Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2016/17

Diagrammi di Bode

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Funzione di Risposta Armonica

- Data la funzione di trasferimento $W(s)$, abbiamo visto come ricavare la funzione di risposta armonica $W(j\omega)$
- Tale funzione permette di determinare immediatamente la risposta a regime ad un segnale sinusoidale di pulsazione ω
- Vogliamo ora tracciare l'andamento del modulo e della fase di $W(j\omega)$ al variare di ω

Definizione dei Diagrammi

- Utilizzeremo due coppie di assi cartesiani, una per il diagr. del modulo e una per quello della fase
- In entrambi i diagrammi si riporta in ascissa la quantità $\log_{10}\omega$.
- Tale scelta è dovuta al fatto che i diagrammi possono essere tracciati su valori di diversi ordini di grandezza: la scala logaritmica permette di mantenere una uguale accuratezza di tracciamento a qualsiasi ordine di grandezza e di contenere il disegno in uno spazio ragionevole.

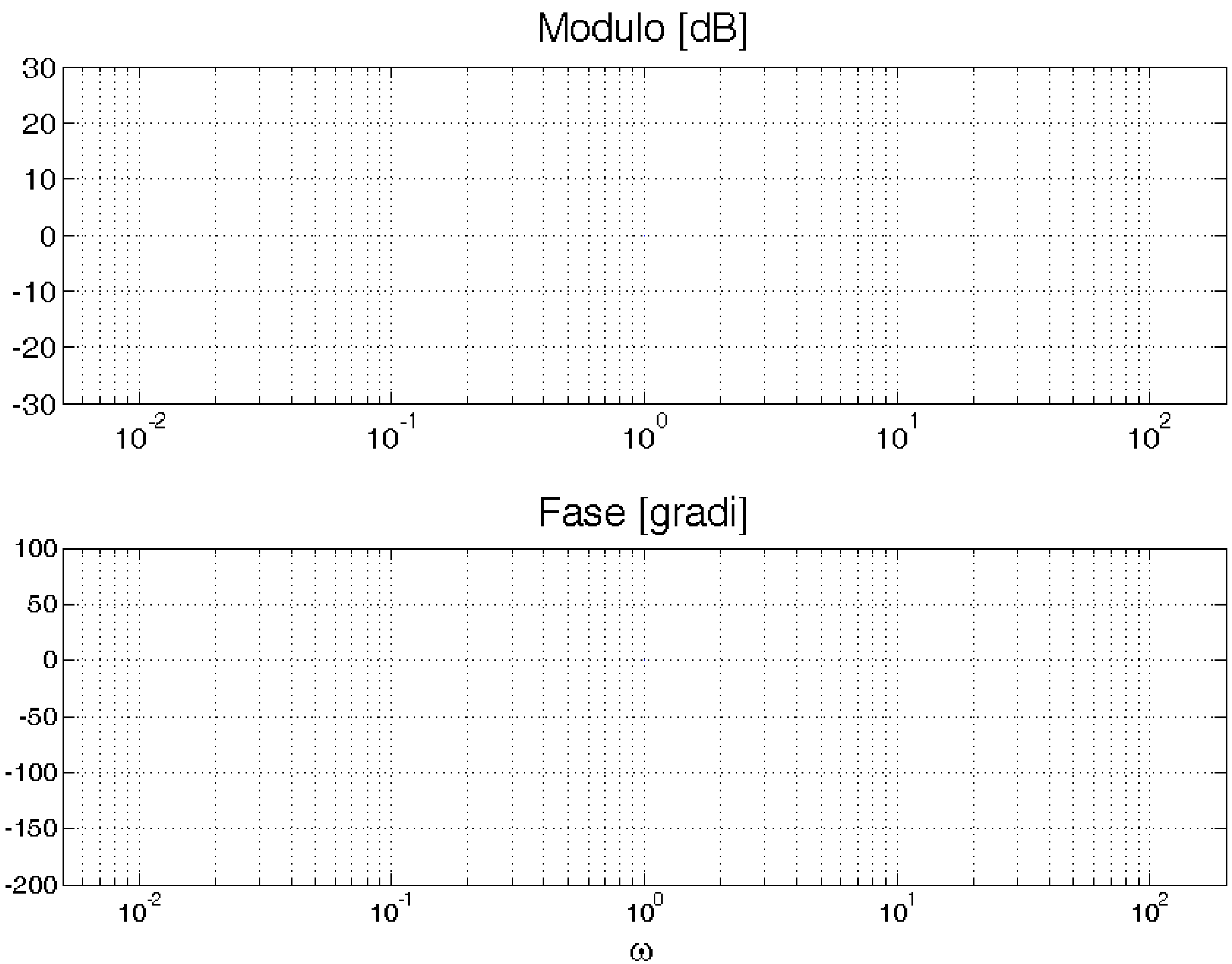
- Per quanto riguarda il valore in ordinata:
  - Il modulo viene riportato in dB (decibel), e si calcola dalla formula

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|W(j\omega)|$$

  - La fase viene riportata in gradi

- Anche in questo caso la scelta della scala è collegata al range ammissibile di valori che può essere assunto dalle grandezze da tracciare

Diagrammi Logaritmici



Forma Generale della $W(j\omega)$

- La $W(j\omega)$ può essere espressa genericamente nella seguente forma

$$W(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=K\left.\frac{s^{\nu}\prod_i(1+\sigma_i s)\prod_q\left(1+\frac{2\xi_q}{\omega_{nq}}s+\frac{s^2}{\omega_{nq}^2}\right)}{\prod_j(1+\tau_j s)\prod_p\left(1+\frac{2\zeta_p}{\omega_{np}}s+\frac{s^2}{\omega_{np}^2}\right)}\right|_{s=j\omega}$$

- Si noti che tale forma è composta da quattro fattori elementari
- Nel seguito, per comodità di notazione utilizzeremo la variabile *s*, sottointendendo che i diagrammi si riferiscono alla rispettiva trasformata di Fourier

Fattori Elementari

- Costante: K
- Zero/Polo nell'origine di molteplicità ν: s^{ν}
- Fattore binomio: $(1+\tau s)^{\pm 1}$ → zero/polo semplice in $-1/\tau$
- Fattore trinomio:

$$\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$

→ zero/polo doppio in ω_n con coeff. di smorzamento ζ

- N.B. se $|\zeta|\geq 1$ il fattore trinomio va espresso come prodotto di due fattori binomio, poiché le radici sono reali

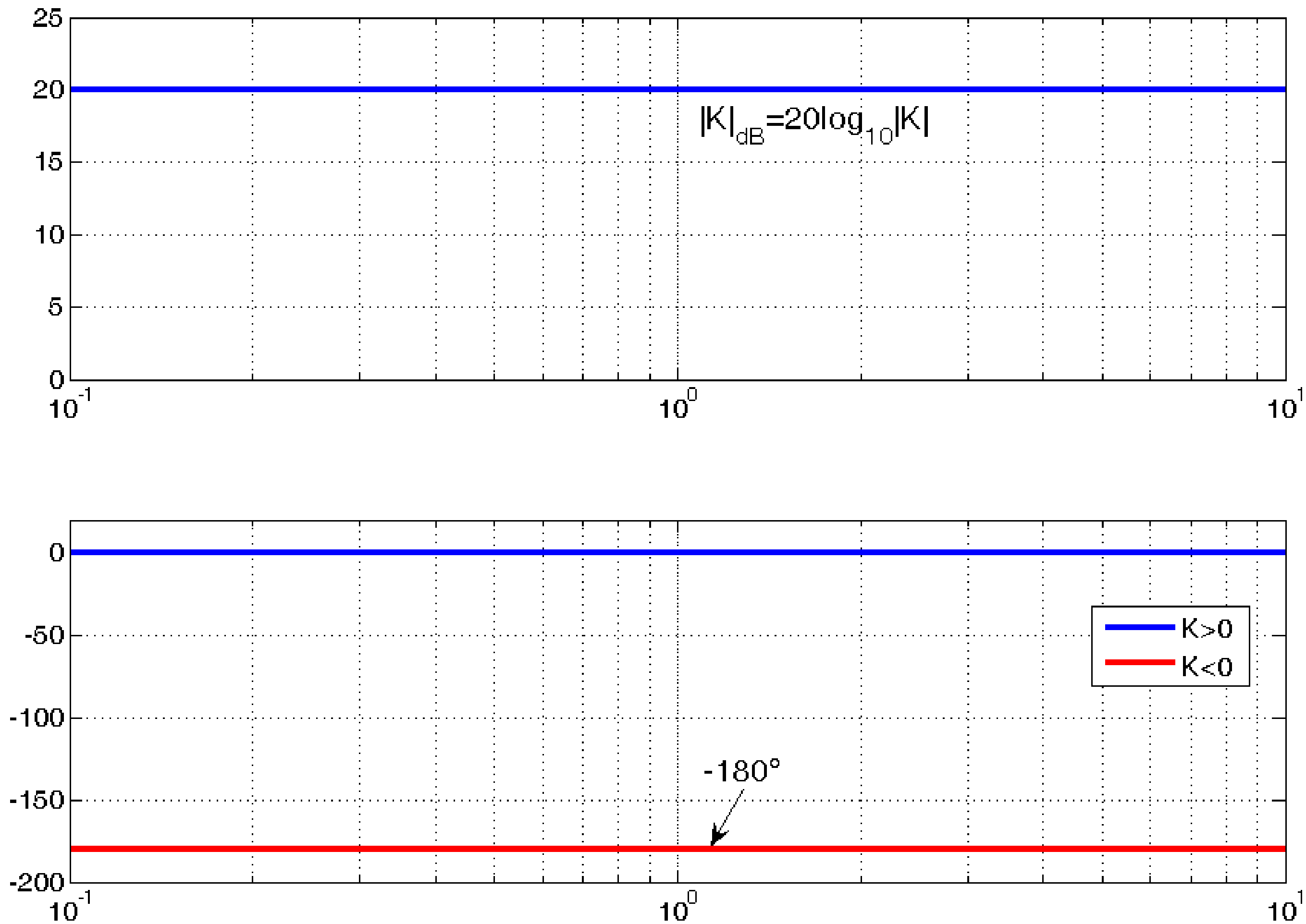
Richiami: Proprietà del Logaritmo

- Ricordiamo alcune proprietà del logaritmo:

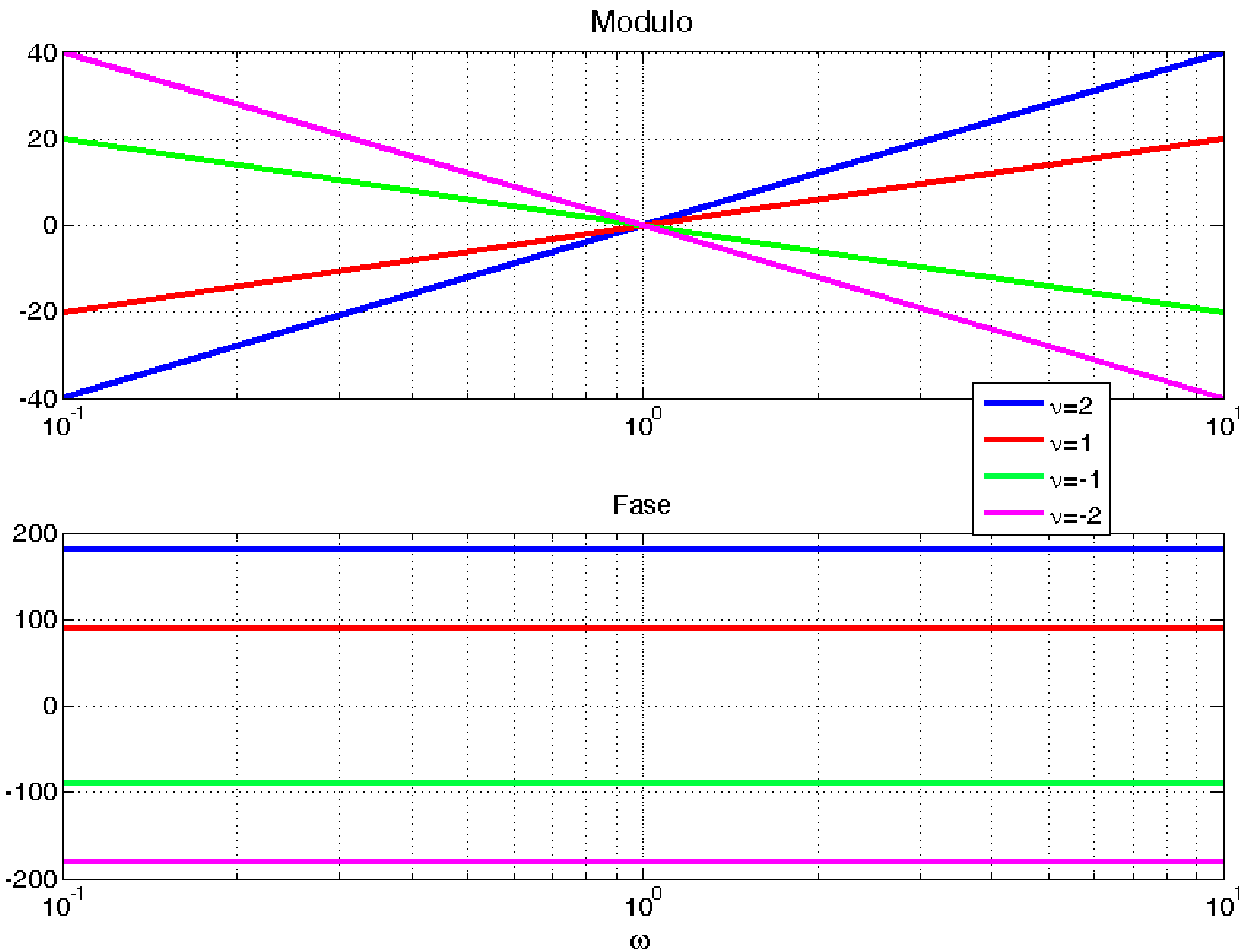
$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$
$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$
$$\log\left(x^n\right) = n\log(x)$$

- Dunque, i diagrammi di $W(j\omega)$ si possono facilmente ottenere (per somma e sottrazione) da quelli di ciascun fattore elementare

Fattore Costante: *K*



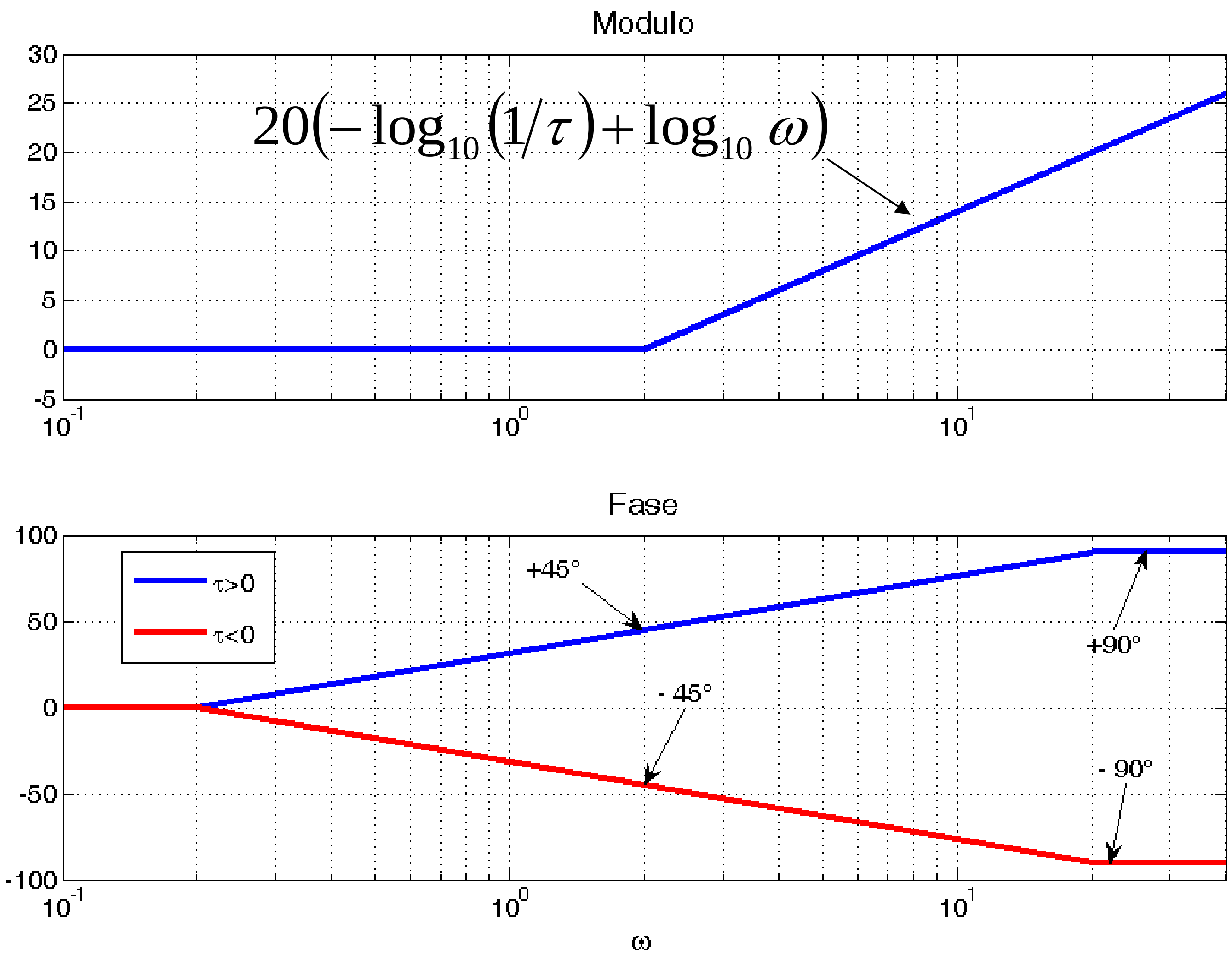
Polo/Zero nell'Origine: $(j\omega)^\nu$



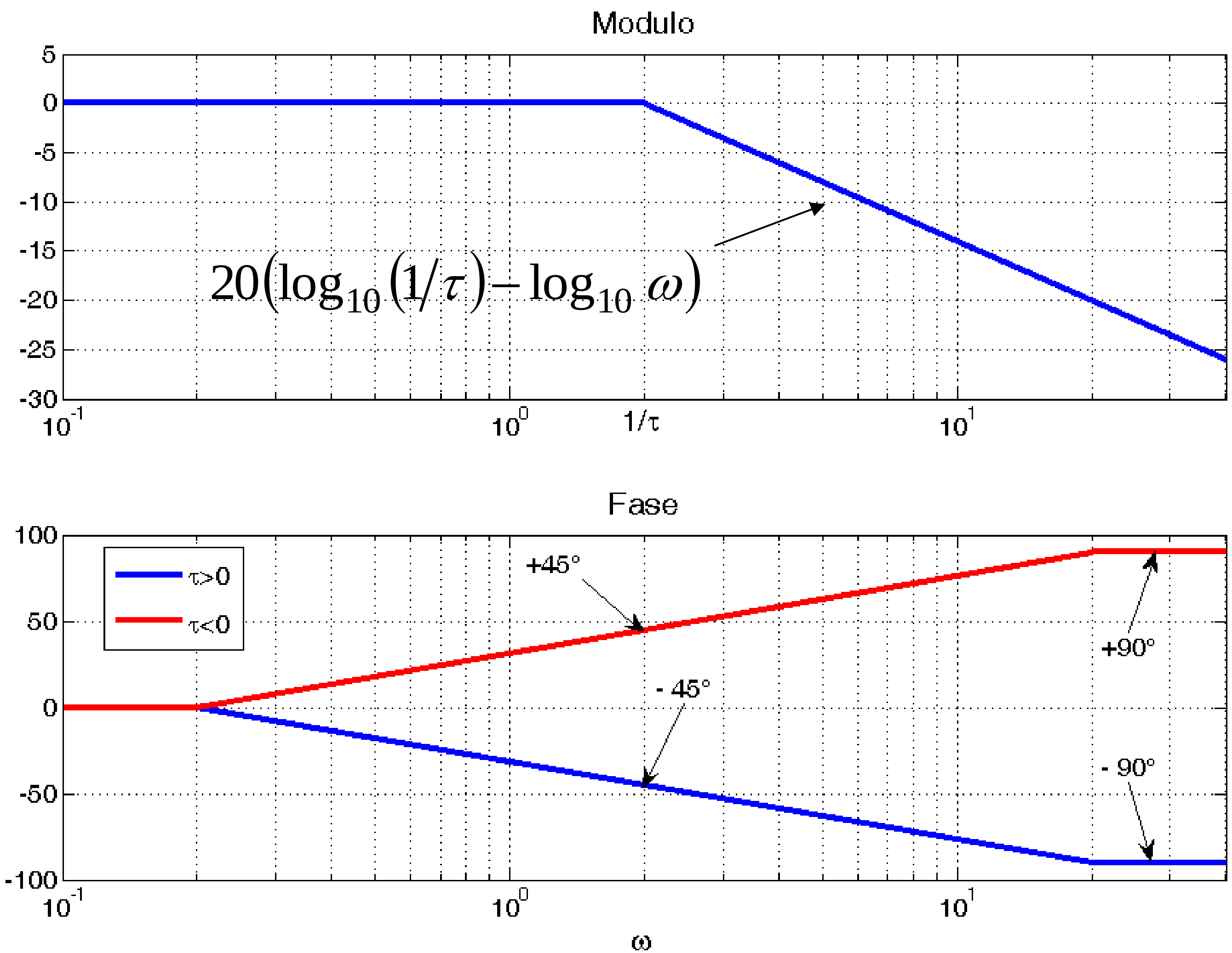
Diagrammi Asintotici

- Calcolando il modulo e la fase dei termini binomio e trinomio si ottiene un'espressione complessa
- Per tracciare il diagramma in modo rapido, si valutano gli asintoti di tale espressione, per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$
- Si procede quindi al tracciamento dei diagrammi asintotici
- Gli asintoti (orizzontali) del diagr. della fase vengono raccordati con un segmento che parte una decade prima e finisce una decade dopo del punto di rottura

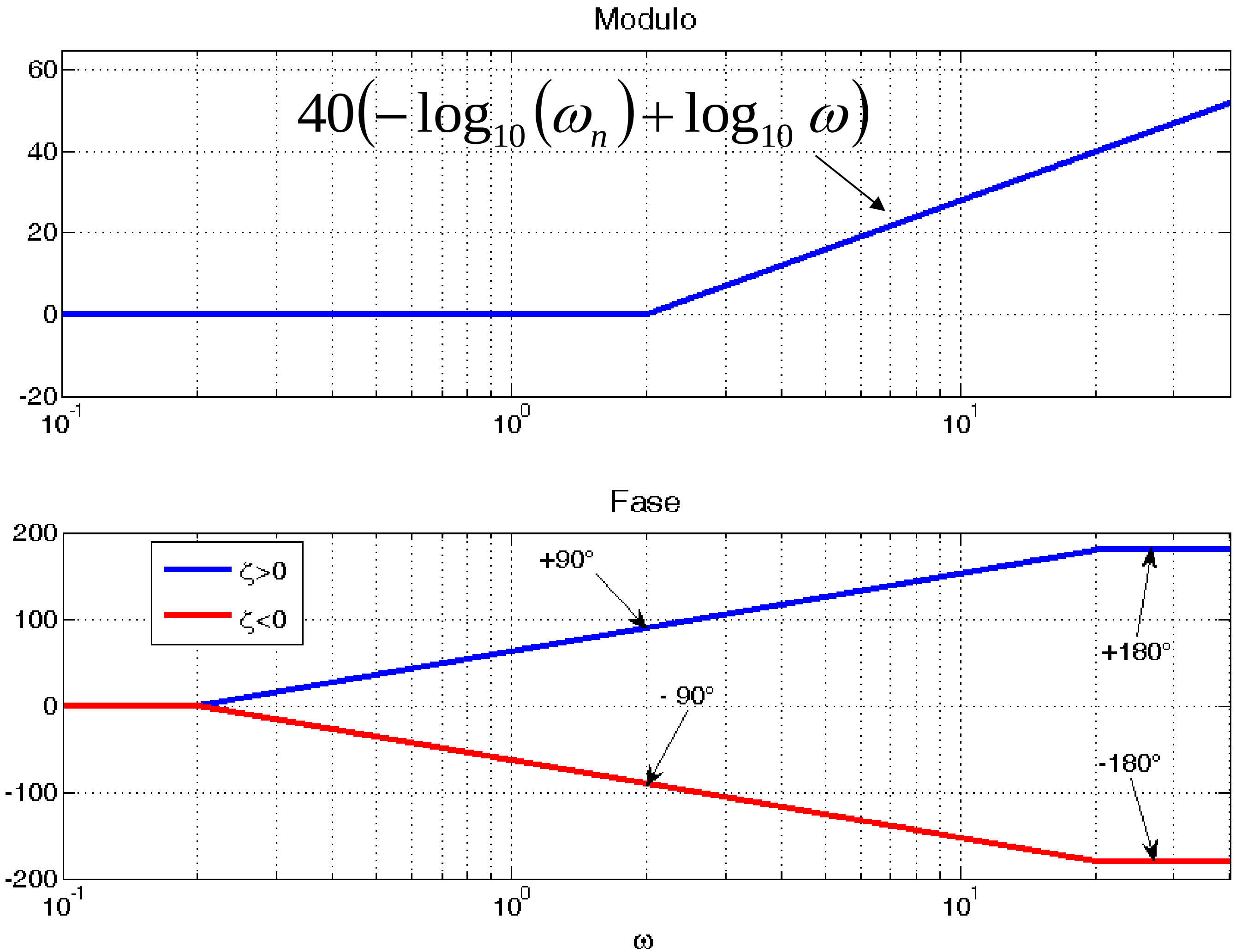
Diagr. Asintotici Zero Semplice: $(1+\tau j\omega)$



Diagr. Asintotici Polo Semplice: $(1+\tau j\omega)^{-1}$



Diagr. Asintotici Zeri Complessi: $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)$



Diagr. Asintotici Poli Complessi: $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^{-1}$

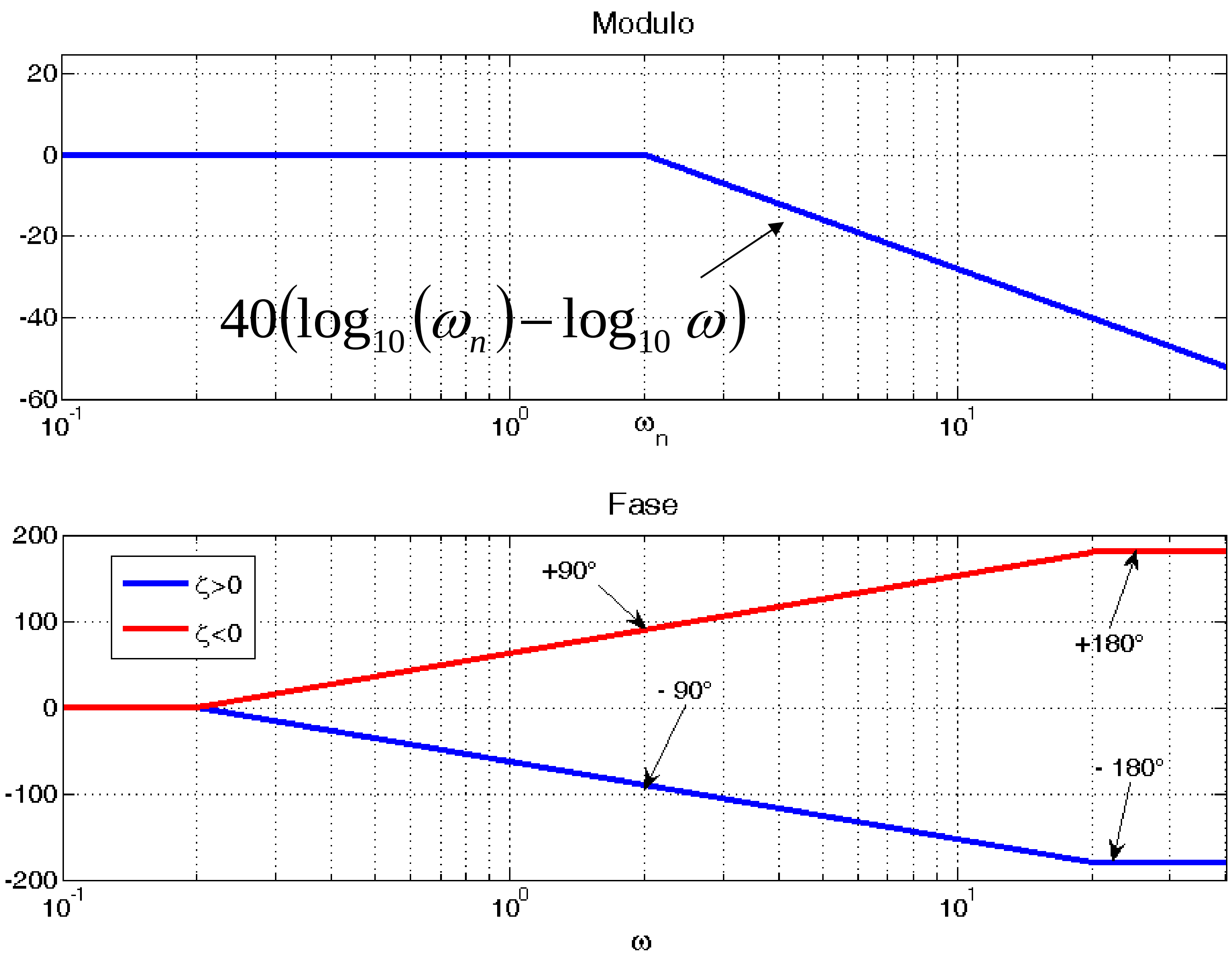


Tabelle Diagramma Moduli

- Inizio diagramma

Zero nell'origine	**+20 dB/decade**
Polo nell'origine	**-20 dB/decade**

Il prolungamento interseca l'asse verticale a $|K|_{dB}$

- Cambi di pendenza nei punti di rottura

	Indipendente dal segno della parte reale
Zero semplice	**+20 dB/decade**
Polo semplice	**-20 dB/decade**
Coppia di zeri compl.	**+40 dB/decade**
Coppia di poli compl.	**-40 dB/decade**

Tabelle Diagramma delle Fasi

- Contributi costanti per $\omega \in [0,\infty]$

K < 0	**-180° per $\omega \in [0,\infty)$**
Zero nell'origine	**+90° per $\omega \in [0,\infty)$**
Polo nell'origine	**-90° per $\omega \in [0,\infty)$**

- Cambi di pendenza una decade prima e una dopo i punti di rottura

	Parte reale negativa	**Parte reale positiva**
Zero semplice	**+45 → -45 °/decade**	**-45 → +45 °/decade**
Polo semplice	**-45 → +45 °/decade**	**+45 → -45 °/decade**
Coppia di zeri compl.	**+90 → -90 °/decade**	**-90 → +90 °/decade**
Coppia di poli compl.	**-90 → +90 °/decade**	**+90 → -90 °/decade**

- **Quando uno zero/polo è elevato ad un indice maggiore di uno, i valori corrispondenti vanno moltiplicati per tale indice.**

Esempio

- Calcoliamo il diagramma complessivo della f.d.t.

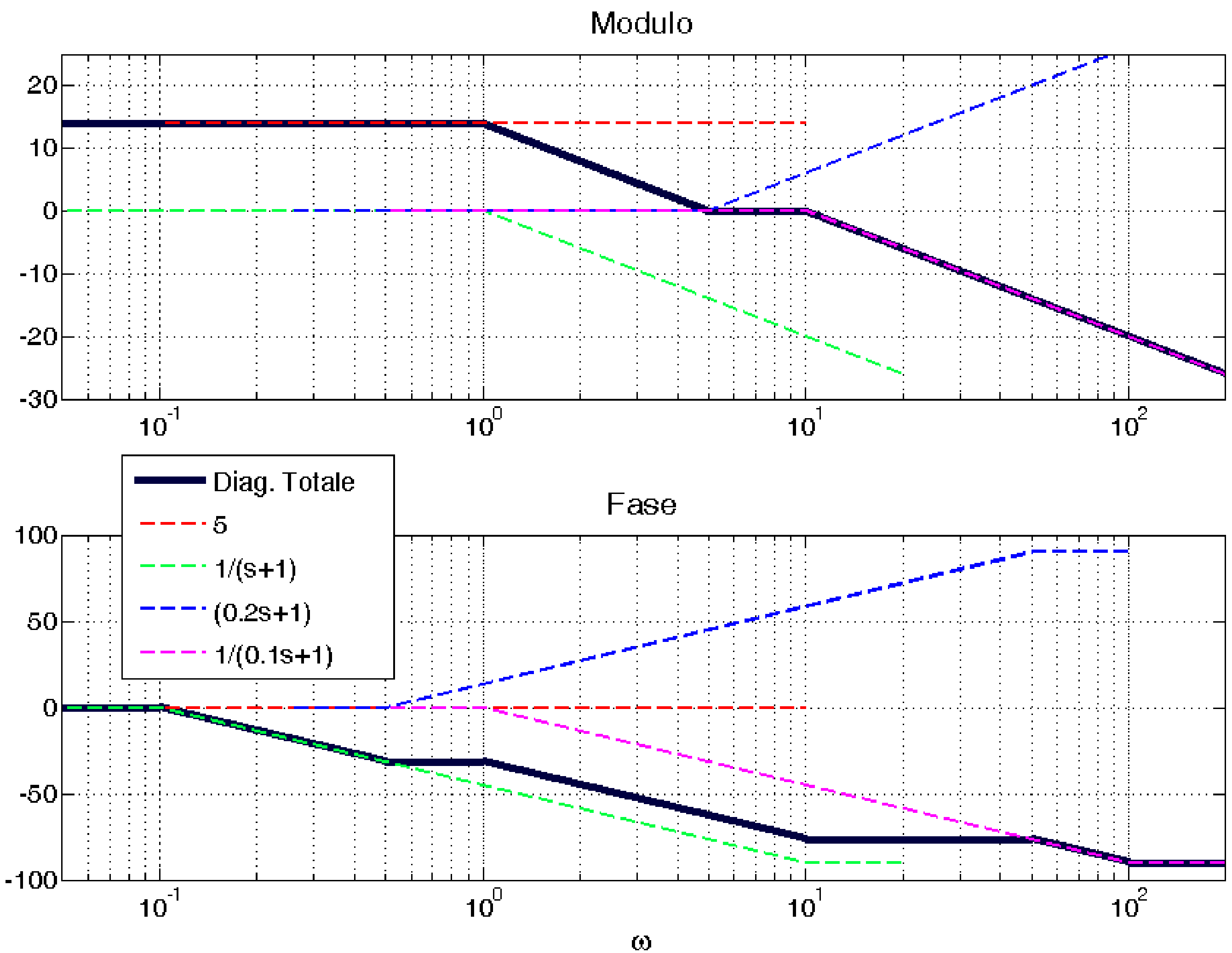
$$W(s) = \frac{10(s+5)}{(s+1)(s+10)}$$

- Poniamo la f.d.t. nella forma generale

$$W(j\omega) = 5\frac{(1+j0.2\omega)}{(1+j\omega)(1+j0.1\omega)}$$

- Quindi, sommiamo i diagr. dei fattori *5*, $(1+0.2j\omega)$, e sottraiamo quelli di $(1+j\omega)$, $(1+0.1j\omega)$

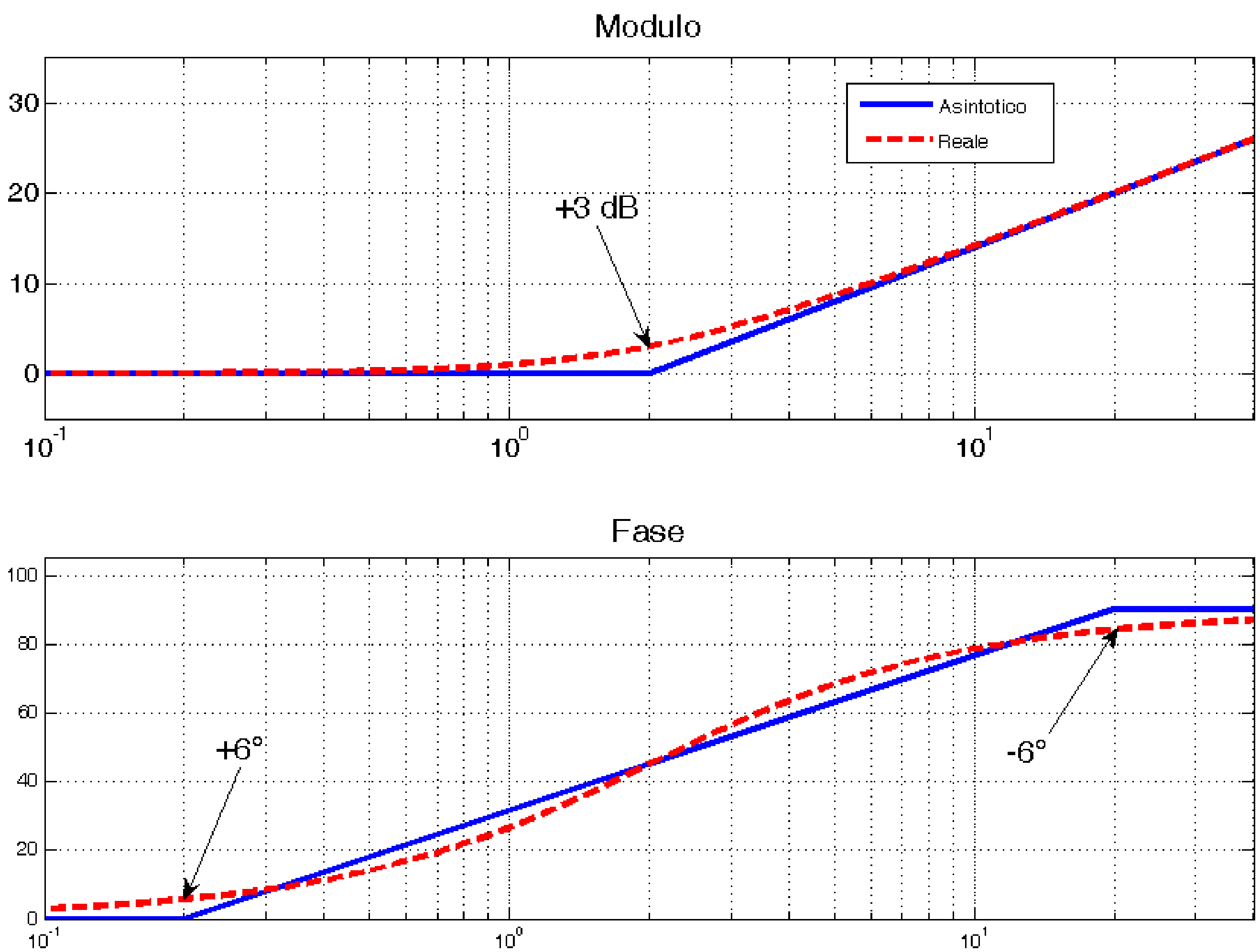
Esempio


Modulo
20
10
0
-10
-20
-30
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Diag. Totale
5
1/(s+1)
(0.2s+1)
1/(0.1s+1)
Fase
100
50
0
-50
-100
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
ω

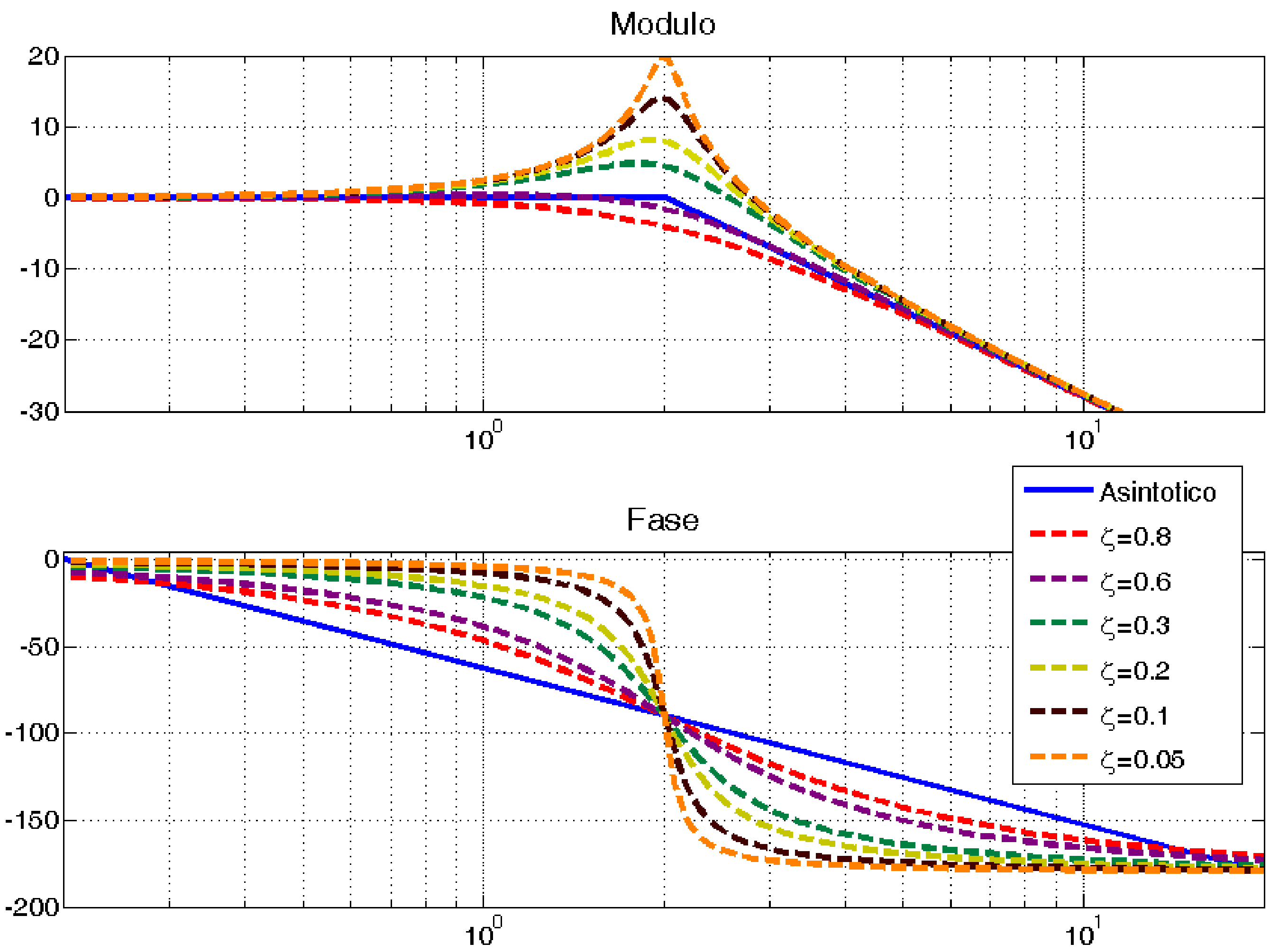
Diagrammi Reali

- Il tracciamento dei diagrammi reali può essere effettuato calcolando modulo e fase in maniera puntuale
- Ciò può essere fatto agevolmente mediante calcolatore, ad es. in Matlab si può utilizzare il comando *bode*
- Nel tracciamento manuale, si può migliorare il diagramma effettuando delle correzioni in alcuni punti opportuni

Diagrammi Reali Zero Semplice



Diagrammi Reali Poli Complessi

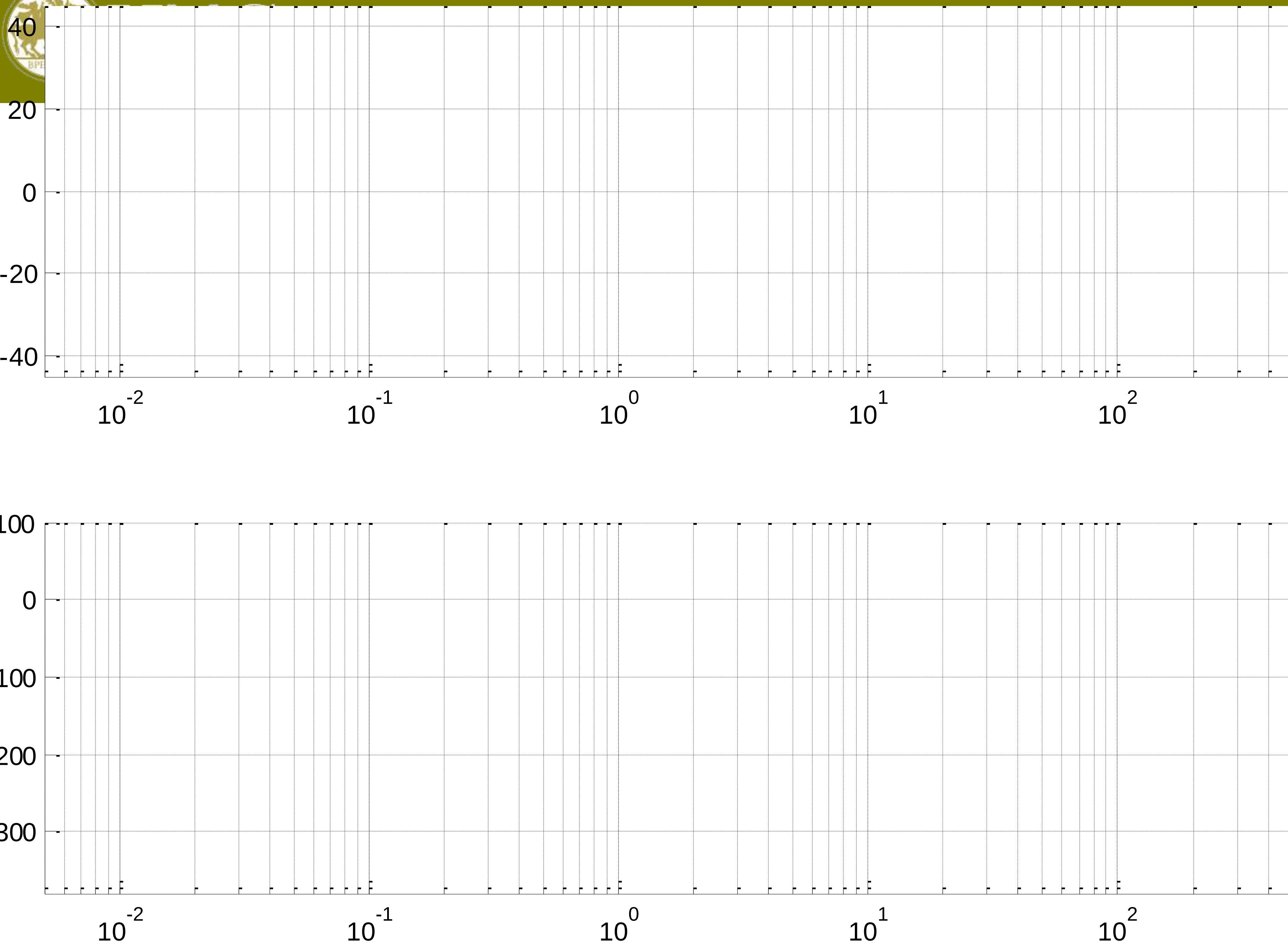


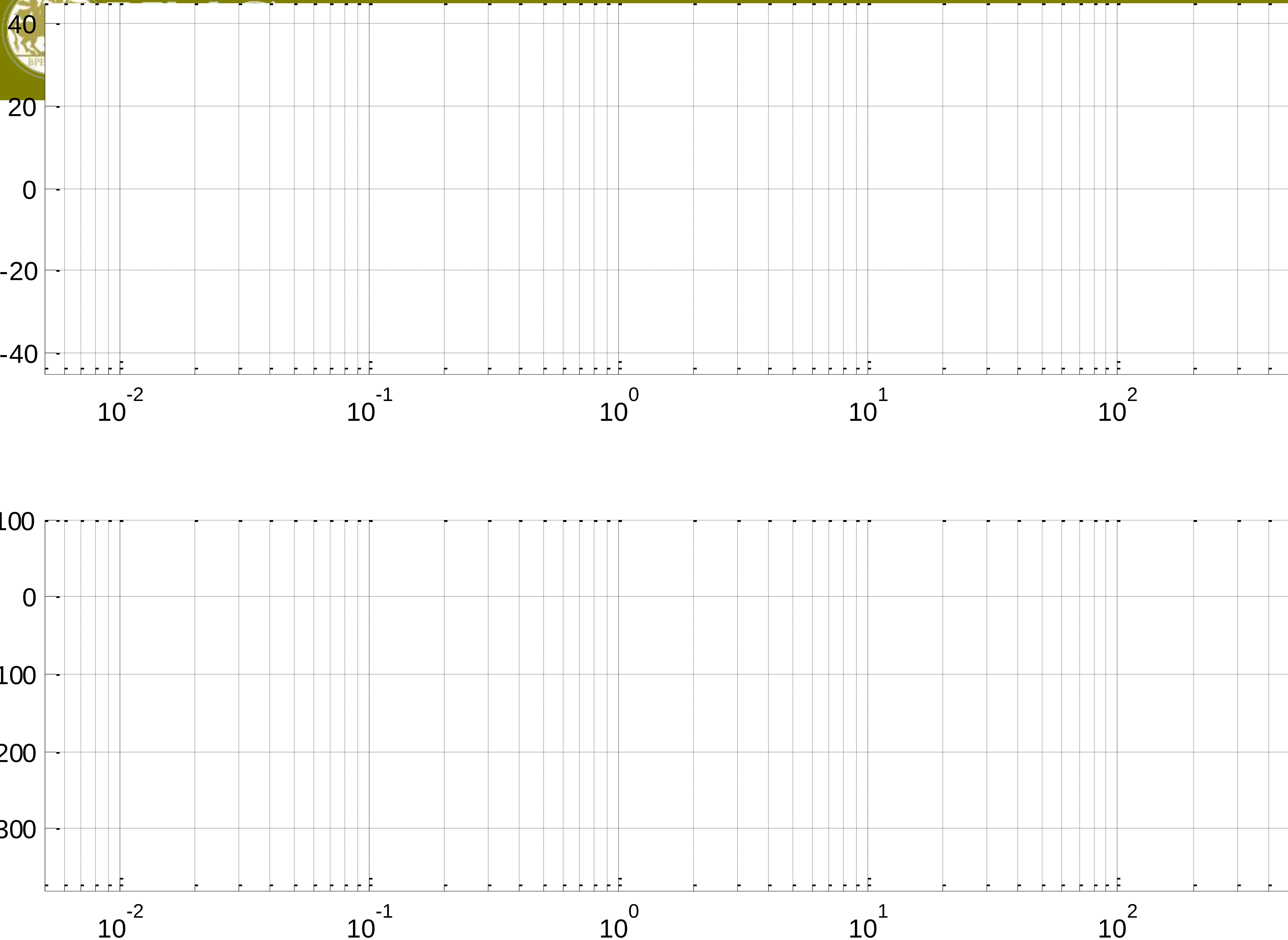
Esempi

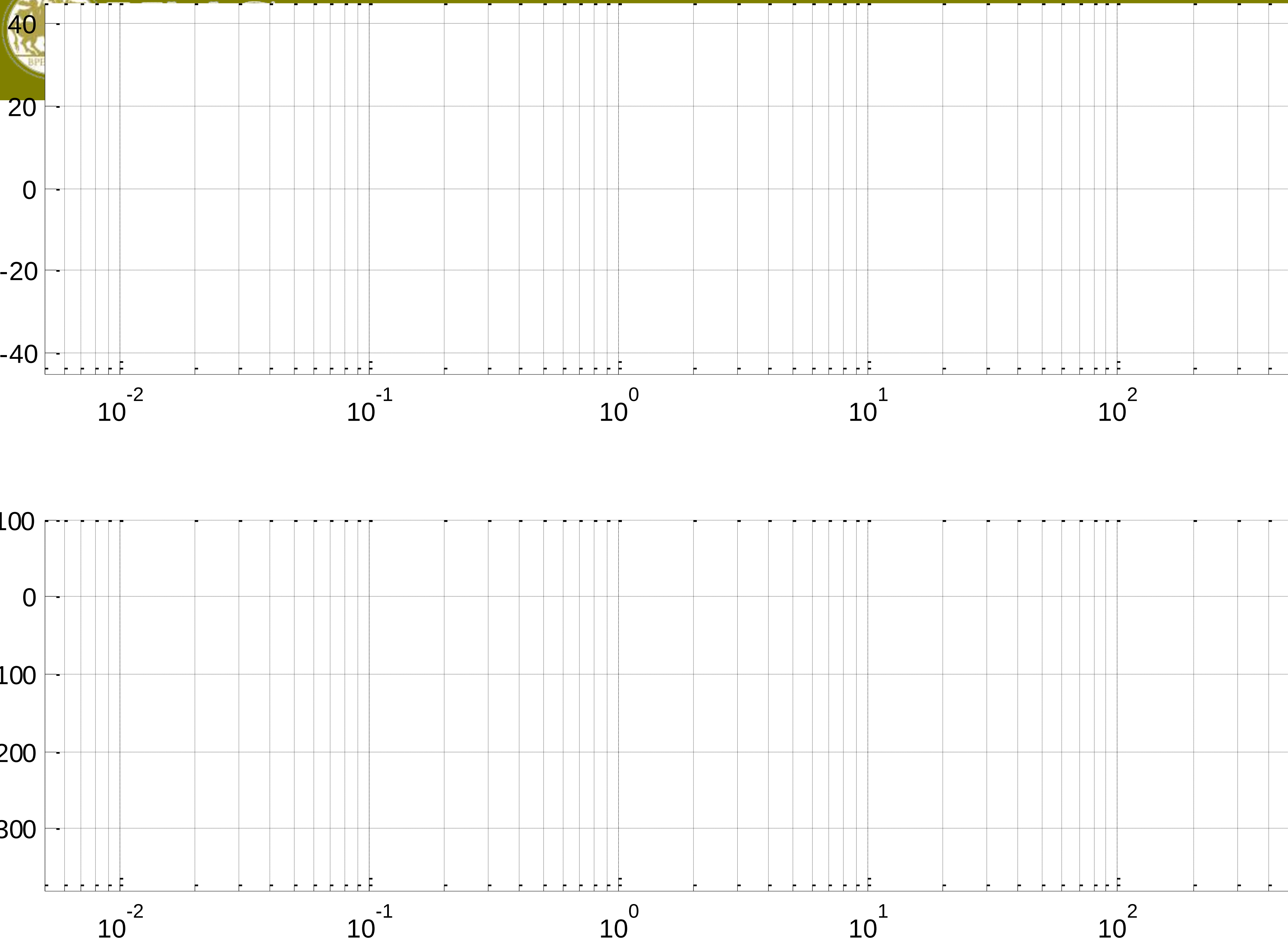
- Tracciare i diagrammi di Bode per le seguenti fdt

$$W(s) = \frac{1000(s+0.5)}{s(s^2+10s+100)}$$

$$W(s) = \frac{s(s-2)}{(s^2+5s+25)}$$

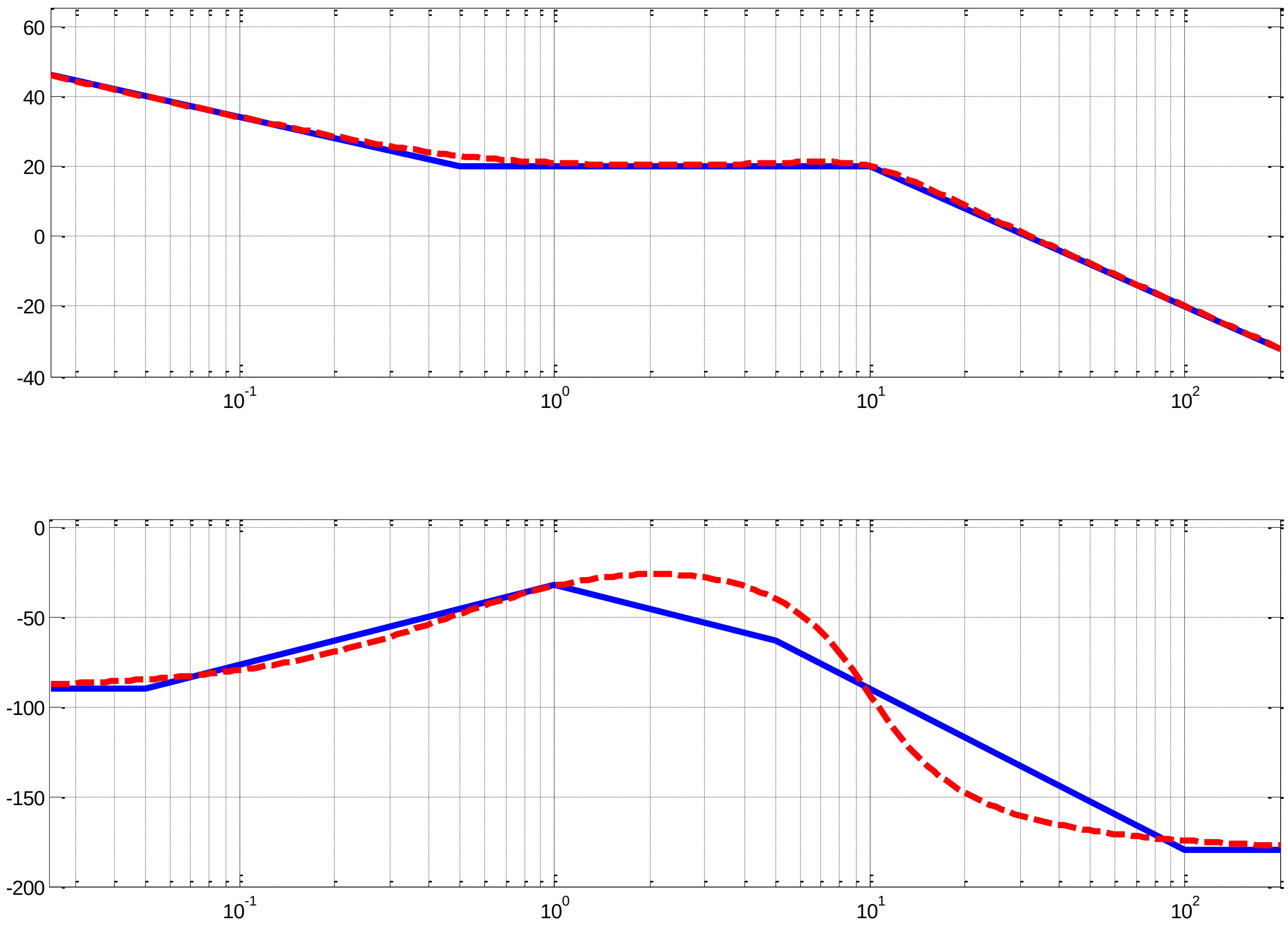

40
20
0
-20
-40
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
100
0
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2


40
20
0
-20
-40
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
100
0
100
200
300
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2


40
20
0
-20
-40
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
100
0
100
200
300
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2

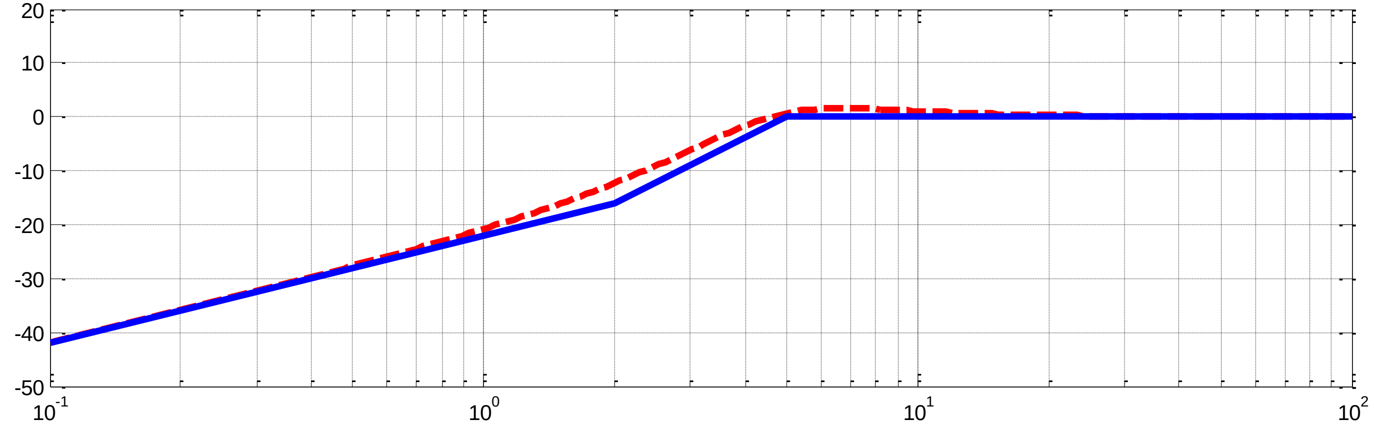
Esempi

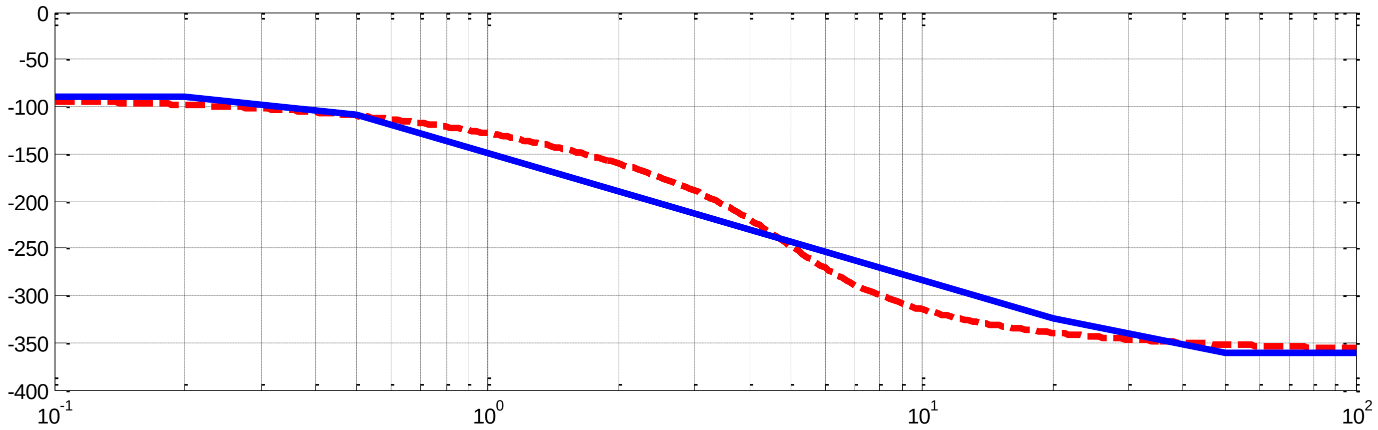
$$W(s)=\frac{1000(s+0.5)}{s(s^2+10s+100)}$$



Esempi

$$W(s)=\frac{s(s-2)}{(s^2+5s+25)}$$





Ritardo di Tempo

- La fdt del ritardo di tempo T è

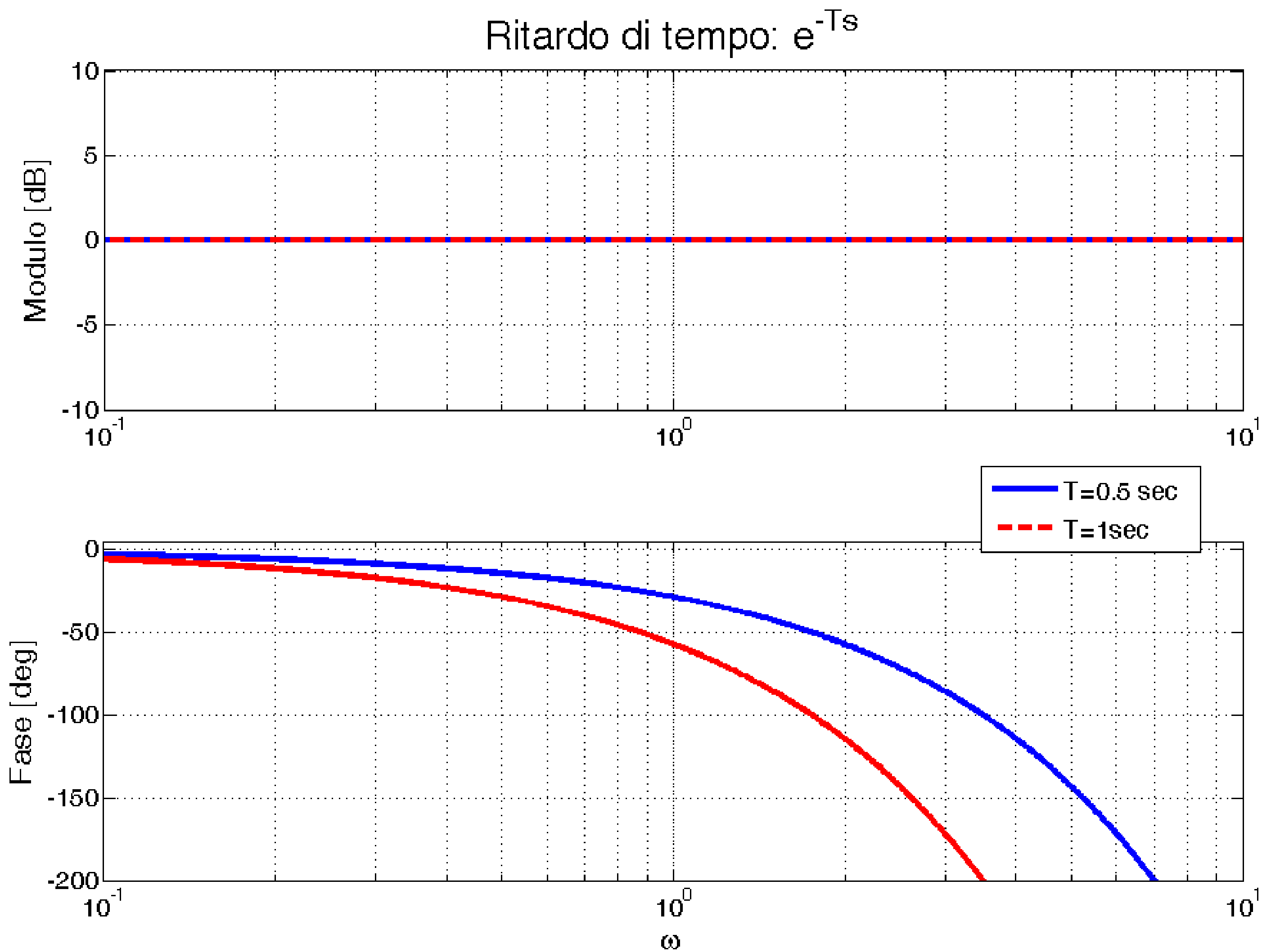
$$W(s) = e^{-Ts}$$

- Sostituendo $s=j\omega$ otteniamo

$$W(j\omega) = e^{-Tj\omega}$$

- Il modulo è unitario per ogni ω, mentre la fase è pari a $-\omega T$

Diagramma del Ritardo di Tempo



Sistema con Ritardo

- Si consideri la fdt

$$W(s) = \frac{1}{s+1} e^{-sT}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode di $W(j\omega)$ per T=0.4

Sistemi a Sfasamento Minimo

- Data una coppia di diagrammi di Bode di modulo e fase, non è possibile determinare univocamente la fdt corrispondente
- Abbiamo infatti visto che uno stesso sfasamento può essere dato da un polo a parte reale negativa e da uno zero a parte reale positiva (e viceversa)
- Alla luce di queste osservazioni, è importante definire la classe dei sistemi a sfasamento minimo

Sistemi a Sfasamento Minimo

- Un sistema si dice a sfasamento minimo se la sua fdt soddisfa le seguenti condizioni
  - Guadagno positivo
  - Poli e zeri hanno tutti parte reale negativa o nulla
  - Non sono presenti ritardi di tempo
- Sotto queste ipotesi, esiste una corrispondenza biunivoca tra il diagramma dei moduli e quello delle fasi
- Tale corrispondenza è espressa dalla formula di Bode

$$\arg\left(j\overline{\omega}\right) = \frac{\overline{\omega}}{10\pi\log e}\int_0^\infty \frac{\left|G\left(j\omega\right)\right|_{dB} - \left|G\left(j\overline{\omega}\right)\right|_{dB}}{\omega^2 - \overline{\omega}^2}\, d\omega$$