Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2016/17

Serie e Trasformata di Fourier

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Serie di Fourier

- Si consideri una funzione *f(t)*, **periodica** di periodo *T*, ossia

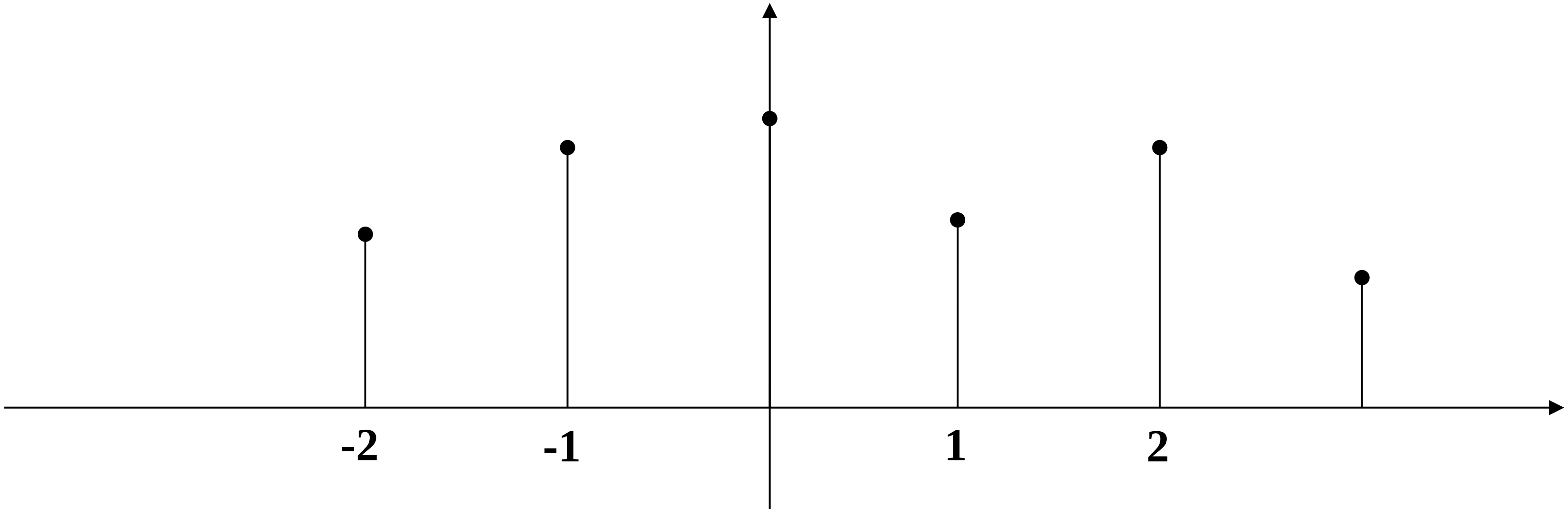
$$f(t+T) = f(t)$$

- La pulsazione del segnale *f* è $\omega_0 = 2\pi/T$
- Definiamo i coefficienti della serie di Fourier

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \quad n \in Z$$

Spettro di Ampiezza e Fase

- La successione $\{F_n\}$ si dice *spettro* di *f*.
- Si definiscono anche lo spettro di ampiezza, $\{|F_n|\}$ e lo spettro di fase, $\{arg(F_n)\}$



Forma Esponenziale

- Lo spettro di una funzione è in corrispondenza biunivoca con la funzione stessa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Questa è la serie di Fourier in forma esponenziale, associata alla funzione *f(t)*
- Nel caso in cui la funzione *f* sia reale si ha $F_{-n} = \overline{F}_n$
- In tale caso, quindi, è sufficiente considerare solo i valori per n=0,1,2, ... per definire lo spettro

Forma Trigonometrica

- Dal punto di vista intuitivo, può essere più agevole esprimere la serie di Fourier in forma trigonometrica

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{cn} \cos(n\omega_0 t) + F_{sn} \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$= F_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |F_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(F_n))$$

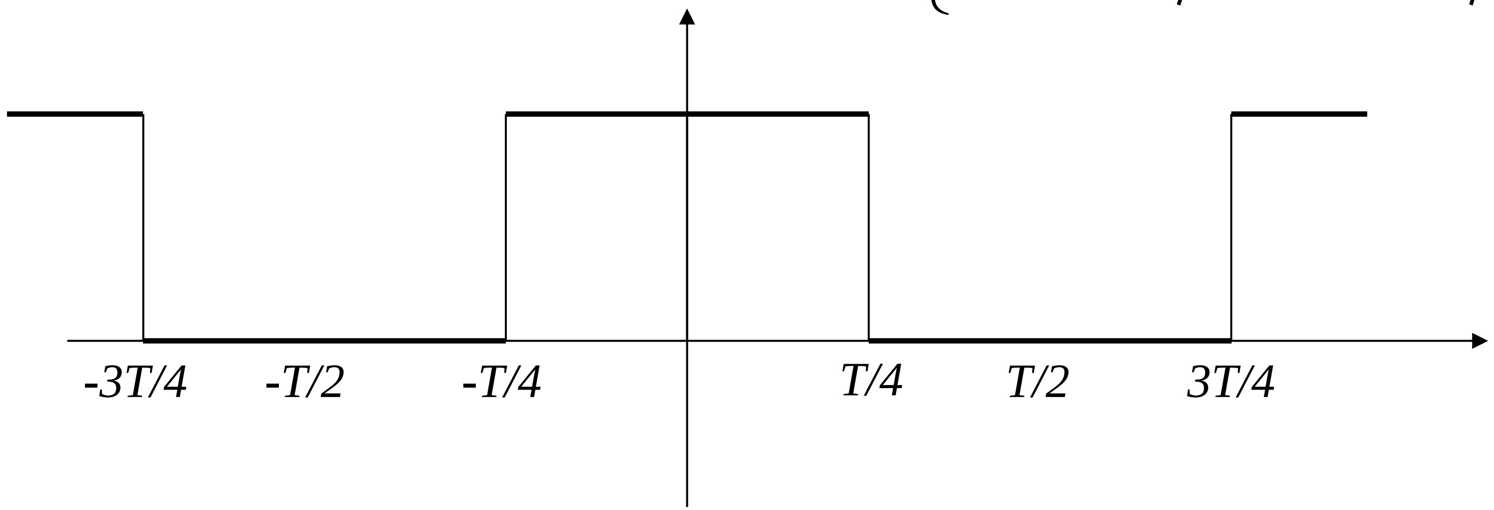
$$F_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt \qquad F_{cn} = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad F_{sn} = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

- Si noti che F_0 è il valore medio di $f(t)$

Esempio: Onda Quadra

- Si consideri la funzione

$$f(t)=\begin{cases}0, & -T/2 \le t < -T/4 \\ 1, & -T/4 \le t < T/4 \\ 0, & T/4 \le t < T/2\end{cases}$$



Esempio: Onda Quadra

- Otteniamo i seguenti coefficienti

$$F_n = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n\pi/2\right)}{n\pi/2}$$

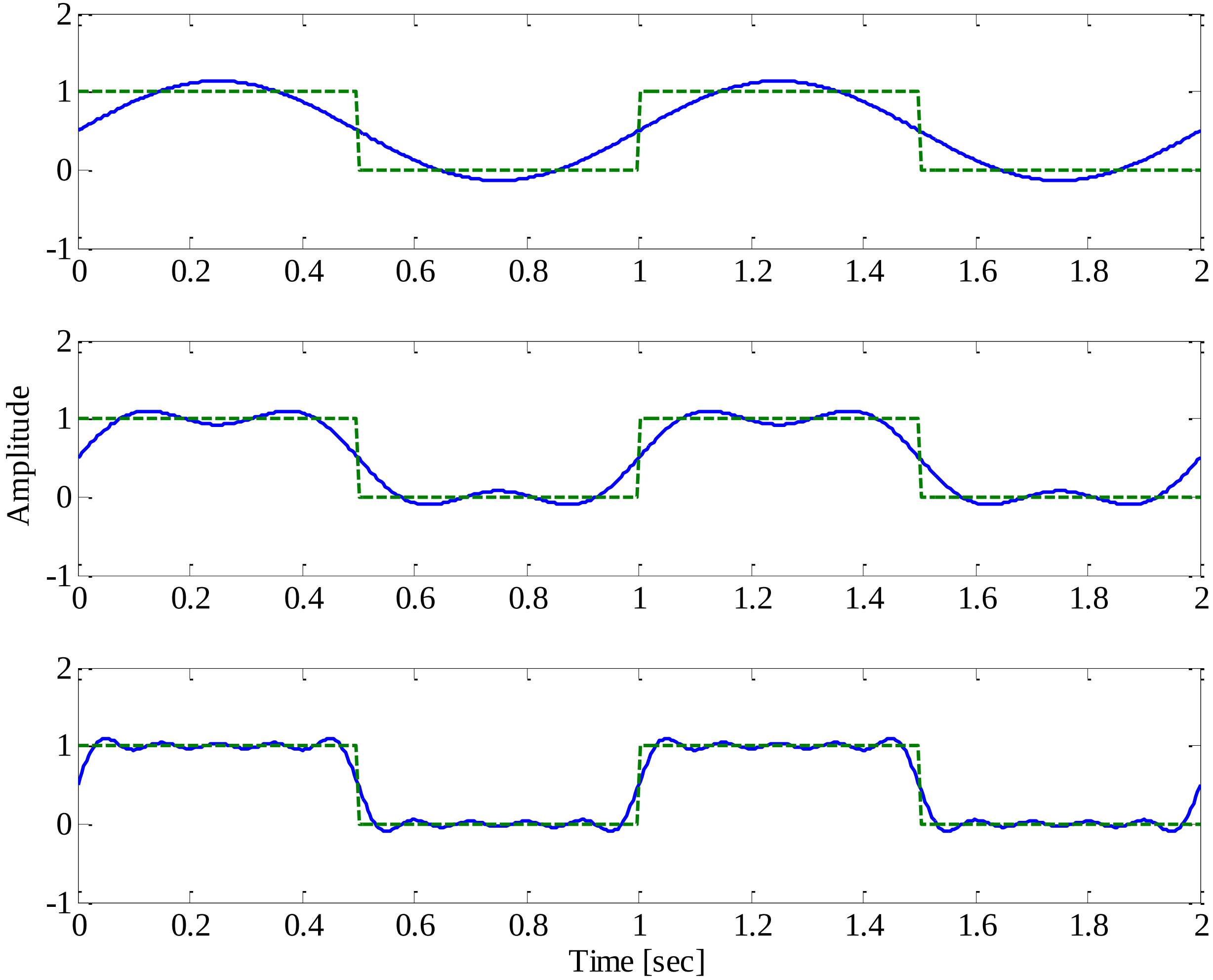
$$\left|F_n\right| = \begin{cases} 1/n\pi, & n \text{ dispari} \\ 0, & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\arg\left(F_n\right) = \arg\left(\sin\left(n\pi/2\right)\right) = \begin{cases} 0, & n = 1,5,9,\ldots \\ \pi, & n = 3,7,11,\ldots \end{cases}$$

$$F_0 = \frac{1}{2}$$

$$F_{cn} = \frac{\sin\left(n\pi/2\right)}{n\pi/2}, \quad F_{sn} = 0$$

Es: Approssimanti di Onda Quadra



1 armonica

$\omega = 2\pi$

2 armoniche

$\omega = 2\pi,\ 3\cdot 2\pi$

5 armoniche

$\omega = 2\pi,\ 3\cdot 2\pi,\ 5\cdot 2\pi,$

$7\cdot 2\pi,\ 9\cdot 2\pi$

Proprietà Principali

- **Linearità**: date due funzioni, $f(t)$ e $g(t)$, e i loro spettri, $\{F_n\}$ e $\{G_n\}$, lo spettro della funzione $\alpha f(t)+\beta g(t)$ è $\{\alpha F_n+\beta G_n\}$.
- **Funzioni pari e dispari**: Una funzione f pari, cioè tale che $f(-t)=f(t)$, è sviluppabile in serie di soli coseni, cioè risulta $F_{sn}=0$, $n=1,2,\ldots$
- **Uguaglianza di Parseval**: data una funzione complessa f con spettro $\{F_n\}$, il valore quadratico medio è

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

Trasformata di Fourier

- Sia data una funzione complessa *f(t)*, definita in *R*
- Se la funzione complessa della variabile ω

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

esiste, essa si dice ***Trasformata di Fourier.***

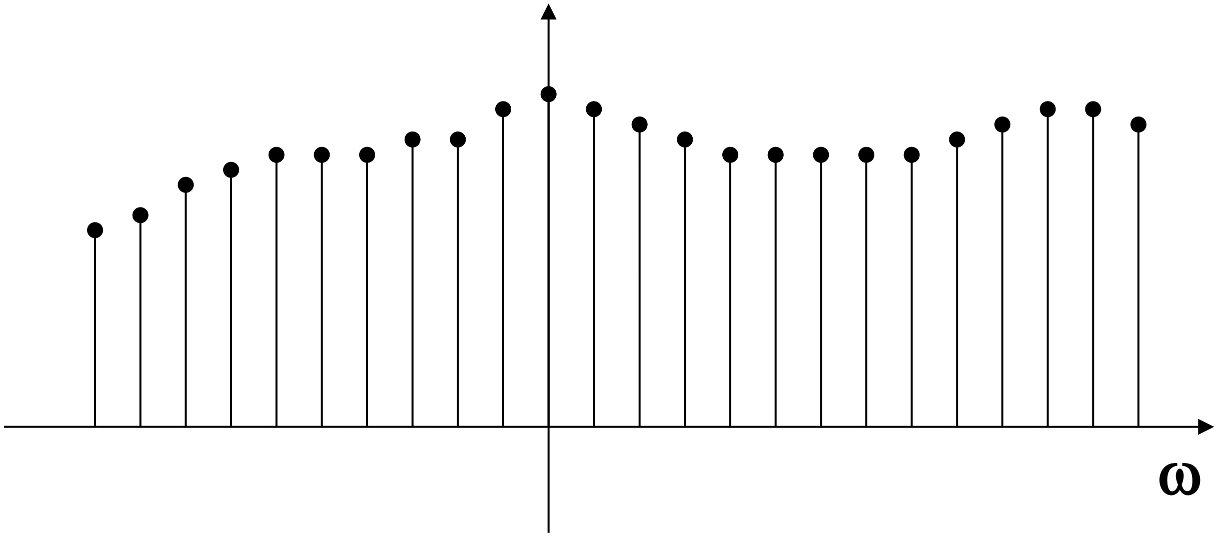
- E' possibile antitrasformare usando la relazione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Relazione tra Serie e Trasformata di Fourier

- Si noti che la trasformata di Fourier si ottiene dalla serie di Fourier quando si fa tendere $T \rightarrow \infty$

- In tal caso si ottiene uno spettro continuo



Relazione con la Trasformata di Laplace

- Dalle definizioni date, si vede che si può passare dalla trasformata di Laplace a quella di Fourier semplicemente ponendo $s=j\omega$.

$$\begin{aligned} G(s) &= L\left[g(t)\right] \\ G(\omega) &= F\left[g(t)\right] \end{aligned} \Rightarrow G(\omega) = G(s)_{s=j\omega}$$

- A rigore matematico, ciò è valido solo se $G(s)$ è analitica sull'asse immaginario, il che è sempre vero quando il sistema è asintoticamente stabile

- Da questa discussione si capisce che le proprietà "filtranti" di un sistema dinamico dipendono dal modulo e dalla fase della funzione complessa $W(j\omega)$.

- Tale funzione si chiama Funzione di Risposta Armonica del sistema.

- È di fondamentale importanza, dunque, saper tracciare rapidamente l'andamento del modulo e della fase di $W(j\omega)$.

- Un possibile modo per tracciare tali andamenti è dato dai Diagrammi di Bode.