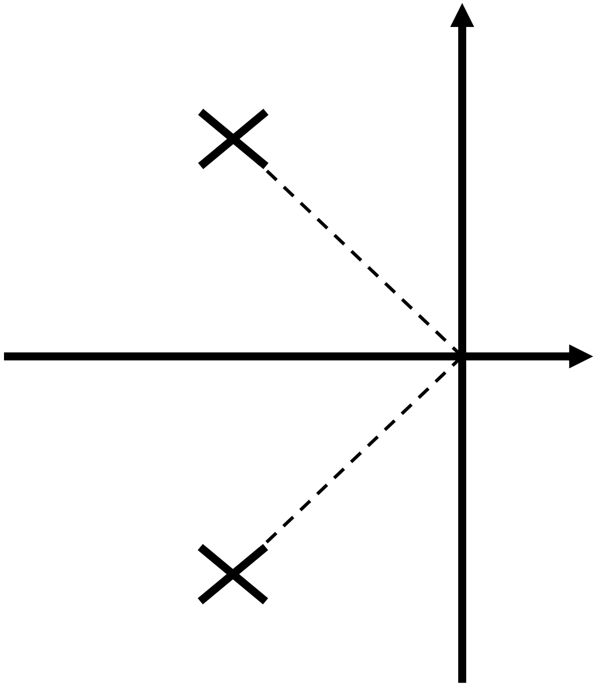
$$W(s) = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \qquad 0 < \zeta < 1$$

- Calcolando l'antitrasformata di $\mathrm{Y(s)} = W(s)\frac{1}{s}$ si ottiene

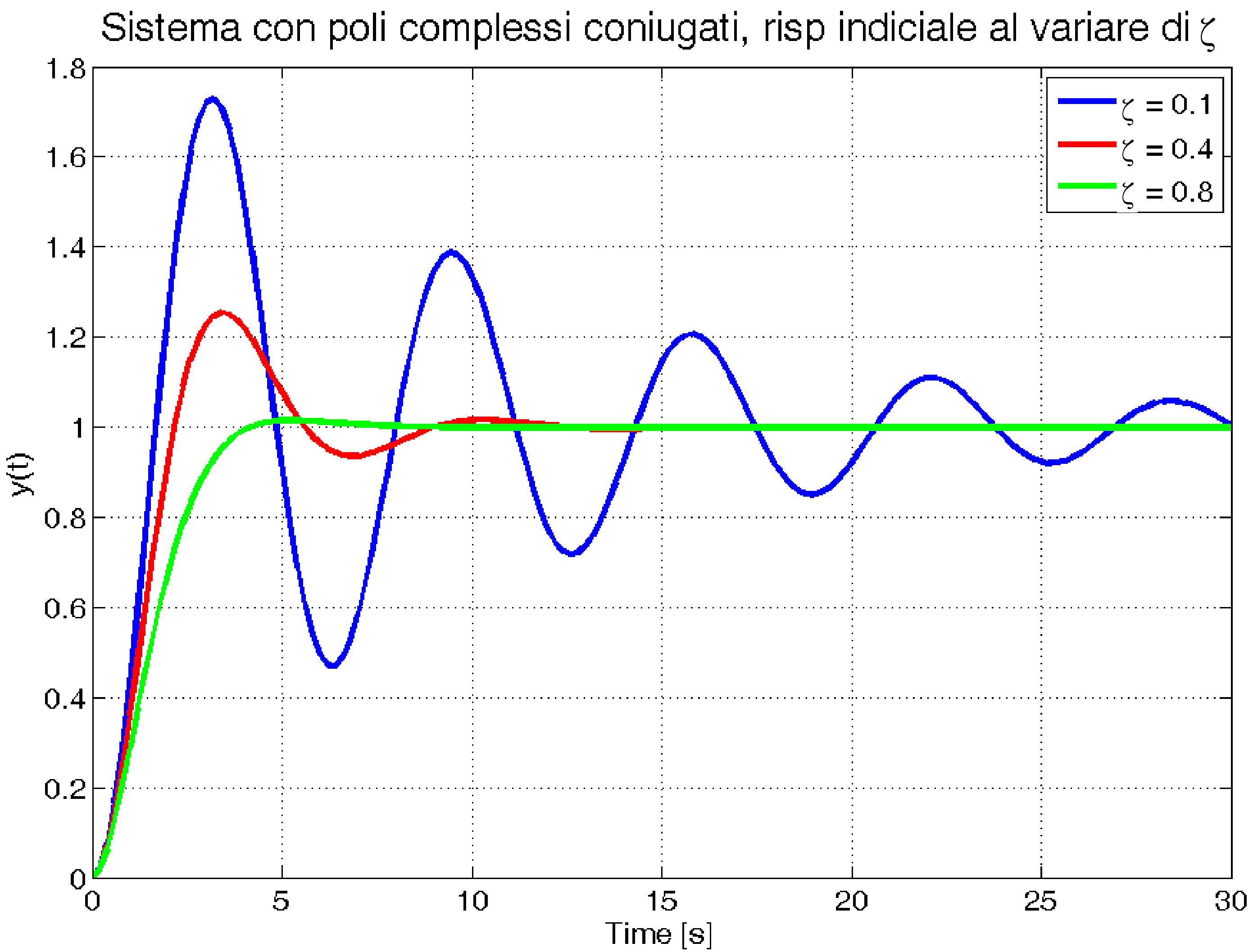
$$y(t) = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \mathrm{atan}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right)\right] 1(t)$$

Sistema con Due Poli Complessi Coniugati senza Zero

- L'andamento dell'uscita dipende fortemente dal valore di ζ . Nel seguito saranno considerati tre casi
  - ζ piccolo ($\zeta = 0.1$)
  - $\zeta = 0.5$
  - ζ grande ($\zeta = 0.9$)



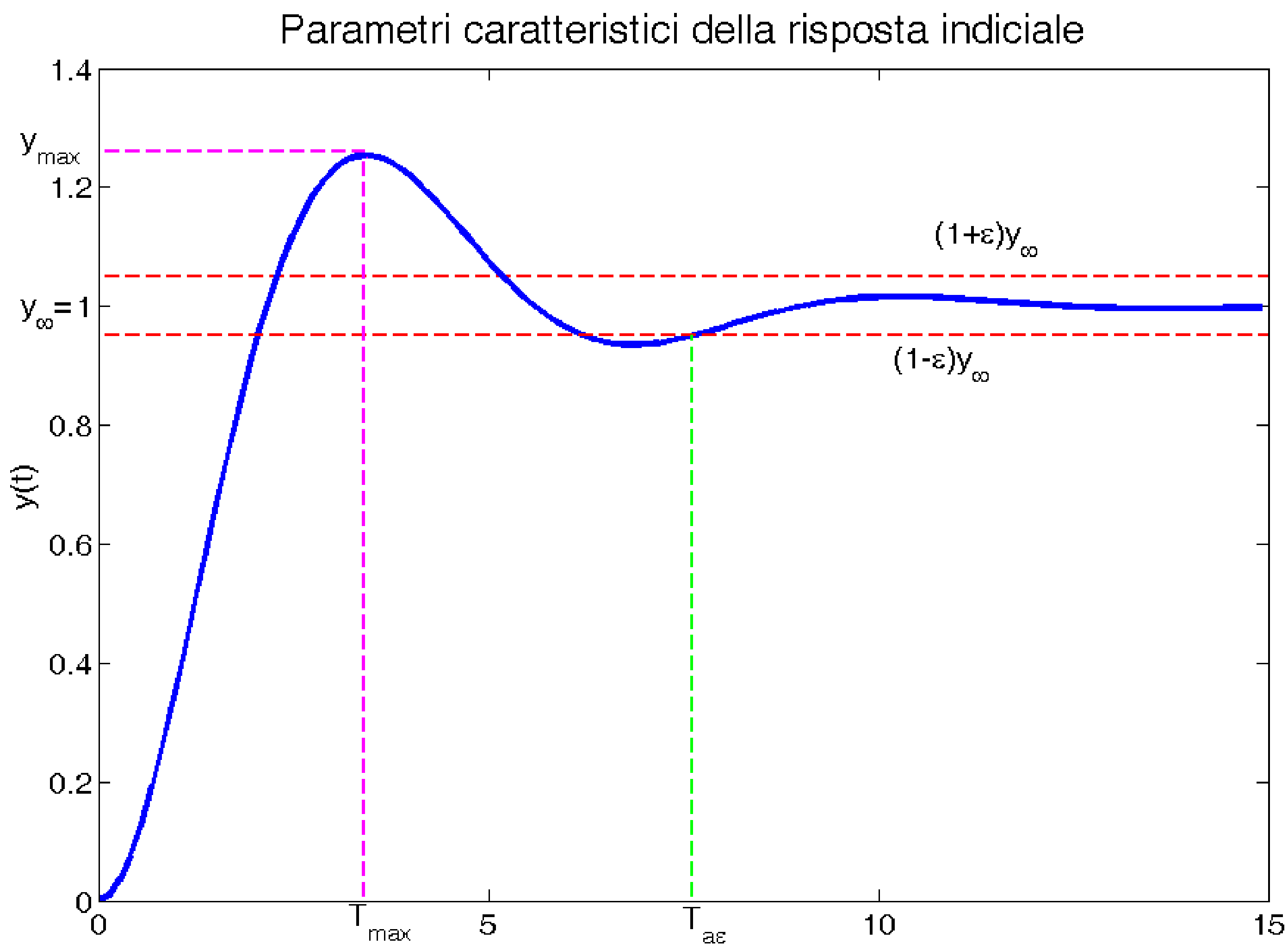
Sistema con Due Poli Complessi Coniugati senza Zero



Parametri della Risposta Indiciale

- Nel seguito è riportata una tipica risposta indiciale di un sistema del secondo ordine, con indicazione di alcuni parametri caratteristici:
  - $T_{\max}$: istante in cui è attinto il massimo della risposta
  - $y_{\max}$: valore massimo della risposta
  - y_{∞} : valore finale della risposta al gradino (in figura = 1)
  - $T_{a\varepsilon}$: tempo di assestamento all'ε% (tempo affinché $y(t)$ entri nella fascia $y_{\infty}(1\pm0.01\varepsilon)$)
  - $S\% = 100\,\frac{y_{\max}-y_{\infty}}{y_{\infty}}$: massima sovraelongazione percentuale

Parametri della Risposta Indiciale



Calcolo dei Parametri

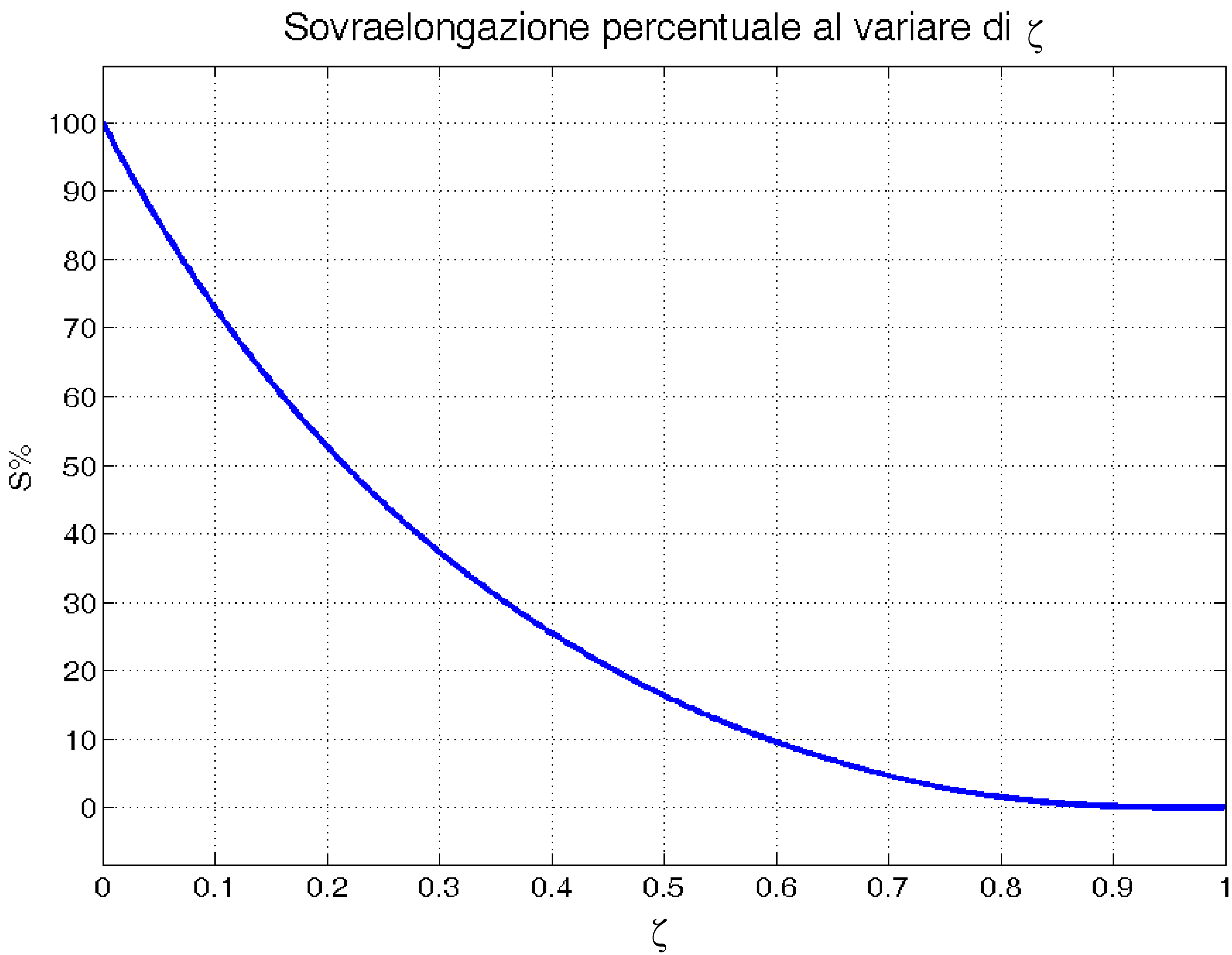
- Si può dimostrare che:

$$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad y_{max} = k\left(1 + \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right)$$

$$S\% = 100\exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$T_{a\varepsilon} \cong -\frac{\ln(0.01\varepsilon)}{\zeta\omega_n}, \qquad \varepsilon = 1 \implies T_{a1} \cong \frac{4.6}{\zeta\omega_n}$$

Sovraelongazione Percentuale



Esempi

- Tracciare qualitativamente l'andamento della risposta indiciale dei sistemi con le seguenti fdt

$$W(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} \qquad W(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 3}$$

$$W(s) = -\frac{4s}{s^2 + s + 2} \qquad W(s) = \frac{4s + 1}{s^2 + s + 2}$$

Risposta a Regime e in Transitorio

- Consideriamo un sistema asintoticamente stabile.
- Si chiama ***risposta a regime*** $y_r(t)$, se esiste, ciò che rimane della risposta complessiva $y(t)$, dopo che è passato un tempo infinito dall'applicazione dell'ingresso.
- Si chiama ***risposta transitoria*** $y_t(t)$ la differenza tra la risposta complessiva e quella a regime; dunque $y_t(t) = y(t) - y_r(t)$.

Risposta a Regime e in Transitorio

- Ad esempio consideriamo la risposta a gradino. In questo caso si ha nel dominio di Laplace

$$Y(s) = C\Phi(s)x_0 + W(s)\frac{1}{s}$$

- Per quanto riguarda la risposta in evoluzione libera, cioè

$$y_l(t) = L^{-1}\left(C\Phi(s)x_0\right)$$

se il sistema è asintoticamente stabile, essa tende a zero quando t→∞ (ingegneristicamente dopo 4-5 volte la più grande costante di tempo del sistema).

Risposta a Regime e in Transitorio

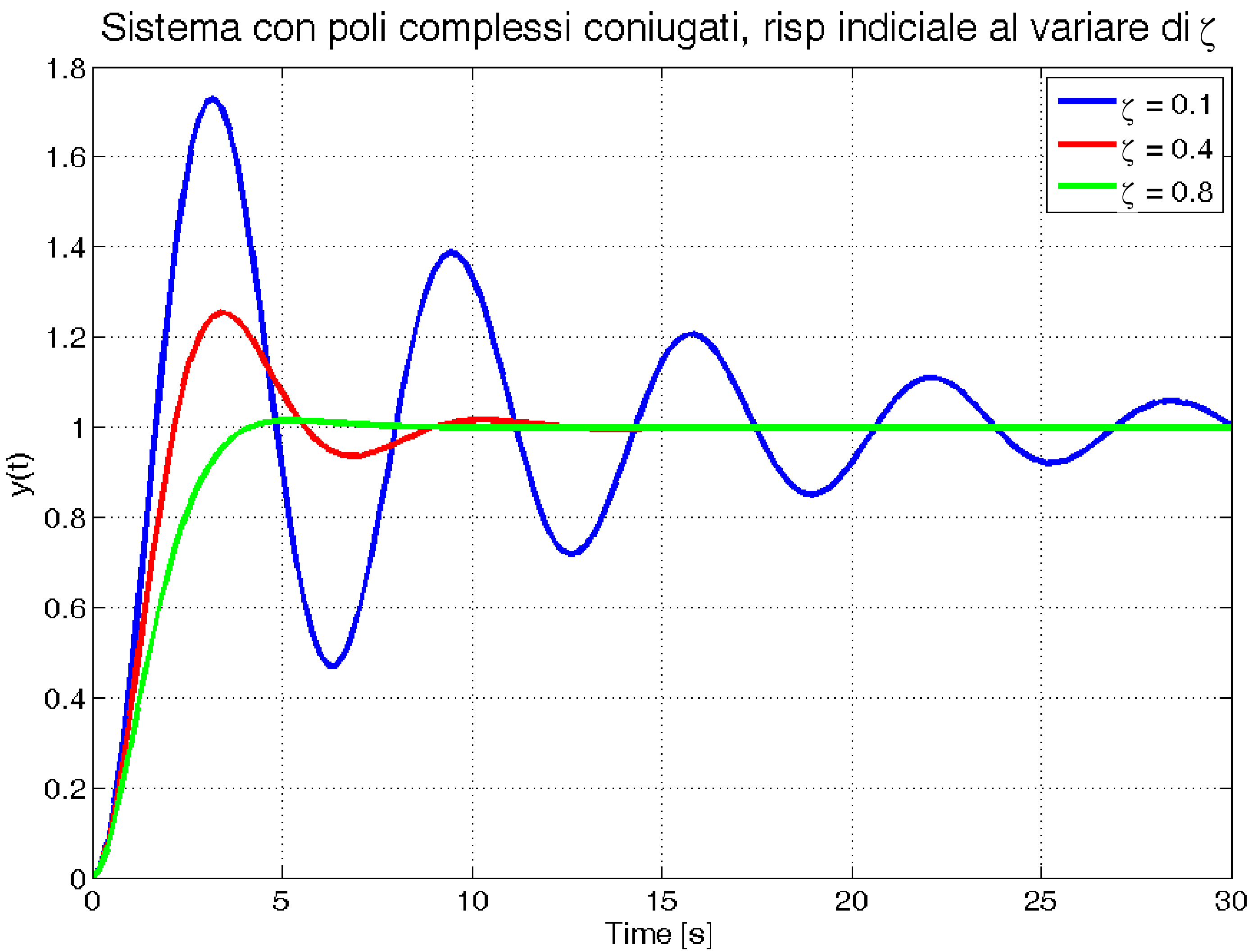
- Consideriamo ora la risposta forzata, cioè

$$y_f(t) = L^{-1}\left(W(s)\frac{1}{s}\right)$$

- Quando si effettua l'antitrasformata c'è una parte di essa che dipende dai poli del sistema e che quindi tende a zero quando $t \to \infty$; la restante parte, che dipende dall'ingresso, permane e costituisce proprio la risposta a regime.

- Nel caso del gradino si ha $y_r(t) = W(0)$.

Risposta a Regime e in Transitorio



Risposta a Regime ad Ingresso Sinusoidale

- Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante avente per fdt $W(s)$ e soggetto ad un ingresso sinusoidale.

$$u(t) = U\sin(\omega_0 t + \varphi) \longrightarrow \boxed{W(s)} \longrightarrow y(t)$$

- $W(s)$ **asintoticamente stabile**.

Risposta a Regime ad Ingresso Sinusoidale

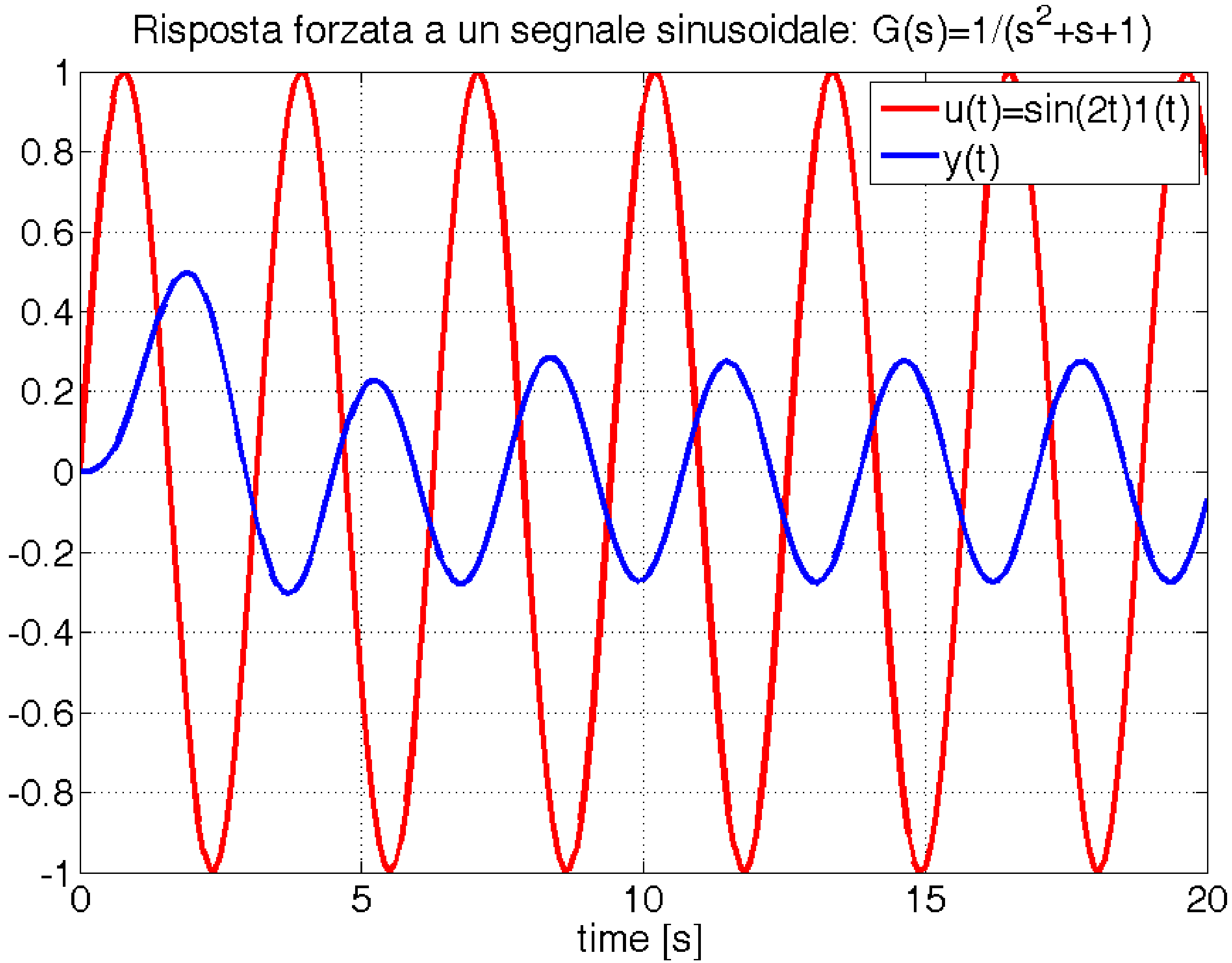
- Si dimostra, in questo caso, il seguente fondamentale risultato per quanto riguarda la **risposta a regime**.

$$y_r(t) = U\,|W(s)|_{s=j\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \angle W(s)\Big|_{s=j\omega_0}\right)$$

- Nel prossimo esempio consideriamo la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \sin(2t)\,1(t)$ del sistema avente come fdt

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Risposta a Regime ad Ingresso Sinusoidale



Azione Filtrante

- Un ingresso sinusoidale avente pulsazione ω viene amplificato o meno a regime a seconda del valore di $|W(j\omega)|$.

- Dunque, dato un sistema lineare, si può presentare la situazione in cui due ingressi sinusoidali aventi pulsazione ω_1 e ω_2 possono essere l'uno amplificato e l'altro ridotto a regime. Inoltre essi sono sfasati in modo diverso.

- Vediamo qualche esempio.

Azione Filtrante

- Dato un sistema avente fdt $W(s)$, supponiamo che in ingresso a questo sistema vi sia un segnale periodico.

- Un segnale periodico, sotto opportune ipotesi, si può vedere come la somma di infiniti segnali sinusoidali (sviluppo in serie di Fourier).

- Ovviamente il sistema amplifica o lascia passare inalterati alcuni termini della somma e riduce gli altri. Inoltre ciascun termine risulta sfasato in modo diverso.

- In altri termini il sistema introduce distorsioni di fase e di ampiezza.

Funzione di Risposta Armonica

- Da questa discussione si capisce che le proprietà "filtranti" di un sistema dinamico dipendono dal modulo e dalla fase della funzione complessa $W(j\omega)$.

- Tale funzione si chiama ***Funzione di Risposta Armonica*** del sistema.

- È di fondamentale importanza, dunque, saper tracciare rapidamente l'andamento del modulo e della fase di $W(j\omega)$.